matematyka

materiały metodyczne

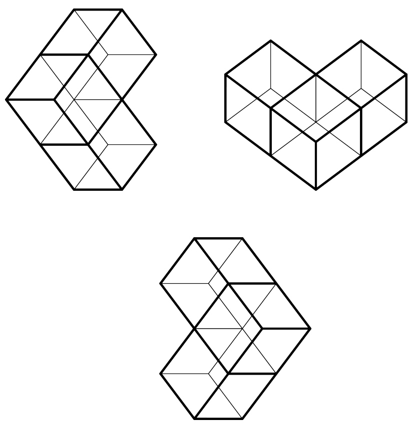
2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138217852516642742746639193200305992181741359662904357290033429526059563073813232862794349076323382988075319525101901157383418793070215408914993488416750924476146066808226480016847741185374234544243710753907774499206955170276183860626133138458300

redakcja
Ryszard J. Pawlak
Zofia Walczak

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

V

Zestaw zadań dotyczących liczb całkowitych



Opracowanie

Monika Fabijańczyk

ROZDZIAŁ 1

Cechy podzielności

Poniższe zadania zostały wybrane z różnych zbiorów zadań, opracowań, konkursów matematycznych. Mogą być rozwiązywane na poziomie podstawowym i rozszerzonym szkoły ponadgimnazjalnej.

1.1. Profil podstawowy

Podzielność przez 10

Zadanie 1. Wykaż, że wśród 11 dowolnych liczb naturalnych istnieją zawsze dwie takie, których różnica dzieli się przez 10.

Rozwiązanie.
Ponieważ wszystkich cyfr jest 10, więc wśród 11 liczb naturalnych przynajmniej dwie muszą kończyć się tą samą cyfrą. Ich różnica w rzędzie jedności ma cyfrę 0, a więc dzieli się przez 10.

Zadanie 2. Ile zer ma na końcu liczba będąca iloczynem 50 kolejnych liczb naturalnych: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 50$ (50! - pięćdziesiąt silnia).

Rozwiązanie.
Liczba 50! ma na końcu dokładnie n zer wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli się przez $10n$, a nie dzieli się przez $10n + 1$.
Aby liczba dzieliła się przez 10 musi dzielić się przez 5 i 2.

Ponieważ co piąta liczba dzieli się przez 5, a co druga dzieli się przez 2, więc musimy policzyć ile czynników 5 występuje w rozkładzie liczby 50! na czynniki pierwsze.
Co piąta liczba dzieli się przez 5, a więc w iloczynie $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 50$ występuje dziesięć czynników podzielnych przez 5, w tym dwa czynniki (25 i 50) podzielne przez 25. Oznacza to, że w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 50! czynnik 5 występuje 12 razy. W rozkładzie tym czynnik 2 występuje większą ilość razy, a więc $50! = 1012a$, gdzie liczba a nie dzieli się przez10. W konsekwencji liczba 50! w zapisie dziesiętnym ma 12 zer na końcu.

Zadanie 3. Znajdź największą liczbę naturalną n o tej własności, że 35! dzieli się przez 6 bez reszty.
Odp. $n = 15$.

Cecha podzielności przez 3

Zadanie 4. Udowodnij, że liczba $\underbrace{555\ldots5}_{48}$ jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie.
Zauważamy, że suma cyfr danej liczby jest równa $48 \cdot 5$, a więc jest podzielna przez 3.

Zadanie 5. Udowodnij, że następujące liczby są liczbami naturalnymi: $\frac{10^n-4}{6}$, $\frac{10^n+2}{6}$.
Wskazówka: $10^n - 4 = \underbrace{99\ldots9}_{n-1}6$.

Zadanie 6. Wiadomo, że 35! jest równe:

$$10333147966386144929\,x\,66651337523200000000$$

Znajdź x.

Rozwiązanie.
Liczba 35! jest podzielna przez 9, a więc suma jej cyfr, czyli liczba $138 + x$ też jest podzielna przez 9. Ale $138 = 15 \cdot 9 + 3$, czyli $x = 6$.

Zadanie 7. Rozstrzygnij, czy liczba $\underbrace{11\ldots1}_{14}\underbrace{22\ldots2}_{7}\underbrace{11\ldots1}_{14}+6$ jest pierwsza.

Rozwiązanie.
Suma cyfr liczby $\underbrace{11\ldots1}_{14}\underbrace{22\ldots2}_{7}\underbrace{11\ldots1}_{14}$ jest równa $14\cdot1+7\cdot2+14\cdot1=42$, a więc ta liczba dzieli się przez 3 i po dodaniu 6 też będzie podzielna przez 3.

Zadanie 8. Liczbę zapisano za pomocą 30 jedynek i pewnej liczby zer. Czy może ona być kwadratem pewnej liczby naturalnej?

Rozwiązanie.
Niech $\underbrace{11\ldots1}_{30}00\ldots0=p^2$. Wówczas $3|p^2$, czyli $3|p$, więc $9|p^2$, co jest niemożliwe.

