

Olgiard Hryniewicz*

TEORETYCZNE ASPEKTY OPISU NIEPEWNOŚCI

Wprowadzenie

Jednym z najbardziej istotnych problemów zarządzania wiedzą jest umiejętność opisu problemów niepewności i nieokreśloności (braku precyzji). Poza nielicznymi przykładami wiedzy całkowicie pewnej, lub uznawanej za pewną przy obecnym stanie wiedzy (np. o braku możliwości podróżowania z prędkością większą od prędkości światła), wiedza człowieka jest zawsze ograniczona. Nasz brak pewności dotyczy zarówno wiedzy o otaczających nas zjawiskach, jak i o przewidywanych skutkach podejmowanych przez nas akcji (decyzji). Łatwo zauważyć, że pojęcie niepewności jest intuicyjnie zrozumiałe i dotyczy wielu aspektów otaczającej nas rzeczywistości. Napotykamy jednak trudności, gdy chcemy to pojęcie zdefiniować w sposób możliwie precyzyjny. Jeżeli sięgniemy do definicji słownikowej, to znajdziemy np., że określenie „niepewny” oznacza: „niezupełnie bezpieczny, zawierający ryzyko, trudny do przewidzenia”. W przypadku angielskiego odpowiednika tego słowa, wyraz *uncertain* określany jest w słowniku jako „unsure, not predictable, not known, changeable”. Jeszcze większa różnorodność towarzyszy słownikowym definicjom słów używanych w języku potocznym do opisu niepewności. Na przykład angielskiemu odpowiednikowi słowa „prawdopodobny”, jakim jest słowo *probable*, towarzyszą słowa: *likely, expected, possible, plausible*. Z jeszcze bardziej bogata jest definicja słowa „możliwość”, którym w języku angielskim jest słowo *possibility*. W słowniku *American Heritage Dictionary* czytamy:

„POSSIBILITY: 1. (n.) The likelihood of a given event: probability; certainty; chance; odds; hope; prospect. 2. (n.) Something that may occur or be done: chance; contingency; eventuality; likelihood; prospect; odds”.

Dociekliwemu czytelnikowi nasuwa się zapewne pytanie, dlaczego w języku narodu kupców i żeglarzy występuje tyle bliskoznacznych słów służących do opisu niepewności? Odpowiedź nasuwa się natychmiast: pojęcie niepewności jest pojęciem złożonym i odnosi się do wielu podobnych, ale w istocie różnych, sytuacji. Nie jest więc zaskakujące stwierdzenie

* Prof. dr hab., Instytut Badań Systemowych, Polska Akademia Nauk, Warszawa.

Zimmermanna [12], który zauważył, że nie ma jednej, powszechnie przyjętej, formalnej definicji tego pojęcia i zaproponował następującą definicję [12]:

Niepewność oznacza, że w pewnej sytuacji nie dysponujemy informacją, która jest właściwa do ilościowego i jakościowego opisanie systemu, jego deterministycznej i liczbowej predykcji, jego zachowania się lub innych jego charakterystyk.

Przyjmując powyższą definicję niepewności, Zimmermann [12] omówił podstawowe źródła niepewności:

- brak informacji (ilościowy – nie wiemy nic; jakościowy – znamy np. prawdopodobieństwa stanów);
- zbyt dużo informacji (nadmiar danych może powodować trudności w rozumieniu problemu; należy dokonać przekształcenia danych w niezbędną informację);
- wzajemnie sprzeczne przesłanki;
- niejasność (w sensie lingwistycznym);
- niedokładny pomiar;
- cała posiadana informacja ma charakter subiektywnych przekonań.

Analizując wymienione powyżej źródła niepewności łatwo zauważyć, że mają one zasadniczo różny charakter. Konsekwencją tego stanu rzeczy są różne modele matematyczne, wykorzystywane do opisu niepewności. Najważniejsze z takich modeli zostaną omówione w niniejszej pracy. W szczególności, w drugim rozdziale niniejszej pracy przedstawimy porównawcze omówienie najważniejszych modeli matematycznych opisujących niepewność: teorii prawdopodobieństwa, teorii możliwości Zadeha, teorii przekonań Dempstera-Shafera (DST) oraz ich uogólnienie, jakim jest teoria górnych prawdopodobieństw Walleya. Rozważania zakończymy krótkim podsumowaniem.

