

matematyka

materiały metodyczne

2,71828182845904523846264338427427724769353354759457138177825186427427466291932003098921817413596920435729653429528265630758132328827943460763232382988075319525121901157326416792077621546891489348841675050447614606806326482016847741185374234544242710753077448920695517027618386062613313845832

redakcja

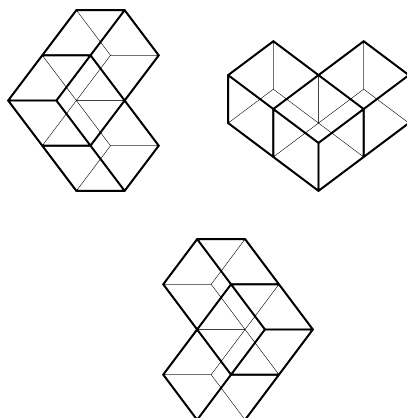
Ryszard J. Pawlak
Zofia Walczak



WYDAWNICTWO
UNIwersytetu
ŁÓDZKIEGO

VI

Matematyka w szkole ponadgimnazjalnej



Opracowanie

Andrzej Rychlewicz

ROZDZIAŁ 1

Wstęp

Rola nauczyciela we współczesnej szkole przekształcanej przez rozwój technologiczny ulega ciągłym przeobrażeniom. Nauczyciel wkracza w inny wymiar pracy i wymagań, które nie przystają do tego, czego sam doświadczył w swojej edukacji. Generuje to szereg nowych problemów, przed rozwiązaniem których staje współczesny nauczyciel.

Zajęcia mają na celu przygotowanie nauczycieli do otwartej i twórczej postawy wobec aktualnych podstaw programowych i zmian zachodzących w systemie edukacji oraz kształcenie umiejętności doboru właściwych rozwiązań metodycznych, także tych uwzględniających techniki ICT, z uwzględnieniem etapu psychofizycznego rozwoju ucznia kształcącego się na IV etapie edukacyjnym.

Niepowodzenia szkolne najczęściej związane są z matematyką. Przewyższenia trudności związanych z tym przedmiotem nie ułatwiają metody stosowane przez większość nauczycieli, w tym także korepetytorów. Znaczna część edukacji matematycznej opiera się na kształceniu umiejętności rozwiązywania zadań. Niestety rozwiązywanie zadań na lekcji w większości polega na podaniu, często też w oparciu o niewielką inwencję uczniów, metody rozwiązania, a następnie wielokrotne wyćwiczenie sposobu rozwiązania zadania, który staje się najczęściej algorytmem. Stosowna jest tu zasada, że im słabszy uczeń, tym metodyka rozwiązywania zadań w większym stopniu polega na podaniu metody zamiast jej uzyskania.

Taki sposób podejścia wydaje się łatwiejszy w stosowaniu, ale jego skuteczność maleje wraz z czasem od przeprowadzenia odpowiedniej lekcji, a po-

za tym jest sprzeczny z wiedzą metodyczną. Jest on w sprzeczności np. z teorią rozwiązywania zadań zaproponowaną przez Georga Pólya w myśl której rozwiązywanie zadań przebiega w czterech fazach: Patrz i myśl, Planuj, Działaj, Spójrz wstecz. Należy zatem starać się zrozumieć zadanie, poszukiwać związków między danymi i zaproponować metodę, a potem ją zrealizować, aby w końcu oddać się chwili refleksji nad zaproponowanym sposobem rozwiązania, a nie tylko powielać gotowe rozwiązanie.

Celem zajęć prowadzonych na kursie było wypracowanie takich technik i metod pracy z uczniami, które będą zachęcały uczniów do twórczej postawy, do koncepcyjnego podejścia do rozwiązywania zadań, a także do odejścia od schematu i nadmiernej algorytmizacji.

1.1.

Treści nauczania

Podczas trwania Projektu nauczyciele uczący matematyki w szkołach ponadgimnazjalnych wzmocnili swoje kompetencje między innymi w następujących działach:

1. Funkcja kwadratowa, równania i nierówności kwadratowe, układy równań i nierówności drugiego stopnia, okrąg i koło w układzie współrzędnych.
2. Funkcje wielomianowe i wymierne, równania i nierówności wielomianowe, układy równań.
3. Potęga o wykładniku rzeczywistym, funkcje wykładnicze, logarytmy i funkcje logarytmiczne.
4. Stereometria.
5. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.
6. Elementy analizy matematycznej.

ROZDZIAŁ 2

Przykładowe zadania

2.1.

Funkcja kwadratowa

Funkcja kwadratowa to jedno z najważniejszych pojęć w nauce matematyki w szkole ponadgimnazjalnej. Do zagadnień z nią związanych sprowadza się wiele problemów rozważanych w zadaniach optymalizacyjnych, w geometrii analitycznej, geometrii klasycznej, czy też w zadaniach z kontekstem realistycznym, jednakże interesujące są problemy dotyczące samej tylko funkcji kwadratowej.

Pierwsze z zamieszczonych zadań kształci umiejętność dowodzenia. Podczas rozwiązywania tego typu zadań należy zwrócić uwagę na umiejętność sformułowania założenia i tezy oraz czy uczeń rozumie na czym ma polegać dowód.

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli współczynniki trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, spełniają warunek $a + b + c = 0$, to trójmian posiada co najmniej jedno miejsce zerowe.

Komentarz. Zadanie 1 jest typowym zadaniem na dowodzenie wymagającym od ucznia argumentowania i uzasadniania. Można spodziewać się, że uczeń będzie miał problem „od czego zacząć”. Zgodnie z teorią Pólyi można zapytać ucznia, czy spotkał się on już z podobnym zadaniem. Jeśli odpowiedź będzie negatywna można zaproponować mu rozwiązanie innego zadania „Ile rozwiązań ma równanie $y = ax^2 - (a + c)x + c$, gdzie $a \neq 0$?”.

Podanie zadania w innej postaci może tu pomóc uczniowi najpierw w zrozumieniu, a następnie w ułożeniu planu rozwiązania.

Zadanie 2. Wiadomo, że równanie $ax^2 + bx + c = 0$ nie ma rozwiązań. Adam pomylił się przepisując współczynnik a i uzyskał dwa pierwiastki 2 i 4. Paweł pomylił przynajmniej jeden znak współczynnika i uzyskał dwa pierwiastki -1 , 4. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2b+3c}{a}$.