Zadanie 9. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{11\ldots1}_{40}$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Dowód.
Oznaczmy
$$n=\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{11\ldots1}_{40}$$
Suma cyfr liczby n jest równa 240. Z cechy podzielności przez 3 wynika, że ta liczba jest podzielna przez 3. Przypuśćmy, że $n=m^2$, gdzie m jest liczbą całkowitą. Wówczas liczba m^2 jest podzielna przez 3, skąd wynika, że liczba m jest podzielna przez 3 (korzystamy tu z tego, że 3 jest liczbą pierwszą). Niech więc $m=3k$. Wtedy $n=m^2=(3k)^2=9k^2$.

Stąd wynika, że liczba n jest podzielna przez 9. Z cechy podzielności przez 9 wynika, że to jest jednak nieprawda, bo liczba 240 nie dzieli się przez 9.

Zadanie 10. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{77\ldots7}_{40}$ jest złożona.

Dowód.
Suma cyfr liczby $\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{77\ldots7}_{40}$ jest równa $40\cdot5+40\cdot7=480$. Z cechy podzielności przez 3 wynika, że ta liczba jest podzielna przez 3.

Zadanie 11. Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{99}1\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Dowód.
Niech $n = 1\underbrace{00\ldots0}_{99}1\underbrace{00\ldots0}_{99}1$

Suma cyfr liczby n jest podzielna przez 3 i nie jest podzielna przez 9, więc liczba n jest podzielna przez 3 i nie jest podzielna przez 9. Tak jak w zadaniu 6, wynika stąd, że liczba n nie jest kwadratem liczby całkowitej.

1.2. Profil rozszerzony

Zadanie 1. Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie.
Niech

$$n = 1\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1 = 10^{200} + 3 \cdot 10^{100} + 1.$$

Wówczas

$$10^{200} + 2 \cdot 10^{100} + 1 < n < 10^{200} + 4 \cdot 10^{100} + 4,$$

czyli $(10^{100}+1)^2 < n < (10^{100}+2)^2$. Liczba n leży między kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych, a więc nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 2. Na okręgu umieszczono 1998 cyfr. Następnie wypisano je kolejno, zaczynając od pewnej z nich i otrzymano liczbę (1998-cyfrową) podzielną przez 27. Wykaż, że jeśli zaczniemy wypisywanie od innej cyfry na okręgu, to także otrzymamy liczbę podzielną przez 27.

Rozwiązanie.
Niech $A = \overline{a_1a_2\ldots a_{1997}a_{1998}}$ będzie podzielna przez 27. Przestawmy cyfrę jedności na początek . Wówczas $A = \overline{a_{1998}a_1a_2\ldots a_{1997}}$ też dzieli się

przez 27. Rzeczywiście,

$$
\begin{aligned}
&A = a_{1998} + 10a_{1997} + \cdots + 10^{1996}a_2 + 10^{1997}a_1\\
&B = a_{1997} + 10a_{1996} + \cdots + 10^{1996}a_1 + 10^{1997}a_{1998}\\
&10B = 10a_{1997} + 100a_{1996} + \cdots + 10^{1997}a_1 + 10^{1998}a_{1998} =\\
&A - a_{1998} + 10^{1998}a_{1998} = A + (10^{1998} - 1)a_{1998} =\\
&A + \underbrace{99\ldots9}_{1998}\cdot a_{1998} = A + 9\cdot\underbrace{11\ldots1}_{1998}\cdot a_{1998}.
\end{aligned}
$$

Ponieważ $\underbrace{11\ldots1}_{1998}$ dzieli się przez 3 i A dzieli się przez 27, to $10B$ dzieli się przez 27. W konsekwencji B dzieli się przez 27.

ROZDZIAŁ 2

Podzielność

2.1.
Profil podstawowy

Zadanie 1. Ile dzielników ma liczba 72?

Rozwiązanie.
$72 = 2^3 \cdot 3^2$, stąd dzielnikami będą liczby:

$$\begin{array}{ccc} 2^0 \cdot 3^0 & 2^0 \cdot 3^1 & 2^0 \cdot 3^2 \\ 2^1 \cdot 3^0 & 2^1 \cdot 3^1 & 2^1 \cdot 3^2 \\ 2^2 \cdot 3^0 & 2^2 \cdot 3^1 & 2^2 \cdot 3^2 \\ 2^3 \cdot 3^0 & 2^3 \cdot 3^1 & 2^3 \cdot 3^2 \end{array}$$

Jest ich $(2+1)(3+1) = 12$.

Zadanie 2. Ile dzielników ma liczba $n = p^k q^l$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi?

Rozwiązanie.
Analogicznie ilość dzielników wynosi $(k+1)(l+1)$.

Można dowieść, że jeżeli $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ to ilość dzielników wynosi $(k_1+1) \cdot (k_2+1) \cdot (k_3+1) \cdot \ldots \cdot (k_m+1)$.

