ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 35, 1984

Dariusz Rosati*, Alicja Ryszkiewicz**

# PRZYKŁADY PROGNOZOWANIA CEN ZA POMOCĄ WYBRANYCH METOD EKONOMETRYCZNYCH

Niniejszy artykuł jest ilustracją (na podstawie konkretnych przykładów liczbowych) niektórych metod prognozowania cen, przedstawionych w artykule D. Rosatiego "Wybrane metody prognozowania cen w handlu zagranicznym"[1].

W pierwszej części artykułu przedstawiony jest przykład na zastosowanie modeli szeregów czasowych: w tym modeli autoregresyjnych (AR), modeli średniej ruchomej (MA) oraz modeli mieszanych, stanowiących połączenie dwu poprzednich (ARMA). Część druga artykułu zawiera przykłady na zastosowanie modeli PROBIT i LOBIT w prognozowaniu cen.

## I. Przykład na zastosowanie modeli szeregów czasowych w prognozowaniu cen

Dane są następujące obserwacje dotyczące cen miedzi (tab. 1) $y_t$(Ł/t) z 40 dni[2]:

* Doc. dr habil. w Zakładzie Ekonomiki Handlu Zagranicznego Instytutu Ekonomiki i Polityki Handlu Zagranicznego SGPiS.

** Dr, adiunkt w Zakładzie Ekonomiki Handlu Zagranicznego Instytutu Ekonomiki i Polityki Handlu Zagranicznego SGPiS.

[1] D. R o s a t i, Wybrane metody prognozowania cen w handlu zagranicznym, "Acta Universitatis Lodziensis" 1984, Folia oeconomica 35, s. 19-39.

[2] Dane kanadyjskiej giełdy metali z okresu 15 VI-8 VIII 1980. "Rynki Zagraniczne", czerwiec, lipiec, sierpień 1980.

Tabela 1

| t | $y_t$ | t | $y_t$ | t | $y_t$ | t | $y_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 835 | 11 | 859 | 21 | 904 | 31 | 948 |
| 2 | 836 | 12 | 897 | 22 | 904 | 32 | 941 |
| 3 | 846 | 13 | 888 | 23 | 909 | 33 | 922 |
| 4 | 846 | 14 | 898 | 24 | 902 | 34 | 902 |
| 5 | 854 | 15 | 888 | 25 | 930 | 35 | 912 |
| 6 | 855 | 16 | 899 | 26 | 931 | 36 | 901 |
| 7 | 846 | 17 | 911 | 27 | 938 | 37 | 904 |
| 8 | 849 | 18 | 902 | 28 | 959 | 38 | 910 |
| 9 | 846 | 19 | 913 | 29 | 951 | 39 | 914 |
| 10 | 837 | 20 | 908 | 30 | 955 | 40 | 902 |

Zadanie polega na sporządzeniu prognozy cen miedzi na dalsze 5 dni ($t = 41, \ldots, 45$) przy wykorzystaniu następujących modeli:

1. autoregresyjnych AR:
   1.1. rzędu pierwszego AR(1),
   1.2. rzędu drugiego AR(2),
2. średniej ruchomej MA:
   2.1. rzędu pierwszego MA(1),
   2.2. rzędu drugiego MA(2),
3. mieszanych ARMA:
   3.1. ARMA (1, 1),
   3.2. ARMA (1, 2).

## 1. Prognoza cen miedzi na podstawie modeli autoregresyjnych AR

Sformułowane powyżej zagadnienie prognozowania cen miedzi na podstawie modeli autoregresyjnych dwu różnych rzędów ma charakter czysto dydaktyczny i ilustracyjny. Dany szereg czasowy można aproksymować przy pomocy modeli autoregresyjnych różnych rzędów, jednakże tylko model jednego rzędu najlepiej odzwierciedla wahania zmiennej objaśnianej. Może to być model rzędu wyższego niż drugi. Dlatego też, dysponując danym szeregiem czasowym, naj-

pierw należy dokonać wyboru rzędu modelu autoregresyjnego, a tym samym zdecydować o ilości zmiennych objaśniających, którymi są opóźnione wartości zmiennej objaśnianej.

Niezależnie od przyjętych poleceń, najpierw sprawdzamy więc, którego rzędu model autoregresyjny najbardziej pasuje do danych obserwacji cen miedzi i po dokonaniu wyboru rzędu modelu, wykorzystamy go do prognozowania. Następnie, zgodnie z przyjętymi poleceniami, dokonamy prognozy na podstawie modeli AR(1) oraz AR(2) i porównamy otrzymane wyniki.

### 1.1. Wybór rzędu modelu autoregresyjnego

Wyboru rzędu modelu autoregresyjnego dokonujemy, badając zachowanie się wyestymowanych na podstawie danej próby funkcji autokorelacji i funkcji autokorelacji cząstkowej (partial autocorrelation function) w porównaniu do odpowiednich funkcji teoretycznych.

Generalnie można powiedzieć, że identyfikacja rzędu modelu autoregresyjnego na podstawie badania funkcji autokorelacji opiera się na twierdzeniu, że współczynnik autokorelacji teoretycznej $\varrho_k$ modelu rzędu p jest równy zero powyżej rzędu p, co można zapisać następująco:

$$(1) \qquad \varrho_k \neq 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$
$$\varrho_k = 0 \quad \text{dla} \quad k > p.$$

Ze względu na fakt, że w praktyce nie dysponujemy wartościami teoretycznymi współczynników autokorelacji $\varrho_k$, badamy zachowanie się współczynników autokorelacji $r_k$ wyestymowanych na podstawie danej próby. W tym celu obliczmy więc współczynniki autokorelacji $r_k$ na podstawie danych obserwacji cen miedzi. Przy danej liczebności próby n = 40 wystarczające jest wyszacowanie n/4 pierwszych współczynników autokorelacji[3] $r_k$:

---

[3] Zob. G. E. P. Box, G. M. Jenkins, "Time Series Analysis. Forecasting and Control" Revised Edition, San Francisco 1976, s. 33. Ww. autorzy stwierdzają, że liczebność próby powinna wynosić co najmniej 50 obserwacji. Ponieważ jest to granica umowna, można założyć, że nie popełnimy zbyt dużego błędu biorąc pod uwagę w naszym przykładzie 40 obserwacji.

(2) $$r_k = \frac{C_k}{\sigma_y^2} \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, K, \quad \text{gdzie } K \leq \frac{n}{4},$$

gdzie:

(3) $$C_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)}{n}$$ - wyszacowany współczynnik autokowariancji rzędu k.

(4) $$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{1}^{n} (y_t - \mu)^2}{n}$$ - wyszacowana wariancja.

Obliczona na podstawie danego szeregu średnia $\mu = \frac{\sum_{1}^{40} y_t}{40} = 896{,}3$. Wariancja $\sigma_y^2$ z podanej próby wynosi

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{1}^{40} (y_t - \mu)^2}{40} = 1248{,}81.$$

Obliczone zgodnie ze wzorem (3) współczynniki autokowariancji $C_k$ rzędu k = 1, 2, ..., 10 wynoszą:

| k | $c_k$ | k | $c_k$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1129,2202, | 6 | 581,544, |
| 2 | 1013,903, | 7 | 483,8118, |
| 3 | 902,1808, | 8 | 388,852, |
| 4 | 771,3135, | 9 | 287,4375, |
| 5 | 677,0838, | 10 | 163,9075. |

Mając podliczone współczynniki autokorelacji $C_k$ oraz wariancję $\sigma_y^2$ możemy obliczyć na podstawie wzoru (2) współczynniki autokorelacji $r_k$. Ich wartości są następujące:

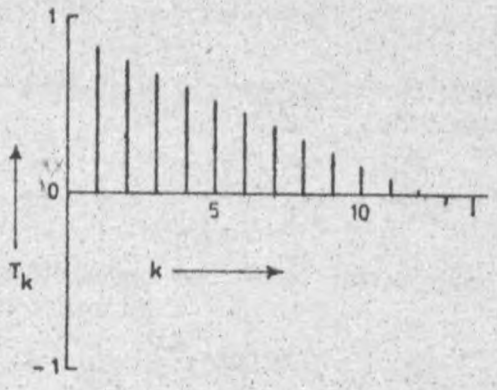
| k | $r_k$ | k | $r_k$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,9042, | 6 | 0,4657, |
| 2 | 0,8119, | 7 | 0,3874, |
| 3 | 0,7224, | 8 | 0,3114, |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 0,6176, | 9 | 0,2302, |
| 5 | 0,5422, | 10 | 0,1313. |

Z obliczeń wynika, iż wartość współczynników maleje w miarę wzrostu rzędu autokorelacji. Obliczmy jeszcze kilka następnych współczynników $r_k$ celem dowiedzenia się, przy jakim rzędzie autokorelacji, wartość tych współczynników przekroczy zero. Dla k = = 11, ..., 14 współczynniki $r_k$ wynoszą:

$$r_{11} = 0{,}0689, \qquad r_{13} = -0{,}0099,$$
$$r_{12} = 0{,}0310, \qquad r_{14} = -0{,}0546.$$

Wykres wyestymowanej funkcji autokorelacji przedstawia rys. 1.




Rys. 1.

