

*Monika Czajkowska**

PRACA Z KALKULATOREM GRAFICZNYM NA ZAJĘCIACH Z PRZEDMIOTÓW ILOŚCIOWYCH

1. WPLYW TECHNOLOGII INFORMACYJNEJ NA PROCES UCZENIA SIĘ – NAUCZANIA

Upowszechnienie się IT wywiera ogromny wpływ na proces kształcenia na każdym etapie edukacji. Animacje i symulacje pobudzają osoby uczące się do aktywności myślowej, a dzięki ukazywaniu rzeczy i zjawisk w ruchu, pokazywaniu przebiegu zjawisk i procesów, ułatwiają proces interioryzacji, co z kolei prowadzi do operacji myślowych.

Nie ulega wątpliwości, że wykorzystanie komputera lub kalkulatora graficznego pozwala, w określonych warunkach, na głębsze rozumienie rozważanego zagadnienia, a także na modelowanie i symulowanie przebiegu wielu zjawisk czy procesów. Studenci mogą rozpatrywać rzeczywiste problemy, wykonywać działania na realnych danych, a nie specjalnie dobranych i życiowo bezsensownych. Umiejętny ich dobór i właściwe wykorzystanie mogą zadecydować o tym, czy rozważane zagadnienia wzbudzą ich zainteresowanie i czy proces poznania rzeczywistości będzie przebiegał prawidłowo. Zastosowanie komputerów, czy kalkulatorów graficznych wymusza zmianę stylu pracy zarówno wykładowcy jak i osoby uczącej się.

Wykorzystanie komputerów sprzyja efektywności procesu uczenia się – nauczania zwłaszcza wtedy, gdy studenci mogą indywidualnie pracować przy komputerze, symulować pewne sytuacje, badać je i wyciągać wnioski. Niestety, na zajęciach z przedmiotów ilościowych nie miałam możliwości zorganizowania zajęć w pracowni komputerowej. Głównym powodem była zbyt duża liczebność grup studenckich. Ponadto ze względu na obciążenie dydaktyczne pracowni komputerowych nie było możliwości regularnego korzystania z nich.

* dr, Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy w Kielcach.

W jednej z grup studenckich kierunku Ekonomia, z którą prowadziłam zajęcia z przedmiotu matematyka, zaobserwowałam, że znaczna część studentów posiada kalkulatory graficzne¹. Niestety nie wykorzystywali ich możliwości, stosując głównie do wykonywania prostych obliczeń rachunkowych. Postanowiłam wskazać im inne zastosowania tych kalkulatorów, wspomagając w ten sposób proces nauczania – uczenia się matematyki.

Kalkulatory graficzne, podobnie jak komputer, mogą w nauczaniu przedmiotów ilościowych (zob. B. Bugajska – Jaszczołt, M. Czajkowska, 2007):

- ułatwiać wprowadzanie nowego pojęcia i wyjaśnianie jego sensu,
- ilustrować gotowe treści przekazywane przez wykładowców,
- umożliwiać samokontrolę i kontrolę wiedzy studenta,
- służyć jako narzędzie do badania rzeczywistości, do rozważania problemów niedostępnych przy zastosowaniu tradycyjnych metod,
- wspomagać studenta w uzupełnianiu lub rozszerzaniu posiadanej wiedzy.

W niniejszym artykule przedstawię kilka sytuacji dydaktycznych, w których kalkulatory graficzne pełnią niektóre z powyżej wymienionych funkcji.

2. PRZYKŁADY WYKORZYSTANIA KALKULATORÓW GRAFICZNYCH DO SAMOKONTROLI WIEDZY STUDENTA

Praktyka pokazuje, że większość studentów I roku studiów I stopnia kierunku Ekonomia nie ma ugruntowanej wiedzy na temat funkcji potęgowych, wykładniczych, czy logarytmicznych. Prezentacja na wykładach kształtów wykresów takich funkcji często nie przynosi pożądanego efektu. Ta wiedza wielokrotnie nie zostaje zasymilowana i wykorzystywana nawet podczas rozwiązywania najprostszych zadań. Szkicowanie wykresów funkcji za pomocą kartki i ołówka jest bardzo czasochłonne. Przy funkcjach o wzorach bardziej skomplikowanych studenci nie mają szans na poprawne narysowanie ich wykresów. Zaobserwowałam, że niektórzy, zwłaszcza ci o niskich umiejętnościach, którzy wielokrotnie doświadczają porażek, wolą nie robić nic i czekać aż wykres pojawi się na tablicy.