Komentarz. Zadanie 2 wymusza u ucznia kreatywne myślenie. Pozwala ono zilustrować kolejne fazy rozwiązywania zadania. Po pierwsze zrozumienie. Sposób podania treści powoduje trudność w jej interpretacji. Następnie można oczekiwać budowania skomplikowanego planu rozwiązania, w którym działania będą prowadzone w kilku przypadkach. Można spodziewać się, że zostanie policzona wartość wyrażenia $\frac{2b+3c}{a}$. Nie należy jednak kończyć w tym momencie procesu rozwiązywania zadania. Warto „rzucić okiem wstecz”. Po analizie i kilku próbach znalezienia metody, można uzyskać eleganckie rozwiązanie tego łatwego problemu.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez a_1 współczynnik przy x^2 napisany przez Adama. Wtedy

$$-\frac{b}{a_1} = 6 \text{ i } \frac{c}{a_1} = 8.$$

Po podzieleniu obu równości stronami otrzymujemy

$$\frac{b}{c} = \frac{3}{4}.$$

Zauważmy, że $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Stąd wynika, że $ac > 0$. Stąd i z tego, że $|\frac{c}{a}| = 4$ otrzymujemy, że $\frac{c}{a} = 4$ i, w konsekwencji, $\frac{b}{a} = -3$. Możemy teraz policzyć wartość wyrażenia

$$\frac{2b+3c}{a} = 2(-3) + 3 \cdot 4 = 6.$$

Zadanie 3. Liczby α, β są pierwiastkami równania $x^2 - px + q = 0$. Wyznacz liczbę par (p, q) takich, że pierwiastkami równania $x^2 - p^2x + q^2 = 0$ są nadal liczby α, β .

Zadanie 4. Wykaż, że jeśli pierwiastki równania $x^2 + ax + b + 1$ są liczbami naturalnymi, to liczba $a^2 + b^2$ jest liczbą całkowitą złożoną.

Komentarz. Zadanie 4 łączy funkcję kwadratową z teorią liczb. Jest to kolejne zadanie kształcące umiejętność dowodzenia. Połączenie równania kwadratowego z pojęciem liczby złożonej jest nietypowe i może powodować konsternację u uczniów. Można wspomóc proces tworzenia planu rozwiązania sugerując zastosowanie twierdzenia Vie'te'a. Możemy oczekiwać wykonania następujących wyliczeń

$$a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2 - 1)^2 = \dots = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1),$$

gdzie x_1, x_2 są rozwiązaniami równania. Teraz łatwo można dokończyć rozwiązywanie zadania.

Zadanie 5. Rozwiąż równanie

$$\frac{13x - x^2}{x + 1} \left(x + \frac{13 - x}{x + 1} \right) = 42.$$

Komentarz. Zadanie 5 z pozoru nie mieści się w temacie „funkcja kwadratowa”. Jednakże można je sprowadzić do problemu rozwiązania równania kwadratowego i jednocześnie jest ono okazją do pokazania twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Vie'te'a.

Rozwiązanie.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Vie'te'a mówi, że liczby rzeczywiste t i u są pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 - (t + u)x + tu = 0$. Oznaczmy $y = \frac{13-x}{x+1}$. Łatwo zauważyć, że dane równanie przyjmuje postać $xy(x + y) = 4$ oraz, że $xy + x + y = 13$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Vie'te'a wynika, że liczby xy i $x + y$ są pierwiastkami równania $z^2 - 13z + 42 = 0$. Otrzymujemy stąd, że $\{xy, x + y\} = \{6, 7\}$ a więc rozwiązania danego równania to: $1, 6, 3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}$.

Zadanie 6. Jaś gra z Małgosią w następującą grę i wykonuje pierwszy ruch polegający na wyborze trzech różnych liczb. Małgosia zapisuje równanie kwadratowe o współczynnikach równych „liczbom Jasia”. Jaś wygrywa, gdy równanie zapisane przez Małgosię ma dwa różne rozwiązania. Kto ma wygrywającą strategię i dlaczego?

Komentarz. Zadanie 6 to nietypowy, ale łatwy problem związany z funkcją kwadratową. Do wykazania, że to Jaś ma strategię wygrywającą wystarczy zauważyć, że może on podać liczby $-5, 1, 2$. Nie należy ograniczać się tylko do jednego rozwiązania. Można zaproponować tu elementy burzy mózgów do uzyskania innych rozwiązań, a także do znalezienia reguły jaką muszą spełniać trzy podane liczby, aby prowadziły do wygranej Jasia. Jest to przykład działań według czwartej fazy rozwiązywania zadań według Pólyi.

Zadanie 7. Funkcja f spełnia warunek

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1.$$

Wyznacz sumę tych wszystkich t , dla których $f(3t) = 7$.

Zadanie 8. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $x^2 - 63x + k = 0$ ma pierwiastki będące liczbami pierwszymi.

Komentarz. Zadanie 8 jest banalne jeśli już znajdziemy metodę rozwiązania. To także połączenie funkcji kwadratowej i teorii liczb. Należy spodziewać się, że uczeń będzie podejmował próbę wyznaczenia pierwiastków, a następnie postara się znaleźć warunki na to, aby były to liczby pierwsze. Takie próby mogą okazać się skazane na niepowodzenie. Jest to przykład na to, że czasami warto wrócić do fazy drugiej (według Pólyi) i spróbować zbudować inny plan rozwiązania zadania. Wystarczy zauważyć, że skoro suma pierwiastków jest równa 63, to jednym z nich jest liczba pierwsza 2. Stąd już łatwo wyznaczyć k .

2.2.

Wielomiany

Zadania zaproponowane w tej części, podobnie jak zadania dotyczące funkcji kwadratowej, mają na celu wykształcenie u ucznia twórczego, opartego na teorii Pólyi podejścia do rozwiązywania problemów matematycznych. Rozważmy następujące zadanie.

Zadanie 1. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 17 \\ xy + yz + xz = 94 \\ xyz = 168 \end{cases}$$

Komentarz. Standardowe próby rozwiązywania tego układu są skazane na niepowodzenie. Uczeń będzie miał problem ze zbudowaniem planu rozwiązania zadania, który zakończy się sukcesem. Można wtedy zasugerować zastosowanie twierdzenia Viete’a. Zadanie 1 to ładny przykład sprowadzenia układu równań do równania stopnia trzeciego, a także przykład zastosowania wzorów Viete’a dla wielomianów stopnia trzeciego. Zadanie kształci także umiejętność rozwiązywania równań stopnia trzeciego oraz umiejętność prawidłowego wyciągania wniosków (podanie wszystkich rozwiązań układu równań).

Rozwiązanie.

Na mocy twierdzenia Viete’a, liczby x, y, z są pierwiastkami wielomianu $W(t) = t^3 - 17t^2 + 94t - 168$. Pierwiastkami tego wielomianu są liczby 4, 6 i 7. Zatem rozwiązaniem układu jest każda z sześciu trójek (x, y, z) , będących permutacją zbioru $\{4, 6, 7\}$.

Zadanie 2. Ania, pasjonatka matematyki, postanowiła poeksperymentować z wielomianem. Najpierw go zapisała, a następnie wszędzie w miejsce zmiennej podstawiała zapisany wielomian i uporządkowała otrzymany w ten sposób wielomian $W(x)$ zapisując go w kolejności malejących potęg zmiennej na kartce, której część zjadła koza. Zachował się fragment kartki z zapisem $W(x) = -x^4 + \dots$. Ania pamięta, że suma pierwiastków wielomianu była równa zero i że dokładnie jeden z nich był dwukrotny. Jaki wielomian zapisała Ania na początku?