Na podstawie wykresu nie możemy przesądzić o rzędzie modelu autoregresyjnego. Teoretyczna funkcja autokorelacji modelu autoregresyjnego rzędu pierwszego AR(1) z dodatnim parametrem dąży wykładniczo do zera. Z wykresu nie wynika jasno, aby zmniejszanie się współczynników autokorelacji następowało w tempie wykładniczym. Obliczmy wariancję wyestymowanych współczynników autokorelacji var $[r_k]$:

$$\text{var}[r_k] \simeq \frac{1}{n} = \frac{1}{40} \simeq 0{,}025. \tag{5}$$

Stąd standardowy błąd szacunku współczynnika autokorelacji wynosi:

$$\text{S. E.}\,[r_k] \simeq \frac{1}{\sqrt{40}} \simeq 0{,}1581. \tag{6}$$

Ponieważ wartość współczynnika autokorelacji rzędu pierwszego wynosi $r_1 = 0{,}9042$ i jest prawie 6 razy większa od standardowego błędu szacunku współczynnika, można przypuszczać, iż wartość teoretyczna współczynnika autokorelacji rzędu pierwszego $\varrho_1 \neq 0$.

Na podstawie powyższego stwierdzenia możemy wnioskować, że do badania danego szeregu można zastosować model autoregresyjny pierwszego rzędu AR(1). Nie wiemy natomiast czy model wyższego rzędu nie byłby lepiej dostosowany do danych obserwacji.

W celu identyfikacji rzędu modelu obliczymy wyestymowane wariancje dla większych opóźnień czasowych (estimated large-lag variance) zgodnie z następującą formułą zaproponowaną przez Bartletta:

$$(7) \qquad \operatorname{var}[r_k] \approx \frac{1}{n}\left[1 + 2\left(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_p^2\right)\right] \text{ dla } k > p.$$

Dla opóźnień czasowych $k > 1$ wariancja wyestymowanych współczynników autokorelacji wynosi:

$$\operatorname{var}[r_k] \approx \frac{1}{40}\left[1 + 2\,(0{,}9042)^2\right] \approx 0{,}0659.$$

Stąd standardowy błąd szacunku współczynnika autokorelacji wynosi

$$\text{S. E. } [r_k] \approx \frac{1}{\sqrt{40}}\left\{1 + 2(0{,}9042)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}2567.$$

Poniżej podane są wariancje i standardowe błędy szacunku współczynników autokorelacji dla większych opóźnień czasowych:

| $\operatorname{var}[r_k]$ | S. E. $[r_k]$ | k |
|---|---|---|
| 0,0738 | 0,2717 | $k > 2$ |
| 0,1249 | 0,3535 | $k > 3$ |
| 0,1440 | 0,3795 | $k > 4$ |
| 0,1587 | 0,3984 | $k > 5$ |
| 0,1696 | 0,4118 | $k > 6$ |
| 0,1771 | 0,4208 | $k > 7$ |
| 0,1819 | 0,4265 | $k > 8$ |
| 0,1846 | 0,4296 | $k > 9$ |
| 0,1854 | 0,4306 | $k > 10$ |

Wyestymowane wariancje współczynników autokorelacji dla większych opóźnień czasowych są małe w porównaniu z błędami standardowymi szacunku tychże współczynników, nie ma więc podstawy, aby odrzucić przypuszczenie, iż jest to model autoregresyjny rzędu pierwszego.

Ostatecznym kryterium określenia rzędu modelu może być ocena sposobu zachowania się funkcji autokorelacji cząstkowej $\varphi_{kk}$. Mianowicie, dla procesu autoregresyjnego rzędu p funkcja autokorelacji cząstkowej $\varphi_{kk}$ przyjmuje wartości różne od zera dla $k \leq p$ i wartość zero dla $k > p$, czyli:

$$\varphi_{kk} \neq 0 \quad \text{dla} \quad k \leq p, \tag{8}$$

$$\varphi_{kk} = 0 \quad \text{dla} \quad k > 0.$$

Wartości wyestymowanej na podstawie danego szeregu czasowego funkcji autokorelacji cząstkowej otrzymujemy rozwiązując układ równań Yule'a-Walkera po uprzednim zastąpieniu teoretycznych wartości współczynników autokorelacji $\varrho_k$ współczynnikami wyszacowanymi $r_k$.

Układ równań Yule'a-Walkera wygląda następująco[4]:

$$\begin{bmatrix} 1 & \varrho_1 & \varrho_2 & \dots & \varrho_{k-1} \\ \varrho_1 & 1 & \varrho_1 & \dots & \varrho_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \varrho_{k-1} & \varrho_{k-2} & \varrho_{k-3} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{k1} \\ \varphi_{k2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varrho_k \end{bmatrix}.$$

Zastępując teoretyczne wartości współczynników autokorelacji $\varrho_k$ wartościami współczynników wyszacowanych $r_k$, rozwiążmy powyższy układ równań dla $k = 1, 2, 3$. Otrzymujemy następujące wartości wyszacowanej autokorelacji częściowej:

$$\varphi_{11} = r_1 = 0{,}9042,$$

[4] Tamże, s. 64.

$$\varphi_{22} = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} = -0{,}0315,$$

$$\varphi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1 \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix}} = -0{,}0349.$$

Już pierwsze trzy wartości, jakie przybiera wyszacowana funkcja autokorelacji częściowej $\varphi_{kk}$ wystarczają do stwierdzenia, że do badania danego szeregu najlepiej nadaje się model autoregresyjny rzędu pierwszego AR(1) (wartości $\varphi_{kk}$ dla $k = 2, 3$ są bliskie zeru).

### 1.2. Prognoza cen miedzi na podstawie modelu autoregresyjnego rzędu pierwszego AR(1)

Postać modelu AR(1) jest następująca:

$$\hat{y}_t = \varphi_1 y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t, \tag{10}$$

gdzie:

$$\delta = \mu(1 - \varphi_1).$$

Estymator $\hat{\varphi}_1$ parametru $\varphi_1$ można otrzymać trzema różnymi sposobami:

- po pierwsze, za pomocą metody najmniejszych kwadratów,
- po drugie, metodą przybliżonej największej wiarygodności (approximate maximum likelihood estimates),
- po trzecie, wykorzystując równania Yule'a-Walkera.

W przypadku dużej próby wartość parametru otrzymana powyższymi metodami powinna być taka sama.

Szacując wartość parametru $\varphi_1$ metodą najmniejszych kwadratów, wygodnie jest przekształcić wyjściową postać modelu AR(1):

$$(11) \qquad \hat{y}_t - \mu = \varphi_1(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t.$$

Wówczas wartości estymatorów parametrów znajdujemy z następującego układu równań[5]:

$$(12) \quad \begin{aligned} D_{12} &= \hat{\varphi}_1 D_{22} + \hat{\varphi}_2 D_{23} + \ldots + \hat{\varphi}_p D_{2,\,p+1} \\ D_{13} &= \hat{\varphi}_1 D_{23} + \hat{\varphi}_2 D_{33} + \ldots + \hat{\varphi}_p D_{3,\,p+1} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ D_{1,\,p+1} &= \hat{\varphi}_1 D_{2,\,p+1} + \hat{\varphi}_2 D_{3,\,p+1} + \ldots + \hat{\varphi}_p D_{p+1,\,p+1}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$D_{ij} = D_{ji} = (y_i - \mu)(y_j - \mu) + (y_{i+1} - \mu)(y_{j+1} - \mu) + \ldots$$

$$+ (y_{n+1-j} - \mu)(y_{n+1-i} - \mu).$$

Dla modelu AR(1) układ równań (12) przybiera postać:

$$(13) \qquad D_{12} = \hat{\varphi}_1 D_{22}.$$

Stąd estymator $\hat{\varphi}_1 = \frac{D_{12}}{D_{22}} = \frac{45\,168{,}81}{46\,164{,}22} = \underline{0{,}9784.}$

Wykorzystując zasadę największej wiarygodności bierzemy za punkt wyjścia następujący układ równań[6]:

$$(14) \quad \begin{aligned} D^*_{12} &= \hat{\varphi}_1 D^*_{22} + \hat{\varphi}_2 D^*_{23} + \ldots + \hat{\varphi}_p D^*_{2,\,p+1}, \\ D^*_{13} &= \hat{\varphi}_1 D^*_{23} + \hat{\varphi}_2 D^*_{33} + \ldots + \hat{\varphi}_p D^*_{3,\,p+1}, \\ D^*_{1,\,p+1} &= \hat{\varphi}_1 D^*_{2,\,p+1} + \hat{\varphi}_2 D^*_{3,\,p+1} + \ldots + \hat{\varphi}_p \underset{p+1}{D^*_{p+1,\,p+1}}, \end{aligned}$$

gdzie:

---

[5] Tamże, s. 227.

[6] Tamże, s. 278.

$$D^*_{ij} = n\,D_{ij}/\{n - (i-1) - (j-1)\}.$$

Dla modelu AR(1) powyższy układ równań przybiera postać:

(15) $$D^*_{12} = \hat{\varphi}_1 D^*_{22},$$

czyli:

$$\frac{n\,D_{12}}{n-1} = \hat{\varphi}_1 \frac{n\,D_{22}}{n-2}.$$

Stąd estymator $\hat{\varphi}_1 = \frac{n-2}{n-1}\frac{D_{12}}{D_{22}} = \frac{38}{39}\frac{45\ 168{,}81}{46\ 164{,}22} = \underline{0{,}9533.}$

Trzeci sposób estymacji parametrów polega na rozwiązaniu następującego układu równań Yule'a-Walkera:

(16)
$$\begin{aligned} r_1 &= \hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 r_1 + \ldots + \hat{\varphi}_p r_{p-1} \\ r_2 &= \hat{\varphi}_1 r_1 + \hat{\varphi}_2 + \ldots + \hat{\varphi}_p r_{p-2} \\ &\vdots \\ r_p &= \hat{\varphi}_1 r_{p-1} + \hat{\varphi}_2 r_{p-2} + \ldots + \hat{\varphi}_p. \end{aligned}$$

Dla modelu AR(1) powyższy układ równań sprowadza się do postaci:

(17) $$r_1 = \hat{\varphi}_1 = \underline{0{,}9042.}$$

Wszystkie trzy wartości wyszacowanego parametru $\hat{\varphi}_1$ spełniają warunek stacjonarności procesu:

(18) $$1 < \hat{\varphi}_1 < 1.$$

Wartości te różnią się jednak dosyć znacznie między sobą, co, jak należy przypuszczać, spowodowane jest wzięciem pod uwagę zbyt małej próby.