Zadanie 3. Dane są trzy kolejne liczby naturalne, z których pierwsza jest parzysta. Wykazać, że iloczyn tych liczb jest wielokrotnością 24.

Zadanie 4. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ jest całkowita.

Wskazówka.

$$\frac{2n+3n^2+n^3}{6}=\frac{n(n^2+3n+2)}{6}=\frac{n(n^2+2n+n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\in\mathbb{C}.$$

Zadanie 5. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych takich, że ich iloczyn jest równy 3200, a ich największy wspólny dzielnik jest równy 8.

Rozwiązanie.

$$3200=100\cdot 32=2^2\cdot 5^2\cdot 2^5=5^2\cdot 2^7$$
$$a=2^3\cdot 25;\quad b=2^4$$
$$a=2^4\cdot 25;\quad b=2^3$$

Zadanie 6. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a i b liczba $\mathrm{NWD}(a+b,ab)-\mathrm{NWD}(a,b)$ jest parzysta.

Rozwiązanie.

— Jeżeli obie liczby a,b są parzyste, to $a+b$ i ab są parzyste. Największy wspólny dzielnik dwóch liczb parzystych jest liczbą parzystą (bo zawiera czynnik 2). Czyli rozważana różnica jest parzysta.

— Jeżeli obie liczby a,b są nieparzyste, to $a+b$ jest parzysta, a ab jest nieparzyste. Największy wspólny dzielnik liczby parzystej i nieparzystej jest liczbą nieparzystą (bo nie zawiera czynnika 2). Czyli rozważna różnica jest parzysta.

— Jeżeli liczby a,b są różnej parzystości, to $a+b$ jest liczbą nieparzystą, a ab jest parzyste. Największy wspólny dzielnik liczby parzystej i nieparzystej jest liczbą nieparzystą (bo nie zawiera czynnika 2). Czyli rozważna różnica jest parzysta.

Zadanie 7. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n wyrażenie n^5-5n^3+4n dzieli się przez 120.

Rozwiązanie.
Ponieważ $120 = 3 \cdot 5 \cdot 8$, więc wystarczy wykazać, że badane wyrażenie dzieli się przez 3 oraz przez 5 i przez 8.

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - n^2 - 4n^2 + 4) = n[n^2(n^2-1) - 4(n^2-1)] = \\ = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

W iloczynie 5 kolejnych liczb naturalnych co najmniej jedna dzieli się przez 2, a nie dzieli się przez 4, co najmniej jedna dzieli się przez 4, co najmniej jedna dzieli się przez 3 i dokładnie jedna dzieli się przez 5. W konsekwencji iloczyn ten dzieli się przez 120.

Zadanie 8. Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36

Wskazówka.
$k^6 - 2k^4 + k^2 = k^2(k^4 - 2k^2 + 1) = k^2(k^2-1)^2 = [k(k-1)(k+1)]^2$

Zadanie 9. Wykaż, że jeżeli wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ o współczynnikach całkowitych ma trzy pierwiastki: $-5, -4, -3$, to dla każdej liczby całkowitej x wartość wielomianu $W(x)$ jest liczbą podzielną przez 6.

Wskazówka.
$W(X) = a(x+3)(x+4)(x+5)$

Zadanie 10. Podaj ogólną postać liczby:

- parzystej,
- nieparzystej,
- podzielnej przez 5,
- która w dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Zadanie 11. Uzasadnij, że iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 4. Zbadaj, czy jest podzielny przez 8 i 12.

Zadanie 12. Dane są takie trzy liczby całkowite, że różnica dowolnych dwóch z nich jest podzielna przez 3. Wykaż, że ich suma jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie.

Wszystkie liczby całkowite można podzielić na 3 klasy: Liczby podzielne przez 3, tzn. postaci $3k$, liczby które w dzieleniu przez 3 dają resztę 1, tzn. postaci $3k+1$ i liczby, które w dzieleniu przez 3 dają resztę 2, tzn. postaci $3k+2$. Jeżeli różnica dwóch liczb całkowitych jest liczbą podzielną przez 3, to muszą te liczby należeć do tej samej klasy.

— Jeżeli są to liczby podzielne przez 3, to $3k+3l+3m = 3(k+l+m) = 3n$ gdzie $k+l+m = n \in \mathbb{C}$, więc suma ta jest podzielna przez 3.

— Jeżeli są to liczby, które w dzieleniu przez 3 dają resztę 1, to $(3k+1)+(3l+1)+(3m+1) = 3(k+l+m+1) = 3n$, gdzie $k+l+m+1 = n \in \mathbb{C}$, więc suma ta jest podzielna przez 3.

— Jeżeli są to liczby, które w dzieleniu przez 3 dają resztę 2, to $(3k+2)+(3l+2)+(3m+2) = 3(k+l+m+2) = 3n$, gdzie $k+l+m+2 = n \in \mathbb{C}$, więc suma ta jest podzielna przez 3.