Praca z kalkulatorem graficznym zmieniła taką postawę. Początkowo studenci samodzielnie sporządzali na kartce wykresy funkcji potęgowych, wykładniczych i logarytmicznych², o niezbyt nieskomplikowanych wzorach, np.

¹ Studenci posiadali różne typy i modele kalkulatorów graficznych, co rodziło pewne trudności organizacyjne, zwłaszcza na pierwszych zajęciach. Ponieważ większość studentów posiadała kalkulatory CASIO CFX – 9850 G PLUS, więc przedstawione w tym artykule programy zostały napisane na ten typ kalkulatora.

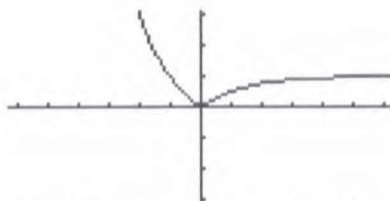
² Celowo wymagałam, aby studenci najpierw sporządzali wykres funkcji za pomocą kartki i ołówka, gdyż chciałam rozwijać umiejętność własnoręcznego rysowania funkcji.

$f(x) = 2^{-x+4}$, $f(x) = \log(x+3)$. Większość z nich robiła to błędnie. Nauczeni doświadczeniem zdobytym podczas rysowania wykresów funkcji liniowych postępowali podobnie. Intuicyjnie sporządzali tabelkę, wyznacжали wartości funkcji dla większej (niż dwa) liczby argumentów, zaznaczali punkty w układzie współrzędnych i próbowali je łączyć, najczęściej łamaną. Ich uwaga skupiona była na wykonywaniu rachunków i uzupełnianiu tabelki, a następnie na wyborze „najbardziej racjonalnego i naturalnego połączenia punktów”. Tym razem jednak nie czekali, aż rozwiązanie pojawi się na tablicy, lecz samodzielnie sprawdzali poprawność naszkicowanych przez siebie wykresów wykorzystując kalkulator graficzny. Nie musieli nikogo pytać, czy wykres jest poprawny – to kalkulator dostarczał im informacji zwrotnej. Wielokrotnie okazywali zdziwienie i zdumienie, gdy wykres naszkicowany na kartce różnił się znacznie od tego, który widniał na ekranie kalkulatora. To jednak pobudzało ich do myślenia i działania – starali się dotrzeć do istoty błędu, tak, aby go więcej nie popełniać. Stawali się coraz bardziej świadomi faktu, że częściowo są odpowiedzialni za własne wykształcenie. Dla studentów ważne było to, że nikt nie był świadkiem popełnianych przez nich błędów i usterek, nie musieli się publicznie do nich przyznawać. Z jednej strony pracowali w osamotnieniu (gdyż każdy samodzielnie sporządzał wykres, oceniał jego poprawność i badał „swoją” funkcję), z drugiej w razie potrzeby mogli się komunikować i dyskutować. Zauważyłam, że studenci, nawet ci o niskich umiejętnościach, już po kilku przykładach zapamiętywali kształt wykresu funkcji potęgowej, wykładniczej, czy logarytmicznej. Powoli zaczęli rozważać wykresy funkcji o coraz bardziej skomplikowanych wzorach, sami „wymyślali” takie funkcje i nie ukrywali radości z odnoszonych sukcesów. Na rys. 1 przytaczam przykłady dwóch funkcji rozważanych przez studentów.

