ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 193, 2005

Władysław Milo, Aneta Leszczyk**, Maciej Malaczewski****

EMPIRYCZNA STABILNOŚĆ MODELU WZROSTU SOLOWA

Streszczenie. Stabilność jest zjawiskiem wpływającym na modelowanie ekonomiczne. W artykule rozważamy stabilność jednego ze szczególnych przypadków ogólnego modelu Solowa. Dokonana jest również prezentacja wyników oszacowań bazujących na danych dotyczących gospodarki Polski.

Słowa kluczowe: model Solowa, stabilność.

1. WSTĘP. ZAŁOŻENIA MERYTORYCZNE

Niniejszy tekst stanowi ilustrację empiryczną teoretycznych analiz stabilności z prac Milo i Łazińska (2003) oraz Milo i Zglińska-Pietrzak (1997). Przykład dotyczy gospodarki Polski z lat 1992–2002. Punktem wyjścia badań jest zmodyfikowane równanie Solowa następującej postaci:

$$\frac{dk(t)}{dt} = s \cdot y(t) - (n + \lambda) \cdot k(t), \tag{1}$$

gdzie:

$k = k(t)$ – wielkość technicznego uzbrojenia pracy, będąca funkcją czasu; definicyjnie jest to iloraz wartości środków trwałych, używanych w procesie produkcyjnym do wielkości pracy włożonej w ów proces;

$y = y(t)$ – wielkość wydajności pracy, będąca funkcją czasu; definicyjnie jest to iloraz wartości produkcji tworzonej w procesie produkcyjnym oraz wielkości pracy włożonej w ów proces;

s – średnia (w badanym okresie) krańcowa skłonność do oszczędności (inwestycji), interpretowana jako udział dochodów zaoszczędzanych przez gospodarstwa domowe;

n – średnia (w badanym okresie) stopa wzrostu zasobów sił pracy;

λ – średnia wartość (w badanym okresie) współczynnika deprecjacji kapitału, udziału wartości środków trwałych, zużywanych w procesie produkcyjnym.

* Prof. zw. dr hab., Katedra Ekonometrii Uniwersytetu Łódzkiego.
** Mgr, Katedra Ekonometrii Uniwersytetu Łódzkiego.
*** Mgr, asystent w Katedrze Ekonometrii Uniwersytetu Łódzkiego.

Równanie (1) różniące się od zaproponowanego przez Solowa (1956) o efekt deprecjacji kapitału, stanowi integralną część opisanego przez niego modelu wzrostu gospodarczego. We wspomnianym modelu zakłada się, iż wartość produkcji jest funkcją czasu. Dla szerszych potrzeb konieczne byłoby wzbogacenie równania (1) o kolejne, opisujące zmienianie się wartości produkcji. Celem niniejszego artykułu nie jest jednak pełna empiryczna analiza wzrostu gospodarczego, choć niewątpliwie jest ona ważna, lecz próba pokazania rachunków stabilnościowych dla jednorównaniowego modelu wzrostu. W tym celu dalej zakładać będziemy, iż y z modelu (1) stanowić będzie wartość produkcji osiąganej w punkcie równowagi i równowagowymi są też proporcje wartości kapitału i produkcji. W celu ich wyznaczenia skorzystamy z docelowej wartości środków trwałych jako wartości funkcji produkcji.

2. RACHUNKI STABILNOŚCIOWE

Przyjmijmy oznaczenie:

$$\dot{k}(t) = \frac{dk(t)}{dt}$$

oraz załóżmy wielkość produkcji na poziomie wielkości osiąganej w punkcie równowagi:

$$y(t) = \bar{y}.$$

Załóżmy też, że:

$$k(0) = k_0, \; k_0 > 0. \tag{2}$$

Zatem w chwili startowej posiadamy ustaloną, dodatnią wartość środków trwałych. Przy powyższych założeniach, równanie (1) jest postaci:

$$\dot{k}(t) = s \cdot \bar{y} - (n + \lambda) \cdot k(t). \tag{3}$$

Z teorii równań różniczkowych (Chądzyński 1994) wiadomo, że równanie (3) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym niejednorodnym pierwszego rzędu. Ogół rozwiązań równania (3) jest postaci:

$$k(t) = \left(\frac{s \cdot \bar{y}}{n + \lambda} \cdot e^{(n+\lambda) \cdot t} + \gamma\right) \cdot e^{-(n+\lambda) \cdot t}, \; \gamma \in R. \tag{4}$$