Zadanie 13. Liczba a w dzieleniu przez 7 daje resztę 4, a liczba b w dzieleniu przez 7 daje resztę 5. Oblicz jaką resztę w dzieleniu przez 7 daje suma kwadratów tych liczb.

Rozwiązanie.

$$a = 7k+4, \quad b = 7l+5$$
$$a^2+b^2 = (7k+4)^2+(7l+5)^2 = 49(k^2+l^2)+56k+70l+41 =$$
$$= 7(7k^2+7l^2+8k+10l+5)+6 = 7n+6$$

gdzie $7k^2+7l^2+8k+10l+5 = n \in \mathbb{C}$.

W konsekwencji liczba a^2+b^2 w dzieleniu przez 7 daje resztę 6.

Zadanie 14. Reszta z dzielenia pewnej liczby całkowitej przez 2 jest równa 1, a reszta z dzielenia tej liczby przez 3 jest równa 2. Jaka jest reszta z dzielenia tej liczby przez 6.

Rozwiązanie.

Jest to liczba nieparzysta, więc może być postaci $6k+1$, $6k+3$, $6k+5$.

Jeżeli $n = 6k + 1$, to reszta z dzielenia tej liczby przez 3 jest równa 1.

Liczba $6k + 3$ jest podzielna przez 3.

Liczba $n = 6k + 5 = 3(2k + 1) + 2$ daje w dzieleniu przez 3 resztę 2.

A więc nasza liczba w dzieleniu przez 6 daje resztę 5.

Zadanie 15. Uzasadnij, że każde dwie liczby naturalne posiadają następującą własność: albo a, albo b, albo $a + b$, albo $a - b$ dzielą się przez 3.

Rozwiązanie.

$$\begin{cases} a = 3k + 1 \\ b = 3l + 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 3k + 2 \\ b = 3l + 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 3k + 1 \\ b = 3l + 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 3k + 2 \\ b = 3l + 1 \end{cases}$$

Jeżeli reszty z dzielenia przez 3 liczb a i b są takie same, to $a - b$ dzieli się przez 3. Jeżeli reszty z dzielenia przez 3 liczb a i b są różne, to $a + b$ dzieli się przez 3.

2.2. Profil rozszerzony

Zadanie 1. Niech x i y będą liczbami całkowitymi. Udowodnij, że liczba $25x + 3y$ jest podzielna przez 41 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $3x + 2y$ dzieli się przez 41.

Rozwiązanie.
$2(25x + 3y) = 41x + 9x + 6y = 41x + 3(3x + 2y)$.

Zadanie 2. Niech m i n będą liczbami naturalnymi. Udowodnij, że liczba $25m + 3n$ jest podzielna przez 83 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $3m + 7n$ dzieli się przez 83.

Rozwiązanie.
$2(25m + 3n) + 11(3m + 7n) = 83(m + n)$.

Zadanie 3. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{1997}$ są różnymi elementami zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 1997\}$. Rozstrzygnij, czy liczba

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \cdots + (a_{1997} - 1997)$$

jest parzysta, czy nieparzysta.

Rozwiązanie.
Ponieważ $a_1 + a_2 + \cdots + a_{1997} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 1997$ to $(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \cdots + (a_{1997} - 1997) = 0$. Wśród liczb $(a_1 - 1), (a_2 - 2), \ldots, (a_{1997} - 1997)$ co najmniej jedna jest parzysta (liczb tych jest nieparzysta ilość, a suma jest parzysta). Wobec tego iloczyn tych liczb jest liczbą parzystą.

Zadanie 4. Udowodnij, że ułamek $\frac{14n+3}{21n+4}$ jest nieskracalny.

Dowód. (nie wprost)
Załóżmy, że $\mathrm{NWD}(14n + 3, 21n + 4) = d$. Wówczas

$$d\big|(21n + 4) - (14n + 3) \Leftrightarrow d\big|7n + 1 \Leftrightarrow d\big|14n + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d\big|(14n + 3) - (14n + 2) \Leftrightarrow d\big|1.$$

Zadanie 5. Udowodnij, że $\frac{n^4-3n^2+1}{n^4-n^2-2n-1}$ jest ułamkiem właściwym.

Wskazówka.

$$\frac{n^4 - 3n^2 + 1}{n^4 - n^2 - 2n - 1} = \frac{n^4 - 2n^2 + 1 - n^2}{n^4 - (n^2 + 2n + 1)} = \frac{(n^2 - 1)^2 - n^2}{n^4 - (n + 1)^2} =$$
$$= \frac{(n^2 - n - 1)(n^2 + n - 1)}{(n^2 - n - 1)(n^2 + n + 1)} = \frac{(n^2 + n - 1)}{(n^2 + n + 1)} \leqslant 1$$

Zadanie 6. Udowodnij, że dla każdego naturalnego n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Rozwiązanie.
$n^5 - n = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$. Ponieważ wśród trzech kolejnych liczb naturalnych dokładnie jedna dzieli się przez 3, to iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych $(n - 1)n(n + 1)$ dzieli się przez 6.