Matematyczne teorie niepewności

Teoria prawdopodobieństwa

Teoria prawdopodobieństwa jest najbardziej popularnym modelem matematycznym służącym do opisu niepewności. Umożliwiła ona opis matematyczny zjawisk zwanych powszechnie zdarzeniami losowymi, zwany opisem probabilistycznym. Opis probabilistyczny dowolnego zdarzenia sprowadza się do określenia właściwej dla tego zdarzenia przestrzeni probabilistycznej: $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, gdzie Ω oznacza przestrzeń zdarzeń elementarnych, $\mathcal{B}$ oznacza spełniający pewne warunki (w praktyce zdarza się to zawsze) zbiór podzbiorów przestrzeni zdarzeń elementarnych (zbiór

borelowski, zbiór potęgowy), zaś P jest pewną miarą określoną na B , spełniająca warunki:

1. $\forall A \in B \quad 0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Jeżeli $A_1, A_2, \dots$ jest dowolnym ciągiem parami rozłącznych zbiorów w B , to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Podana powyżej definicja miary P jest powszechnie znana jako aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa Kołmogorowa. Zwróćmy uwagę, że definicja ta nie jest definicją konstruktywną, tzn. nie mówi nam, w jaki sposób wyznaczać prawdopodobieństwa zdarzeń nazywanych przez nas zdarzeniami losowymi.

Brak powszechnie zaakceptowanej operacyjnej interpretacji pojęcia prawdopodobieństwa stwarza różne możliwości jego interpretacji. Powszechnie akceptowana jest interpretacja czystościowa, zakładająca możliwość (przynajmniej teoretyczną) wielokrotnego przeprowadzenia eksperymentu mającego na celu obserwację interesującego nas zdarzenia losowego. Przyjmując taką interpretację pojęcia prawdopodobieństwa uzyskujemy narzędzie do opisu niepewności wynikającej z braku możliwości przewidzenia pewnych zjawisk. Niepewność tego rodzaju nazywana jest czasami niepewnością **aleatoryczną**, odnoszącą się do zjawisk pojawiających się w sposób przypadkowy (losowy).

Częstościowa interpretacja prawdopodobieństwa nie jest jedyną interpretacją zgodną z aksjomatyką Kołmogorowa. Istnieje również subiektywistyczna interpretacja prawdopodobieństwa wprowadzona w pracach De Finettiego [1] i Savage'a [7]. Przystępny opis teorii subiektywnego prawdopodobieństwa można znaleźć w monografii DeGroota [2]. U jej podstawy leży założenie, że możliwe jest określenie prawdopodobieństwa dowolnego zdarzenia (niekoniecznie powtarzającego się) za pomocą symetrycznej loterii zaproponowanej przez De Finettiego. Wychodząc z tego założenia możemy określić sposób opisu (pomiaru) różnego rodzaju niepewności, niekoniecznie związanej z przypadkowością. Wielu specjalistów uważa, że teoria prawdopodobieństwa jest wobec tego **jedyną** teorią, za pomocą której można opisać w sposób formalny wszelkiego rodzaju niepewności. Stwierdzenie to zostało w ciągu ostatnich trzydziestu lat wielokrotnie zakwestionowane, chociaż ciągle ma bardzo dużo zwolenników.

Rozpatrując teorię prawdopodobieństwa jako podstawową teorię służącą do opisu niepewności musimy zwrócić uwagę na pewne jej ograniczenia. Po pierwsze, przestrzeń zdarzeń elementarnych określona jest za pomocą zdarzeń

wzajemnie rozłącznych (tzw. singletonów). Oznacza to, że możliwa jest (przynajmniej teoretycznie) obserwacja dowolnego zdarzenia elementarnego, co jest równoznaczne z faktem, że zdarzenia te są **zawsze** rozróżnialne. Stawia to pod znakiem zapytania możliwość wykorzystania teorii prawdopodobieństwa do opisu niepewności związanej z obserwacją zjawisk, które mogą być z natury rzeczy nierozróżnialne. Inne ograniczenie wynika z faktu, że definiowane zgodnie z aksjomatyką Kołmogorowa prawdopodobieństwo jest **miarą addytywną**. Oznacza to, że dla dwu dowolnych zdarzeń A oraz B mamy $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Dubois i Prade [4] pokazali, że nie jest to jedyna miara spełniająca zbiór warunków, które wydają się niezbędne przy opisie niepewności. Wielu autorów uważa jednak, że warunek addytywności miary opisującej niepewność jest niezbędny na etapie podejmowania decyzji. Wykazują oni, że przyjęcie do opisu zjawisk niepewnych miary, która nie jest addytywna, prowadzi do powstania tzw. „zakładu holenderskiego” (*Dutch book*), gdzie osoba stosująca taką miarę będzie w sposób pewny ponosiła straty zakładając się z osobą wykorzystującą do opisu niepewności miarę addytywną (prawdopodobieństwo). Generalna słuszność tego stwierdzenia jest jednak coraz częściej kwestionowana. Na przykład Smets [8] twierdzi, że transformacja opisu niepewności do poziomu prawdopodobieństwa jest niezbędna dopiero na poziomie podejmowania decyzji, a nie – na przykład – na poziomie przetwarzania informacji niepewnych.