Każda z funkcji (określona dla ustalonej konfiguracji wartości (s, n, λ, γ)) należących do powyższej rodziny spełnia równanie (3). Stałą γ wyznaczymy, korzystając z warunków początkowych (2) oraz z twierdzenia Cauchy'ego o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania problemu Cauchy'ego (Chądzyński 1994; Pelczar i Szarski 1987). Dla $t = 0$ zachodzi:

$$k_0 = \frac{s \cdot \overline{y}}{n+\lambda} + \gamma,$$

skąd:

$$\gamma = k_0 - \frac{s \cdot \overline{y}}{n+\lambda},$$

zatem poszukiwana przez nas funkcja dana jest wzorem postaci:

$$k(t) = \frac{s \cdot \overline{y}}{n+\lambda} + k_0 \cdot e^{-(n+\lambda)\cdot t} - \frac{s \cdot \overline{y}}{n+\lambda} \cdot e^{-(n+\lambda)\cdot t}. \tag{5}$$

Z równania (3) widać, że:

$$\dot{k}(t) = 0 \Leftrightarrow k(t) = \frac{s \cdot \overline{y}}{n+\lambda}. \tag{6}$$

Ze wzorów (5) i (6) możemy spróbować odnaleźć taki punkt startowy k_0 (który oznaczać będziemy k_0^*) , dla którego spełnione jest (6):

$$\frac{s \cdot \overline{y}}{n+\lambda} + k_0^* \cdot e^{-(n+\lambda)\cdot t} - \frac{s \cdot \overline{y}}{n+\lambda} \cdot e^{-(n+\lambda)\cdot t} = \frac{s \cdot \overline{y}}{n+\lambda} \Leftrightarrow k_0^* = \frac{s \cdot \overline{y}}{n+\lambda}. \tag{7}$$

Jedyną funkcją z rodziny (5), dla której zachodzi (7), jest funkcja stała postaci:

$$k^*(t) = \frac{s \cdot \overline{y}}{n+\lambda}. \tag{8}$$

Rozważmy teraz funkcję, która „startuje" z punktu leżącego w bliskim otoczeniu punktu k_0^*. Jeżeli nasze rozwiązanie jest stabilne, to lekko zaburzona funkcja nie powinna istotnie oddalić się od niego.
Weźmy $\varepsilon > 0$, połóżmy $\delta = \varepsilon$. Mamy wtedy:

$$|k_0 - k_0^*| = \left| k_0 - \frac{s \cdot \bar{y}}{n+\lambda} \right| < \delta. \tag{9}$$

Zauważmy, że:

$$|k(t) - k^*(t)| = \left| \frac{s \cdot \bar{y}}{n+\lambda} + k_0 \cdot e^{-(n+\lambda)\cdot t} - \frac{s \cdot \bar{y}}{n+\lambda} \cdot e^{-(n+\lambda)\cdot t} - \frac{s \cdot \bar{y}}{n+\lambda} \right| =$$

$$= \left| k_0 \cdot e^{-(n+\lambda)\cdot t} - \frac{s \cdot \bar{y}}{n+\lambda} \cdot e^{-(n+\lambda)\cdot t} \right| = \left| k_0 - \frac{s \cdot \bar{y}}{n+\lambda} \right| \cdot e^{-(n+\lambda)\cdot t}, \tag{10}$$

bo:

$$\forall_t \quad e^{-(n+\lambda)\cdot t} > 0.$$

Ograniczenie wyrażenia (10) zależy tylko i wyłącznie od znaku wyrażenia $(n+\lambda)$. Jeżeli jest to wyrażenie większe od zera, wówczas:

$$|k(t) - k^*(t)| = \left| k_0 - \frac{s \cdot \bar{y}}{n+\lambda} \right| \cdot e^{-(n+\lambda)\cdot t} < \left| k_0 - \frac{s \cdot \bar{y}}{n+\lambda} \right| < \delta = \varepsilon,$$

co kończy dowód stabilności naszego rozwiązania.

W innym przypadku, gdy $(n+\lambda)$ jest mniejszy od zera, nie można ograniczyć wyrażenia (10), co powoduje, iż jest ono rozbieżne i niestabilne.

Zakładając zatem, że wartość $(n+\lambda)$ jest dodatnia, mamy zbieżność postaci:

$$\lim_{t \to +\infty} k(t) = \frac{s}{n+\lambda} \cdot \bar{y}. \tag{11}$$

Znając wartości parametrów s, n i λ dla, np. gospodarki Polski, dokonać możemy szacunków proporcji, jakie występować powinny pomiędzy wartością środków trwałych a wielkością produkcji, aby proces wzrostu produkcji był stabilny.