Komentarz. Zadanie 2 wymaga od ucznia umiejętności poszukiwania metody i strategii rozwiązywania problemu. Mogą tu się pojawić kłopoty interpretacyjne polegające np. na określeniu który wielomian ma mieć pierwiastki dające w sumie zero, czy ten wielomian z którym eksperymentowała

Ania czy $W(x)$? W rozważaniach istotne będzie spostrzeżenie, że na kartce zachował się także znak "+". Trudne może także okazać się wykorzystanie warunku, że jeden z pierwiastków jest dwukrotny.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że Ania eksperymentowała z wielomianem postaci $P(x) = -x^2 + ax + b$. Zatem wielomian $W(x)$ ma postać $W(x) = -x^4 + 2ax^3 - (a^2 + a - 2b)x^2 + a(a - 2b)x + b(a - b + 1)$. Wnioskujemy, że $a = 0$ i zapisujemy wielomian w postaci $W(x) = -x^4 + 2bx^2 - b(b - 1)$. Ponieważ $b(b - 1) = 0$ i $b \neq 0$, więc $b = 1$. Ostatecznie $P(x) = -x^2 + 1$.

Zadanie 3. Wykaż, że wyrażenie

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

jest liczbą całkowitą.

Komentarz. Zadanie 3 wydaje się być zadaniem tylko i wyłącznie na kształcenie umiejętności przekształcania wyrażeń algebraicznych. Okazuje się jednak, że bardziej eleganckie rozwiązanie otrzymamy uzyskując wielomian trzeciego stopnia, którego jedynym pierwiastkiem jest dane wyrażenie.

Rozwiązanie.

Oznaczmy

$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Wtedy $x^3 = 40 + 6x$. Liczba 4 jest jedynym rozwiązaniem tego równania, a więc

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4,$$

co kończy dowód.

Zadanie 4. Dany jest wielomian $x^3 + 2x^2 - 3x - 1$. Oblicz

$$\frac{1}{x_1 + 3} + \frac{2}{x_2 + 3} + \frac{3}{x_3 + 3}.$$

Komentarz. Zadanie 4 można zrobić szybko, ale można także zagmatwać się w rachunkach. Wielomian ma trzy różne pierwiastki, ale próby ich wyznaczenia skazane są na niepowodzenie. Sformułowanie zadania sugeruje konieczność zastosowania wzorów Viete’a. Aby uniknąć rachunków warto zastanowić się o jaki wektor należy przesunąć wykres wielomianu, aby ułatwić rachunki. Okazuje się, że wystarczy obliczyć wartość wyrażenia $\frac{1}{y_1} + \frac{2}{y_2} + \frac{3}{y_3}$, gdzie y_1, y_2, y_3 są pierwiastkami wielomianu o przesuniętym wykresie.

Zadanie 5. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wykaż, że jeśli dla pięciu parami różnych liczb całkowitych wielomian $P(x)$ przyjmuje wartość 5, to dla żadnej liczby całkowitej nie przyjmuje wartości 8.

Komentarz. Zadanie 5 wymaga przede wszystkim pomysłu. Ważna tu jest analiza oraz zbudowanie odpowiedniego planu rozwiązania zadania. Kluczem jest tu przesunięcie wykresu wielomianu o wektor $[0, -5]$. Pozwala to zapisać odpowiedni wielomian w postaci iloczynowej. Stąd można już wyprowadzić właściwy wniosek. Do rozwiązywania tego zadania niezbędne są elementarne własności liczb pierwszych.

Rozwiązanie.

Rozważmy wielomian $P(x) - 5$. Z warunków zadania wynika, że istnieje pięć parami różnych pierwiastków a, b, c, d, e tego wielomianu. Zatem $P(x) - 5 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)R(x)$. Jeśliby istniała liczba całkowita k , dla której $P(k) = 8$, to wtedy $(k - a)(k - b)(k - c)(k - d)(k - e)R(k) = 3$. Jest to niemożliwe, bo 3 jest liczbą pierwszą i nie może być zapisana jako iloczyn pięciu parami różnych liczb całkowitych.

Zadanie 6. Pierwiastki wielomianu piątego stopnia $x^5 - 5x^4 - 35x^3 + \dots$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wyznacz te pierwiastki.

Komentarz. Zadanie 6 cechuje nietypowe sformułowanie. Można mieć wątpliwości, czy nie brakuje zapisu fragmentu wielomianu. Okazuje się, że nie. Zapisany fragment wielomianu i pozostałe warunki, co może być zaskoczeniem, jednoznacznie definiują wielomian. Uczeń może nie mieć pomysłu na

rozwiązanie zadania. Możemy wtedy zaproponować zapisanie zależności pomiędzy pierwiastkami tego wielomianu, a jego zapisanymi współczynnikami. Oczekujemy tu podjęcia próby budowania planu rozwiązywania zadania.

Rozwiązanie.

Pierwiastki tego wielomianu mają postać $a, a + r, a + 2r, a + 3r, a + 4r$. Ze wzorów Viete'a wynika, że

$$\begin{cases} 5a + 10r = 5 \\ 10a^2 + 40ar + 35r^2 = -35. \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy

$$\begin{cases} a = -5 \\ r = 3 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} a = 7 \\ r = -3. \end{cases}$$

Wynika stąd, że pierwiastkami wielomianu są liczby $-5, -2, 1, 4, 7$.

Zadanie 7. Wielomian $W(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ o całkowitych współczynnikach różnych od zera ma n różnych, parami względnie pierwszych pierwiastków całkowitych. Wykaż, że a_{n-1} i a_n są także względnie pierwsze.

Komentarz. Zadanie 7 to ponownie połączenie teorii wielomianów i teorii liczb. Podstawową umiejętnością, którą można kształcić rozwiązując je, jest dowodzenie twierdzeń. Zadanie ma charakter bardziej teoretyczny.

Rozwiązanie.

Przypuśćmy, że a_{n-1} i a_n nie są względnie pierwsze. Wtedy istnieje liczba pierwsza p , będąca wspólnym dzielnikiem liczb a_{n-1} i a_n . Niech $r_1, r_2, \dots, r_n$ będą pierwiastkami wielomianu. Na mocy wzorów Viete'a mamy $r_1 r_2 \dots r_n = (-1)^n a_n$. Stąd i z wcześniejszych ustaleń wynika, że istnieje pierwiastek wielomianu podzielny przez p . Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy przyjąć, że tym pierwiastkiem jest r_1 . Niech $r_1, r_2, \dots, r_n$ będą pierwiastkami wielomianu. Na mocy wzorów Viete'a

$$r_2 r_3 \dots r_n + r_1 r_3 \dots r_n + \dots + r_1 r_2 \dots r_{n-1} = (-1)^{n-1} a_{n-1}.$$

Wyrażenie po prawej stronie ostatniej równości jest podzielne przez p . Zatem wyrażenie po lewej stronie tej równości też jest podzielne przez p . Każdy składnik po lewej stronie sumy poza $r_2 r_3 \dots r_n$ jest podzielny przez r_1 , a więc i przez p . Zatem liczba $r_2 r_3 \dots r_n$ też jest podzielna przez p . Wynika stąd, że wśród liczb $r_2, r_3, \dots, r_n$ istnieje liczba podzielna przez p . Przeczy to założeniu, że wielomian ma n różnych, parami względnie pierwszych, pierwiastków całkowitych.

