# matematyka

## materiały metodyczne

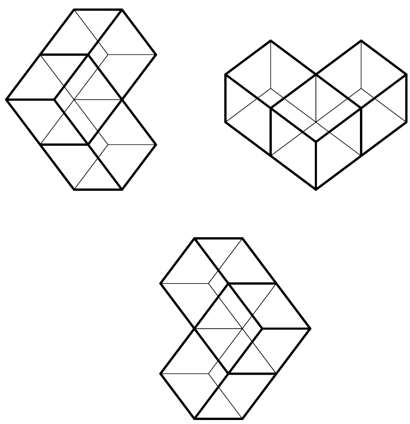
2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138217852516642742746639193200305992181741359662904357290033429526059563073813232862794349076323382988075319525101901157383418793070215408914993488416750924476146066808226480016847741185374234544243710753907774499206955170276183860626133138458300

redakcja
Ryszard J. Pawlak
Zofia Walczak

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

# II

# Nauczanie czynnościowe na lekcji matematyki




**Opracowanie**

**Anna Loranty**

**Helena Pawlak**

ROZDZIAŁ 1

# Psychologia poznawcza

Psychologia poznawcza to nurt teoretyczny we współczesnej psychologii, akcentujący znaczenie procesów poznawczych (odbioru i przetwarzania informacji) oraz wytworzonych na ich podstawie wewnętrznych struktur (poznawczej reprezentacji świata) w regulacji zachowania się człowieka ([2]).

Psychologia poznawcza zakłada między innymi, że

- człowiek jest układem przetwarzającym informacje, dzięki czemu rozwija się i poszerza swoją wiedzę i umiejętności,
- zachowanie człowieka zależy nie tylko od informacji, które docierają do niego z zewnątrz, ale także od zakodowanej już w pamięci wiedzy zdobytej w toku wcześniejszego uczenia się,
- podstawową drogą modyfikacji wiedzy, zachowania i charakteru człowieka jest celowe i systematyczne wychowanie.

Przedstawiciele tego kierunku psychologii to między innymi J. Piaget oraz J. Bruner.

Psychologia poznawcza zakłada, że w rozwoju człowieka szczególnie ważne są następujące trzy procesy:

**Interioryzacja** – przekształcanie się czynności zewnętrznych w wewnętrzne czynności umysłowe.

**Asymilacja** – proces pojawiający się w momencie spotykania się z nowym doświadczeniem podobnym do czegoś, co przeżyliśmy wcześniej i co możemy dopasować do istniejących schematów.

**Akomodacja** – proces pojawiający się w momencie spotykania się z nowym doświadczeniem którego włączenie do struktur poznawczych oznacza zmianę struktur już istniejących lub utworzenie nowych.

## 1.1. Interioryzacja, asymilacja i akomodacja a nauczanie matematyki

### Interioryzacja

Mamy z nią do czynienia na każdym etapie nauczania matematyki. Szczególnie istotna jest ona w momencie wprowadzania nowych pojęć – opona rowerowa „przekształca się” w narysowany w zeszycie okrąg, który z kolei „przekształca się” w obiekt matematyczny widoczny tylko w umyśle ucznia.

Oczywiście z punktu widzenia nauczania matematyki wszystkie działania nauczyciela powinny prowadzić do uzyskania tego ostatniego etapu. Jednocześnie należy tu dodać, iż dojście do etapu trzeciego nie jest możliwe bez etapu pierwszego i drugiego.

### Asymilacja

Asymilacja to wykorzystywanie wytworzonych wcześniej schematów do poszerzania swoich umiejętności. Mamy z nią do czynienia na przykład wtedy, gdy uczeń rozwiązuje typowe zadanie wykorzystując do tego poznane wcześniej metody.

### Akomodacja

Akomodacja to proces twórczy. Mamy z nią do czynienia wtedy, gdy muszą zostać wytworzone nowe schematy, gdyż „stare” nie wystarczają do rozwiązania problemu. Dotychczasowe strategie postępowania zawodzą. Uczeń musi odkryć nowy schemat - wiedza i umiejętności ucznia zostają istotnie poszerzone.

## Jean Piaget

Jednym z przedstawicieli psychologii poznawczej jest Jean Piaget, który w rozwoju człowieka wyróżnia cztery następujące etapy.

**Stadium sensomotoryczne (do ok. 2 lat)** Dziecko poznaje świat poprzez bezpośrednie postrzeganie i aktywność motoryczną. Stopniowo dziecko zaczyna zdawać sobie sprawę, że przedmioty są stałe i że można je ponownie znaleźć.

**Stadium przedoperacyjne (ok. 2-7)** Przedmioty i zdarzenia zaczynają nabierać znaczenia symbolicznego. Na przykład pomarańcze, jabłka i banany to są owoce ale dziecko musi jednak mieć możliwość kontaktu z nimi. Dziecko nie potrafi odwracać operacji.

**Stadium operacji konkretnych (ok. 7-11)** Dziecko potrafi dostrzegać przedmioty i zdarzenia z różnych punktów widzenia, opanowuje pojęcie stałości i relację wzajemności. Aby jednak rozwiązać jakiś problem dziecko potrzebuje manipulacji i eksperymentowania na przedmiotach rzeczywistych. Pod koniec tego okresu dziecko nabiera umiejętności odwracania operacji.

**Stadium operacji formalnych (od ok. 11 lat)** Stadium to charakteryzuje się rozwojem operacji formalnych i abstrakcyjnych. Dziecko potrafi analizować pojęcia oraz rozumieć zależności przestrzenne i czasowe. Potrafi logicznie myśleć o abstrakcyjnych danych i oceniać je według przyjętych kryteriów, formułować hipotezy i dedukować z nich możliwe konsekwencje. Potrafi konstruować teorie i wyprowadzać wnioski, mimo braku wcześniejszych doświadczeń na ten temat.