3. OSZACOWANIA PARAMETRÓW RÓWNANIA

Oszacowano parametry (s, n, λ, γ) dla gospodarki Polski, korzystając z banku danych Katedry Ekonometrii UŁ. Do dyspozycji mieliśmy 41 danych kwartalnych za okres od drugiego kwartału 1992 r. do czwartego kwartału 2002 r. W przypadku niektórych oszacowań rozmiar próby zmieniał się w miarę dostępności danych. Wykorzystaliśmy klasyczną metodę najmniejszych kwadratów (Goldberger 1972) oraz pakiet komputerowy *E-views®*. Szacowaliśmy powyższe parametry, korzystając z następujących równań:

a) parametr n, czyli stopę wzrostu zasobów pracy, oszacowano z równania postaci:

$$\Delta L_t = n \cdot L_t + \xi_{1t},$$

gdzie:

L_t – wielkość zasobów pracy w okresie t;

ξ_{1t} – składnik losowy;

$\Delta L_t = L_t - L_{t-1}$;

b) parametr s, czyli krańcowa skłonność do oszczędzania (inwestycji) oszacowano z równania postaci:

$$I_t = s \cdot Y_t + \xi_{2t},$$

gdzie:

I_t – wielkość realnych nakładów inwestycyjnych oraz inwestycji rozpoczętych w okresie t;

Y_t – wielkość produkcji (realnego PKB) w okresie t;

ξ_{2t} – składnik losowy;

c) parametr λ, czyli stopień deprecjacji kapitału, oszacowaliśmy z równania postaci:

$$\Delta K_t = I_t + \lambda \cdot K_t + \xi_{3t},$$

gdzie:

K_t – wartość kapitału fizycznego w okresie t;

I_t – wielkość realnych nakładów inwestycyjnych oraz inwestycji rozpoczętych w okresie t;

ξ_{3t} – składnik losowy;

$\Delta K_t = K_t - K_{t-1}$.

Oszacowania te wyglądają następująco dla parametru s, będącego krańcową skłonnością do oszczędzania (inwestycji):

Dependent Variable: *RIOINSQ*
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 11/04/03 Time: 14:33
Sample(adjusted): 1994:1 2003:1
Included observations: 37 after adjusting endpoints
Instrument list:

Variable	Coefficient	Std. Error	*t*-Statistic	Prob.
RGDP96	0.106812	0.007183	14.87058	0.0000
R-squared	0.288067	Mean dependent var		11369.64
Adjusted R-squared	0.288067	S.D. dependent var		5511.883
S.E. of regression	4650.713	Sum squared resid		7.79E+08
Durbin-Watson stat	1.975502			

Zauważmy, że w powyższym przypadku otrzymano stosunkowo wysoki stopień zależności pomiędzy zmiennymi objaśniającą i objaśnianą.

Dla parametru *n*, będącego stopą wzrostu zasobów pracy, szacowania nie mogły być jednoznaczne. Spośród kilku możliwych definicji zasobów pracy (może to być ludność aktywna zawodowo, pracujący, zatrudnieni itp.) ciężko jest wybrać tę, która odpowiada naszemu pojęciu zasobów pracy. Zdecydowaliśmy się zatem arbitralnie na przyjęcie definicji zasobów pracy jako liczby osób aktywnych zawodowo (zgodnie z badaniami BAEL). Oszacowania dla tego przypadku wyglądają następująco:

Dependent Variable: *DPLOEQ*
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 11/04/03 Time: 14:37
Sample(adjusted): 1992:3 2003:1
Included observations: 41
Excluded observations: 2 after adjusting endpoints
Instrument list:

Variable	Coefficient	Std. Error	*t*-Statistic	Prob.
PLOEQ	0.022137	0.024400	0.907255	0.3697
R-squared	0.000007	Mean dependent var		325.5122
Adjusted R-squared	0.000007	S.D. dependent var		2297.373
S.E. of regression	2297.365	Sum squared resid		2.11E+08
Durbin-Watson stat	1.093729			

Istotne jest spostrzeżenie, iż wartość odchylenia standardowego estymatora naszego parametru jest wysoka. Oznacza to, iż nasze oszacowanie może sporo różnić się od oczekiwanej wartości tego parametru.