2.3.

Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

Jak już wcześniej było napisane, funkcja kwadratowa odgrywa bardzo dużą rolę w matematyce nauczanej w szkole ponadgimnazjalnej. Przykładami są tu zadanie 1 oraz zadanie 10. Oprócz tego w tym rozdziale prezentujemy zadania, których rozwiązywanie wymaga umiejętności związanych z potęgami i logarytmami. Powinien opanować je każdy uczeń szkoły ponadgimnazjalnej, realizujący rozszerzony zakres nauczania matematyki.

Zadanie 1. Dla jakich wartości parametru a dziedzina funkcji $f(x) = \log_2((a-1)x^2 + 2x + (a-1))$ zawiera przedział $[1, +\infty)$?

Komentarz. Zadanie 1 wymaga połączenia umiejętności rozwiązywania zadań z teorii funkcji kwadratowej z wykorzystaniem parametru oraz własności funkcji logarytmicznej. Rozwiązanie tego problemu wymaga przeprowadzenia zaawansowanej analizy. Należy wyznaczyć te wartości parametru a , dla których funkcja $g(x) = (a-1)x^2 + 2x + (a-1)$ przyjmuje dodatnie wartości w przedziale $[1, +\infty)$. Możliwe są przypadki, gdy g jest funkcją liniową, a więc $a-1 = 0$ oraz nie jest funkcją liniową, tzn. $a-1 \neq 0$. W tym ostatnim przypadku zadanie jest typowym zadaniem polegającym na analizie funkcji kwadratowej z parametrem. Można spodziewać się tu problemów ze znalezieniem odpowiedniej strategii. W takiej sytuacji wskazane jest proponowanie uczniom rozwiązywania odpowiednich zadań z funkcji kwadratowej, do których można sprowadzić rozwiązanie danego problemu. Jest to

doskonała okazja do powtórzeń, które przyczyniają się do realizacji zasady trwałości wiedzy.

Zadanie 2. Mateusz uczył się pilnie do sprawdzianu z logarytmów, ale na sprawdzianie skorzystał z równości

$$\log_{ab} x = \log_a x \log_b x.$$

Nauczyciel powiedział, że przyzna mu kilka punktów za rozwiązanie, jeśli Mateusz poda i udowodni warunek równoważny równości z której skorzystał, w którym symbol logarytmu występuje tylko dwa razy. Pomóż Mateuszowi.

Komentarz. Zadanie 2 jest nietypowe. Jest to kolejne zadanie wymagające dużej kreatywności ucznia, a także umiejętności przekształcania wyrażeń zawierających logarytmy. Problemem nie jest tylko, że należy „udowodnić”, ale przede wszystkim sformułować hipotezę. Z tego powodu zadanie powinno dobrze sprawdzać się podczas pracy w grupach.

Rozwiązanie.

Położmy $u = \log_{ab} x, v = \log_a x, \log_b x$. Zauważmy, że warunek $\log_{ab} x = \log_a x \log_b x$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x = (ab)^u = a^u b^u = a^{vw} b^{vw} = (a^v)^w (b^w)^v = x^w x^v = x^{v+w},$$

a więc $u + w = 1$. Zatem warunkiem równoważnym jest równość $\log_a x + \log_b x = 1$.

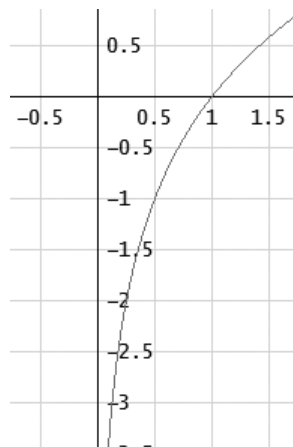
Zadanie 3. Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji logarytmicznej f .

a) Podaj wzór tej funkcji.

b) Narysuj wykres funkcji

$$g(x) = |2 - |f(x+1)|| - 1.$$

c) Odczytaj z wykresu rozwiązanie równania $g(x) = -1$.



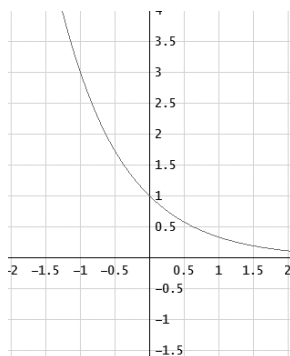
Komentarz. Zadania 3–5, to zadania przydatne do ćwiczenia umiejętności typowych dla egzaminu maturalnego z matematyki takich jak odczytywanie danych z wykresu funkcji, przekształcanie wykresów funkcji logarytmicznych i wykładniczych. Polecenie „Odczytaj z wykresu rozwiązania równania $g(x) = -1$ ” nabiera szczególnego znaczenia w kontekście braku równań wykładniczych i logarytmicznych w podstawie programowej dla szkoły ponadgimnazjalnej. Polecenie „Określ liczbę rozwiązań równania $g(x) = m$, w zależności od parametru m ” pozwala kształcić ważną umiejętność będącą już kanonem z punktu widzenia wymagań maturalnych.

Zadanie 4. Rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji wykładniczej f .

- a) Zapisz wzór funkcji f .
 b) Funkcja g określona jest wzorem

$$g(x) = |f(-|x|) - 3| - 2.$$

Określ liczbę rozwiązań równania $g(x) = m$, w zależności od parametru m .



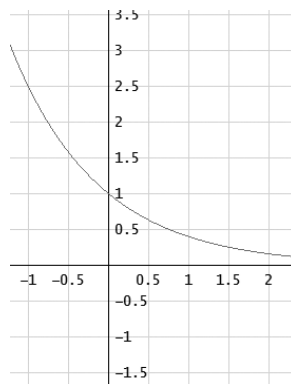
- c) Oblicz $g(2), g(3), g(1, 5)$.

Zadanie 5. Rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji wykładniczej f .

- a) Zapisz wzór funkcji f .
 b) Funkcja g określona jest wzorem

$$g(x) = |f(2 - x) - 0, 4| + 1.$$

Określ liczbę rozwiązań równania $g(x) = m$, w zależności od parametru m .



- c) Oblicz $g(2), g(3), g(1, 5)$.

Zadanie 6. Wykaż, że liczby $2^{\log_3 5}$ i $5^{\log_3 2}$ są równe.

Komentarz. Zadania 6–8 kształcą umiejętność przekształcania wyrażeń logarytmicznych.

Zadanie 7. Oblicz $\log_3 18$, jeśli $\log_3 12 = a$.