Wyboru konkretnej wartości estymatora $\hat{\varphi}_1$ parametru $\hat{\varphi}_1$ dokonujemy, porównując standardowe błędy szacunku parametru.

W przypadku modelu AR(1) zmienna $t = \frac{\varphi_1 - \hat{\varphi}_1}{S_{\hat{\varphi}}}$ posiada dokładnie rozkład t-studenta dla $n - 1$ stopni swobody. Wartość

standardowego błędu $S_\varphi$ szacunku estymatora parametru liczymy według wzoru[7]:

$$(19) \qquad S_\varphi = \left[\frac{1}{n-1}\,\frac{D_{11}}{D_{22}}\left\{1 - \frac{D_{12}^2}{D_{11}\,D_{22}}\right\}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

W przypadku dużej liczebności próby można stosować wzór:

$$(20) \qquad S_\varphi = \left\{(1 - \varphi^2)/n\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Standardowy błąd szacunku estymatora $\hat{\varphi}_1$ parametru $\varphi_1$ liczony według wzoru (19) wynosi:

$$S_{\varphi_1} = 0{,}0565.$$

Poszczególne wartości t, obliczane dla trzech wartości estymatorów parametru $\varphi_1$ wynoszą:

$$t_{1,\,obl.} = \frac{0{,}9784376}{0{,}0565499} = 17{,}3022,$$

$$t_{2,\,obl.} = \frac{0{,}9533493}{0{,}0565499} = 16{,}8585,$$

$$t_{3,\,obl.} = \frac{0{,}904237}{0{,}0565499} = 15{,}9901.$$

Wartość zmiennej t-studenta przy 40 stopniach swobody i poziomie współczynnika ufności P = 0,999 (tzn. $\alpha = 0{,}001$) wynosi:

$$|t_{40;\,0{,}001}| = 3{,}551.$$

Z porównania zmiennych $t_{obl.}$ ze zmienną t-studenta wynika:

$$t_{1,\,obl.} \quad |t_{40;0{,}001}|,$$

$$t_{2,\,obl.} \quad |t_{40;0{,}001}|,$$

$$t_{3,\,obl.} \quad |t_{40;0{,}001}|.$$

Standardowe błędy szacunku estymatorów parametru $\varphi_1$ liczone według wzoru (20) wynoszą:

---

[7] Tamże, s. 254.

$$S_{1,\varphi_1} = 0{,}0327,$$

$$S_{2,\varphi_1} = 0{,}0477,$$

$$S_{3,\varphi_1} = 0{,}0675.$$

Porównanie obliczonych wartości zmiennej t' ze zmienną t-studenta przedstawia się w tym przypadku następująco:

$$t'_{1,\,obl.} = \frac{0{,}9784}{0{,}0327} = 29{,}9622 > |t_{40;0,001}| = 3{,}551,$$

$$t'_{2,\,obl.} = \frac{0{,}9533}{0{,}0477} = 19{,}9740 > |t_{40;0,001}| = 3{,}551,$$

$$t'_{3,\,obl.} = \frac{0{,}9042}{0{,}0675} = 13{,}3924 > |t_{40;0,001}| = 3{,}551.$$

Z powyższych porównań wynika, iż należy wybrać wartość estymatora $\hat{\varphi}_1$ obliczoną pierwszym sposobem, tj. przy pomocy metody najmniejszych kwadratów. Dla sprawdzenia trafności wyboru obliczmy wartości teoretyczne $\hat{y}_t$ na podstawie wszystkich trzech postaci modelu. Są one następujące:

1) $\hat{y}_t = 0{,}9784\, y_{t-1} + 19{,}3263,$

2) $\hat{y}_t = 0{,}9533\, y_{t-1} + 41{,}8130,$

3) $\hat{y}_t = 0{,}9042\, y_{t-1} + 85{,}8324.$

Wartości teoretyczne $\hat{y}_t$ liczone (z dokładnością do dwu miejsc po przecinku) na podstawie powyższych postaci modelu AR(1) przedstawia tab. 2.

Tabela 2

| t | $\hat{y}_t = 0{,}9784y_{t-1} +$ $+ 19{,}3263$ | $\hat{y}_t = 0{,}9533y_{t-1} +$ $+ 41{,}8130$ | $\hat{y}_t = 0{,}9042y_{t-1} +$ $+ 85{,}8324$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | | | |
| 2 | 836,32 | 837,86 | 840,87 |
| 3 | 837,3 | 838,81 | 841,77 |

Tabela 2 (cd.)

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 4 | 847,08 | 848,35 | 850,82 |
| 5 | 847,08 | 848,35 | 850,82 |
| 6 | 854,91 | 855,97 | 858,05 |
| 7 | 855,89 | 856,93 | 858,96 |
| 8 | 847,08 | 848,35 | 850,82 |
| 9 | 850,02 | 851,21 | 853,53 |
| 10 | 847,08 | 848,35 | 850,82 |
| 11 | 838,28 | 839,77 | 842,68 |
| 12 | 859,8 | 860,74 | 862,57 |
| 13 | 896,98 | 896,97 | 896,93 |
| 14 | 888,18 | 888,39 | 888,79 |
| 15 | 897,96 | 897,92 | 897,84 |
| 16 | 888,18 | 888,39 | 888,79 |
| 17 | 898,94 | 898,87 | 898,74 |
| 18 | 910,68 | 910,31 | 909,59 |
| 19 | 901,88 | 901,73 | 901,45 |
| 20 | 912,64 | 912,22 | 911,40 |
| 21 | 907,75 | 907,45 | 906,88 |
| 22 | 903,83 | 903,64 | 903,26 |
| 23 | 903,83 | 903,64 | 903,26 |
| 24 | 908,73 | 908,41 | 907,78 |
| 25 | 901,88 | 901,73 | 901,45 |
| 26 | 929,27 | 928,43 | 926,77 |
| 27 | 930,25 | 929,38 | 927,68 |
| 28 | 937,1 | 936,05 | 934,01 |
| 29 | 957,65 | 956,07 | 953,00 |
| 30 | 949,82 | 948,45 | 945,76 |
| 31 | 953,73 | 952,26 | 949,38 |
| 32 | 946,86 | 945,59 | 943,05 |
| 33 | 940,04 | 938,91 | 936,72 |
| 34 | 921,45 | 920,80 | 919,54 |
| 35 | 901,88 | 901,73 | 901,45 |
| 36 | 911,66 | 911,27 | 910,50 |
| 37 | 900,90 | 900,78 | 900,55 |
| 38 | 903,83 | 903,64 | 903,26 |
| 39 | 909,70 | 909,36 | 908,69 |
| 40 | 913,62 | 913,17 | 912,30 |

Dysponując wartościami teoretycznymi $\hat{y}_t$, obliczamy współczynniki korelacji wielorakiej dla poszczególnych postaci modelu zgodnie ze wzorem:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{2}^{40} (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{2}^{40} (y_t - \mu)^2}.$$

Wynoszą one:

$$R_1^2 = 0{,}8789, \quad R_2^2 = 0{,}8822, \quad R_3^2 = 0{,}8847.$$

Ceny miedzi prognozowane na podstawie powyższych trzech postaci modelu przedstawia tab. 3.

Tabela 3

| t | $y_t^P$ (wg I postaci) | $y_t^P$ (wg II postaci) | $y_t^P$ (wg III postaci) |
|---|---|---|---|
| 41 | 901,88 | 901,73 | 901,45 |
| 42 | 901,76 | 901,48 | 900,96 |
| 43 | 901,64 | 901,24 | 900,51 |
| 44 | 901,52 | 901,01 | 900,11 |
| 45 | 901,41 | 900,79 | 899,75 |

Wiedząc, iż wartości rzeczywiste $y_t$ w okresie t = 41, ..., 45 wynosiły:

$$y_{41} = 916,$$
$$y_{42} = 916,$$
$$y_{43} = 905,$$
$$y_{44} = 916,$$
$$y_{45} = 902,$$

możemy ocenić efektywność prognozy ex post. W tym celu obliczamy odchylenie standardowe $S_p$ oraz współczynnik rozbieżności Theila zgodnie z wzorami:

$$S_p = \sqrt{\frac{\sum_{41}^{45} (y_t - y_t^P)^2}{n}},$$

$$U = \sqrt{\frac{\sum_{41}^{45} (y_t - y_t^p)^2}{\sum_{41}^{45} y_t^2}}.$$

Dla poszczególnych postaci modelu wynoszą one:

$$S_{p_1} = 11{,}1666, \quad U_1 = 0{,}0123,$$

$$S_{p_2} = 11{,}4435, \quad U_2 = 0{,}0126,$$

$$S_{p_3} = 11{,}9634, \quad U_3 = 0{,}0131.$$

Przeciętne odchylenia wartości prognozy od rzeczywistych wartości ceny miedzi wynosiły więc 11,1666 dla pierwszej postaci modelu, 11,4435 - dla drugiej postaci i 11,9634 - dla trzeciej postaci. Natomiast standardowy empiryczny błąd prognozy w stosunku do pierwiastka średniej kwadratów rzeczywistych wartości ceny miedzi wynosił 1,23% dla pierwszej postaci modelu, 1,26% - dla drugiej i 1,31% - dla trzeciej postaci modelu.

