ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 193, 2005

Halina Klepacz, Elżbieta Żółtowska***

O WYZNACZANIU LINII I MIARY UBÓSTWA

Streszczenie. Jednym ze sposobów pomiaru nierówności dochodowych jest metoda oparta na wykorzystaniu linii ubóstwa z. W artykule omawia się różne miary ubóstwa dla populacji. Rozważa się przypadek ciągły, przyjmując, że rozkład dochodów w populacji jest określony za pomocą dystrybuanty rozkładu logarytmiczno-normalnego. Miary ubóstwa dla populacji określa się po przyjęciu indywidualnych miar ubóstwa i linii ubóstwa oraz dystrybuanty rozkładu dochodów w populacji. Rozważa się szybkość reakcji łącznej miary ubóstwa dla populacji na zmianę linii ubóstwa z, miernik ten jest określony jako warunkowa wartość oczekiwana.

Słowa kluczowe: ubóstwo, indywidualna miara ubóstwa, względna linia ubóstwa.

W problemach badania ubóstwa można wyróżnić kilka sposobów podejścia do zagadnienia jego pomiaru. Jednym z nich jest koncepcja pomiaru nierówności dochodowych, oparta na wykorzystaniu linii ubóstwa z. Wyróżnia się m.in. następujące mierniki:

a) procent ubogich H – jest to stosunek liczby osób (m) o dochodach poniżej linii ubóstwa do liczby osób (N) całej populacji, pomnożony przez 100:

$$H = \frac{m}{N} \cdot 100\%, \tag{1}$$

iloraz $\frac{m}{N}$ nosi w literaturze także nazwę wskaźnika *headcount*;

b) luka pomiędzy przeciętnym dochodem ubogich i linią ubóstwa:

$$L = \frac{m}{N} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{z}, \tag{2}$$

miernik L bywa określany jako wskaźnik *poverty gap*;

* Dr, Katedra Ekonometrii Uniwersytetu Łódzkiego.
** Prof. nadzw. dr hab., Katedra Ekonometrii Uniwersytetu Łódzkiego.

c) miara ubóstwa FGT, zaproponowana przez Fostera (1984):

$$FGT = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{x_i}{z}\right)^{\beta}, \text{ dla } \beta > 2; \tag{3}$$

d) miara CHU, zaproponowana przez Clarka, Hemminga i Ulpha (1981):

$$CHU = \frac{m}{N} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i}{z}\right)^{\gamma}, \text{ dla } \gamma \in (0,\ 1); \tag{4}$$

e) miara Wattsa (1968):

$$W = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\ln\frac{z}{x_i}; \tag{5}$$

f) miara ubóstwa CDS (Constant Distribution Sensitivity) jest zbliżona do miary nierówności, wprowadzonej przez Kolma (1976):

$$CDS = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} e^{\lambda(z - x_i)} - \frac{m}{N}, \text{ dla } \lambda > 0. \tag{6}$$

Miara ubóstwa CDS jest zbliżona do miary nierówności dochodowej, wprowadzonej przez Kolma (1976). Ta miara była scharakteryzowana przez Zhenga (2000a) jako miara ubóstwa, która posiada stałą wrażliwość na rozkład nierówności dochodowych lub niechęci do ubóstwa. Powyższe miary powinny być obliczane, gdy posiadamy informacje dotyczące dochodów każdego elementu badanej zbiorowości. Zazwyczaj jednak miary ubóstwa są wyznaczane na podstawie próby wylosowanej z badanej populacji, a otrzymane wartości miar są obarczone błędami pomiaru i próby.

Rozważmy teraz przypadek ciągły. Zakładamy, że rozkład dochodów w populacji Π jest określony za pomocą dystrybuanty $F(x)$ dla $x \in (0,\ \infty)$. Niech z będzie linią ubóstwa, czyli takim poziomem dochodów, który dzieli populację Π na dwie podpopulacje: Π_1 zawierającą osoby o dochodzie $x \leqslant z$ oraz Π_2 – skupiającą osoby, których dochód $x > z$. Zazwyczaj definiuje się linię ubóstwa jako określony procent (część) dochodu przeciętnego, który może być mierzony poprzez średni dochód dla populacji $\overline{x}_{\Pi}$, lub medianę dochodów x_{Π}^{Me}. Zatem przyjmuje się, że:

$$z = c\,\overline{x}_{\Pi} \text{ lub } z = c\,x_{\Pi}^{Me} \text{ dla } c \in (0,\ 1).$$

Najczęściej w różnych badaniach przyjmuje się wartość parametru c jako: 0,4; 0,5; 0,6.