Zadanie 8. Oblicz $\log_{12} 60$, jeśli $\log_6 30 = a$ i $\log_{15} 24 = b$.

Zadanie 9. Wyznacz minimum wyrażenia

$$\log_{x_1} \left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2} \left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log_{x_n} \left(x_1 - \frac{1}{4}\right),$$

gdzie $x_1, x_2, \dots, x_n \in (\frac{1}{4}, 1)$.

Komentarz. Zadanie 9 wymaga umiejętności szacowania. Potrzebna jest znajomość nierówności Cauchy'ego o średnich oraz spora pomysłowość. Zadanie jest dość trudne i może być wykorzystane w pracy z uczniem zdolnym.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x zachodzi nierówność $x - \frac{1}{4} \leq x^2$. Zatem dla każdego $k = 1, 2, \dots, n-1$ mamy

$$\begin{aligned} \log_{x_k} \left(x_{k+1} - \frac{1}{4}\right) &\geq \log_{x_k} (x_{k+1}^2) = 2 \log_{x_k} x_{k+1} \text{ oraz} \\ \log_{x_n} \left(x_1 - \frac{1}{4}\right) &\geq \log_{x_n} (x_1^2) = 2 \log_{x_n} x_1. \end{aligned}$$

Otrzymujemy, więc

$$\begin{aligned} &\log_{x_1} \left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2} \left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log_{x_n} \left(x_1 - \frac{1}{4}\right) \\ &\geq 2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \log_{x_k} x_{k+1} + \log_{x_n} x_1 \right) \\ &\geq 2n \sqrt[n]{\frac{\log x_2}{\log x_1} \cdot \frac{\log x_3}{\log x_2} \cdot \dots \cdot \frac{\log x_n}{\log x_1}} = 2n. \end{aligned}$$

Oznacza to, że rozważane wyrażenie nie jest mniejsze od $2n$. Zauważmy, że w rzeczywistości liczba n jest szukanym minimum, bo wartość $2n$ jest osiągana, jeśli przyjmiemy $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{2}$.

Zadanie 10. Dla jakich a równanie $2\log(x+3) = \log(ax)$ posiada jeden pierwiastek?

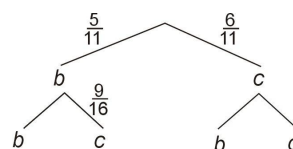
Komentarz. Zadanie 10 jest zadaniem maturalnym sprzed lat, a jednocześnie przykładem jak można trudny problem rozwiązać w łatwy sposób stosując współczesne, nowoczesne metody. Dla $x > -3$ i $ax > 0$ równanie sprowadza się do równania $(x+3)^2 = ax$. Analiza wykresów funkcji linowej $x \mapsto ax$ i kwadratowej $x \mapsto (x+3)^2$ pozwala wnioskować, że dla $a < 0$ jest jeden pierwiastek z przedziału $(-3, 0)$. Jeśli $a > 0$, to wtedy jeden pierwiastek będzie tylko wtedy, gdy prosta $y = ax$ będzie styczna do paraboli, a to zajdzie tylko wtedy, gdy wyróżnik trójmianu będzie równy zero, a więc $a = 12$.

2.4.

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Zmieniająca się podstawa programowa i nowe wymagania maturalne wymuszają weryfikację dotychczasowego sposobu uczenia rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Nowe treści to twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym oraz prawdopodobieństwo warunkowe. Wydaje się, że pomocna tu powinna być metoda drzewa. Duże znaczenie ma także umiejętność odczytywania danych z tablic i wykresów. Należy zastanowić się jak uczyć zagadnień z tym związanych w obecnej rzeczywistości. W niniejszym rozdziale podane zostanie kilka propozycji zadań do wykorzystania na lekcji.

Zadanie 1. W urnie znajdują się tylko białe i czarne kule. Rysunek przedstawia drzewo doświadczenia losowego polegającego na dwukrotnym losowaniu po jednej kuli z urny. Kule po każdym losowaniu zatrzymujemy. Oblicz prawdopodobieństwo, że losując dwa razy po jednej kuli wylosujemy dwie kule różnych kolorów.



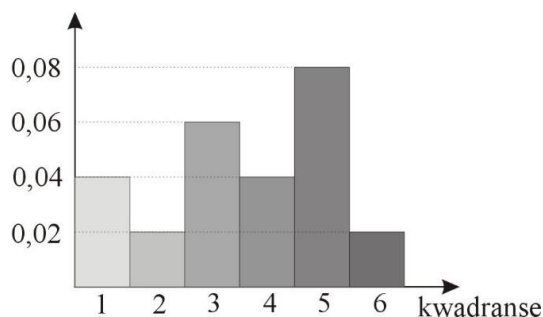
Komentarz. Zadanie 1 wymaga umiejętności rozwiązywania zadań za pomocą drzewa, ale także umiejętnej analizy problemu. Odczytując dane z diagramu i wykonując odpowiednie obliczenia możemy wywnioskować, że białych kul było 15, a czarnych 18. Zatem prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul różnych kolorów jest równe $\frac{45}{88}$.

Zadanie 2. W rozgrywkach pucharowych¹ tenisa ziemnego pozostało czterech uczestników: Adam, Bartek, Czarek i Darek. Po grze, w której Adam pokonał Bartka, rozpoczyna się na korcie pojedynek Czarka z Darkiem. Zwycięzca tego spotkania będzie walczył z Adamem o pierwsze miejsce. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania turnieju przez Adama. W rozwiązaniu wykorzystaj podane w tabeli prawdopodobieństwa obliczone na podstawie wyników dotychczas rozegranych między zawodnikami meczy.

Zdarzenie	Adam zwycięży w pojedynku z Czarkiem	Adam zwycięży w pojedynku z Darkiem	Czarek zwycięży w pojedynku z Darkiem
Prawdopodobieństwo	0,45	0,65	0,4

Komentarz. Zadanie 2 wymaga umiejętności rozwiązywania zadań za pomocą drzewa, ale także umiejętnej analizy problemu. Można także zastosować twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Prawdopodobieństwo, że Adam zwycięży w turnieju jest równe $0,4 \cdot 0,45 + 0,6 \cdot 0,65 = 0,57$.

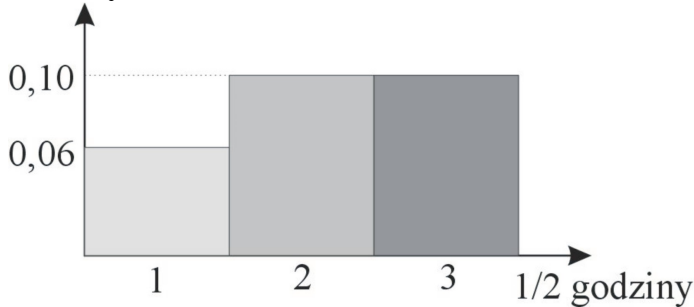
Zadanie 3. Pewne doświadczenie zostało wielokrotnie powtórzone. Rysunek przedstawia fragment histogramu wyników tego doświadczenia w ciągu początkowych sześciu kwadransów.