Inne poważne problemy powstają, gdy używamy prawdopodobieństw subiektywnych do modelowania wiedzy niepełnej. Najważniejszy z tych problemów dotyczy modelowania pełnej niewiedzy. Proponowane przez probabilistów rozwiązania poddane zostały poważnej krytyce i, jak dotąd, w obrębie teorii prawdopodobieństwa nie znaleziono zadowalającego rozwiązania tego problemu. W przypadku ograniczonej wiedzy o opisującym jakieś zjawisko parametrze, sprowadzającej się – na przykład – do znajomości przedziału możliwych wartości tego parametru, przyjmuje się zazwyczaj, że rozkład prawdopodobieństwa tego parametru jest rozkładem równomiernym. Rozkład ten odznacza się tym, że nie wyróżnia się żadnej wartości z rozpatrywanego przedziału. Okazuje się jednak, że nawet najprostsze przekształcenie nieliniowe tego parametru prowadzi do nowego rozkładu prawdopodobieństwa, który już nie jest rozkładem równomiernym. Jeżeli np. wiemy tylko tyle, że bok kwadratu ma długość z przedziału $[a, b]$ i opisemy to rozkładem równomiernym określonym na tym przedziale, to pole tego kwadratu nie będzie już miało rozkładu równomiernego. Oznacza to, że w wyniku przekształcenia wprowadziliśmy jakąś dodatkową informację. Podobne paradoksy stawiają pod znakiem zapytania uniwersalność teorii prawdopodobieństwa jako narzędzia służącego do opisu wszelkiego rodzaju niepewności.

Teoria możliwości

Jednym z pojęć używanych do opisu niepewności i nieokreśloności jest pojęcie **możliwości**. W języku potocznym słowo „możliwy” jest często traktowane jako synonim słowa „prawdopodobny”. Czy jest to jednak uzasadnione? Zazwyczaj ze słowem „możliwość” wiąże się coś, co możemy sformułować jako „obiektywna wykonalność”. Znany jest przykład, podany przez twórcę teorii możliwości Lotfi Zadeha [11], który analizował zdanie „Hans może zjeść sześć jajek na śniadanie”. Nietrudno zauważyć, że nadanie temu stwierdzeniu interpretacji probabilistycznej napotyka na poważne trudności. Z pojęciem „możliwości” występującym w tym zdaniu łatwiej powiązać pewną miarę preferencji, wychodząc z założenia, że to co jest łatwiejsze do osiągnięcia, jest bardziej preferowane. Rozważania te skłoniły Zadeha [11] do wykorzystania teorii zbiorów rozmytych do sformalizowanego opisu teorii możliwości.

Możliwe są jednak inne interpretacje pojęcia „możliwość”. Na przykład, to co możliwe oznacza to, co domniemane (wiarogodne). W tym sensie pojęcie możliwości może służyć do pomiaru „skłonności zdarzeń do zachodzenia”. Z taką interpretacją możliwości mamy na przykład do czynienia analizując zdanie „Jest możliwe, że pociąg przyjedzie o czasie”. Zgodnie z inną interpretacją „możliwość” oznacza „logiczną zgodność z posiadaną informacją”. W takim przypadku słowo „możliwe” oznacza coś, co nie jest sprzeczne z posiadanymi dotychczas informacjami. Do takiej interpretacji skłaniają się np. Dubois i Prade [5]. Istnieje również deontologiczna interpretacja pojęcia „możliwości”, zgodnie z którą „możliwe, tzn. dozwolone (np. przez prawo)”. Ta interpretacja nie ma związku z omawianym w niniejszej pracy pojęciem niepewności i nie jest obiektem naszego zainteresowania.