Niech $p(x, z)$ będzie indywidualną miarą ubóstwa dla osoby o dochodzie x i przyjętej linii ubóstwa z, spełniającą założenia:

1) $p(x, z) = 0$ dla $x > z$, co oznacza, że miara ubóstwa dla osoby nieubogiej jest równa zeru oraz wzrost dochodu osoby nieubogiej nie zmienia jej miary ubóstwa;

2) $p_x(x, z) = \frac{\partial p(x, z)}{\partial x} \leqslant 0$ dla $x \leqslant z$, co odpowiada założeniu, że miara ubóstwa nie wzrasta, gdy rośnie dochód osoby ubogiej;

3) $p_z(x, z) = \frac{\partial p(x, z)}{\partial z} \geqslant 0$, co odpowiada warunkowi, że miara ubóstwa nie maleje, gdy rośnie wartość linii ubóstwa;

4) $p_{xx}(x, z) = \frac{\partial^2 p(x, z)}{\partial x^2} \geqslant 0$ dla $x \leqslant z$, czyli miara ubóstwa maleje w tempie coraz to wolniejszym, gdy wzrasta dochód osoby ubogiej.

Biorąc pod uwagę, podane powyżej, miary ubóstwa dla populacji i przyjętą linię ubóstwa z, można określić następujące indywidualne miary ubóstwa $p(x, z)$ dla osoby o dochodzie $x \leqslant z$:

a) indywidualna miara ubóstwa, odpowiadająca wskaźnikowi *headcount*:

$$p(x, z) = 1; \tag{7}$$

b) indywidualna miara ubóstwa, odpowiadająca wskaźnikowi *poverty gap*:

$$p(x, z) = 1 - \frac{x}{z}; \tag{8}$$

c) indywidualna miara ubóstwa, odpowiadająca wskaźnikowi *FGT*:

$$p(x, z) = \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{\beta}, \text{ dla } \beta > 2; \tag{9}$$

d) indywidualna miara ubóstwa, odpowiadająca wskaźnikowi *CHU*:

$$p(x, z) = 1 - \left(\frac{x}{z}\right)^{\gamma}, \text{ dla } \gamma \in (0, 1); \tag{10}$$

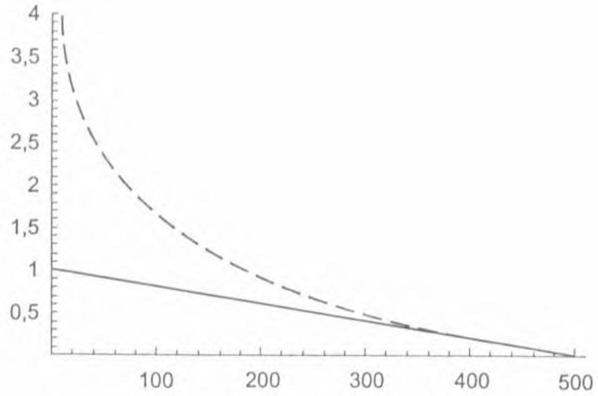
e) indywidualna miara ubóstwa, odpowiadająca wskaźnikowi Wattsa:

$$p(x, z) = \ln\frac{z}{x}; \tag{11}$$

f) indywidualna miara ubóstwa, odpowiadająca wskaźnikowi *CDS*:

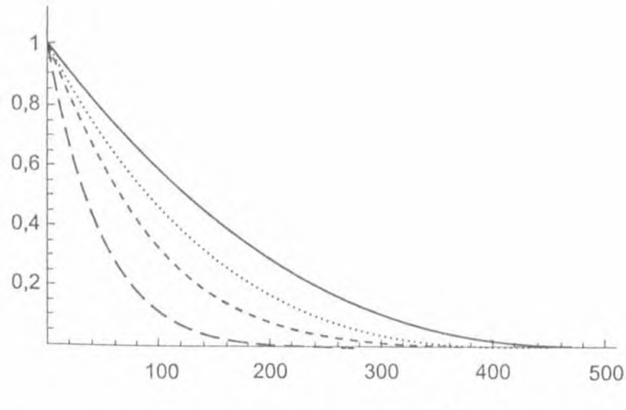
$$p(x, z) = e^{\lambda(z-x)} - 1, \text{ dla } \lambda > 0. \tag{12}$$

Indywidualne miary ubóstwa $p(x, z)$, określone wzorami (7)–(12) spełniają założenia 1–4. Z wyjątkiem miary (7) są one malejącymi funkcjami dochodu x, ich wykresy różnią się jednak tempem spadku ich wartości, co ilustrują rysunki 1–4.