## Jerome S. Bruner

Kolejnym przedstawicielem psychologii poznawczej jest Jerome Bruner. Wyróżnia on trzy sposoby przetwarzania i przedstawiania informacji:

**Reprezentacja enaktywna** – mamy z nią do czynienia na przykład wówczas gdy uczeń wykonuje operacje na liczbach z wykorzystaniem obiektów, którymi może manipulować w rzeczywistości (np. „dodawanie” liczb z wykorzystaniem patyczków). Na tym etapie obiekty (pojęcia) poznawane są poprzez manipulowanie i działanie.

**Reprezentacja ikoniczna** – mamy z nią do czynienia na przykład wówczas gdy uczeń wykonuje operacje na liczbach z wykorzystaniem obiektów, które musi widzieć, ale nie musi nimi manipulować w rzeczywistości (np. „dodawanie” z wykorzystaniem rysunków). Na tym etapie obiekty (pojęcia) poznawane są poprzez wyobrażenia. Ważnym elementem tego etapu są rysunki.

**Reprezentacja symboliczna** – mamy z nią do czynienia na przykład wówczas gdy uczeń wykonuje operacje na liczbach posługując się „wyabstrahowanym” już pojęciem liczby (np. „dodawanie” z wykorzystaniem liczb). Na tym etapie obiekty (pojęcia) poznawane są poprzez posługiwanie się symbolami.

## Pierre van Hiele

Pierre van Hiele to kolejny przedstawiciel psychologii poznawczej. Wyróżnia on 5 poziomów myślenia matematycznego, z których tylko trzy pierwsze dotyczą uczniów szkół:

**Poziom wizualny** (Visual level) – nowe pojęcia kształtują się u dziecka w oparciu o obserwację przedmiotów, zjawisk i zdarzeń z najbliższego otoczenia.

**Poziom deskryptywny** (Descriptive level) – na tym poziomie obiekty postrzegane są wraz z ich składowymi, dziecko potrafi wyodrębniać cechy wspólne, formułować ogólne wnioski.

**Poziom logiczny** (Informal Deduction) – struktura rozumowania na tym poziomie opiera się na dedukcji. W rozumowaniu istotną role odgrywają prawa logiczne, a nie intuicyjne odczucia, czy empiryczne stwierdzenia.

Ostatnie dwa czyli poziom wnioskowania ścisłego (Deduction) oraz poziom ścisłości (Rigor or Abstraction) związane są z rozwojem studentów nauk ścisłych oraz zawodowych matematyków.

## 1.2. Nauczanie czynnościowe

Psychologia poznawcza, a w zasadzie wyróżnione przez nią etapy w rozwoju człowieka znalazły swoje odzwierciedlenie w jednym ze stylów nauczania matematyki - czynnościowym nauczaniu matematyki.

Czynnościowe nauczanie matematyki jest postępowaniem dydaktycznym uwzględniającym stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki, równolegle z psychologicznym procesem interioryzacji, prowadzącym od czynności konkretnych i wyobrażeniowych do operacji abstrakcyjnych ([4]).

Organizując nauczanie matematyki z wykorzystaniem nauczania czynnościowego wykorzystujemy trzy rodzaje zadań:

1. Zadania kształtujące czynności konkretne.
2. Zadania kształtujące czynności wyobrażeniowe.
3. Zadania kształtujące czynności abstrakcyjne.

Podstawowym zadaniem nauczyciela wykorzystującego ten styl nauczania matematyki jest taka organizacja kształcenia aby kształtowanie się poszczególnych pojęć matematycznych odbywało się poprzez rozwiązywanie zadań ze wszystkich trzech grup. Oczywiście czas rozwiązywania zadań z poszczególnych grup powinien być dostosowywany do każdego ucznia indywidualnie. Należy jednak stosować zasadę, która mówi, że najpierw powinny pojawiać się zadania kształtujące czynności konkretne, później czynności wyobrażeniowe, a na końcu zadania kształtujące czynności abstrakcyjne.

## Zadania kształtujące czynności konkretne

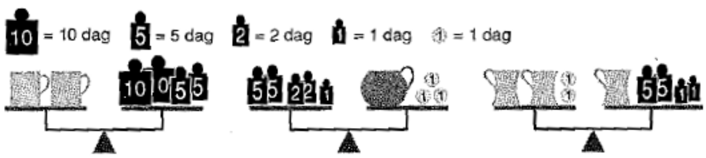
**Zadanie 1** (SP)**.** Na stole połóż 4 patyczki. Ile patyczków musisz dołożyć, aby na stole leżało 11 patyczków?

**Zadanie 2** (SP)**.** Zegnij wycięty z papieru kwadrat wzdłuż prostej przechodzącej przez środki dwóch przeciwległych boków. Co możesz powiedzieć o częściach na jakie został podzielony kwadrat? Czy możesz złożyć kwadrat wzdłuż innej prostej, tak aby figury powstałe po złożeniu miały podobną własność.

**Zadanie 3** ([5], PG)**.** Zbadaj cień wykonanego z plastiku modelu kwadratu (prostokąta) w różnych położeniach. Ustaw model tak, aby cieniem kwadratu był kwadrat (prostokąta był prostokąt).

**Zadanie 4** ([5], SP/G)**.** Dopasuj równanie do sytuacji na wadze

A) $x + 3 = 15$ B) $2x = 30$ C) $2x + 2 = x + 12$



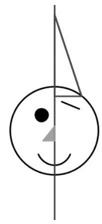

Opowiedz co będziesz zdejmował z obu szalek wagi, aby znaleźć niewiadomą. Zapisz rozwiązanie równania. Sprawdź, czy dobrze obliczyłeś masę kubka.