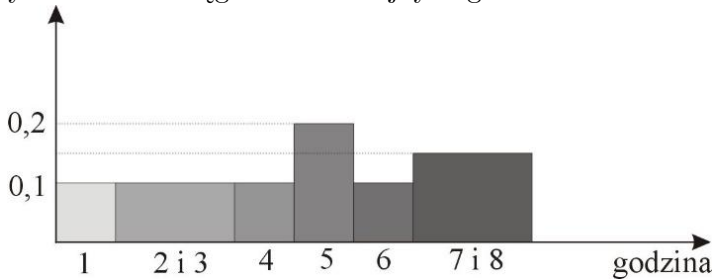
¹W rozgrywkach pucharowych każdy pojedynek wyłania zwycięzcę. Pokonany nie bierze udziału w dalszej grze.

Częstości (względne) otrzymania, w ciągu każdego z kwadransów, wyniku zgodnego z wcześniejszymi obliczeniami teoretycznymi są równe polom odpowiednich prostokątów. Narysuj histogram przedstawiający częstości otrzymania wyniku zgodnego z wcześniejszymi obliczeniami teoretycznymi w ciągu trzech początkowych półgodzinnych okresów czasu.

Rozwiązanie.



Zadanie 4. Na histogramie zaznaczono jako pole odpowiednich prostokątów częstość (względną) tankowania paliwa na stacji benzynowej przez samochody osobowe w ciągu ośmiu kolejnych godzin.



- Ile razy więcej samochodów osobowych tankowało łącznie w ciągu 7 i 8 godziny niż łącznie w ciągu 2 i 3 godziny?
- W ciągu których trzech kolejnych godzin łączna liczba tankujących samochodów osobowych mogła być większa niż łączna liczba samochodów osobowych tankujących w godzinach 4, 5 i 6?
- Czy można stwierdzić w której godzinie liczba tankujących samochodów osobowych była największa? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Pokażemy rozwiązanie podpunktu c). Częstość tankowania samochodu oso-

bowych w piątej godzinie jest równa 0,2. W łącznym czasie dwóch ostatnich godzin częstość wynosi 0,3. Możliwe jest że np. w 7 godzinie nie tankował, żaden samochód osobowy. Wtedy najwięcej samochodów osobowych tankowało w 8 godzinie. Możliwe też jest, że w 7 i 8 godzinie tankowało tyle samo samochodów osobowych. Wtedy najwięcej samochodów osobowych tankowało w 5 godzinie. Nie można więc stwierdzić w której godzinie liczba tankujących samochodów osobowych była największa.

Komentarz. Zadania 3 i 4 wymuszają ćwiczenie umiejętności analizy wykresów oraz danych statystycznych. Ważne jest także prowadzenie rozumowań matematycznych i umiejętność uzasadniania.

Zadanie 5. W urnie mamy tylko kule białe, czarne i zielone. Przy losowaniu jednej kuli z urny prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe $\frac{2}{3}$, a kuli czarnej $\frac{5}{18}$. Przy losowaniu trzech kul prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul zielonych jest równe 0. Oblicz ilość kul w urnie.

Rozwiązanie.

Niech k oznacza liczbę kul w urnie. Wtedy liczba kul białych jest równa $\frac{2}{3}k$; liczba kul czarnych jest równa $\frac{5}{18}k$. Prawdopodobieństwo wylosowania 3 kul zielonych przy losowaniu 3 kul z urny jest równe 0, więc w urnie są co najwyżej 2 kule zielone. Ponieważ w urnie znajdują się kule zielone, to liczba kul zielonych jest równa 1 lub 2. Zatem $k = \frac{2}{3}k + \frac{5}{18}k + 1$ lub $k = \frac{2}{3}k + \frac{5}{18}k + 1$. W urnie jest 18 lub 36 kul.

Zadanie 6. Do 5 jednakowych, ponumerowanych pudełek wrzucamy w sposób losowy 10 kul, z których żadne dwie nie są tego samego koloru. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w jednym z pudełek będzie 6 kul i żadne pudełko nie będzie puste? Wynik podaj w zaokrągleniu do pięciu miejsc po przecinku.

Zadanie 7. Pewne doświadczenie powtórzono 150 razy. Otrzymane wyniki tego doświadczenia podzielono na pięć kategorii. Tabela przedstawia częstość uzyskania wyników zaliczonych do odpowiedniej kategorii.

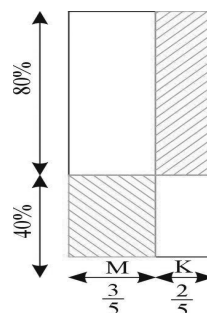
Kategoria	I	II	III	IV	V
Częstość	0,14	0,2	0,08	0,4	0,18

- Do której kategorii zaliczono najwięcej, a do której najmniej wyników?
- Ile doświadczeń zakończyło się wynikiem, który zaliczono do V kategorii?
- Do której kategorii mógł zostać zaliczony wynik doświadczenia, jeśli średnio na 5 wyników doświadczenia co najmniej jeden z nich należy do tej kategorii?

Zadanie 8. Prawdopodobieństwo, że kobieta (K) przechodząca obok sklepu odzieżowego zatrzyma się, aby obejrzeć wystawę jest równe 80%, natomiast odpowiednie prawdopodobieństwo dla mężczyzny (M) wynosi 40%. Przechodzień zatrzymał się, aby obejrzeć wystawę. Wiemy, że na każde 5 osób przechodzących obok sklepu 2 są kobietami. Na podstawie tych danych możemy obliczyć prawdopodobieństwo, że przechodniem, który zatrzymał się, aby obejrzeć wystawę był mężczyzna. Rozważmy prostokąt, na którym zilustrowano powyższe dane.

Aby obliczyć szukane prawdopodobieństwo, należy policzyć stosunek pola prostokąta zaznaczonego jako  do sumy pól obydwu zaznaczonych prostokątów. Zatem prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{3}{7}.$$



Postępując w analogiczny sposób rozwiąż następujące zadanie.

Zadanie. Rzucamy jednocześnie dwiema monetami. Jeśli otrzymamy co najmniej jednego orła, to losujemy jedną kulę z urny zawierającej 1 białą kulę i 2 kule czarne, w przeciwnym razie losujemy jedną kulę z urny zawierającej 4 kule białe i 2 kule czarne. Wylosowano białą kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając dwiema monetami otrzymaliśmy co najmniej jednego orła?

Komentarz. Zadanie 8 łączy zagadnienia związane z prawdopodobieństwem całkowitym oraz prawdopodobieństwem warunkowym. Metoda zaprezentowana w pierwszej części zadania jest nowatorska i jej stosowanie

stwarza możliwość rozwiązywania prezentowanego typu zadań. Cała konstrukcja zadania jest interesująca z dydaktycznego punktu widzenia. Wymusza u ucznia pracę z tekstem matematycznym. Warto tu przeprowadzić pogadankę mającą na celu sprawdzenie, czy uczeń przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań zrozumiał ideę przedstawionej metody. Dopiero gdy uczeń wykaże się zrozumieniem, może zacząć rozwiązywać zadanie.