Jeżeli jedna z liczb $n - 1, n, n + 1$ dzieli się przez 5, to wyrażenie $n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$ dzieli się przez 30.

Załóżmy zatem, że żadna z liczb $n-1, n, n+1$ nie jest podzielna przez 5. Wówczas albo $n-2$ albo $n+2$ jest podzielne przez 5. Wówczas $(n-2)(n+2) = n^2-4$ jest podzielne przez 5. Ale $n^2+1 = (n^2-4)+5$, oznacza to, że wówczas n^2+1 jest podzielne przez 5, a więc iloczyn $n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ dzieli się przez 30.

Zadanie 7. Udowodnij, że n^3+5n, n^3+11n, n^3-19n są podzielne przez 6.

Wskazówki.

$$n^3 + 5n = n(n^2 - 1 + 6) = n(n-1)(n+1) + 6n$$

$$n^3 + 11n = n(n^2 - 1 + 12) = n(n-1)(n+1) + 12n$$

$$n^3 - 19n = n(n^2 + 5 - 24) = n(n^2 + 5) - 24n$$

Zadanie 8. Wykaż, że dla dowolnych całkowitych liczb a, b, c liczba $a^3 + b^3 + c^3$ jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a+b+c$ jest podzielna przez 6.

Wskazówka.
$a^3 - a = a(a-1)(a+1)$, $b^3 - b = b(b-1)(b+1)$, $c^3 - c = c(c-1)(c+1)$. Ponieważ liczby te są podzielne przez 6, to ich suma $a^3+b^3+c^3+a+b+c$ też jest podzielna przez 6.

Zadanie 9. Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego n liczba $n(n+1)(2n+1)$ jest podzielna przez 6.

Rozwiązanie.
Liczba ta jest podzielna przez 2, bo w rozkładzie na czynniki mamy iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych.

Jeżeli któraś z liczb $n, n+1$ jest podzielna przez 3, to nasza liczba jest podzielna przez 6. Jeżeli n i $n+1$ nie są podzielne przez 3, to $n+2$ jest podzielne przez 3. Ale $2n+1 = 2n+4-3 = 2(n+2)-3$. Czyli liczba jest podzielna przez 3.

ROZDZIAŁ 3

Liczby pierwsze

3.1. Profil podstawowy

Zadanie 1. Dla jakich liczb naturalnych n liczba $n^4 + n^2 + 1$ jest liczbą pierwszą?

Rozwiązanie.
Rozłóżmy badane wyrażenie na czynniki:

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$$

Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ $n^2 - n + 1 < n^2 + n + 1$. Aby ten iloczyn był liczbą pierwszą musi zachodzić:

— mniejszy czynnik jest równy 1,

— większy czynnik jest równy danemu wyrażeniu.

$$\begin{cases} n^2 - n + 1 = 1 \\ n^2 + n + 1 = n^4 + n^2 + 1. \end{cases}$$

Stąd $n = 1$. Dla $n = 0$ rozpatrywane wyrażenie jest równe 1, a 1 nie jest liczbą pierwszą.

3.2. Profil rozszerzony

Zadanie 1. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że $4p^2+1$ i $6p^2+1$ są także liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie.
Zbadajmy to dla początkowych liczb pierwszych.

p	$4p^2+1$	$6p^2+1$
2	17	25
3	37	55
5	101	151
7	197	295
11	485	727
13	677	1015
17	1157	1735
19	1445	2167

Zauważmy, że w każdym wierszu jedna z liczb jest podzielna przez 5. Jeżeli hipoteza, że wśród liczb$p$, $4p^2+1$ i $6p^2+1$ znajduje się zawsze liczba podzielna przez 5 okazała się prawdziwa, to jedyną liczbą pierwszą o żądanej własności byłaby liczba 5. Udowodnijmy podaną hipotezę.

Metoda1. Rozpatrujemy przypadki w zależności od ostatniej cyfry liczby p. (Hipotezę dowodzimy dla dowolnych liczb, niekoniecznie pierwszych)

— jeżeli ostatnią cyfrą jest 0 lub 5, to liczba p dzieli się przez 5.

— jeżeli ostatnią cyfrą jest 1 lub 9, to ostatnią cyfrą p^2 jest 1, a więc ostatnią cyfrą liczby $4p^2+1$ jest cyfra 5.

— jeżeli ostatnią cyfrą jest 2 lub 8, to ostatnią cyfrą p^2 jest 4, a więc ostatnią cyfrą liczby $6p^2+1$ jest cyfra 5.

— jeżeli ostatnią cyfrą jest 3 lub 7, to ostatnią cyfrą p^2 jest 9, a więc ostatnią cyfrą liczby $6p^2+1$ jest cyfra 5.