## Zadania kształtujące czynności wyobrażeniowe

**Zadanie 1** (SP)**.** Ile gwiazdek należy dorysować aby było ich 9?

**Zadanie 2** (SP)**.**

Uzupełnij rysunek tak aby był symetryczny względem pionowej prostej. Pokoloruj uzupełniony rysunek.

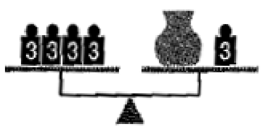


**Zadanie 3** ([6], SP)**.** Masz kawałek prostego drutu długości 12 cm. Czy można go tak zgiąć, aby nadać mu kształt kwadratu?

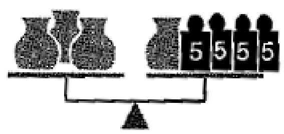
**Zadanie 4** ([1], SP)**.** Gra - Czyja liczba większa? W grze bierze udział troje dzieci: sędzia i dwóch zawodników. Sędzia pisze na środku kartki liczbę dwucyfrową. Każdy gracz rzuca kostką i dopisuje wynik albo z prawej, albo z lewej strony liczby, tak by liczba była jak największa. Jeśli podejmie dobrą decyzję, z której strony dopisać nową cyfrę, dostaje punkt. Rozgrywka się kończy, gdy tworzona liczba ma 15 cyfr. Wygrywa ten gracz, który zdobył więcej punktów.

**Zadanie 5** ([5], SP/G)**.** Oblicz w pamięci ile waży jeden flakonik, wiedząc że liczby na ciężarkach oznaczają ich wagę w dekagramach.

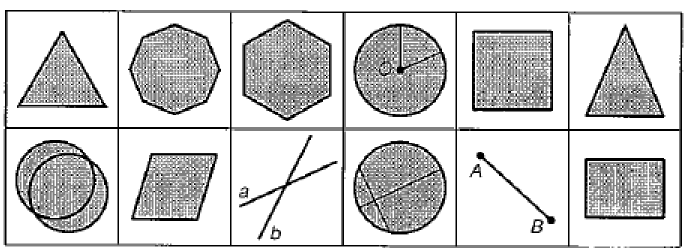
A)

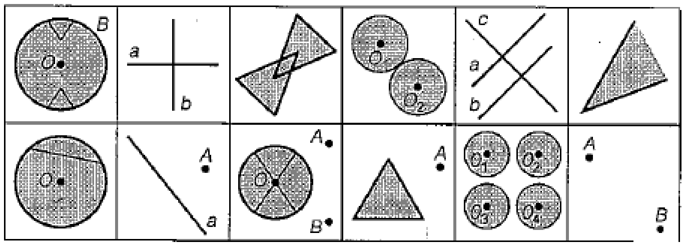



B)




**Zadanie 6** ([5], G)**.** Gra „połóż patyczek”: Każdy uczeń ma patyczki innego koloru. Uczniowie po kolei kładą po jednym patyczku na figurach tak aby były one osią symetrii danej figury. Nie wolno położyć dwóch patyczków na tej samej osi symetrii. Jeśli uczeń nie wie jak położyć patyczek opuszcza kolejkę. Gra toczy się do momentu, aż żaden z uczniów nie potrafi położyć patyczka. Wygrywa ten uczeń, który położył najwięcej patyczków.





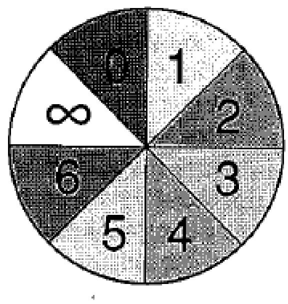
## Zadania kształtujące czynności abstrakcyjne

**Zadanie 1** (SP)**.** Jaką liczbę trzeba dodać do 3 aby uzyskać 8?

**Zadanie 2** (SP)**.** Przez jaką liczbę pomnożyć 15, aby otrzymać liczbę 1500?

**Zadanie 3** (na podstawie [5], G)**.**

Zabawa w „bączek”. Wykonujemy z kartonu koło do bączka takie jak na rysunku obok. Środek koła przebijamy i wkładamy w niego zapałkę. Uczniowie po kolei kręcą bączkiem. Kiedy wypadnie[a] pole z numerem $0, 1, 2, 3, 4, 5$ lub $6$ uczeń musi podać przykład figury posiadającej odpowiednio $0, 1, 2, 3, 4, 5$ lub $6$ osi symetrii. W przypadku „wypadnięcia” pola z symbolem $\infty$ uczeń powinien podać przykład figury posiadającej nieskończenie wiele osi symetrii. Za każdą poprawną odpowiedź uczeń uzyskuje 1 pkt, gdy nie potrafi znaleźć odpowiedniej figury lub poda błędny przykład, nie dostaje punktu. Nie wolno wymieniać ponownie figury, którą już ktoś wcześniej wybrał. Wygrywa ten, kto uzyska najwięcej punktów.




[a]Wcześniej nauczyciel musi ustalić, jak odczytujemy wynik otrzymany na bączku

**Zadanie 4** ([6], SP)**.** Narysuj taki wielokąt, aby 4 spośród jego przekątnych tworzyły kwadrat. Kwadrat pomaluj na zielono

**Zadanie 5** ([1], SP)**.** Czy jest taki prostopadłościan, w którym dokładnie cztery ściany są kwadratami?

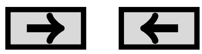
**Zadanie 6** (SP/G)**.** Marta kupiła 2 długopisy i kilka ołówków. Razem kupiła 13 przedmiotów. Ile ołówków kupiła Marta? Oznacz niewiadomą liczbę ołówków przez $x$, ułóż odpowiednie równanie i rozwiąż je.