Zadanie 9. O przejście do dalszych rozgrywek rywalizują 4 drużyny piłkarskie: Wisła, Odra, Warta i Dunajec. Pozostały do rozegrania mecze między drużynami Wisły i Dunajca oraz drużynami Odry i Warty. Drużyna Wisły zakwalifikuje się do dalszych rozgrywek, jeśli pokona drużynę Dunajca. Drużyna Wisły będzie także brała udział w dalszej grze, jeśli mecz z drużyną Dunajca nie przyniesie rozstrzygnięcia i drużyna Odry wygra z drużyną Warty. Jeśli drużyna Wisły przegra swoje spotkanie, to zakwalifikuje się do dalszych gier tylko wtedy, gdy mecz między drużynami Odry i Warty zakończy się wynikiem remisowym. Oblicz prawdopodobieństwo zakwalifikowania się drużyny Wisły do dalszych rozgrywek wykorzystując poniższe dane otrzymane w oparciu o wyniki dotychczasowych spotkań tych drużyn.

Zdarzenie	Drużyna Wisły wygra mecz z drużyną Dunajca	Drużyna Dunajca wygra mecz z drużyną Wisły	Drużyna Odry wygra mecz z dru- żyną Warty	Drużyna Warty wygra mecz z drużyną Odry
Prawdopodo- bieństwo	0,4	0,5	0,3	0,5

Komentarz. Zadanie 9 można rozwiązać wykorzystując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, ale lepszą i szybszą metodą jest rozwiązanie go za pomocą drzewa. Otrzymujemy wtedy

$$0,4 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,53.$$

2.5.

Stereometria

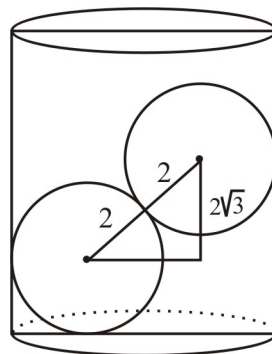
Zadania w tym dziale zostały tak dobrane, aby ich rozwiązywanie kształciło wyobraźnię przestrzenną.

Zadanie 1. Do stojącego na poziomej powierzchni naczynia w kształcie walca wrzucono dwie kulki, których suma objętości jest równa $\frac{64}{3}\pi$, a iloczyn długości promieni jest równy sumie tych długości. Wyznacz średnicę naczynia, jeśli wiadomo, że różnica odległości środków tych kulek od dna naczynia jest równa $2\sqrt{3}$.

Komentarz. W zadaniu tym należy najpierw dokonać analizy, aby rozstrzygnąć jakie jest położenie kulek. Jest to nietypowa sytuacja, gdyż zazwyczaj już w treści zadania opisywane jest wzajemne położenie figur.

Rozwiązanie.

Oznaczmy promienie kul przez r_1 i r_2 . Wtedy $\frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{64}{3}\pi$. Stąd $r_1^3 + r_2^3 = 16$. Korzystając z tego oraz z warunku $r_1^3 + r_2^3 = r_1^3 r_2^3$ otrzymujemy równanie $t(t^2 - 3t) = 16$, gdzie $t = r_1 + r_2$. Zatem $r_1 + r_2 = 4$, a ponieważ $r_1 r_2 = 4$, więc $r_1 = r_2 = 2$. Ponieważ różnica odległości środków tych kulek od dna naczynia jest równa $2\sqrt{3}$, to jedyne możliwe położenie kul w naczyniu jest takie jak na rysunku. Średnica naczynia jest równa $2 + 2 + \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 6$.

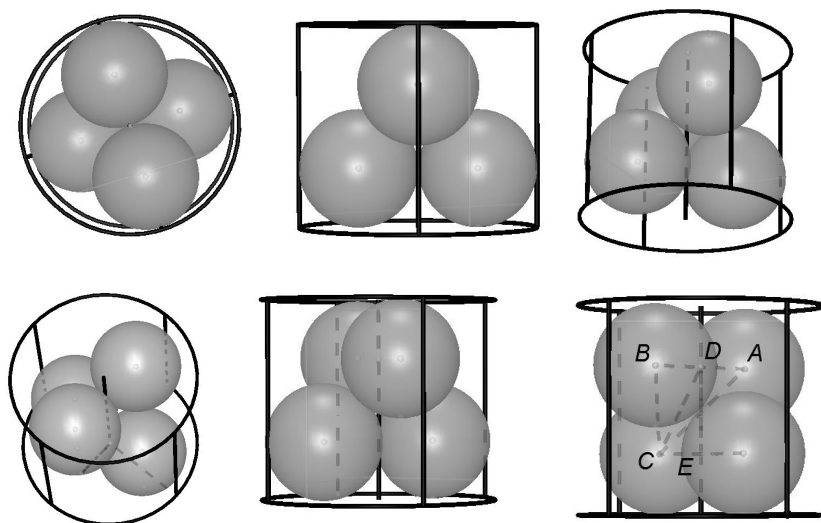


Zadanie 2. W zamkniętym naczyniu w kształcie walca o średnicy podstawy równej 2 są umieszczone na dwóch poziomach po 2 metalowe kule o takim samym promieniu. Każde dwie z tych czterech kul są wzajemnie styczne, każda z kul niższego poziomu leży na dnie naczynia, a każda z kul wyższego poziomu dotyka górnego wieka naczynia. Oblicz wysokość tego naczynia.

Rozwiązanie.

Na rysunku 2.1 przedstawiono sześć rysunków pokazujących z różnych stron ułożenie kulek.

Zauważmy, że trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym o boku 1 i wysokości $|DC| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem $|DE| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Wysokość naczynia jest równa $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Rysunek 2.1: Wizualizacja do zadania 2

Zadanie 3. W zamkniętym naczyniu w kształcie walca są umieszczone na dwóch poziomach po 4 metalowe kule o promieniu 1. Każda z tych kul jest styczna do dwóch kul tego samego poziomu, dwóch kul drugiego poziomu oraz do jednej z podstaw walca i do jego powierzchni bocznej. Ile wody można wlać do tego naczynia?