Studenci zachęcani do nauki z kalkulatorem graficznym zaczęli samodzielnie poznawać inne jego możliwości. Ich zaciekawienie wzbudziły np. polecenia {Parm} oraz {r=}. To spowodowało, że poznali krzywe opisane równaniami parametrycznymi oraz zadane równaniami we współrzędnych biegunowych. Te treści zostały przez nich głębiej poznane i trwalej zapamiętane niż w przypadku tradycyjnego nauczania, a co najważniejsze chęć ich poznania wyszła od samych studentów.

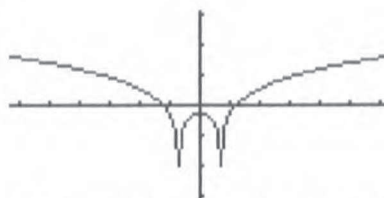
Kalkulatory graficzne wykorzystywałam jeszcze wielokrotnie na zajęciach z matematyki i statystyki, np. gdy rozważane były treści dotyczące rachunku wektorowego, działań na macierzach, rachunku prawdopodobieństwa, budowy szeregów statystycznych i ich prezentacji graficznej (w tym histogramów), wyznaczania charakterystyk liczbowych struktury zbiorowości.

$$a) y = |2^{-x} - 1|$$



[OPTN] [F5] (NUM) [F1] (ABS) [(] [2] [^] [(] [-] [x, Θ, T] [)] [-] [1] [)]

$$b) y = \log\left(|x^2 - 1| + \frac{1}{2}\right)$$



[log] [OPTN] [F5] (NUM) [F1] (ABS) [(] [(] [x, Θ, T] [x^2] [-] [1] [)] [+] [1] [ab/c] [2] [)]

Rys. 1. Wykresy funkcji sporządzone przez studentów za pomocą kalkulatora graficznego

3. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA KALKULATORA GRAFICZNEGO DO ROZWIĄZYWANIA PROBLEMU DOTYCZĄCEGO PRZEWIDYWANIA POPYTU NA PEWIEN TOWAR

W standardach kształcenia dla kierunku Ekonomia, czytamy m.in., że *absolwent powinien być przygotowany do przeprowadzania analizy dostępnych lub tworzonych informacji wspierających podejmowanie racjonalnych decyzji osadzonych w kanonach nauk ekonomicznych*. Oznacza to, że jednym z ogólnych celów kształcenia studentów kierunku Ekonomia jest nauczanie podejmowania decyzji w oparciu o posiadane informacje. Cel ten powinien być realizowany na większości przedmiotów określonych planem studiów, w tym również na matematyce. Często zdarza się jednak, że na zajęciach z matematyki nie bada się realistycznych lub pararealistycznych problemów, które pozwalałyby na realizację tego celu. Dzieje się tak z wielu powodów, m.in. dlatego, że badanie rzeczywistych problemów wymaga zazwyczaj odwoływania się do złożonych teorii matematycznych, które nie są dostępne studentom I roku studiów ekonomicznych, rzeczywiste dane wymagają wykonywania wielu żmudnych rachunków, niektórzy autorzy podręczników do nauki matematyki, a także wykładowcy

zakładają *a priori*, że przejście od zagadnień ogólnych do szczególnych przypadków nie powinno sprawiać studentom trudności (zob. M. Czajkowska, 2006). W takim nauczaniu student dostaje informację, że matematyka jest oderwana od rzeczywistości. Nie wie jak można wykorzystać ją jako narzędzie do rozwiązywania różnego rodzaju problemów ekonomicznych.

Zastosowanie kalkulatorów graficznych pozwala na rozważanie takich problemów, które byłyby niedostępne studentom przy zastosowaniu tradycyjnych metod lub praca byłaby zbyt czasochłonna. Poniżej przedstawiam problem przewidywania popytu na towar w danym tygodniu w zależności od przewidywań i popytu na ten towar w tygodniu poprzednim³.

Do sklepu wielobranżowego w niewielkim miasteczku raz w tygodniu dostarczane są suszone śliwki. Sprzedawca nie chce, aby zabrakło towaru, bo obawia się, że straci klientów. Z drugiej strony nie może zakupić go zbyt dużo, gdyż śliwki mogłyby ulec zepsuciu. Postaw się w roli tego sprzedawcy i zaplanuj zakupy w 11 tygodniu. Informacje z 10 wcześniejszych tygodni zawiera tablica 1.