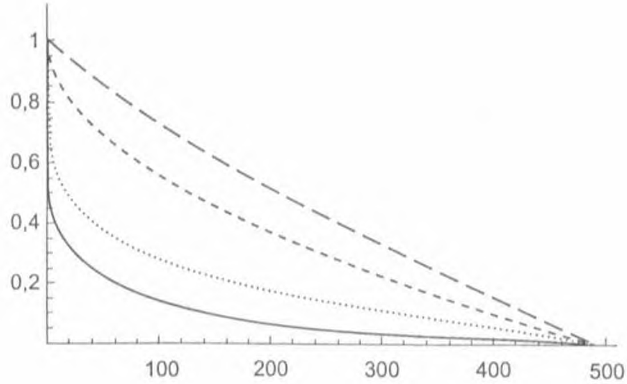
Rys. 1. Indywidualne miary ubóstwa $p(x, z) = 1 - \frac{x}{z}$ (linia ciągła) i $p(x, z) = \ln\frac{z}{x}$ (linia przerywana) dla $z = 500$

Źródło: opracowanie własne



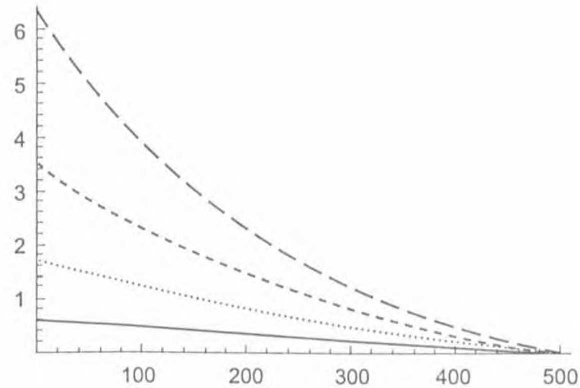
Rys. 2. Indywidualna miara ubóstwa $p(x, z) = \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{\beta}$ dla: $\beta = 2{,}5$ (linia ciągła), $\beta = 3{,}5$ (linia ....), $\beta = 5$ (linia -------), $\beta = 10$ (linia — — — —) dla $z = 500$

Źródło: opracowanie własne



Rys. 3. Indywidualna miara ubóstwa $p(x, z) = 1 - \left(\frac{x}{z}\right)^{\gamma}$ dla: $\gamma = 0{,}1$ (linia ciągła), $\gamma = 0{,}2$ (linia ....), $\gamma = 0{,}5$ (linia -------), $\gamma = 0{,}8$ (linia – – – –) dla $z = 500$

Źródło: opracowanie własne



Rys. 4. Indywidualna miara ubóstwa $p(x, z) = e^{\lambda(z-x)} - 1$ dla: $\lambda = 0{,}001$ (linia ciągła), $\lambda = 0{,}002$ (linia ....), $\lambda = 0{,}003$ (linia --------), $\lambda = 0{,}004$ (linia – – – –) dla $z = 500$

Źródło: opracowanie własne

Łączną miarę ubóstwa $P(F, z)$ dla populacji Π, zależną od linii ubóstwa z oraz typu rozkładu dochodów, określonego przez dystrybuantę $F(x)$, definiuje się jako:

$$P(F, z) = \int_0^{\infty} p(x, z)\, dF(x). \tag{13}$$

Przy warunku: $p(x, z) = 0$ dla $x \geqslant z$ miara ubóstwa dla populacji $P(F, z)$ przyjmuje postać:

$$P(F, z) = \int_0^z p(x, z)\, dF(x). \tag{14}$$

Pochodna $p_z(x, z) = \frac{\partial p(x, z)}{\partial z}$ określa prędkość zmiany indywidualnej miary ubóstwa ze względu na zmianę linii ubóstwa z. Załóżmy, że funkcja $p_z(x, z)$ dla $x < z$ jest ciągła i ograniczona w przedziale $(0, \infty)$. Dla danej dystrybuanty rozkładu dochodów $F(x)$ w populacji definiuje się funkcję $A(F, z) = E(p_z(X, z) | X < z)$, której wartości określają szybkość reakcji łącznej miary ubóstwa dla populacji $P(F, z)$ na zmianę linii ubóstwa z. Ponieważ $p(x, z) = 0$ dla $x \geqslant z$, to:

$$A(F, z) = \int_0^z \frac{\partial p(x, z)}{\partial z}\, dF(x). \tag{15}$$

Zmiana linii ubóstwa z o Δz, przy tym samym rozkładzie dochodów, powoduje przyrost łącznej miary ubóstwa dla populacji przeciętnie o $\Delta P \cong A(F, z)\Delta z$.

Załóżmy, że dochody są zmienną losową X o rozkładzie logarytmiczno-normalnym:

$$X \sim LN(\alpha, \sigma), \tag{16}$$

to znaczy funkcja gęstości jest postaci:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right], \text{ dla } x \in (0, +\infty), \tag{17}$$

gdzie $\alpha = E(\ln X)$, $\sigma^2 = D^2(\ln X)$.