### 1.3. Prognoza cen miedzi na podstawie modelu autoregresyjnego rzędu drugiego AR(2)

Postać modelu AR(2) jest następująca:

$$\hat{y}_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \delta + \varepsilon_t, \tag{21}$$

gdzie: $\delta = \mu(1 - \varphi_1 - \varphi_2)$.

Zanim przejdziemy do wyszacowania estymatorów parametrów $\varphi_1$ i $\varphi_2$, sprawdzimy czy spełnione są warunki stacjonarności procesu AR(2):

$$\begin{aligned} -1 &< \rho_1 < 1, \\ -1 &< \rho_2 < 1, \\ \rho_1^2 &< \tfrac{1}{2}(\rho_2 + 1). \end{aligned} \tag{22}$$

Zastępując współczynniki autokorelacji teoretycznej $\rho_1$, $\rho_2$ współczynnikami wyszacowanymi $r_1$ i $r_2$, widzimy, że $r_1$ i $r_2$ spełniają powyższe warunki:

$$-1 < r_1 = 0{,}9042 < 1,$$

$$-1 < r_2 = 0{,}8119 < 1,$$

$$r_1^2 = (0{,}9042)^2 = 0{,}8176 < \tfrac{1}{2}(0{,}8119 + 1) = 0{,}9059.$$

Również w przypadku modelu AR(2) estymacji parametrów $\varphi_1$ i $\varphi_2$ możemy dokonać trzema poprzednio wymienionymi sposobami:

1) Zgodnie z metodą najmniejszych kwadratów otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} D_{12} &= \hat{\varphi}_1 D_{22} + \hat{\varphi}_2 D_{23} \\ D_{13} &= \hat{\varphi}_1 D_{23} + \hat{\varphi}_2 D_{33}. \end{aligned} \tag{23}$$

Po obliczeniu wartości $D_{ij}$ układ równań wygląda następująco:

$$\begin{aligned} 45168{,}81 &= 46164{,}22\,\hat{\varphi}_1 + 41371{,}53\,\hat{\varphi}_2 \\ 40556{,}12 &= 41371{,}53\,\hat{\varphi}_1 + 42212{,}84\,\hat{\varphi}_2. \end{aligned}$$

Z rozwiązania powyższego układu wynikają następujące wartości estymatorów $\hat{\varphi}_1$ i $\hat{\varphi}_2$:

$$\underline{\hat{\varphi}_1 = 0{,}9651,}$$

$$\underline{\hat{\varphi}_2 = 0{,}0149.}$$

2) Wykorzystując metodę największej wiarygodności, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned} D_{12}^* &= \hat{\varphi}_1 D_{22}^* + \hat{\varphi}_2 D_{23}^* \\ D_{13}^* &= \hat{\varphi}_1 D_{23}^* + \hat{\varphi}_2 D_{33}^*, \end{aligned} \tag{24}$$

czyli:

$$\begin{aligned} \frac{n\,D_{12}}{n-1} &= \hat{\varphi}_1 \frac{n\,D_{22}}{n-2} + \hat{\varphi}_2 \frac{n\,D_{23}}{n-3} \\ \frac{n\,D_{13}}{n-2} &= \hat{\varphi}_1 \frac{n\,D_{23}}{n-3} + \hat{\varphi}_2 \frac{n\,D_{33}}{n-4}. \end{aligned} \tag{25}$$

Po podstawieniu obliczonych wartości $D_{ij}$ oraz n otrzymujemy co następuje:

$$\frac{45168,81}{39} = \hat{\varphi}_1 \frac{46164,22}{38} + \hat{\varphi}_2 \frac{41371,53}{37}$$

$$\frac{40556,12}{38} = \hat{\varphi}_1 \frac{41371,53}{37} + \hat{\varphi}_2 \frac{42212,84}{36}.$$

Wartości estymatorów wynikające z rozwiązania powyższego układu równań są następujące:

$$\underline{\varphi_1 = 0,9451},$$
$$\underline{\varphi_2 = 0,0089}.$$

3) Wykorzystując równania estymacji Yule'a-Walkera mamy dla modelu AR(2) następujący układ:

(26)
$$r_1 = \hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 r_1$$
$$r_2 = \hat{\varphi}_1 r_1 + \hat{\varphi}_2.$$

Stąd wartości estymatorów wynoszą:

$$\hat{\varphi}_1 = \frac{r_1 \ (1 - r_2)}{1 - r_1^2} = \frac{0,9042 \ (1 - 0,8119)}{1 - (0,9042)^2} = \underline{0,9327},$$

$$\hat{\varphi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} = \frac{0,8119 - (0,9042)^2}{1 - (0,9042)^2} = \underline{-0,0315}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy trzy następujące postacie modelu AR(2):

1) $\hat{y}_t = 0,9651 \ y_{t-1} + 0,0149 \ y_{t-2} + 17,9376,$
2) $\hat{y}_t = 0,9451 \ y_{t-1} + 0,0089 \ y_{t-2} + 41,1766,$
3) $\hat{y}_t = 0,9327 \ y_{t-1} - 0,0315 \ y_{t-2} + 88,5381.$

Jak widać, estymatory parametrów dość znacznie różnią się między sobą; wynika to ze zbyt małej liczebności próby.

W celu dokonania wyboru postaci modelu zbudujmy macierze wa-

riancji-kowariancji estymatorów. Dla procesu AR (2) macierz ta ma postać[8]:

$$(27) \qquad V(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) \approx n^{-1} \begin{bmatrix} 1-\varphi_2^2 & -\varphi_1(1+\varphi_2) \\ -\varphi_1(1+\varphi_2) & 1-\varphi_2^2 \end{bmatrix}.$$

Zastępując elementy macierzy $V(\varphi_1, \varphi_2)$ odpowiednimi estymatorami, otrzymujemy następujące macierze wariancji-kowariancji dla powyższych postaci modelu AR(2):

$$V_1(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) \approx \begin{bmatrix} 0{,}0249944 & -0{,}0244866 \\ -0{,}0244866 & 0{,}0249944 \end{bmatrix},$$

$$V_2(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) \approx \begin{bmatrix} 0{,}024998 & -0{,}0238392 \\ -0{,}0238392 & 0{,}024998 \end{bmatrix},$$

$$V_3(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) \approx \begin{bmatrix} 0{,}024975 & -0{,}0225834 \\ -0{,}0225834 & 0{,}0249751 \end{bmatrix}.$$

Jak wynika z powyższego, standardowe błędy szacunku parametrów $\varphi_1$ i $\varphi_2$ są takie same, gdyż $V(\varphi_1) = V(\varphi_2)$ i wynoszą dla poszczególnych postaci modelu:

$$S_{1\varphi_1} = S_{1\varphi_2} = \sqrt{0{,}0249944} = 0{,}1580961,$$

$$S_{2\varphi_1} = S_{2\varphi_2} = \sqrt{0{,}024998} = 0{,}1581075,$$

$$S_{3\varphi_1} = S_{3\varphi_2} = \sqrt{0{,}0249751} = 0{,}1580351.$$

Zmienne t, obliczone dla poszczególnych postaci modelu wynoszą:

$$t_{1,1\ obl} = \frac{0{,}9651}{0{,}1581} = 6{,}104277,$$

$$t_{1,2\ obl} = \frac{0{,}0149}{0{,}1581} = 0{,}0944027,$$

$$t_{2,1\ obl} = \frac{0{,}9451}{0{,}1581} = 5{,}9778372,$$

$$t_{2,2\ obl} = \frac{0{,}0089}{0{,}1581} = 0{,}0564078,$$

$$t_{3,1\ obl} = \frac{0{,}9327}{0{,}1580} = 5{,}9021419,$$

$$t_{3,2\ obl} = \frac{-0{,}0315}{0{,}1580} = -0{,}1994961.$$

[8] Tamże, s. 281.

Wartości teoretyczne (tab. 4) $\hat{y}_t$ obliczone na podstawie trzech postaci modelu AR(2) wynoszą:

Tabela 4

| t | $\hat{y}_t = 0{,}9651y_{t-1} + 0{,}0149y_{t-2} + 17{,}9376$ | $\hat{y}_t = 0{,}9451y_{t-1} + 0{,}0089y_{t-2} + 41{,}1766$ | $\hat{y}_t = 0{,}9327y_{t-1} + (-0{,}0315y_{t-2}) + 88{,}5381$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | - | - | - |
| 2 | - | - | - |
| 3 | 837,19 | 838,76 | 841,99 |
| 4 | 846,86 | 848,22 | 851,28 |
| 5 | 847,01 | 848,31 | 850,97 |
| 6 | 854,73 | 855,87 | 858,43 |
| 7 | 855,81 | 856,89 | 859,11 |
| 8 | 847,14 | 848,39 | 850,68 |
| 9 | 849,90 | 851,15 | 853,77 |
| 10 | 847,05 | 848,34 | 850,87 |
| 11 | 838,32 | 839,80 | 842,57 |
| 12 | 859,42 | 860,52 | 863,38 |
| 13 | 896,42 | 896,63 | 898,13 |
| 14 | 888,30 | 888,46 | 888,54 |
| 15 | 897,82 | 897,83 | 898,15 |
| 16 | 888,32 | 888,47 | 888,50 |
| 17 | 898,78 | 898,78 | 899,08 |
| 18 | 910,55 | 910,22 | 909,93 |
| 19 | 902,02 | 901,82 | 901,15 |
| 20 | 912,50 | 912,13 | 911,70 |
| 21 | 907,84 | 907,51 | 906,69 |
| 22 | 903,91 | 903,68 | 903,11 |
| 23 | 903,85 | 903,65 | 903,24 |
| 24 | 908,67 | 908,37 | 907,90 |
| 25 | 901,99 | 901,80 | 901,22 |
| 26 | 928,91 | 928,20 | 927,55 |
| 27 | 930,29 | 929,40 | 927,60 |
| 28 | 937,06 | 936,02 | 934,10 |
| 29 | 957,43 | 955,93 | 953,47 |

Tabela 4 (cd.)