Dla parametru λ, będącego współczynnikiem deprecjacji kapitału, oszacowania przybierają postać:

Dependent Variable: *DRPH*
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 11/04/03 Time: 14:56
Sample(adjusted): 1994:1 2000:4
Included observations: 28 after adjusting endpoints
$DRPH = RIOINSQ + C(1) \cdot RPH$
Instrument list:

	Coefficient	Std. Error	*t*-Statistic	Prob.
$C(1)$	−0.008279	0.010147	−0.815870	0.4217

R-squared	−0.380652	Mean dependent var	7206.476
Adjusted R-squared	−0.380652	S.D. dependent var	19576.54
S.E. of regression	23002.66	Sum squared resid	1.43E+10
Durbin-Watson stat	1.287656		

Tu także zaskakuje nas wartość odchylenia standardowego estymatora parametru λ. Powoduje to konieczność przyjęcia dla naszych rozważań solidnego marginesu błędu. Znak parametru jest jak najbardziej zgodny z oczekiwaniami i wcześniejszymi założeniami.

4. OBLICZENIA I WNIOSKI

Dokonajmy zatem wyliczeń proporcji pomiędzy wartością środków trwałych a PKB:

$$k(t) = \frac{s}{n+\lambda} \cdot \bar{y} = 7{,}707606 \cdot \bar{y},$$

co zinterpretować można, iż w punkcie równowagi wartość środków trwałych osiągnie około 770% PKB.

Oznacza to, że stabilny układ ekonomiczny gospodarki Polski zmierzać powinien do sytuacji, w której wartość środków trwałych jest siedmiokrotnie większa od wartości PKB, osiągniętej przy wykorzystaniu tych środków w produkcji. Dodać należy, że w próbie stosunek ten przeciętnie wyniósł 4,456, jego mediana wynosiła 4,36, odchylenie standardowe 0,49, maksimum – 5,465, a minimum – 3,69. Zatem aby osiągnąć wyliczoną przez nas wartość, należy zwiększyć wartość środków trwałych, zaangażowanych w proces produkcyjny. Jest to możliwe jedynie dzięki zwiększeniu nakładów inwestycyjnych, co w dalszym ciągu jest problemem w polskich warunkach.

Zauważyć należy, iż oszacowania dwóch ostatnich parametrów obarczone są dużym błędem. Oznaczać to może, iż prawdopodobna jest sytuacja, w której mianownik wyrażenia (6) jest liczbą ujemną. Nie oznacza to jednakże, że wartość środków trwałych powinna być ujemną wielokrotnością PKB. Zauważmy, iż kiedy mianownik wyrażenia (6) jest liczbą ujemną, wówczas, na mocy braku ograniczenia wyrażenia (10), rozwiązanie nasze jest niestabilne i rozbieżne.

Ekonomicznie oznacza to dla nas tyle, iż spadek stopy wzrostu zasobów pracy i osiągnięcie przez nią liczb ujemnych w połączeniu z wystarczająco dużym stopniem deprecjacji kapitału powodować może w gospodarce olbrzymie wręcz szkody, których bezpośrednią konsekwencją jest brak możliwości znalezienia punktu równowagi na ścieżce długookresowego wzrostu. Można uznać to za pewne przesłanie do elit rządzących i choć nie niesie ono nowej treści, pokazuje jednak dosadne skutki braku odpowiedniej polityki gospodarczej. Konieczne są w naszym kraju wysokie nakłady inwestycyjne oraz rozsądna polityka rynku pracy, prowadząca do zwiększania się zasobów pracy.

LITERATURA

Chądzyński J. (1994), *Wstęp do równań różniczkowych zwyczajnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Goldberger A. S. (1972), *Teoria ekonometrii*, PWE, Warszawa.

Milo W., Łazińska A. (2003), *Warunki dostateczne stabilności wybranych jednorównaniowych modeli wzrostu*, opracowanie KBN, nr 2H02B 025 23.

Milo W., Zglińska-Pietrzak A. (1997), *Stabilność, atraktory stabilności i chaosu*, opracowanie w KBN, nr 1 H02B 01 31 1.

Pelczar A., Szarski J. (1987), *Wstęp do teorii równań różniczkowych. Część I: Wstęp do teorii równań zwyczajnych i równań cząstkowych pierwszego rzędu*, PWN, Warszawa.

Solow R. (1956), *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics", February.

Władysław Milo, Aneta Leszczyk, Maciej Malaczewski

AN EMPIRICAL STABILITY OF THE SOLOW GROWTH MODEL

Summary

Stability is a phenomenon that has an influence on economic modeling. We consider stability of one of special cases of General Solow Model. The paper contains also results of estimation based on data of the Polish economy.