— jeżeli ostatnią cyfrą jest 4 lub 6, to ostatnią cyfrą p^2 jest 6, a więc ostatnią cyfrą liczby $4p^2 + 1$ jest cyfra 5.

Metoda2. Rozpatrujemy trzy przypadki w zależności od tego, jaką resztę przy dzieleniu przez 5 daje liczba p.

1. Liczba p daje resztę 0 przy dzieleniu przez 5. Wtedy p dzieli się przez 5.
2. Liczba p daje resztę 1 lub 4 przy dzieleniu przez 5. Wtedy $p = 5k + 1$ lub $p = 5k + 4$ dla pewnej liczby naturalnej k. Stąd łatwo wynika, że $p^2 = 5l + 1$ dla pewnej liczby całkowitej l:

$$(5k + 1)^2 = 25k^2 + 10k + 1 = 5(5k^2 + 2k) + 1,$$
$$(5k + 4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 1$$

zatem
$$4p^2 + 1 = 4(5l + 1) + 1 = 20l + 5 = 5(4l + 1),$$

a więc liczba $4p^2 + 1$ dzieli się przez 5.

3. Liczba p daje resztę 2 lub 3 przy dzieleniu przez 5. Wtedy $p = 5k + 2$ lub $p - 5k + 3$ dla pewnej liczby naturalnej k. W obu przypadkach istnieje taka liczba całkowita l, że $n^2 = 5l + 4$:

$$(5k + 2)^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5(5k^2 + 4k) + 4,$$
$$(5k + 3)^2 = 25k^2 + 30k + 9 = 5(5k^2 + 6k + 1) + 4$$

zatem
$$6n^2 + 1 = 6(5l + 4) + 1 = 30l + 25 = 5(6l + 5),$$

a więc liczba $6p^2 + 1$ dzieli się przez 5.

Zadanie 2. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, dla których obie liczby $n^2 + n + 1$ oraz $n^2 + n + 3$ są pierwsze.

Wskazówka.
Zauważ, że zawsze jedno z wyrażeń n^2+n+1 oraz n^2+n+3 dzieli się przez 3, sformułuj i udowodnij odpowiednią hipotezę ogólną:
Znów wypiszemy wartości wyrażeń $n^2 + n + 1$ i $n^2 + n + 3$ dla kilku początkowych liczb naturalnych n:

n	n^2	n^2+n+1	n^2+n+3
1	1	3	5
2	4	7	9
3	9	13	15
4	16	21	23
5	25	31	33
6	36	43	45
7	49	57	59
8	64	73	75
9	81	91	93
10	100	111	113

Dostrzeżenie, że liczby $3, 9, 15, 21, 33, 45, 57, 75, 93$ i 111 są podzielne przez 3, nie jest trudne. Teraz dowodzimy, że dla każdej liczby naturalnej n jedna z liczb n^2+n+1 oraz n^2+n+3 jest podzielna przez 3 (jeśli n daje resztę 1 z dzielenia przez 3, to pierwsza z tych liczb, w przeciwnym przypadku druga). To już daje rozwiązanie – jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $n = 1$.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że $8p^2+1$ jest także liczbą pierwszą

Wskazówka.
Zauważ, że tylko dla $p = 3$ nasze wyrażenie nie dzieli się przez 3, sformułuj i udowodnij odpowiednią hipotezę ogólną:
Powtórzmy tę strategię rozwiązania, która okazała się skuteczna w poprzednim zadaniu. Obliczmy $8p^2+1$ dla kolejnych liczb pierwszych p:

p	$8p^2+1$
2	33
3	73
5	201
7	393
11	969
13	1353

17	2313
19	2889

Jeżeli dostrzeżemy, że w drugiej kolumnie wszystkie liczby, oprócz 73, są podzielne przez 3, to możemy sformułować hipotezę ogólną:

Hipoteza. Dla każdej liczby naturalnej n jedna z liczb n i $8n^2 + 1$ jest podzielna przez 3. Po sformułowaniu tej reguły możemy dokończyć rozwiązanie zadania, tak jak w sposobie 2 lub 3 poprzedniego zadania. Jedyną liczbą pierwszą p spełniającą warunki zadania jest $p = 3$.

ROZDZIAŁ 4

Porównywanie liczb i sumowanie

4.1. Porównywanie liczb – profil podstawowy

Zadanie 1. Rozstrzygnij, która z liczb jest większa 22^{55} czy 55^{22}?

Rozwiązanie.
$22^{55} = (2 \cdot 11)^{55} = 2^{55} \cdot 11^{55}$

$55^{22} = (5 \cdot 11)^{22} = 5^{22} \cdot 11^{22}$

Ale $2^{55} = (2^5)^{11} = 32^{11} > 25^{11} = (5^2)^{11} = 5^{22}$, czyli $22^{55} > 55^{22}$.