**Zadanie 7** (G)**.** Ile osi symetrii może mieć trójkąt?

ROZDZIAŁ 2

# Działania na liczbach całkowitych – strzałki

Przygotowujemy zestaw karteczek jednakowej długości z narysowanymi strzałkami:



Posługując się nimi, będziemy budować liczby całkowite.

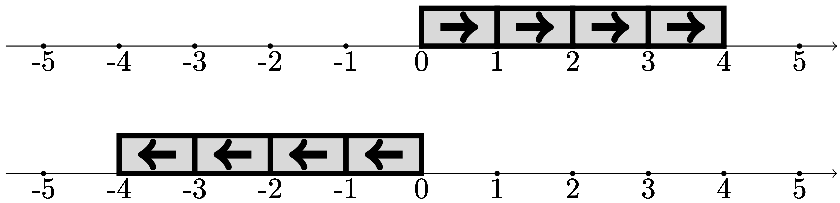
Aby przedstawić liczbę 4 układamy pasek liczbowy złożony z 4 strzałek skierowanych w prawo.

Przedstawimy teraz liczbę (-4). Tworzymy pasek także z 4 strzałek, ale ponieważ liczba (-4) jest przeciwna do liczby 4, więc strzałki układamy w przeciwną stronę.

Zmiana zwrotu strzałek odpowiada dopisaniu znaku minus przed liczbą.

„Układanie pasków” możemy połączyć z interpretowaniem liczb na osi liczbowej. Z jednej strony ułatwi to uczniom zrozumienie pewnych zagadnień związanych z operacjami na tych liczbach, a z drugiej włączenie operacji manualnych ułatwi (i dla większości uatrakcyjni) odkrywanie zależności dla liczb ujemnych.

Oto opis powyższych sytuacji przy włączeniu do obserwacji osi liczbowej. Rysujemy na kartce papieru oś liczbową, przy czym staramy się, by jednostka była dokładnie taka sama jak długość boku kartki, a następnie układamy kartki.

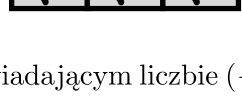



Zauważmy, że w ten sposób możemy łatwo przejść do interpretowania wartości bezwzględnej: W obu przypadkach do ułożenia potrzebowaliśmy 4 kartoniki.

## 2.1. Dodawanie liczb całkowitych

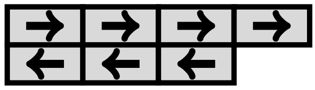
Posługując się pojęciem np. długu i zysku możemy łatwo stwierdzić, że $(-3)+3=0$. To będzie stanowiło jedynie punkt wyjścia do bardziej złożonych rozważań, które mają na celu odkrycie przez uczniów reguł dodawania liczb całkowitych. Jest to równocześnie przygotowanie uczniów do budowania modeli dydaktycznych tworzących intuicję odnoszącą się w tym przypadku do dodawania liczb całkowitych. Ważną rolę pełni w tym przypadku możliwość manualnego operowania kartkami, przy jednoczesnym matematycznym interpretowaniu tych operacji.

Przypomnijmy – empirycznie zostało stwierdzone, że $(-3)+3=0$. Przechodzimy do operacji manualnych. Układamy, jeden pod drugim, paski liczbowe odpowiadające liczbom $(-3)$ i 3.



Strzałki na pasku odpowiadającym liczbie $(-3)$ są skierowane przeciwnie niż na pasku odpowiadającym liczbie 3 i jest taka sama liczba strzałek na każdym pasku. Po dodaniu nie powinna zostać żadna strzałka. Uzyskamy to odkładając na bok pary strzałek o przeciwnych zwrotach.

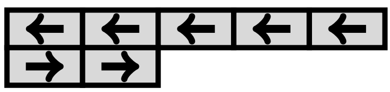
**Obliczmy:** $4 + (-3)$



Po odrzuceniu par strzałek przeciwnie skierowanych, pozostanie 1 strzałka skierowana w prawo. Odpowiada ona liczbie 1.

$$4 + (-3) = 1$$

**Obliczmy:** $(-5) + 2$



Odrzucamy pary strzałek przeciwnie skierowanych. Pozostały 3 strzałki skierowane w lewo, które odpowiadają liczbie $(-3)$.

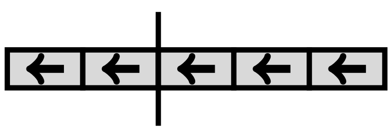
$$(-5) + 2 = -3$$

**Zadanie 1.** Sprawdź za pomocą pasków liczbowych że $(-3) + 7 = 4$.

## 2.2. Opracowywanie reguł

**Obliczmy:** $(-2) + (-3)$

1. Układamy paski liczbowe dla obu liczb, jeden za drugim.



Powstał pasek odpowiadający liczbie $(-5)$. Nie ma par strzałek przeciwnie skierowanych, więc nic nie usuwamy.

$$(-2) + (-3) = -5$$

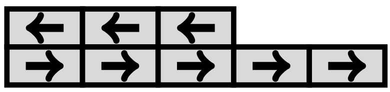
2. Wiemy, że liczba strzałek przedstawiających liczbę, jest równa wartości bezwzględnej tej liczby.