Tablica 1

Tydzień	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wielkość popytu	10	12	12	9	13	12	10	8	10	15

Pracę ze studentami nad tym zadaniem rozpoczęłam od dyskusji co powinniśmy wiedzieć, aby móc przewidzieć i zaplanować zakup suszonych śliwek na kolejne tygodnie. Jej wynikiem było ustalenie, że przewidywania na następny tydzień będą zależę od przewidywań i rzeczywistej sprzedaży w obecnym tygodniu. W dalszej części nastąpiła matematyzacja i stworzenie odpowiedniego modelu matematycznego (zob. G. Treliński, 2006). Funkcja przewidywania p została zdefiniowana następująco:

$$\begin{cases} p(1) = s(1), \\ p(t+1) = \alpha \cdot s(t) + (1 - \alpha) \cdot p(t), \end{cases}$$

gdzie t – kolejny tydzień, czyli $t=1,2,\dots, 10$

$s(t)$ – wartość funkcji rzeczywistego popytu w tygodniu t ,

$p(t)$ – wartość funkcji przewidywania w tygodniu t .

$\alpha \in \langle 0,1 \rangle$.

³ Pomysł został zaczerpnięty z artykułu M. Sobczyński *Przewidywanie sprzedaży towarów*. <http://www.mimuw.edu.pl/~eler/ntwnm/prace.html>

Następnie w domu studenci konstruowali odpowiedni program na kalkulator graficzny. Tworząc go samodzielnie, jak wynika z prowadzonych później rozmów, dogłębniej analizowali rozważany problem i jego model matematyczny, zastanawiali się czym będą otrzymywane kolejne wartości funkcji p , co oznacza parametr α . Oto przykład jednego z programów na kalkulator CASIO CFX 9850G.

```
[F3] (NEW)
[S] [P] [R] [Z] [E] [D] [A] [Z] [EXE] [SHIFT] [INS]
[SHIFT] [ALPHA] [F2] (") [ALPHA] [ALPHA] [P] [ALPHA] [O] [ALPHA] [D]
[ALPHA] [A] [ALPHA] [J] [ALPHA] [.] [ALPHA] [N] [SHIFT] [ALPHA] [F2] (")
[SHIFT] [↵]
[SHIFT] [PRGM] [F4] (?) [→] [ALPHA] [N] [↵]
[SHIFT] [ALPHA] [F2] (") [ALPHA] [ALPHA] [P] [ALPHA] [O] [ALPHA] [D]
[ALPHA] [A] [ALPHA] [J] [ALPHA] [.] [ALPHA] [A] [SHIFT] [ALPHA] [F2] (")
[SHIFT] [↵]
[SHIFT] [PRGM] [F4] (?) [→] [ALPHA] [A] [↵]
[SHIFT] [ALPHA] [F2] (") [ALPHA] [ALPHA] [P] [ALPHA] [O] [ALPHA] [D]
[ALPHA] [A] [ALPHA] [J] [ALPHA] [.] [ALPHA] [S] [SHIFT] [ALPHA] [F2] (")
[SHIFT] [↵]
[SHIFT] [PRGM] [F4] (?) [→] [ALPHA] [S] [↵]
[ALPHA] [S] [→] [ALPHA] [P] [↵]
[F1] (FOR) 1 [→] [ALPHA] [B] [F2] (TO) [ALPHA] [N] [F3] (STEP) 1 [SHIFT] [↵]
[ALPHA] [A] [×] [ALPHA] [S] [+] [(] [1] - [ALPHA] [A] [D] [×] [ALPHA] [P] [→]
[ALPHA] [P] [SHIFT] [SHIFT] [PRGM] [F5] (▴)
[SHIFT] [ALPHA] [F2] (") [ALPHA] [ALPHA] [P] [ALPHA] [O] [ALPHA] [D]
[ALPHA] [A] [ALPHA] [J] [ALPHA] [.] [ALPHA] [S] [SHIFT] [ALPHA] [F2] (")
[SHIFT] [↵]
[SHIFT] [PRGM] [F4] (?) [→] [ALPHA] [S] [↵]
[F1] (COM) [F6] [F4] (NEXT)
[SHIFT] [QUIT]
```