Zadanie 2. Uporządkuj rosnąco liczby:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{40}$, $\left(\frac{1}{10}\right)^{10}$, $\left(\frac{3}{10}\right)^{20}$.

b) 9^{10}, 10^9.

c) 2^{45}, 3^{36}, 4^{27}, 5^{18}.

d) 4^{100}, 32^{50}, 63^{23}.

e) 32^9, 16^{12}, 63^7, 18^{13}.

Rozwiązanie.

a)

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{20} = \left((0,2)^2\right)^{10} = (0,04)^{10},$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{40} = \left((0,4)^4\right)^{10} = (0,0256)^{10},$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{10} = (0,1)^{10},$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{20} = \left((0,3)^2\right)^{10} = (0,09)^{10}.$$

Stąd

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{40} < \left(\frac{1}{5}\right)^{20} < \left(\frac{3}{10}\right)^{20} < \left(\frac{1}{10}\right)^{10}.$$

b) $9^5 = 59049 > 5 \cdot 10^4$, czyli $9^{10} > 25 \cdot 10^8 > 10^9$.

4.2. Sumowanie – profil rozszerzony

Zadanie 1. Oblicz:

$$\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

Wskazówka.

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{1} = \sqrt{n}+\sqrt{n-1}.$$

Zadanie 2. Oblicz:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{125\cdot 126} + \frac{1}{126\cdot 127}$$

Rozwiązanie.

Zauważ, że: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{125\cdot 126} + \frac{1}{126\cdot 127} =$$
$$\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{125}-\frac{1}{126}\right) + \left(\frac{1}{126}-\frac{1}{127}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{127} = \frac{126}{127}.$$

Korzystając z podobnego pomysłu można budować inne zadania nieco trudniejsze.

Zadanie 3. a) Oblicz:

$$\frac{3}{1\cdot 4} + \frac{3}{4\cdot 7} + \frac{3}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{3}{301\cdot 304} + \frac{3}{304\cdot 307}.$$

b) Oblicz:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\dots+\frac{1}{277\cdot 281}+\frac{1}{281\cdot 285}.$$

Rozwiązanie.

a) Zauważ, że ciąg $1, 4, 7, \dots$ ma wyraz ogólny $a_n = 1+(n-1)\cdot 3 = 3n-2$, a ciąg $4, 7, 10, \dots$ ma wyraz ogólny $b_n = 3n+1$. Ponadto

$$\frac{3}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}$$

$$\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\dots+\frac{3}{301\cdot 304}+\frac{3}{304\cdot 307}=$$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\dots+\left(\frac{1}{301}-\frac{1}{304}\right)+\left(\frac{1}{304}-\frac{1}{307}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{307}=\frac{306}{307}$$

b) Zauważ, że ciąg $1, 5, 9, \dots$ ma wyraz ogólny $a_n = 1+(n-1)\cdot 4 = 4n-3$ a ciąg $5, 9, 13, \dots$ ma wyraz ogólny $b_n = 4n+1$. Ponadto:

$$\frac{4}{(4n-3)(4n+3)} = \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+3}$$

$$\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}+\dots+\frac{4}{277\cdot 281}+\frac{4}{281\cdot 285}=$$

$$\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\dots+\left(\frac{1}{277}-\frac{1}{281}\right)+\left(\frac{1}{281}-\frac{1}{285}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{285}=\frac{284}{285}$$

czyli

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\dots+\frac{1}{277\cdot 281}+\frac{1}{281\cdot 285}=\frac{1}{4}\cdot\frac{284}{285}=\frac{71}{285}.$$

Zadanie 4. Oblicz: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

Rozwiązanie.

I sposób.

$$5\sqrt{2}+7 = 1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^3$$

$$5\sqrt{2}-7 = (\sqrt{2}-1)^3,$$

czyli

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=1+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=2.$$

II sposób.

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=x$$

$$x^3=5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2}+7-3\Big(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\Big)^2\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}+$$

$$+\,3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\Big(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\Big)^2=$$

$$14-3\Big(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\Big)\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=14-3x.$$

Otrzymujemy równanie $x^3+3x-14=0$, ale

$$x^3+3x-14=\big(x^3-2x^2\big)+\big(2x^2-4x\big)+(7x-14)=(x-2)\big(x^2+2x+7\big).$$

Jedynym rozwiązaniem tego równania jest $x=2$.

Zadanie 5. Które z poniższych zdań jest prawdziwe: Liczba postaci $2\cdot 6^n-2\cdot 3^{n+1}+6^{n+1}-2\cdot 3^{n+2}$ jest:

a) wielokrotnością liczby 8 dla każdej liczby naturalnej n,

b) wielokrotnością liczby 5 dla pewnej liczby naturalnej n,

c) wielokrotnością liczby 1944 dla pewnej liczby naturalnej n.