Matematyczny opis pojęcia „możliwości” nazywamy opisem **posybilistycznym**. W teorii możliwości odpowiednikiem przestrzeni probabilistycznej jest **przestrzeń posybilistyczna** (Ω, B, Π) , gdzie zbiory Ω oraz B mają podobną interpretację jak w przypadku teorii prawdopodobieństwa, natomiast miara Π nazywana **rozkładem możliwości** spełnia następujące warunki:

$$1. \quad \Pi(\emptyset) = 0$$

$$2. \quad \Pi(\Omega) = 1$$

$$3. \quad \forall I \text{ jeżeli } \{A_i \mid i \in I\} \text{ jest zbiorem zbiorów w } B, \text{ to } \Pi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} \Pi(A_i)$$

przy czym zbiory $\{A_i \mid i \in I\}$ są dowolnymi zbiorami w B .

Jak łatwo zauważyć, miara posybilistyczna nie jest miarą addytywną. Jeżeli rozpatrujemy zajście dwu zdarzeń A oraz B , przy czym możliwość zajścia

jednego z nich oznaczmy przez $\Pi(A)$, a drugiego przez $\Pi(B)$, to możliwość sumy (logicznej) tych zdarzeń wyznaczamy z zależności $\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$.

W teorii możliwości istnieje również miara dualna do miary możliwości zwana miarą konieczności. Konieczność zajścia zdarzenia A wyznacza się z zależności

$$Nec(A) = 1 - Pos(\bar{A}) = 1 - \Pi(A) \quad (1)$$

gdzie $\bar{A}$ oznacza zdarzenie „nie- A ”.

Teoria możliwości jest nierozłącznie związana z teorią zbiorów rozmytych. Rozkład możliwości zajścia zdarzenia A jest utożsamiany z funkcją przynależności rozmytego zdarzenia $\tilde{A}$. Również operacje na rozkładach możliwości są równoważne operacjom logiki rozmytej. Ten ścisły związek obu teorii sprawia, że w opartej na teorii możliwości analizie niepewności możemy wykorzystać metodologię teorii zbiorów rozmytych. Z drugiej jednak strony, teoria możliwości podlega takiej samej krytyce jak teoria zbiorów rozmytych. Przede wszystkim nie ma powszechnie przyjętego sposobu pomiaru miary możliwości. Jest to niewątpliwie miara subiektywna. W przeciwieństwie jednak do subiektywnego prawdopodobieństwa, gdzie wypracowano technikę pomiarową wykorzystującą pojęcie zakładów symetrycznych, próby opracowania aksjomatycznej teorii pomiaru możliwości nie zostały zakończone pełnym sukcesem. Nie została również powszechnie przyjęta metodologia konstrukcji rozkładu możliwości na podstawie analizy danych statystycznych. Nowe wyniki w tej dziedzinie przedstawiono w pracy Hryniewicza [6].

Uogólnienia teorii prawdopodobieństwa oraz teorii możliwości. Teoria Dempstera-Shafera oraz teoria górnych prawdopodobieństw Walleya

Problemy interpretacyjne, a także konieczność rozwiązywania nietypowych problemów praktycznych teorii prawdopodobieństwa legły u podstaw prób uogólnienia tej teorii. Jedną z najciekawszych prób była teoria zaproponowana w pracy Dempstera [3], którą rozwinął Shafer [9]. Od nazwisk jej twórców teoria ta jest nazywana teorią Dempstera-Shafera (DST).

Odpowiednikiem przestrzeni probabilistycznej jest w teorii Dempstera-Shafera przestrzeń (Ω, B, m) . Zbiór B jest tzw. zbiorem potęgowym zbioru Ω (jest zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru Ω), zaś miara $m: B \rightarrow [0,1]$ spełnia następujące warunki:

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $\sum_{A \in B} m(A) = 1$

Każdy zbiór A , taki że $m(A) \neq 0$ nazywany jest **elementem ogniskowym** (*focal element*), a każdy zbiór $A \in B$ nie zawierający żadnych podzbiorów. Funkcja m nazywana jest **funkcją alokacji** (*basic probability assignment*). Funkcja alokacji ma własności funkcji prawdopodobieństwa, jednak jej argumenty (elementy ogniskowe) nie muszą – tak jak w przypadku teorii prawdopodobieństwa – być zbiorami rozłącznymi. Umożliwia to wykorzystanie teorii Dempstera-Shafera do modelowania sytuacji, gdy oprócz niepewności o charakterze losowym występuje niepewność związana z brakiem możliwości rozróżnienia elementów zbiorów opisujących pewne zdarzenia.