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 30 | 950,02 | 948,56 | 945,34 |
| 31 | 953,77 | 952,27 | 949,33 |
| 32 | 947,07 | 945,69 | 942,67 |
| 33 | 940,21 | 939,01 | 936,36 |
| 34 | 921,77 | 920,99 | 918,86 |
| 35 | 902,18 | 901,92 | 900,81 |
| 36 | 911,54 | 911,19 | 910,76 |
| 37 | 901,07 | 900,88 | 900,19 |
| 38 | 903,80 | 903,62 | 903,33 |
| 39 | 909,64 | 909,32 | 908,84 |
| 40 | 913,59 | 913,15 | 912,38 |

Współczynniki korelacji wielorakiej $R^2$ dla poszczególnych postaci modelu są następujące:

$$R_1^2 = 0,8683, \quad R_2^2 = 0,8722, \quad R_3^2 = 0,8752.$$

Wszystkie współczynniki $R^2$ modelu AR(2) są niższe niż w przypadku zastosowania modelu AR(1), co potwierdza wcześniej postawiony wniosek, że dla danego szeregu najlepiej pasuje model rzędu pierwszego.

Spośród trzech postaci modelu AR(2) wybieramy dla celów prognostycznych model trzeci o postaci:

$$\hat{y}_t = 0,9327\, y_{t-1} - 0,0315\, y_{t-2} + 88,5381.$$

Prognoza cen miedzi na okres $t = 41, \ldots, 45$ dokonana na podstawie tego modelu jest następująca:

$$y_{41}^P = 901,06,$$

$$y_{42}^P = 900,56,$$

$$y_{43}^P = 900,12,$$

$$y_{44}^P = 899,73,$$

$$y_{45}^P = 899,38.$$

Dysponując wartościami rzeczywistymi $y_t$ obliczmy standardowy błąd prognozy $S_p$ i współczynnik rozbieżności Theila. Wynoszą one $S_p = 12,3044$, $U = 0,01351$. Wartości obu mierników efektywności prognozy są gorsze niż w przypadku zastosowania modelu AR(1).

## 2. Prognoza cen miedzi na podstawie modeli średniej ruchomej MA

### 2.1. Prognoza cen miedzi na podstawie modelu średniej ruchomej rzędu pierwszego MA(1)

Badając zachowanie się wyszacowanych na podstawie danego szeregu funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej, dochodzimy do wniosku, że dla badanego szeregu nie można zastosować modelu MA(1). Mianowicie, z dualności między procesem AR(1) i MA(1) wynika, że dla procesu MA(1) jedynie współczynnik autokorelacji rzędu pierwszego $\varrho_1 \neq 0$, natomiast współczynniki wyższych rzędów przybierają wartości równe 0. Z kolei funkcja autokorelacji cząstkowej przybiera wartości malejące w tempie wykładniczym.

Mimo wniosku, do jakiego doszliśmy, spróbujmy, celem lepszego zilustrowania metody, wyszacować parametry dla modelu MA(1). Model MA(1) ma następującą postać:

$$\hat{y}_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \tag{28}$$

gdzie:

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t,$$

$$\varepsilon_{t-1} = y_{t-1} - \hat{y}_{t-1}.$$

Estymator $\hat{\theta}_1$ parametru $\theta_1$ znajdujemy ze wzoru na funkcję autokorelacji:

$$\varrho_k = \begin{cases} -\dfrac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} & \text{dla } k = 1, \\ 0 & \text{dla } k \geqslant 2. \end{cases} \tag{29}$$

Zastępując współczynnik autokorelacji $\rho_1$ współczynnikiem wyszacowanym $r_1 = 0,904237$ otrzymujemy równanie drugiego stopnia:

$$0,9042\,\hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_1 + 0,9042 = 0.$$

Równanie to nie posiada rozwiązania w obszarze liczb rzeczywistych gdyż $\Delta = -2,2706 < 0$. A zatem estymacja parametru $\hat{\theta}_1$ na podstawie (29) nie jest możliwa.

Wartość estymatora $\hat{\theta}_1$ możemy również znaleźć posługując się wzorem na wariancję składnika losowego $\sigma_\varepsilon^2$. Wówczas korzystamy z układu równań:

$$(30) \qquad \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 = \dfrac{\sigma_y^2}{1 + \hat{\theta}_1^2} \\ \hat{\theta}_1 = -\dfrac{c_1}{\sigma_\varepsilon^2}, \end{cases}$$

który w tym przypadku wygląda następująco:

$$\begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 = \dfrac{1248,81}{1 + \hat{\theta}_1^2} \\ \hat{\theta}_1 = -\dfrac{1129,2202}{\sigma_\varepsilon^2}. \end{cases}$$

Powyższy układ równań rozwiązujemy metodą iteracyjną, przybierając jako wartość początkową $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_y^2 = 1248,81$ i przy tej wartości $\sigma_\varepsilon^2$ obliczamy wartość estymatora $\hat{\theta}_1$. Następnie dla otrzymanej wartości estymatora $\hat{\theta}_1$ obliczamy wariancję $\sigma_\varepsilon^2$ itd., aż do momentu, gdy kolejne wartości $\hat{\theta}_1$ nie będą różniły się między sobą. Wartość $\hat{\theta}_1$ i $\sigma_\varepsilon^2$ obliczone w kolejnych krokach iteracyjnych są następujące:

I $\quad \sigma_\varepsilon^2 = 1248,81 \quad \hat{\theta}_1^{I} = -0,9042,$

II $\quad \sigma_\varepsilon^2 = 687,0656 \quad \hat{\theta}_1^{II} = -1,6435,$

III $\quad \sigma_\varepsilon^2 = 337,4159 \quad \hat{\theta}_1^{III} = -3,3467,$

IV $\quad \sigma_\varepsilon^2 = 102,3581 \quad \hat{\theta}_1^{IV} = -11,0321,$

$$V \quad \sigma_\varepsilon^2 = 10{,}1772 \qquad \hat{\theta}_1^V = -110{,}9559,$$

$$VI \quad \sigma_\varepsilon^2 = 0{,}1014 \qquad \hat{\theta}_1^{VI} = -11136{,}293.$$

W zasadzie już po drugim kroku widzimy, że otrzymany estymator $\hat{\theta}_1$ nie spełnia warunku odwracalności (invertibility) procesu: $|\hat{\theta}_1| < 1$. W miarę dalszych kroków iteracyjnych wartość bezwzględna parametru zwiększa się, co potwierdza wysunięty na początku wniosek, iż dla badania danego szeregu zastosowanie modelu MA(1) nie jest możliwe.

## 2.2. Prognoza cen miedzi na podstawie modelu średniej ruchomej rzędu drugiego MA(2)

Postać modelu MA(2) jest następująca:

$$\hat{y}_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \tag{31}$$

gdzie:

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t,$$

$$\varepsilon_{t-1} = y_{t-1} - \hat{y}_{t-1},$$

$$\varepsilon_{t-2} = y_{t-2} - \hat{y}_{t-2}.$$

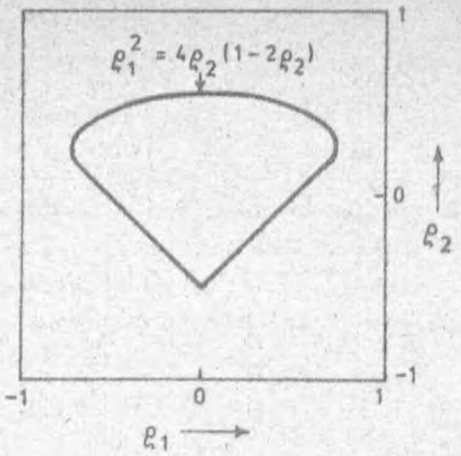
Badanie zachowania się funkcji autokorelacji doprowadza do wniosku, że również model MA(2) nie może być zastosowany dla danego szeregu. Mianowicie, aby proces MA(2) był odwracalny, pierwsze dwa współczynniki autokorelacji powinny leżeć w obszarze wyznaczonym następującymi krzywymi:

$$\varrho_2 + \varrho_1 = -0{,}5,$$

$$\varrho_2 - \varrho_1 = -0{,}5, \tag{32}$$

$$\varrho_1^2 = 4\varrho_2 (1 - 2\varrho_2)$$

Obszar ten został pokazany na rys. 2.




Rys. 2. Opr. na podstawie G. E. P. B o x, G. E. J e n k i n s, Time Series Analysis. Forecasting and Control, San Francisco 1976, s. 72.

Wyszacowane współczynniki autokorelacji $r_1 = 0{,}9042$ i $r_2 = 0{,}8119$ nie mieszczą się w obszarze dopuszczalnym dla procesu MA(2).

Spróbujmy, celem prezentacji metody, wyszacować estymatory parametrów $\theta_1$ i $\theta_2$. Posługując się metodą iteracji, korzystamy z układu równań[9]:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_y^2}{1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2}, \tag{33}$$

$$\theta_j = -\left(\frac{C_j}{\sigma_\varepsilon^2} - \theta_1\,\theta_{j+1} - \theta_2\,\theta_{j+2} - \theta_{q-j}\,\theta_q\right).$$

Dla modelu MA(2) powyższy układ równań przybiera postać:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_y^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \tag{34}$$

$$\theta_2 = -\frac{C_2}{\sigma_\varepsilon^2},$$

$$\theta_1 = -\left(\frac{C_1}{\sigma_\varepsilon^2} - \theta_1\,\theta_2\right).$$

[9] Tamże, s. 203.