3. Liczba strzałek w sumie $(-2)+(-3)$ jest równa $2+3 = |-2|+|-3| = 5$, wobec tego $(-2) + (-3) = -(2 + 3) = -5$.

Odkryliśmy regułę: *Aby dodać dwie liczby całkowite ujemne, dodajemy ich wartości bezwzględne i przed wynikiem stawiamy znak minus.*

**Obliczmy:** $(-3) + 5$

1. Układamy paski liczbowe:



2. Po usunięciu par strzałek przeciwnie skierowanych pozostały dwie strzałki skierowane w prawo.

$$(-3) + 5 = 2$$

Mamy:

$$|-3| = 3 \quad |5| = 5 \quad |5| > |-3|$$
$$|5| - |-3| = 5 - 3 = 2$$

3. Do wyniku dopisujemy znak tej liczby, która ma większą wartość bezwzględną, czyli w tym przypadku plus.

$$(-3) + 5 = +2 \qquad (+2 = 2).$$

**Zadanie 2.** Opracuj sytuację typu $(-6) + 2$ oraz regułę dodawania liczb całkowitych przeciwnych znaków.

**Zadanie 3.** Opracuj sposób „manualnego interpretowania” odejmowania liczb całkowitych za pomocą karteczek z narysowanymi strzałkami.

ROZDZIAŁ 3

# Substantial Learning Environment (SLE)

Idea budowania szeroko rozumianych środowisk edukacyjnych Substantial Learning Environment (SLE) jest w wielu krajach szeroko propagowana i doceniana zarówno przez praktyków (nauczycieli), jak też naukowców badających te zagadnienia zarówno od strony teoretycznej, jak też poprzez badania dotyczące osiągnięć uczniów (np. E. Ch. Wittmann, M. Hejný), a spośród polskich specjalistów m. in. E. Swoboda, E. Jagoda.

Problematyka ta stała się tak bardzo aktualna gdyż jak wynika z badań Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej:

- W przedszkolach obserwuje się, że aż 56% dzieci jest uzdolnionych matematycznie a 20% jest wybitnie uzdolnionych matematycznie.
- W klasach starszych już tylko 5% uczniów wykazuje uzdolnienia matematyczne.

Jak możemy uczniom pomóc? Co zrobić, by nie traciły one w procesie edukacji uzdolnień które już posiadają?

Pytania te i propozycje rozwiązań (związane z SLE) są w Polsce dość szeroko badane wśród dzieci, do pierwszego etapu edukacyjnego włącznie. Później problemy matematyczne nieco komplikują się i komplikują się też stosowane rozwiązania metodyczne. W rzeczywistości środowiska edukacyjne stają się mocno ograniczone, często wiążemy je bądź z podstawowymi środkami (klasy, podręczniki) lub bardzo złożonymi programami komputerowymi, które źle wykorzystane służą jedynie ułatwianiu pracy uczniów, bez długotrwałych korzyści dydaktycznych.

Nie negując roli komputerowych programów edukacyjnych oraz innych rozwiązań edukacyjnych, przedstawiamy koncepcję środowiska edukacyjnego – „Kartoniki", która z jednej strony jest przedłużeniem znanego w wielu polskich ośrodkach edukacyjnych środowiska „Kafelki" przeznaczonego dla wychowania przedszkolnego oraz pierwszego etapu edukacji, a z drugiej strony ułatwieniem zrozumienia bieżącego materiału (ze szczególnym uwzględnieniem klasy IV, czyli na początku drugiego etapu edukacji) oraz budowania podstaw twórczości matematycznej uczniów.

Zaletą środowiska edukacyjnego – „Kartoniki" jest jego prostota gdyż szablony można bez trudu wyciąć z kartonu, kolorowego papieru itp.

Powróćmy raz jeszcze do pytań postawionych na początku: Jak możemy uczniom pomóc? Co zrobić, by nie traciły one w procesie edukacji uzdolnień które już posiadają?

Modyfikując sformułowanie E. Gruszczyk-Kolczyńskiej sformułujemy tezę: *Powinniśmy inspirować uczniów do działalności matematycznej i doceniać (okazywać zainteresowanie) każde odkrycie, nawet gdy dotyczy błahych z pozoru sytuacji i zdań.*

## 3.1. Kartoniki

W opracowaniu tym główny nacisk położymy na pokazanie przykładów wykorzystywania tego środowiska do poszukiwania niestandardowych rozwiązań metodycznych służących z jednej strony pogłębieniu zainteresowania uczniów matematyką, a z drugiej strony osiągania ważnych celów, jak np. liczenie w pamięci.

Zanim jednak przejdziemy do tych zagadnień, omówimy sposób budowania podstaw tego środowiska (patrz [6]). Proces ten rozpoczyna się od najprostszych operacji[1]:

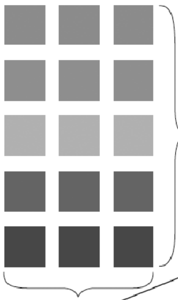
[1] Zadania zaczerpnięte z [6]

## Mnożenie liczb

Dzieci obliczały, ile okien widać w jednym wieżowcu.

Aneta $8 + 8 + 8 + 8 = 32$
Darek $4 \cdot 8 = 32$
Tomek $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 32$
Monika $8 \cdot 4 = 32$

Dodawanie jednakowych liczb można zastąpić mnożeniem.
Układając kartoniki, obliczmy $5 \cdot 3$.



$\underbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3}_{\text{5 liczb}} = 15$ $\qquad \overbrace{5 \cdot 3}^{\text{iloczyn}} = \overbrace{15}^{\text{iloczyn}}$

5 razy po 3 kartoniki

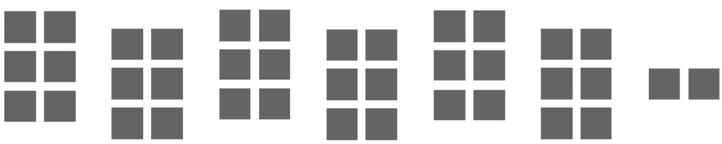
$\underbrace{5 + 5 + 5}_{\text{3 liczby}} = 15$ $\qquad \overbrace{3 \cdot 5}^{\text{iloczyn}} = \overbrace{15}^{\text{iloczyn}}$

3 razy po 5 kartoników

Później pojawiają się bardziej złożone elementy, gdzie kartoniki stanowią model obserwacyjny dla różnych sytuacji, np.