W teorii Dempstera-Shafera stosowane są dwie miary: **przekonania** (*belief*):

$$Bel(A) = \sum_{B|B \subseteq A} m(B) \quad (2)$$

oraz **domniemania** (*plausibility*):

$$Pl(A) = \sum_{B|B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad (3)$$

Jak widać, istnieje związek DST z teorią zbiorów przybliżonych (*rough sets*) Pawlaka, w której stosowane są podobne miary. Inna interpretacja DST związana jest z teorią tzw. zbiorów losowych.

Teoria Dempstera-Shafera jest uogólnieniem klasycznej teorii prawdopodobieństwa. Teoria prawdopodobieństwa jest szczególnym przypadkiem DST, gdy wszystkie elementy ogniskowe są **singletonami** (zbiorami jednoelementowymi). W takim przypadku zachodzi związek:

$$P(A) = Bel(A) = Pl(A) \quad (4)$$

Również teoria możliwości jest szczególnym przypadkiem DST, gdy wszystkie elementy ogniskowe są **zagnieżdżone**, tzn. zachodzi relacja $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$. Załóżmy na przykład, że dany jest zbiór $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i rodzina jego podzbiorów $A_i = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$, $i = 1, \dots, n$. Oznaczmy przez $m_i = m(A_i)$ wartość funkcji alokacji dla zbioru A_i , zaś przez $r_i = \pi(x_i)$ wartość miary możliwości i -tego elementu zbioru $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Zachodzą wówczas następujące związki:

$$r_i = \sum_{k=i}^n m_k, \quad m_i = r_i - r_{i+1}, \quad r_{n+1} = 0 \quad (5)$$

oraz

$$Pos(A) = Pl(A) \quad (6)$$

$$Nec(A) = Bel(A) \quad (7)$$

Dalszym uogólnieniem teorii Dempstera-Shafera jest teoria górnych prawdopodobieństw Petera Walleya [10]. Zgodnie z tą teorią w przypadku posiadania **niepełnej informacji** o zjawisku (losowym, niepewnym) prawdopodobieństwa zdarzeń określone są **przedziałowo** (P_* , P^*). Istotną rolę odgrywa tu **górne prawdopodobieństwo** P_* definiowane w terminach loterii (o stawce równej 1) jako minimalna wygrana na jaką można się zgodzić stawiając na to, że interesujące nas zdarzenie **nie zajdzie**. Istnieją silne argumenty by twierdzić, że w przypadku niepełnej informacji loterie służące do określenia prawdopodobieństw $P(A)$ oraz $P(\bar{A})$ nie są symetryczne, co jest podstawowym założeniem teorii prawdopodobieństwa.

Górne prawdopodobieństwa muszą ponadto spełniać pewien warunek **wewnętrznej zgodności**. Gdy warunek ten jest spełniony, to zachodzi nierówność

$$\max(P^*(A), P^*(B)) \leq P^*(A \cup B) \leq P^*(A) + P^*(B) \quad (8)$$

Można zauważyć, że teoria prawdopodobieństwa, teoria możliwości oraz teoria Dempstera-Shafera mogą być traktowane jako szczególne przypadki teorii górnych prawdopodobieństw. Teoria prawdopodobieństwa znajduje zastosowanie w przypadku, gdy górne prawdopodobieństwa są **równe** prawdopodobieństwom dolnym (zwykajnym), czyli spełniony jest warunek $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Teoria możliwości jest drugim skrajnym przypadkiem teorii górnych prawdopodobieństw, przy czym spełniony jest warunek: dla każdego A będącego podzbiorem przestrzeni Ω mamy albo $\bar{P}(A) = 1$, albo $\bar{P}(\bar{A}) = 1$. Okazuje się, że miary możliwości odpowiadają górnym prawdopodobieństwom w przypadku nieprecyzyjnych informacji postaci „ X jest Y ”, gdzie Y jest nieprecyzyjnym i monotonicznym predykatem.

Niech W oznacza niepewny stan, którego zbiór **możliwych** wartości jest przestrzenią Ω . Rzeczywista wartość $W = v$ jest dobrze zdefiniowana, ale nieznana. Predykat q nazywamy **malejącym**, gdy wartość $W = v_1$ odpowiada q co najmniej tak dobrze, jak wartość $W = v_2$, wtedy i tylko wtedy, gdy $v_1 \leq v_2$. W przypadku predykatu **rosnącego** następuje zmiana znaku nierówności. Predykaty **malejące** i **rosnące** są szczególnymi przypadkami predykatów **monotonicznych**. Na przykład, W jest nieznanym *wiekiem* pewnej osoby. W takim przypadku predykat „młody” (jak w zdaniu „Jan jest *młody*”) jest predykatem malejącym (stopień „młodości” maleje wraz z wiekiem).