Podstawiając obliczone wartości $\sigma_y^2$, $C_1$, $C_2$ otrzymujemy układ równań:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1248{,}81}{1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2},$$

$$\hat{\theta}_2 = -\frac{1013{,}903}{\sigma_\varepsilon^2},$$

$$\hat{\theta}_1 = -\frac{1129{,}2202}{\sigma_\varepsilon^2} - \hat{\theta}_1\hat{\theta}_2.$$

Rozwiązując powyższy układ otrzymujemy następujące wartości $\sigma_\varepsilon^2$, $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ w kolejnych krokach iteracyjnych:

| | $\sigma_\varepsilon^2$ | $\hat{\theta}_1$ | $\hat{\theta}_2$ |
|---|---|---|---|
| I | 1248,81 | -0,4990 | -0,8119, |
| II | 654,444 | -0,6768 | -1,5493, |
| III | 323,6661 | -0,8442 | -3,1326, |
| IV | 108,3505 | -1,0062 | -9,3576, |
| V | 13,9411 | -1,0986 | -72,7276, |
| VI | 0,2360 | -1,1135 | -4296,15. |

Tylko pierwsza para estymatorów $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ spełnia warunki odwracalności procesu MA(2), które są następujące:

(35)
$$\theta_2 + \theta_1 < 1,$$
$$\theta_2 - \theta_1 < 1,$$
$$-1 < \theta_2 < 1.$$

Zatem postać modelu MA(2) można zapisać następująco:

$$\hat{y}_t = 896{,}3 + 0{,}499\varepsilon_{t-1} + 0{,}8119\varepsilon_{t-2}.$$

Macierz wariancji-kowariancji estymatorów dla modelu MA(2) jest następująca[10]:

---

[10] Tamże, s. 283.

$$V(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \approx n^{-1} \begin{bmatrix} 1 - \theta_2^2 & -\theta_1(1 + \theta_2) \\ -\theta_1(1 + \theta_2) & 1 - \theta_2^2 \end{bmatrix},$$

czyli:

$$V(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \approx \begin{bmatrix} 0,0085 & 0,0023 \\ 0,0023 & 0,0085 \end{bmatrix}.$$

Standardowy błąd szacunku parametrów wynosi:

$$S_{\theta_1} = S_{\theta_2} = \sqrt{0,0085} = 0,0922.$$

Zmienne t wynoszą:

$$t_{1,\,obl} = \frac{-0,499}{0,0922} = -5,4059,$$

$$t_{2,\,obl} = \frac{-0,8119}{0,0922} = -8,7957.$$

Wartości teoretyczne $\hat{y}_t$ obliczone na podstawie modelu oraz wartości składnika losowego $\varepsilon_t$ zawiera tab. 5.

Tabela 5

| t | $\hat{y}_t$ | $\varepsilon_t$ | t | $\hat{y}_t$ | $\varepsilon_t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | - | - | 21 | 912,23 | -8,23 |
| 2 | - | - | 22 | 890,14 | 13,86 |
| 3 | 896,3 | -50,3 | 23 | 896,53 | 12,47 |
| 4 | 871,2 | -25,2 | 24 | 913,78 | -11,78 |
| 5 | 842,89 | 11,11 | 25 | 900,55 | 29,45 |
| 6 | 881,38 | -26,38 | 26 | 901,43 | 29,57 |
| 7 | 892,16 | -46,16 | 27 | 934,97 | 3,03 |
| 8 | 851,85 | -2,85 | 28 | 921,82 | 37,18 |
| 9 | 857,4 | -11,4 | 29 | 917,31 | 33,69 |
| 10 | 888,3 | -51,3 | 30 | 943,3 | 11,7 |
| 11 | 861,45 | -2,45 | 31 | 929,49 | 18,51 |

Tabela 5 (cd.)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 853,43 | 43,57 | 32 | 915,04 | 25,96 |
| 13 | 916,05 | -28,05 | 33 | 924,28 | -2,28 |
| 14 | 917,68 | -19,68 | 34 | 916,24 | -14,24 |
| 15 | 863,71 | 24,29 | 25 | 887,34 | 24,66 |
| 16 | 892,44 | 6,56 | 36 | 897,04 | 3,96 |
| 17 | 919,29 | -8,29 | 37 | 918,3 | -14,3 |
| 18 | 897,49 | 4,51 | 38 | 892,38 | 17,62 |
| 19 | 891,82 | 21,18 | 39 | 893,48 | 20,52 |
| 20 | 910,53 | -2,53 | 40 | 920,85 | -18,85 |

Współczynnik korelacji wielorakiej $R^2 = 0{,}5009$. Model nie nadaje się do wykorzystania dla celów prognostycznych.

## 3. Prognoza cen miedzi na podstawie modeli mieszanych ARMA

### 3.1. Prognoza cen miedzi na podstawie modelu mieszanego ARMA(1,1)

Model typu ARMA jest mieszanym modelem łączącym elementy modeli średniej ruchomej i autoregresyjnego. Ogólna postać modelu ARMA(1,1) jest następująca:

$$\hat{y}_t = \varphi_1 y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \tag{36}$$

gdzie:

$$\delta = \mu(1 - \varphi_1).$$

Warunki stacjonarności i odwracalności procesu dla modelu ARMA(1,1) są następujące:

$$\begin{aligned} &|\rho_2| < |\rho_1|, \\ &\rho_2 > \rho_1(2\rho_1 + 1) \quad \text{dla } \rho_1 < 0, \\ &\rho_2 > \rho_1(2\rho_1 - 1) \quad \text{dla } \rho_1 > 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Wyszacowane współczynniki autokorelacji $r_1 = 0,904237$ i $r_2 = 0,8118953$ spełniają powyższe warunki:

$$r_2 = 0,8119 < r_1 = 0,9042,$$

$$r_2 = 0,8119 > 0,9042(2 \cdot 0,9042 - 1) = 0,7311.$$

Szacunku parametrów modelu możemy dokonać dwiema metodami różniącymi się między sobą sposobem estymacji parametru $\theta_1$. Estymator parametru $\varphi_1$, zarówno w I jak i w II metodzie, otrzymujemy z następującego układu równań:

$$(38) \qquad C_{q+1} = \hat{\varphi}_1 C_q + \hat{\varphi}_2 C_{q-1} + \ldots + \hat{\varphi}_p C_{q-p+1}$$

$$C_{q+2} = \hat{\varphi}_1 C_{q+1} + \hat{\varphi}_2 C_q + \ldots + \hat{\varphi}_p C_{q-p+2}$$

$$\vdots$$

$$C_{q+p} = \hat{\varphi}_1 C_{q+p-1} + \hat{\varphi}_2 C_{q+p-2} + \ldots + \hat{\varphi}_p C_q,$$

gdzie: p - rząd procesu AR, q - rząd procesu MA. Dla modelu ARMA(1,1) powyższy układ przybiera postać:

$$(39) \qquad C_2 = \hat{\varphi}_1 C_1.$$

Obliczona wartość estymatora $\hat{\varphi}_1 = \frac{C_2}{C_1} = 0,8979$. Mając wartość estymatora $\hat{\varphi}_1$ przekształcamy kowariancje zgodnie ze wzorem:

$$(40) \quad C'_j = \sum_{i=0}^{p} \varphi_i^2 C_j + \sum_{i=0}^{p} (\varphi_0 \varphi_i + \varphi_1 \varphi_{i+1} + \ldots + \varphi_{p-1} \varphi_p) d_j,$$

gdzie:

$$j = 0, 1, \ldots, q,$$
$$d_j = C_{j+i} + C_{j-i},$$
$$\varphi_0 = -1.$$

Dla modelu ARMA(1,1) wynoszą one:

$$c'_0 = (1 + \varphi_1^2)c_0 - 2\varphi_1 c_1 = 227,7778.$$

$$c'_1 = (1 + \varphi_1^2)c_1 - \varphi_1(c_2 + c_0) = 7,94.$$

Stosując pierwszą metodę iteracyjną, polegającą na procesie liniowo zbieżnym, estymator $\theta_1$ otrzymujemy z układu równań, podobnie jak MA(1):

(41)
$$\begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 = \dfrac{c'_0}{1 + \theta_1^2} \\ \theta_1 = -\dfrac{c'_1}{\sigma_\varepsilon^2}, \end{cases}$$

czyli:

$$\begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 = \dfrac{227,7778}{1 + \hat{\theta}_1^2} \\ \theta_1 = -\dfrac{7,94}{\sigma_\varepsilon^2}. \end{cases}$$

Wartości $\sigma_\varepsilon^2$ i $\hat{\theta}_1$ otrzymane w kolejnych krokach iteracyjnych wynoszą:

| | $\sigma_\varepsilon^2$ | $\theta_1$ |
|---|---|---|
| I | 227,7778 | -0,0348585, |
| II | 227,4932 | -0,0349021, |
| III | 227,50068 | -0,0349009, |
| IV | 227,5007 | -0,0349009, |
| V | 227,5007 | -0,0349009. |

Począwszy od III kroku wartość estymatora $\hat{\theta}_1$ nie ulega zmianie.