W programie tym najpierw zadajemy liczbę tygodni dla których będziemy przewidywać sprzedaż, wartość α , oraz sprzedaż w pierwszym tygodniu. Na wyświetlaczu pojawia się wartość funkcji przewidywania na drugi tydzień. Następnie program pyta jaki był rzeczywisty popyt w tygodniu 2 i podaje wartość funkcji przewidywania na trzeci tydzień. Znowu pojawia się pytanie o to, jaka była rzeczywisty popyt w trzecim tygodniu, itd., aż do zadanej z góry liczby tygodni.

Na następnych zajęciach studenci za pomocą kalkulatora próbowali zaplanować zakupy w 11 tygodniu. Pojawiło się pytanie o wartość parametru. Stu-

denci wprowadzając różne wartości tego parametru przewidywali wielkość zakupów w kolejnych tygodniach i porównywali je z rzeczywistym popytem, aż w końcu wybrali taki, dla którego przewidywania były najtrafniejsze.

Studenci wykazywali się aktywnością intelektualną. Zadawano pytania, które prawdopodobnie nie pojawiłyby się podczas rozwiązywania typowych zadań tradycyjnymi metodami. Przedłużano zadanie tworząc nowe problemy na bazie już rozwiązanego. Próbowano np. zaplanować zakupy na najbliższe 10 tygodni, znając tylko wielkość sprzedaży w pierwszym tygodniu (10 kg). Studenci rozważali różne sytuacje, odwołując się do życiowych doświadczeń. Zastanawiali się, czy ich przewidywania będą trafne w sytuacjach, gdy np. popyt na suszone śliwki wykazuje duże wahania (np. w okresie przed- i poświątceznym), czy nie powinno rozważać się wtedy dwóch przypadków, jaką wartość powinien przyjmować parametr (Badali, kiedy określona funkcja może być rzeczywście pomocna do podejmowania decyzji. Na rys. przedstawiam fragment pracy jednego ze studentów:

=====SPRZEDAZ=====		=====SPRZEDAZ=====	
"PODAJ N"	?	S→P	
?	N	For 1→B To N Step 1	
"PODAJ A"	?	A×S+(1-A)×P→P	
?	A	"PODAJ S"	
"PODAJ S"	?	S→S	
?	S	Next	
TOP BTM SRC MENU A↔B CHAR		TOP BTM SRC MENU A↔B CHAR	
10		PODAJ S	
	10.412672	?	
PODAJ S		13	
?			12.3168
8		PODAJ S	
	8.4825344	?	
	- Disp -	12	

4. ZAKOŃCZENIE

Nauka z kalkulatorem graficznym na ćwiczeniach z matematyki i statystyki musi być inaczej zaplanowana niż w tradycyjnym nauczaniu, w którym opiera się ona głównie na rozwiązywaniu kolejnych zadań zamieszczonych w zbiorach lub arkuszach zadań. Zasadnicza różnica podejść polega na tym, że z kalkulatorem ćwiczy się tę samą umiejętność na różnym materiale, unikając żmudnych i czasochłonnych rachunków lub pracuje się zazwyczaj nad jednym problemem, który rozbudowuje się w miarę jak przebiega jego analiza lub rozpatruje się go z różnych punktów widzenia. Dużo więcej czasu poświęca się na badanie sytuacji i refleksję. Dzięki temu studenci mogą lepiej zrozumieć rozważane zagadnienia i dokładniej przyjrzeć się omawianym problemom. Mogą badać sytuacje

realistyczne lub pararealistyczne niedostępne lub trudno dostępne w tradycyjnym nauczaniu.