Wskazówka.

$$2\cdot 6^n-2\cdot 3^{n+1}+6^{n+1}-2\cdot 3^{n+2}=2\cdot 3^n\cdot 2^n-2\cdot 3\cdot 3^n+6\cdot 2^n\cdot 3^n-18\cdot 3^n$$

$$=2\cdot 3^n\big(2^n-3+3\cdot 2^n-9\big)=2\cdot 3^n\big(-12+4\cdot 2^n\big)=8\cdot 3^n\big(2^n-3\big).$$

ROZDZIAŁ 5

Zadanie różne

5.1. System dziesiętny – profil podstawowy

Zadanie 1. Jeżeli odwrócimy kolejność cyfr w liczbie naturalnej n , to otrzymamy liczbę o 27 większą. Ile jest liczb dwucyfrowych o tej własności? Wymień je.

Rozwiązanie.

$$10a + b + 27 = 10b + a$$

$$9a - 9b = -27$$

$$b - a = -3$$

$$a \in \{1, 2, \ldots, 9\},\ b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$$

Możliwe pary: $(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9)$.

Zadanie 2. Uzasadnij, że różnica między liczbą trzycyfrową, a liczbą zapisaną tymi samymi cyframi, ale w odwrotnej kolejności nie może być kwadratem liczby naturalnej

Rozwiązanie.
Niech $x = \overline{a_3a_2a_1} = 100a_3 + 10a_2 + a_1$.
$100a_3 + 10a_2 + a_1 - 100a_1 - 10a_2 - a_3 = 99a_3 - 99a_1 = 9 \cdot 11(a_3 - a_1)$.
Ale $a_3 - a_1 \neq 11$ bo $0 \leqslant |a_3 - a_1| \leqslant 9$, czyli w rozkładzie na czynniki pierwsze rozpatrywanej różnicy czynnik 11 wystąpi tylko jeden raz.

5.2. Zadania z wykorzystaniem nierówności $(a-b)^2 \geqslant 0$ – profil rozszerzony

Zadanie 1. Udowodnij, że $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant \sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$, gdzie $a, b>0$.

Dowód.

Zauważmy, że $(a-b)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2-ab+b^2 \geqslant ab$. Wówczas

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}\cdot\left[\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3\right]=$$
$$\frac{1}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a^2}-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{b^2}\right)\geqslant$$
$$\frac{1}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Zadanie 2. Udowodnij, że jeżeli $a+b+c=1$ to $ab+bc+ca \leqslant \frac{1}{3}$.

Dowód.

Wiadomo, że $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, $c^2+b^2 \geqslant 2bc$, $a^2+c^2 \geqslant 2ac$. Dodajmy stronami te nierówności. Otrzymujemy $2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ac)$, czyli $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$. Ale $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=(a+b+c)^2$ i z założenia $a+b+c=1$. Czyli $3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2$, więc $3(a^2+b^2+c^2) \geqslant 1$, co daje tezę twierdzenia.

Zadanie 3. Niech $a, b>2$. Rozstrzygnij i uzasadnij, która z liczb jest większa, a czy b, jeżeli $a^n=a+2$, $\frac{b^{2n}}{2}=a+b$.

Rozwiązanie.

$$(a+2)^2=a^2+4a+4 \geqslant 4a+4a=8a$$

Wówczas

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}=\frac{2(a+b)}{(a+2)^2}<\frac{2(a+b)}{8a}=\frac{a+b}{4a}.$$

Załóżmy, że $a \leqslant b$, wówczas $\frac{b}{a} \geqslant 1$.

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \geqslant \frac{b}{a}=\frac{4b}{4a} \geqslant \frac{2a+2b}{4a}=\frac{a+b}{2a}>\frac{a+b}{4a}>\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

co prowadzi do sprzeczności, czyli $a>b$.

Bibliografia

[1] M. Fabiańczyk, A. Warężak, *Zbiór zadań testowych z matematyki*, Tukan, 2002.

[2] W. Guzicki, *Rozszerzony program matematyki w gimnazjum*, Wydawnictwo Ośrodka Rozwoju Edukacji, Warszawa, 2013.

[3] K. Kłaczkow, M. Kuczab, E. Świda, *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań*, Oficyna Edukacyjna Pazdro, 1999.

[4] Z. Krawcewicz, *Zadania dla uczniów klas V-VIII uzdolnionych matematycznie*, WSWiP, 1985.

[5] R. Pawlak, M. Fabiańczyk, H. Pawlak, Andrzej Rychlewicz, Alicja Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku. Zbiór zadań z matematyki*, Res Polona, 2009.

[6] M. Wesołowski, *Zbiór zadań*, Nowa Era, 2013.

[7] *Liga zadaniowa. Zbiór zadań dla uczniów zainteresowanych matematyką*, praca zbiorowa pod redakcją Z. Babińskiego i P. Nędzyńskiego, Agencja Wydawnicza Czarny Kruk, 1994.

NOWOCZESNY
NAUCZYCIEL
MATEMATYKI

publikacja bezpłatna

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

ISBN 978-83-7969-490-7

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62