Druga metoda estymacji parametru $\theta_1$, biorąc za punkt wyjścia założenie o procesie kwadratowo zbieżnym, polega na wykorzysta-

niu algorytmu Newtona-Raphsona, który można zapisać następująco[11]:

$$\tau^{i+1} = \tau^{i} - (T^{i})^{-1} f_i, \tag{42}$$

gdzie:

$$f' = (f_0, f_1 \dots f_q),$$

$$f_j = \sum_{i=0}^{q-j} \tau_i \tau_{i+j} - c'_j.$$

$$T = \begin{bmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_{q-2} & \tau_{q-1} & \tau_q \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{q-1} & \tau_q & 0 \\ \tau_2 & \tau_3 & \dots & \tau_q & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ \tau_q & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_q \\ 0 & \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_{q-1} \\ 0 & 0 & \tau_0 & \dots & \tau_{q-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_0 \end{bmatrix}.$$

Estymator parametru $\theta_j = -\tau_j/\tau_0$; $\sigma_\varepsilon^2 = \tau_0^2$. Dla procesu ARMA(1,1) powyższy algorytm przybiera postać:

$$\begin{bmatrix} \tau_0^{i+1} \\ \tau_1^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_0^{i} \\ \tau_1^{i} \end{bmatrix} - (T^{i})^{-1} \begin{bmatrix} f_0^{i} \\ f_1^{i} \end{bmatrix}, \tag{43}$$

gdzie:

$$\begin{bmatrix} f_0^{i} \\ f_1^{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tau_0^{i})^2 + (\tau_1^{i})^2 - c'_0 \\ \tau_0^{i}\,\tau_1^{i} - c'_1 \end{bmatrix}.$$

---

11 Tamże, s. 203.

$$T^i = \begin{bmatrix} 2\tau_0^i & 2\tau_1^i \\ \tau_1^i & \tau_0^i \end{bmatrix}.$$

Szukana wartość estymatora $\Theta_1 = -\frac{\tau_1}{\tau_0}$; $\sigma_\varepsilon^2 = \tau_0^2$.
Iterację rozpoczynamy przyjmując za wartość początkową $\tau_0^0 = \sqrt{c_0'}$, $\tau_1^0 = 0$, czyli: $\tau_0^0 = 15{,}092309$, $\tau_1^0 = 0$.
W pierwszym kroku iteracji otrzymujemy następujące wartości:

$$\begin{bmatrix} \tau_0^I \\ \tau_1^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15{,}092309 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \times 15{,}092309 & 0 \\ 0 & 15{,}092309 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\begin{bmatrix} (15{,}092309)^2 + 0^2 - 227{,}7778 \\ 15{,}092309 \times 0 - 7{,}94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15{,}092309 \\ 0{,}5260956 \end{bmatrix}.$$

Stąd:

$$\sigma_\varepsilon^2 = (\tau_0^I)^2 = 227{,}7778,$$

$$\hat{\theta}_1^I = -\frac{\tau_1^I}{\tau_0^I} = -0{,}348585.$$

W drugim kroku iteracyjnym otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \tau_0^{II} \\ \tau_1^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15{,}092309 \\ 0{,}5260956 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \times 15{,}092309 & 2 \times 0{,}5260956 \\ 0{,}5260956 & 15{,}092309 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\begin{bmatrix} (15{,}092309)^2 + (0{,}5260956)^2 - 227{,}7778 \\ 15{,}092309 \times 0{,}5260956 - 7{,}94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15{,}083124 \\ 0{,}5267357 \end{bmatrix}.$$

Stąd:

$$\sigma_\varepsilon^2 = (\tau_0^{II})^2 = 227{,}50062,$$

$$\hat{\theta}_1^{II} = -\frac{\tau_1^{II}}{\tau_0^{II}} = -0{,}0349221.$$

W następnych krokach iteracyjnych otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \tau_0^{III} \\ \tau_1^{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,083121 \\ 0,5264164 \end{bmatrix}; \quad \sigma_\varepsilon^2 = (\tau_0^{III})^2 = 227,50053,$$

$$\hat{\theta}_1^{III} = -\frac{\tau_1^{III}}{\tau_0^{III}} = -0,034901.$$

$$\begin{bmatrix} \tau_0^{IV} \\ \tau_1^{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,083126 \\ 0,5264160 \end{bmatrix}; \quad \sigma_\varepsilon^2 = (\tau_0^{IV})^2 = 227,50068,$$

$$\hat{\theta}_1^{IV} = -\frac{\tau_1^{IV}}{\tau_0^{IV}} = -0,0349009.$$

$$\begin{bmatrix} \tau_0^{V} \\ \tau_1^{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,083126 \\ 0,5264160 \end{bmatrix}; \quad \sigma_\varepsilon^2 = (\tau_0^{V})^2 = 227,50068,$$

$$\hat{\theta}_1^{V} = -\frac{\tau_1^{V}}{\tau_0^{V}} = -0,0349009.$$

Zatem postać modelu jest następująca:

$$\hat{y}_t = 0,8979\, y_{t-1} + 91,5312 + 0,0349\, \varepsilon_{t-1}.$$

Macierz wariancji-kowariancji estymatorów dla modelu ARMA(1,1) jest następująca[12]:

$$V\left\{\hat{\varphi}_1\hat{\theta}/(1,1)\right\} \simeq n^{-1}\, \frac{1-\varphi\theta}{(\varphi-\theta)^2} \begin{bmatrix} (1-\varphi^2) & (1-\varphi\theta)(1-\varphi^2)(1-\theta^2) \\ (1-\varphi^2) & (1-\theta^2)\ (1-\theta^2)(1-\varphi\theta) \end{bmatrix},$$

czyli:

$$V\left\{\varphi,\theta/(1,1)\right\} \simeq \begin{bmatrix} 0,0059 & 0,0057 \\ 0,0057 & 0,0305 \end{bmatrix}.$$

Standardowe błędy szacunku estymatorów wynoszą:

---

[12] Tamże, s. 243.

$$S_{\varphi} = 0{,}0768,$$

$$S_{\theta} = 0{,}1746.$$

W tab 6. podano wartości teoretyczne szeregu czasowego obliczone na podstawie wyszacowanego modelu.

Tabela 6

| t | $\hat{y}_t$ | $\varepsilon_t$ | t | $\hat{y}_t$ | $\varepsilon_t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | - | 21 | 906,68 | -2,68 |
| 2 | 841,26 | -5,26 | 22 | 903,13 | 0,88 |
| 3 | 841,97 | 4,03 | 23 | 903,24 | 5,76 |
| 4 | 851,28 | -5,28 | 24 | 907,9 | -5,9 |
| 5 | 850,95 | 3,05 | 25 | 901,21 | 28,79 |
| 6 | 858,43 | -3,43 | 26 | 927,56 | 3,44 |
| 7 | 859,1 | -13,1 | 27 | 927,58 | 10,42 |
| 8 | 850,68 | -1,68 | 28 | 934,11 | 24,89 |
| 9 | 853,77 | -7,77 | 29 | 953,47 | -2,47 |
| 10 | 850,87 | -13,87 | 30 | 945,33 | 9,67 |
| 11 | 842,57 | 16,43 | 31 | 949,34 | -1,34 |
| 12 | 863,38 | 33,62 | 32 | 942,67 | -1,67 |
| 13 | 898,1 | -10,1 | 33 | 936,38 | -14,38 |
| 14 | 888,5 | 9,5 | 34 | 918,87 | -16,87 |
| 15 | 898,16 | -10,16 | 35 | 900,83 | 11,17 |
| 16 | 888,49 | 10,51 | 36 | 910,79 | -9,79 |
| 17 | 899,09 | 11,91 | 37 | 900,18 | 3,82 |
| 18 | 909,91 | -7,91 | 38 | 903,35 | 6,65 |
| 19 | 901,14 | 11,86 | 39 | 908,83 | 5,17 |
| 20 | 911,71 | -3,71 | 40 | 912,37 | -10,37 |

Współczynnik korelacji wielorakiej wynosi:

$$R^2 = 0{,}8844.$$

Prognoza ceny miedzi na okres $t = 41$ wynosi:

$$y^P_{41} = 901{,}06.$$

### 3.2. Prognoza ceny miedzi na podstawie modelu mieszanego ARMA(1,2)

Ogólna postać modelu ARMA(1,2) jest następująca:

$$\hat{y}_t = \varphi_1 y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}. \tag{44}$$

gdzie:

$$\delta = \mu(1 - \varphi_1).$$

Obliczona wartość estymatora $\hat{\varphi}_1$ wynosi:

$$\hat{\varphi}_1 = \frac{C_2}{C_1} = 0{,}8979.$$

Szacując parametry $\theta_1$ i $\theta_2$ powtarzamy tę samą procedurę, jaką zastosowano do szacowania modelu ARMA(1,1). Dla procesu ARMA(1,2) algorytm Newtona-Raphsona przybiera postać:

$$\begin{bmatrix} \tau_0^{i+1} \\ \tau_1^{i+1} \\ \tau_2^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_0^{i} \\ \tau_1^{i} \\ \tau_2^{i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\tau_0^i & 2\tau_1^i & 2\tau_2^i \\ \tau_1^i & \tau_0^i + \tau_2^i & \tau_1^i \\ \tau_2^i & 0 & \tau_0^i \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} (\tau_0^i)^2 + (\tau_1^i)^2 + (\tau_2^i)^2 - C_0' \\ \tau_0^i \tau_1^i + \tau_1^i \tau_2^i - C_1' \\ \tau_0^i \tau_2^i - C_2' \end{bmatrix}$$

Obliczone wartości kowariancji $C'$ wynoszą:

$$C_0' = 227{,}7778, \quad C_1' = 7{,}94, \quad C_2' = 7{,}3459.$$

Wartości początkowe: $\tau_0^0 = 15{,}092309$, $\tau_1^0 = 0$, $\tau_2^0 = 0$.