Kalkulatory graficzne zmieniają postawy studentów wobec matematyki, zwłaszcza tych mających trudności z nauką tego przedmiotu. Osoby o niewielkich umiejętnościach matematycznych, zwykle niezainteresowane i pasywne podczas zajęć, pracując z kalkulatorami graficznymi wykazują się aktywnością intelektualną i pracują intensywniej niż przy zastosowaniu tradycyjnych metod nauczania. Kalkulator jest dla nich pomocą w przełamaniu oporów wobec własnych braków i luk w wiedzy oraz wsparciem w pokonywaniu istniejących blokad emocjonalnych utrudniających percepcję i zrozumienie poznawanych treści. Stanowi oparcie dla tych osób, które nie są pewne otrzymywanych wyników. Dzięki kalkulatorom uzyskują one na ekranie potwierdzenie swoich przypuszczeń lub informację o popełnionym błędzie. Kalkulator niekiedy staje się narzędziem sprawdzającym poprawność matematycznego rozumowania, a nie tylko wyników liczbowych.

Tworząc programy studenci utrwalają zdobyte wiadomości, głębiej analizują i lepiej rozumieją sam problem – muszą bowiem zapisać posiadaną informację w języku kalkulatora. Pojawia się naturalna sytuacja związana z tłumaczeniem danej informacji z jednego języka na inny, z kodowaniem i odcodowaniem informacji.

Kalkulator uczy stawiania pytań i szukania odpowiedzi. Na zajęciach bez kalkulatora studenci zazwyczaj w ogóle nie pytają, stwierdzając, że „nie wiedzą jak rozwiązać zadanie, gdyż jest zbyt trudne”. Podczas pracy z tym narzędziem osoby uczące się często zadają pytania typu „co się stanie, jeśli zmienimy...?”, „dlaczego na ekranie jest coś takiego?”, „czy jest to rzeczywiste rozwiązanie problemu, czy tylko przybliżone?”, „jak to udowodnić?”. Starają się odczytane z wykresu rozwiązanie uzasadnić (lub obalić) na gruncie matematycznej teorii, próbują głębiej badać rozważany problem lub dążyć do jego uogólnienia. Wielokrotnie sami wychodzą z inicjatywą poznania nowych treści.

LITERATURA

- Bugajska-Jaszczołt B., Czajkowska M., *Some examples using ICT to create the concept image of mathematical object w: Mathematics at school today and tomorrow*, Katolicka Univerzita w Ruzomberoku, płyta CD, ISBN 978-80-8084-262-8, 2007.
- Czajkowska M., *Czynności o charakterze motywacyjnym podejmowane przez studentów kierunków ekonomicznych w toku rozwiązywania zadań matematycznych w: Edukacja matematyczna na studiach ekonomicznych* (red. G. Trelński) Wydawnictwo WSEiA, s.223 – 243, Kielce 2006.
- Sobczyński M., *Przewidywanie sprzedaży towarów*, <http://www.mimuw.edu.pl/~eler/ntwnm/prace.html>
- Rozporządzenie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego w sprawie standardów kształcenia dla poszczególnych kierunków oraz poziomów kształcenia, a także trybu tworzenia i warunków, jakie musi spełniać uczelnia, by prowadzić studia międzykierunkowe oraz makrokierunki z 12

lipca 2007r. Standardy kształcenia dla kierunku *Ekonomia* http://www.bip.nauka.gov.pl/_gALLERY/23/39/2339/22_ekonomia.pdf

Treliński G., *Rola i miejsce matematyki jako przedmiotu nauczania w systemie kształcenia matematycznego na studiach ekonomicznych*, w: *Edukacja matematyczna na studiach ekonomicznych*, Wydawnictwo WSEiA, Kielce, 2006, s. 31–50.

Monika Czajkowska

WORK WITH A GRAPHIC CALCULATOR DURING CLASSES ON QUANTITATIVE OBJECTS

Graphic calculator is one of the tools which can help students in cognitive process experimenting in the course of hard problem solving. This can favour various mathematical skill development such as observing, analyzing, generalizing, formulating and reviewing hypotheses. In this article it will be demonstrated how it is possible to use the graphic calculator during the classes on quantitative subjects to ponder the problems that are inaccessible to students while using the traditional methods and demonstrative means.