Agatka przyniosła z ogródka 38 truskawek, które układa na galaretkach, po 6 truskawek na każdej. Jaką największą liczbę galaretek może ozdobić truskawkami? Ile truskawek pozostanie?

Zamiast truskawek rozdzielmy 38 czerwonych kartoników po 6 sztuk.



W ten sposób kartoniki stają się modelem dydaktycznym dla różnych problemów (kolejny etap budowania tego środowiska). Przedstawimy teraz znane zadanie o grzybobraniu.

**Zadanie 4** (Sz. Jeleński „Lilavati”).
Dziadek z czterema swoimi wnukami wyruszył do lasu na grzyby. W lesie każdy na swoją rękę poszedł na poszukiwanie. Po pół godzinie dziadek siadł

pod drzewem, aby wypocząć; przeliczył zebrane grzyby i okazało się, że zebrał ich 45. Wnet nadbiegli wnuczkowie – wszyscy z pustymi rękami; żaden nie znalazł ani jednego grzyba.

– Dziaduniu – prosi jeden – daj mi trochę swych grzybów, na pewno to mi przyniesie szczęście!

– I mnie, dziadku!

– I mnie daj!

– I mnie też!

Dziadek obdarzył każdego i w ten sposób rozdał wszystkie grzyby. Znów chłopcy rozbiegli się po lesie na poszukiwanie grzybów, które miało jednak bardzo różnorodny przebieg. Jeden chłopiec znalazł istotnie 2 grzyby, drugi natomiast dwa grzyby zgubił, trzeci znalazł tyle, ile dostał od dziadka, a czwarty zgubił połowę otrzymanych grzybów. Gdy chłopcy wrócili do domu i zliczyli swe grzyby, okazało się, że wszyscy mają jednakową ich ilość. Ile grzybów dostał każdy z chłopców od dziadka i ile każdy z nich miał gdy wrócił do domu?

**Rozwiązanie.**

**Dane**

- osoby biorące udział w grzybobraniu: dziadek, wnuczek 1, wnuczek 2, wnuczek 3, wnuczek 4;
- liczba grzybów zebranych i rozdanych przez dziadka: 45 sztuk;
- na koniec wszyscy chłopcy mieli po tyle samo grzybów;
- jak zmienił się stan grzybów posiadanych przez wnuczków:
  - Wnuczek 1 – znalazł 2 grzyby;
  - Wnuczek 2 – zgubił 2 grzyby;
  - Wnuczek 3 – znalazł tyle grzybów ile dostał;
  - Wnuczek 4 – zgubił połowę otrzymanych od dziadka grzybów.

**Szukane**

Liczba grzybów jaką dostał każdy z wnuczków od dziadka.

**Rozwiązanie z wykorzystaniem kartoników**

Oznaczmy za pomocą kartonika ■ liczbę grzybów jaką otrzymał wnuczek 3 od dziadka.

Ponieważ wnuczek 3 znalazł tyle grzybów ile dostał to na koniec dnia liczbę jego grzybów reprezentują dwa kartoniki ■ ■. Oczywiście każdy z kartoników reprezentuje taką samą liczbę grzybów.

Wnuczek 4 zgubił połowę grzybów jaką dostał i po powrocie do domu miał ich tyle samo co wnuczek 3 czyli dwa kartoniki, a więc liczbę grzybów jaką otrzymał od dziadka możemy oznaczyć jako: ■ ■ ■ ■.

Ponieważ wnuczek 1 znalazł 2 grzyby, a wnuczek 2 zgubił 2 grzyby więc razem po powrocie do domu mieli tyle grzybów ile otrzymali od dziadka. Ponieważ każdy z wnuczków po powrocie do domu miał tyle samo grzybów, więc razem wnuczek 1 i 2 po powrocie do domu mieli tych grzybów 2 razy więcej niż wnuczek 3 czyli ■ ■ ■ ■.

Ostatecznie liczbę grzybów jaką mieli chłopcy po powrocie do domu możemy przedstawić następująco za pomocą kartoników:

Wnuczek 1 i 2: ■ ■ ■ ■
Wnuczek 3: ■ ■
Wnuczek 4: ■ ■ ■ ■

Zauważmy jednak, że w przypadku wnuczka 3 jeden z kartoników oznacza grzyby jakie on znalazł. Oznaczmy go więc innym kolorem. Mamy, więc:

Wnuczek 1 i 2: ■ ■ ■ ■
Wnuczek 3: ■ ■
Wnuczek 4: ■ ■ ■ ■

Szare kartoniki oznaczają grzyby rozdane przez dziadka. Dziadek rozdał 45 grzybów. Szarych kartoników mamy 9 i każdy z nich oznacza taką samą liczbę grzybów. Mamy $45 : 9 = 5$, czyli jeden szary kartoniki oznacza 5 grzybów.

Zatem

Wnuczek 3 – otrzymał od dziadka 5 grzybów;
Wnuczek 4 – otrzymał od dziadka 20 grzybów;

Oczywiście po powrocie do domu wnuczek 3 miał 10 grzybów (znalazł tyle samo ile dostał od dziadka). Zatem po powrocie do domu każdy z wnuczków miał 10 grzybów. Ponieważ wnuczek 1 znalazł 2 grzyby, więc od dziadka otrzymał $10-2=8$ grzybów. Wnuczek 2 zgubił 2 grzyby, więc od dziadka otrzymał $10+2=12$ grzybów. Ostatecznie mamy, że

Wnuczek 1 – otrzymał od dziadka 8 grzybów;
Wnuczek 2 – otrzymał od dziadka 12 grzybów;
Wnuczek 3 – otrzymał od dziadka 5 grzybów;
Wnuczek 4 – otrzymał od dziadka 20 grzybów;

**Sprawdzenie.**

- grzyby rozdane przez dziadka: $8+12+5+20=45$ (zgodne z treścią zadania);
- liczba grzybów jaką miał każdy z wnuczków po powrocie do domu

  Wnuczek 1 – $8+2=10$
  Wnuczek 2 – $12-2=10$
  Wnuczek 3 – $5+5=10$
  Wnuczek 4 – $20:2=10$

  czyli każdy miał tyle samo grzybów (zgodne z treścią zadania).