W pierwszym kroku iteracji otrzymujemy następujące wartości:

$$\begin{bmatrix} \tau_0^I \\ \tau_1^I \\ \tau_2^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15{,}092309 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30{,}184618 & 0 & 0 \\ 0 & 15{,}092309 & 0 \\ 0 & 0 & 15{,}092309 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 227,7778 & -227,7778 \\ 0 & -7,94 \\ 0 & -7,3459 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,092309 \\ 0,5260956 \\ 0,4867312 \end{bmatrix}.$$

Stąd:

$$\sigma_\varepsilon^2 = (\tau_0^I)^2 = 227,7778,$$

$$\hat{\theta}_1^I = -\frac{\tau_1^I}{\tau_0^I} = -0,0348585,$$

$$\hat{\theta}_2^I = \frac{\tau_2^I}{\tau_0^I} = -0,0328502.$$

W następnych krokach iteracyjnych otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \tau_0^{II} \\ \tau_1^{II} \\ \tau_2^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,075821 \\ 0,5101899 \\ 0,4875016 \end{bmatrix} \quad \sigma_\varepsilon^2 = (\tau_0^{II})^2 = 227,2804,$$

$$\theta_1^{II} = -\frac{\tau_1^{II}}{\tau_0^{II}} = -0,0338415, \quad \hat{\theta}_2^{II} = -\frac{\tau_2^{II}}{\tau_0^{II}} = -0,0323366,$$

$$\begin{bmatrix} \tau_0^{III} \\ \tau_1^{III} \\ \tau_2^{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,075805 \\ 0,5101744 \\ 0,4875029 \end{bmatrix} \quad \sigma_\varepsilon^2 = (\tau_0^{III})^2 = 227,2789,$$

$$\hat{\theta}_1^{III} = -\frac{\tau_1^{III}}{\tau_0^{III}} = -0,0338406, \quad \hat{\theta}_2^{III} = -\frac{\tau_2^{III}}{\tau_0^{III}} = -0,0323367,$$

$$\begin{bmatrix} \tau_0^{IV} \\ \tau_1^{IV} \\ \tau_2^{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,075805 \\ 0,5101744 \\ 0,4875029 \end{bmatrix} \quad \sigma_\varepsilon^2 = (\tau_0^{IV})^2 = 227,2789,$$

$$\hat{\theta}_1^{IV} = -\frac{\tau_1^{IV}}{\tau_0^{IV}} = -0{,}0338406, \qquad \hat{\theta}_2^{IV} = -\frac{\tau_2^{IV}}{\tau_0^{IV}} = -0{,}323367.$$

Jak widać, kolejne kroki iteracji nie powodują dalszych zmian wartości estymatorów. A zatem estymacja modelu dała następujący wynik:

$$\hat{y}_t = 0{,}8979\, y_{t-1} + 91{,}5312 + 0{,}0338\, \varepsilon_{t-1} + 0{,}0323\, \varepsilon_{t-2}.$$

Szereg teoretyczny obliczony na podstawie powyższego modelu przedstawiony jest w tab. 7.

Tabela 7

| t | $\hat{y}_t$ | $\varepsilon_t$ | t | $\hat{y}_t$ | $\varepsilon_t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | - | 21 | 907,06 | -3,06 |
| 2 | 841,26 | -5,26 | 22 | 903,00 | 1,00 |
| 3 | 841,98 | 4,02 | 23 | 903,15 | 5,85 |
| 4 | 851,10 | -5,10 | 24 | 907,93 | -5,93 |
| 5 | 851,09 | 2,91 | 25 | 901,41 | 28,59 |
| 6 | 858,25 | -3,25 | 26 | 927,33 | 3,67 |
| 7 | 859,20 | -13,20 | 27 | 928,51 | 9,49 |
| 8 | 850,58 | -1,58 | 28 | 934,18 | 24,82 |
| 9 | 853,35 | -7,35 | 29 | 953,74 | -2,74 |
| 10 | 850,84 | -13,84 | 30 | 946,12 | 8,88 |
| 11 | 842,35 | 16,65 | 31 | 949,22 | -1,22 |
| 12 | 862,93 | 34,07 | 32 | 942,97 | -1,97 |
| 13 | 898,62 | -10,62 | 33 | 936,33 | -14,33 |
| 14 | 889,59 | 8,41 | 34 | 918,83 | -16,83 |
| 15 | 897,77 | -9,77 | 35 | 900,38 | 11,62 |
| 16 | 888,79 | 10,21 | 36 | 910,25 | -9,25 |
| 17 | 898,75 | 12,25 | 37 | 900,58 | 3,42 |
| 18 | 910,24 | -8,24 | 38 | 903,03 | 6,97 |
| 19 | 901,54 | 11,46 | 39 | 908,95 | 5,05 |
| 20 | 911,42 | -3,42 | 40 | 912,59 | -10,59 |

Obliczono także współczynnik determinacji $R^2 = 0{,}8851$, którego wartość jest nieznacznie lepsza niż dla modelu ARMA(1,1). Prognoza ceny miedzi na okres $t = 41$ wynosi:

$$y_{41}^{P} = 901{,}22.$$

## II. Przykłady zastosowania modeli wyboru jakościowego w prognozowaniu cen

### 1. Przykład na zastosowanie modelu PROBIT w prognozowaniu cen

Przedsiębiorstwo handlu zagranicznego dysponuje obserwacjami na temat sprzedaży surowca x na giełdzie towarowej (tab. 8):

Tabela 8

| Numer obserwacji | Oferowana cena $x_t$ | Przyjęcie oferty | $y_t$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 80 | tak | 1 |
| 2 | 85 | tak | 1 |
| 3 | 90 | nie | 0 |
| 4 | 90 | nie | 0 |
| 5 | 85 | nie | 0 |
| 6 | 80 | tak | 1 |
| 7 | 80 | tak | 1 |
| 8 | 85 | tak | 1 |
| 9 | 90 | tak | 1 |
| 10 | 95 | nie | 0 |
| 11 | 95 | tak | 1 |
| 12 | 95 | nie | 0 |

1) obliczyć prawdopodobieństwo przyjęcia oferty przy cenie 100;

2) jaką cenę należy zaoferować, aby prawdopodobieństwo przyjęcia oferty było:

a) co najmniej 0,5;

b) co najmniej 0,9.

Rozwiązanie:

Ad 1. Liczymy regresję $y_t$ względem $x_t$:

$$y_t = 3{,}817 - 0{,}037\, x_t,$$

przy czym:

$$\bar{y} = 0{,}58; \quad \bar{x} = 87{,}5; \quad \delta_x^2 = 31{,}25; \quad \delta_y^2 = 0{,}243.$$

Podstawiamy $x = 100$ do liniowego modelu regresji, otrzymując $y = 0{,}117$. Zastosowanie modelu PROBIT zakłada, że zmienna $y_t^*$ ma rozkład normalny, zaś $F(y_t^*)$ jest dystrybuantą tego rozkładu. Standaryzujemy zmienną $y = 0{,}117$:

$$z = \frac{0{,}117 - 0{,}58}{0{,}493} \approx -0{,}939.$$

Z tablicy dystrybuanty rozkładu normalnego $F(z) = 0{,}1736$ dla $z = -0{,}939$, czyli prawdopodobieństwo tego, że $y = 1$, a nie $y = 0$ jest 0,1736 przy poziomie ceny $x = 100$.

Ad 2. a. Dla $F(z) = 0{,}5$, $z = 0$.

Stąd:

$$y = 0{,}58, \quad \text{czyli} \quad x = \frac{3{,}817 - 0{,}58}{0{,}037} = 87{,}5.$$

Proponowana cena powinna wynosić 87,5.

Ad 2. b. Dla $F(z) = 0{,}9$, $z = 1{,}28$.

Stąd:

$$y = 1{,}28 \times 0{,}493 + 0{,}58 = 1{,}21,$$

czyli:

$$x = \frac{3{,}817 - 1{,}21}{0{,}037} = 70{,}5.$$

Proponowana cena powinna wynosić 70,5.

## 2. Przykład na zastosowanie modelu LOGIT w prognozowaniu cen

Został oszacowany model odzwierciedlający zależność między zaoferowaną ceną a przyjęciem oferty o postaci:

$$y_t = 16 - 0{,}1x_t,$$

gdzie: $x_t$ - jest poziomem ceny.

PHZ planuje sprzedać pewną ilość towaru po cenie x = 150 $/t.

1) obliczyć prawdopodobieństwo przyjęcia tej oferty przez rynek,

2) przy jakiej cenie prawdopodobieństwo przyjęcia będzie równe 0,8?

Ad 1. Podstawiając x = 150 do równania regresji otrzymujemy:

$$y_t = 16 - 0{,}1 \times 150 = 1 = z.$$

Podstawiamy tę wartość do wzoru na dystrybuantę rozkładu logistycznego

$$P_i = F(z_i) = \frac{1}{1 + e^{-z_i}} = \frac{1}{1 + e^{-16 + 0{,}1 \times 150}} = 0{,}73.$$

Ad 2. Podstawiając P = 0,8 otrzymujemy $0{,}8 + 0{,}8\, e^{-z_i} = 1$

$$z = \frac{\log 0{,}8 - \log 0{,}2}{\log e} = 1{,}3864,$$

$$x = \frac{16 - 1{,}3864}{0{,}1} = 146{,}1 \text{ \$/t}.$$

Dariusz Rosati, Alicja Ryszkiewicz

## EXAMPLES OF PRICE FORECASTING BY MEANS OF SELECTED ECONOMETRIC METHODS

Applying concrete numerical examples the authors illustrate selected methods of price forecasting in foreign trade.

In the first part of the article there are presented examples of application of time-series models. These include autoregressive models (AR), moving-average models (MA), and mixed models (ARMA), combining elements of autoregressive and moving-average models.

The second part of the article contains examples of application of qualitative choice models in price forecasting as well as an example of application of PROBIT and LOGIT models.