Dla zmiennej losowej X mamy następujące parametry rozkładu:

$$E(X) = \exp\left[\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right], \tag{18}$$

$$D^2(X) = \exp[2\alpha + \sigma^2] \cdot (\exp[\sigma^2] - 1). \tag{19}$$

Biorąc pod uwagę przyjętą funkcję gęstości rozkładu dochodów, linię ubóstwa z i indywidualne miary ubóstwa $p(x, z)$, można określić reakcję miary ubóstwa dla populacji $A(F, z)$ na zmianę linii ubóstwa z. I tak:

a) dla indywidualnej miary ubóstwa odpowiadającej wskaźnikowi *head-count*:

$$A(F, z) = 0; \tag{20}$$

b) dla indywidualnej miary ubóstwa, odpowiadającej wskaźnikowi *poverty gap*:

$$A(F, z) = \frac{1}{z^2 \sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left[-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right] dx; \tag{21}$$

c) dla indywidualnej miary ubóstwa, odpowiadającej wskaźnikowi *FGT*:

$$A(F, z) = \frac{\beta}{z^{\beta+1} \sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^z (z - x)^{\beta-1} \exp\left[-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right] dx; \tag{22}$$

d) dla indywidualnej miary ubóstwa, odpowiadającej wskaźnikowi *CHU*:

$$A(F, z) = \frac{\gamma}{z^{\gamma+1} \sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^z x^{\gamma-1} \exp\left[-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right] dx; \tag{23}$$

e) dla indywidualnej miary ubóstwa, odpowiadającej wskaźnikowi Wattsa:

$$A(F, z) = \frac{1}{z \sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{1}{x} \exp\left[-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \frac{F(z)}{z}; \tag{24}$$

f) dla indywidualnej miary ubóstwa, odpowiadającej wskaźnikowi *CDS*:

$$A(F, z) = \frac{1}{\lambda \sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{1}{x} \exp\left[-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\sigma^2} + \lambda (z - x)\right] dx. \tag{25}$$

Zatem aby stosować mierniki ubóstwa: *FGT*, *CHU* i *CDS*, należy określić wartości dla parametrów β, γ i λ. Informacje na temat interpretacji tych parametrów znaleźć można w pracach Zhenga (1997a, 2000b). Przyjęcie funkcji określającej rozkład dochodów oraz indywidualnych miar ubóstwa wymaga także określenia jej parametrów. Stąd ważnymi zagadnieniami jest wybór:

a) postaci funkcji $p(x, z)$ oraz oszacowanie jej parametrów na podstawie próby;

b) typu miary ubóstwa $P(F, z)$, który może być dokonany po analizie własności tych miar i relacji między nimi oraz prędkości ich reakcji $A(F, z)$ na zmianę linii ubóstwa z.

Zagadnienia te będą przedmiotem dalszych badań.

LITERATURA

Chakravarty S. R. (1990), *Ethical Social Index Numbers*, Springer-Verlag, New York.

Clark S., Hemming R., Ulph D. (1981), *On Indices for the Measurement of Poverty*, „Economic Journal", **91**, 515–526.

Foster J. (1984), *On Economic Poverty: A Survey of Aggregate Measures*, [w:] Basmann R. L, Rhodes G. F. (eds), *Advances in Econometrics 3*, JAI Press, Connecticut.

Foster J., Greer J., Thorbecke E. (1984), *A Class of Decomposable Poverty Measures*, „Econometrica", 761–766.

Kolm S. C. (1976), *Unequal Inequalities*, „Journal of Economic Theory", 416–442.

Watts H. (1968), *An Economic Definition of Poverty*, [w:] Moynihan D. P. (ed.), *On Understanding Poverty*, Basic Books, New York.

Zheng B. (1997), *Aggregate Poverty Measures*, „Journal of Economic Surveys", 123–163.

Zheng B. (2000a), *Minimium Distribution-sensitivity, Poverty Aversion and Poverty Orderings*, „Journal of Economic Theory", 116–137.

Zheng B. (2000b), *Poverty Orderings*, „Journal of Economic Surveys", 427–466.

Zheng B. (2001), *Statistical Inferences for Poverty Measures with Relative Poverty Lines*, „Journal of Econometrics", 337–356.

Halina Klepacz, Elżbieta Żółtowska

ON EVALUATION OF POVERTY LINE AND ITS MEASURES

Summary

Among methods of measuring income inequalities there is one based on poverty line z. In the article, various poverty measures for population are discussed. A continuous case is taken into consideration, where income distribution for population is defined with use of cumulative lognormal distribution. Poverty measures for population are defined, assuming individual poverty measures, poverty line and income cumulative distribution for population. Reaction rate of the composite poverty measure versus poverty line z changes is examined, this factor being defined as a conditional expected value.