Wróćmy teraz jeszcze do zadania z rozdziału "O arytmetycznych metodach rozwiązywania zadań z treścią".

**Zadanie 5.** Pracownik wydał $\frac{1}{3}$ swego miesięcznego wynagrodzenia na jedzenie i rozrywkę, $\frac{2}{9}$ na ubrania oraz $\frac{2}{7}$ na czynsz i światło. Pozostało mu 290 zł. Ile miesięcznie zarabia pracownik?

Wiedząc jaką część wynagrodzenia wydał pracownik na jedzenie i rozrywkę, ubrania oraz czynsz i światło, możemy policzyć jaką część wynagrodzenia wydał pracownik?

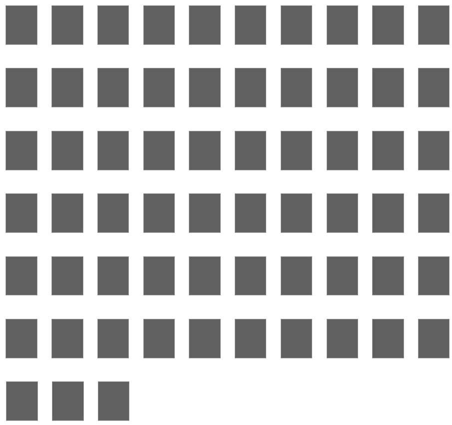
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{7}=\frac{53}{63}$$

Wiedząc jaką część wynagrodzenia wydał pracownik, możemy policzyć jaka część wynagrodzenia mu została?

$$1-\frac{53}{63}=\frac{10}{63}$$

Pracownikowi zostało 290 zł, czyli $\frac{10}{63}$ pensji. Przedstawmy teraz tę sytuację wykorzystując do tego kwdraciki.

Całą pensję pracownika możemy "zobrazować" za pomocą 63 kwadracików ułożonych w specjalny sposób:



Oczywiście jeden "pełny" rząd czyli 10 kwadracików oznacza $\frac{10}{63}$ pensji pracownika tzn. 290 zł. Zatem jeden kwadracik oznacza 29 zł. Teraz już łatwo możemy obliczyć pensję pracownika:

$$6 \cdot 290 + 3 \cdot 29 = 1740 + 87 = 1827$$

Dalej zadanie rozwiązujemy już identycznie jak w rozdziale "O arytmetycznych metodach rozwiązywania zadań z treścią".

Powstaje pytanie, jak nauczyciel może niestandardowo wykorzystać omawiany model dydaktyczny?

W dobie kalkulatorów i komputerów liczenie w pamięci może wydawać się rzeczą mało nowoczesną. Czy rzeczywiście? Przytoczymy tutaj wypowiedź A. Klesyka, znanego menedżera, prezesa zarządu PZU zamieszczoną w Gazecie Wyborczej[2]

> *W latach 90. w McKinsey & Company odpowiadałem za rekrutację absolwentów [...]. W czasie rozmowy kwalifikacyjnej kazałem obliczyć 2,5% z 1,5 miliarda. Pytany najczęściej brał kartkę*

[2] `(http://wyborcza.pl/1,76842,11593341,Prezes_PZU_Szukamy_tych_ktorzy_mysla_samodzielnie.html)`

*i długopis.*

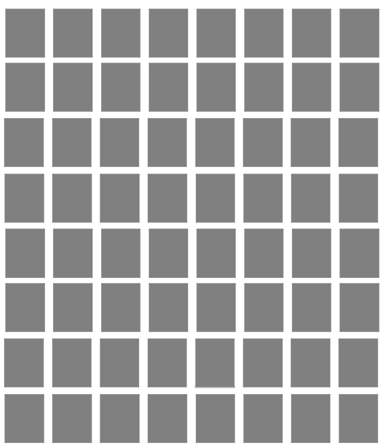
*– Nie na kartce tylko w głowie – mówiłem.*

*– Przecież mam kalkulator – bronił się.*

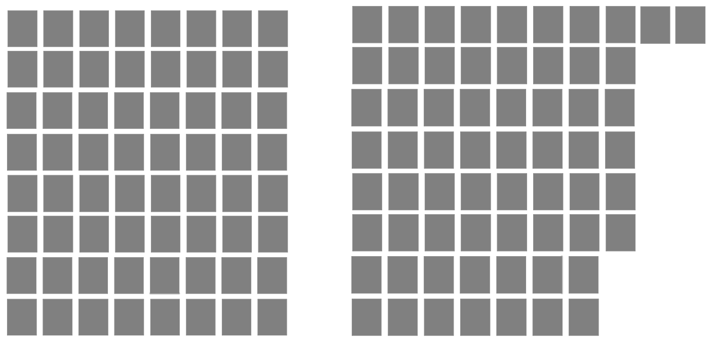
*Człowieku – mówiłem wówczas – wyobraź sobie sytuację że idziemy na kolację, gdzie robimy wielki interes. Masz prezesa dużej firmy, który opowiada o tym, jak on to sfinansuje. I pyta cię, którą opcję wybierasz. A ty mówisz, przepraszam, muszę wyciągnąć kartkę, bo nie wiem ile to jest 2,5% z 1,5 miliarda.[...] Komputer wiele ułatwia, przyspiesza uzyskiwanie danych i... wyłącza myślenie. [...] Maszyna nigdy nie odpowie na pytanie: Czy działanie podejmowane na podstawie tych danych w ogóle ma sens.*

Jak zatem zachęcić uczniów do liczenia w pamięci? Najpierw zbudujmy ich zainteresowanie, a potem pokażmy, że sami mogą odkrywać ciekawe i przydatne sytuacje.