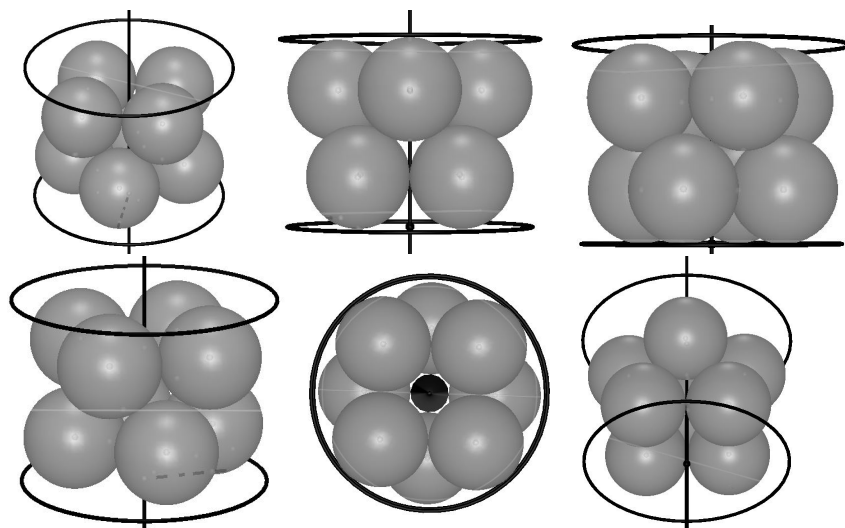
Rozwiązanie.

Na rysunku 2.2 przedstawiono sześć rysunków pokazujących z różnych stron ułożenie kulek. Sprawdzić, że wysokość naczynia jest równa $2 + \sqrt[4]{8}$ i dokończyć rozwiązywanie zadania.

Zadanie 4. Do zamkniętego naczynia w kształcie czworościanu foremnego o krawędzi $3\sqrt{6}$ wrzucono kulę o średnicy równej 2, która swobodnie przemieszcza się wewnątrz tego naczynia. Oblicz pole powierzchni tej części wewnętrznych ścian naczynia, której nie może dotknąć wrzucona kulka. W obliczeniach należy zaniedbać grubość ścian naczynia.

Rozwiązanie.

Ponieważ promień kuli wpisanej w czworościan foremny jest równy $\frac{1}{4}$ jego



Rysunek 2.2: Wizualizacja do zadania 3

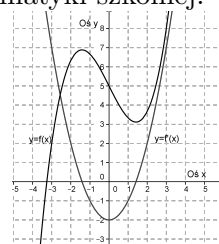
wysokości, więc najmniejsza odległość pomiędzy środkiem kuli i wierzchołkiem czworościanu jest równa 3. Zbiór punktów danej ściany, których może dotknąć kulka jest trójkątem równobocznym. Odległość wierzchołka tego trójkąta od najbliższego wierzchołka czworościanu jest równa $2\sqrt{2}$, a długość jego boku jest równa $\sqrt{6}$. Pole trójkąta równobocznego jest równe $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Pole powierzchni wewnętrznych ścian naczynia, których nie może dotknąć wrzucona kulka jest równe $48\sqrt{3}$.

2.6.

Analiza matematyczna

Elementy analizy matematycznej powracają do podstawy programowej oraz do wymagań maturalnych. Warto przyjrzeć się niektórym zagadnieniom, które wydają się być istotne z punktu widzenia matematyki szkolnej.

Zadanie 1. Funkcja $f : R \rightarrow R$ jest funkcją różniczkowalną. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji f i jej pochodnej. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej równej 0.



Komentarz. Zadanie 1 kształci rozumienie pojęcia pochodnej i jej interpretację geometryczną, a także istotną z punktu widzenia wymagań maturalnych umiejętność odczytywania danych z wykresu.

Zadanie 2. Uzasadnij, że funkcja f określona wzorem

$$fx = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{dla } x \in (0, 1] \\ -2x^2 + 2 & \text{dla } x \in (1, 2) \end{cases}$$

jest różniczkowalna w punkcie $x = 1$.

Komentarz. Zadanie 1 to typowy problem związany z istnieniem pochodnej. Od uczniów wymaga on rozumienia pojęcia pochodnej.

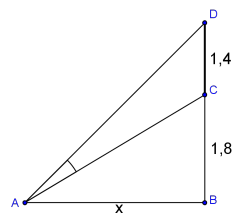
Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru m funkcja f określona wzorem

$$f(x) = mx^3 + 2x^2 + (m - \frac{4}{3})x - 3$$

- a) jest funkcją rosnącą;
- b) jest funkcją malejącą w przedziale $(-\infty, 0)$?

Komentarz. Zadanie 3 łączy elementy analizy z praktyką rozwiązywania zadań dotyczących funkcji kwadratowej z parametrem. U podstaw poszukiwania metody rozwiązania tego zadania leży niebanalna wiedza z zakresu teorii funkcji. Dotyczy ona związku pomiędzy pochodną funkcji f określonej na pewnym ograniczonym lub nieograniczonym przedziale (a, b) a jej monotonicznością. Wiemy, że jeśli funkcja różniczkowalna f jest rosnąca na przedziale (a, b) , to jej pochodna jest nieujemna w tym przedziale. Wiemy także, że jeśli pochodna funkcji f jest dodatnia w przedziale (a, b) , to funkcja ta jest rosnąca w tym przedziale. Znamy także przykład funkcji, która jest rosnąca, pomimo, że jej pochodna nie jest stale dodatnia (funkcja $x \mapsto x^3$). Powstaje pytanie, czy rozwiązując to zadanie należy rozważyć warunek $f'(x) > 0$ czy warunek $f'(x) \geq 0$. Z pomocą przychodzi to dodatkowa wiedza. Okazuje się, że jeśli zbiór $\{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$ jest zbiorem skończonym, to wtedy funkcja f jest rosnąca na (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$. Zatem rozwiązując to zadanie należy rozważyć warunek $f'(x) \geq 0$.

Zadanie 4. Obraz o wysokości 1,4 m zawieszony jest na ścianie w muzeum tak, że jego dolny brzeg znajduje się 1,8 m powyżej oczu oglądającego go turysty. W jakiej odległości od ściany powinien stanąć turysta, aby mógł najlepiej obejrzeć obraz, tzn. kąt widzenia obrazu był największy?



Komentarz. Zadanie 4 to typowe zadanie optymalizacyjne jako zastosowanie pochodnej funkcji.

Bibliografia

- [1] G. Pólya, *Jak to rozwiązać?*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2011.
- [2] M. Fabijańczyk, E. Miksa-Kondaszewska, P. Pawlak, R.J. Pawlak, Alicja Rychlewicz, Andrzej Rychlewicz, *Matematyka Zbiór zadań dla maturzystów. Zakres podstawowy, Res Polona*, 2012.
- [3] Xu Jiagu, *Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses For Junior Section*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010
- [4] R. Gelca, T. Andreescu, *Putnam and Beyond*, Springer, 2007.
- [5] Ryszard J. Pawlak, Andrzej Rychlewicz, Alicja Rychlewicz, Kazimierz Żylak *Matematyka krok po kroku Nowa Matura Zbiór Zadań cz. I* Res Polona 2004.
- [6] Ryszard J. Pawlak, Andrzej Rychlewicz, Alicja Rychlewicz, Kazimierz Żylak *Matematyka krok po kroku Nowa Matura Zbiór Zadań cz. II* Res Polona 2004.

NOWOCZESNY
NAUCZYCIEL
MATEMATYKI



publikacja bezpłatna



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



WYDAWNICTWO
UNIwersytetu
ŁÓDZKIEGO

www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62