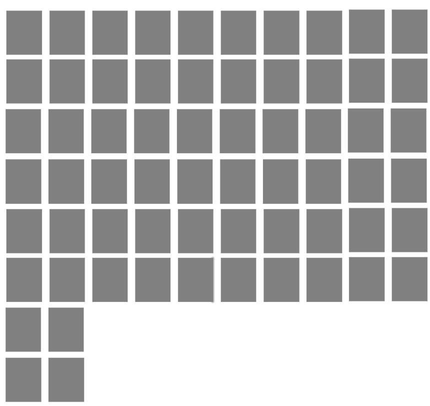
Zaczynamy od bardzo prostego spostrzeżenia, że $8 \cdot 8 = 64$ (liczba 8 nie ma tu znaczenia, każdy uczeń może budować swoje własne rozumowanie z dowolną inną liczbą, np. 7, 12, itp.). Ułóżmy z kartoników model odpowiadający tej sytuacji.



Teraz możemy zmienić położenie kartoników. Wg wzoru (uwaga liczba przekładanych kartoników też nie jest istotna; ze względu jednak na ostateczny cel warto ukierunkować uczniów by przekładali kartoniki w liczbie takiej, by z czynnika uzyskać 10, np. $49 = 7 \cdot 7$, przekładamy 3 kartoniki, bo $7 + 3 = 10$, $144 = 12 \cdot 12$, przekładamy 2 kartoniki, bo $12–2 = 10$):



Postępujemy tak dalej otrzymując układ kartoników przedstawiony na rysunku.



Oczywiście łączna liczba kartoników nie uległa zmianie, jest ich nadal 64. Jak można jednak opisać układ kartoników na rysunku? Np. w postaci: $64 = 8^2 = 6 \cdot 10 + 4$, a teraz opiszmy to uwzględniając wyjściowe spostrzeżenie i wykonywane operacje (tu musimy zastosować pewne rozwiązania heurystyczne, np. pytania naprowadzające):

$$64 = (8 - 2) \cdot (8 + 2) + 4.$$

Powtarzając różne próby (przy różnych liczbach) dochodzimy do wzoru (decyzja należy do nauczyciela – możemy ten wzór tylko opisać słownie):

$$a^2 = (a + b) \cdot (a–b) + b^2.$$

Uczniowie odkryli (empirycznie – poprzez doświadczenia) nowy wzór! Warto pokazać teraz jaki on jest użyteczny. Zanim to jednak zrobimy sięgnijmy do podstawy programowej z matematyki dla II etapu edukacyjnego (punkt 6) ([7]).

> Uczeń: [. . . ]
> 2) stosuje oznaczenia literowe nieznanych wielkości liczbowych i zapisuje proste wyrażenia algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym. [. . . ]

Możemy więc uznać, że nie odbiegamy wyraźnie od podstawy programowej. Przejdźmy zatem do zastosowań odkrytego wzoru.

Czy potrafimy obliczyć w pamięci $13^2$? Jeśli skorzystamy z odkrytego wzoru – zadanie będzie łatwe!

Co musimy zrobić, by z 13 otrzymać 10 – oczywiście odjąć 3. Wtedy (na początku można to zapisywać, a potem już staramy się liczyć tylko w pamięci):

$$13^2 = (13 + 3) \cdot (13–3) + 3^2 = 16 \cdot 10 + 9.$$

Ponieważ mnożenie przez 10 jest łatwe otrzymujemy szybko wynik:

$$13^2 = 16 \cdot 10 + 9 = 160 + 9 = 169.$$

Bardziej dociekliwym (uzdolnionym) uczniom możemy zaproponować policzenie, np. $98^2$.

Możemy teraz zrobić dalszy krok: zaproponować uczniom odkrycie innego sposobu liczenia w pamięci.

Załóżmy, że mamy obliczyć $45^2$. Zgodnie z naszym wzorem mamy (tym razem zapisujmy)

$$45^2 = (45 + 5) \cdot (45–5) + 5^2 = 50 \cdot 40 + 25 = 2000 + 25 = 2025.$$

Zaobserwujmy pewną prawidłowość:

$$\mathbf{5^2 = 25}$$

$$\mathbf{45^2 = 2025}$$

$$\mathbf{4 \cdot (4 + 1) = 4 \cdot 5 = 20}$$

Teraz już można obliczać (w pamięci!) wiele potęg liczb z cyfrą jedności 5, np. $105^2 = 11025$.

# Bibliografia


[1] M. Ciosek, M. Legutko, S. Turnau, E. Urbańska, *Matematyka dla ciebie*, kl.4, Nowa Era, 2002.

[2] Encyklopedia PWN - http://encyklopedia.pwn.pl/

[3] Sz. Jeleński, *Lilavati. Rozrywki matematyczne*, WSiP, 1992.

[4] Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, WSiP, Warszawa 1980.

[5] H. Siwek, *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa 1998.

[6] R. J. Pawlak, K. Gałązka, H. Pawlak, A. Warężak, *Matematyka krok po kroku*, kl. 4, Res Polona, Łódź 2012.

[7] Podstawa programowa (matematyka II poziom edukacyjny) http://www.men.gov.pl/images/do_pobrania/Zalacznik_2.pdf

NOWOCZESNY
NAUCZYCIEL
MATEMATYKI

publikacja bezpłatna

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

ISBN 978-83-7969-490-7

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62