Zgodnie z opinią wielu specjalistów teoria górnych prawdopodobieństw jest w chwili obecnej najbardziej ogólna teorią opisującą niepewności

rozmaitych rodzajów. Należy jednak pamiętać, że górne prawdopodobieństwa są mierzone w sposób subiektywny. Prace dotyczące powiązania tej teorii z klasyczną statystyczną analizą danych pojawiły się dopiero ostatnio.

Podsumowanie

Pojęcie niepewności jest pojęciem nie do końca zdefiniowanym. Określenia używane w języku potocznym do opisu niepewności, mimo że często traktowane jako synonimy, mogą dotyczyć różnych aspektów niepewności. Teoria prawdopodobieństwa, która jest powszechnie używana do matematycznego opisu niepewności nie wydaje się narzędziem całkowicie uniwersalnym, co twierdzą jej niektórzy zwolennicy. Teorie alternatywne, takie jak teoria możliwości Zadeha, a także uogólnienia klasycznej teorii prawdopodobieństwa (teoria Dempstera-Shafera, teoria górnych prawdopodobieństw Walleya) pozwalają na bardziej precyzyjny opis różnych aspektów niepewności i nieprecyzyjności. Ich ograniczeniem jest stosunkowo ubogi (w porównaniu do teorii prawdopodobieństwa) zestaw narzędzi pozwalających na rozwiązywanie problemów praktycznych. Na przykład, nie są jeszcze rozwinięte metody odpowiadające metodom statystycznym teorii prawdopodobieństwa. W tej sytuacji niepewności mające interpretację „losowości” najlepiej opisywane są za pomocą aparatu teorii prawdopodobieństwa (klasycznej i bayesowskiej). Z kolei, niepewności związane z naturalnym brakiem precyzji języka potocznego (informacja lingwistyczna), w którym przekazujemy większość informacji, mogą być opisywane za pomocą różnych teorii, z których w chwili obecnej najbardziej ogólną jest teoria górnych prawdopodobieństw Petera Walleya. Należy podkreślić, że w przypadku przetwarzania informacji lingwistycznej wszystkie miary niepewności są miarami subiektywnymi. Wydaje się jednak, że preferowane powinny być te miary, które mają naturalną interpretację, na przykład interpretację behawioralną w terminach odpowiednich loterii.

Literatura

- [1] De Finetti B., *Theory of probability*, J. Wiley, London 1974.
- [2] DeGroot M. H., *Optymalne decyzje statystyczne*, PWN, Warszawa 1981.
- [3] Dempster A. P., *Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping*, „Annals of Mathematical Statistics” 1967, Vol. 38, s. 325-339.
- [4] Dubois D., Prade H., *A class of fuzzy measures based on triangular norms*, „International Journal of General Systems” 1982, Vol. 8, s. 43-61.
- [5] Dubois D., Prade H., *Possibility Theory*, Plenum Press, New York 1988.
- [6] Hryniewicz O., *Possibilistic decisions and fuzzy statistical tests*, Raport Badawczy IBS PAN (zgłoszony do Fuzzy Sets and Systems), Warszawa 2002.
- [7] Savage L. J., *Foundations of statistics*, J. Wiley, New York 1954.

- [8] Smets P., *Decision making in a context where uncertainty is represented by belief functions*, [w:] *Belief functions in business decisions*, R. P. Srivastava, T. J. Mock (Eds.), Physica-Verlag, Heidelberg 2002, s. 17-61.
- [9] Shafer G., *Mathematical theory of evidence*, Princeton Univ. Press, Princeton 1976.
- [10] Walley P., *Statistical reasoning with imprecise probabilities*, Chapman and Hall, London 1991.
- [11] Zadeh L., *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility*, „Fuzzy Sets and Systems” 1978, Vol.1, s. 3–28.
- [12] Zimmermann H.-J., *An application-oriented view of modeling uncertainty*, „European Journal of Operational Research” 2000, Vol. 122, s. 190-198.

Olgierd Hryniewicz

Theoretical aspects of the description of uncertainty

Summary

The paper deals with the basic formal problems related to the description of uncertainty. Four basic approaches to the modeling of uncertainty have been described and compared: probability theory, possibility theory, Dempster-Schafer theory, and Walley's theory of upper probabilities. Differences between these theories, both formal and practical, have been briefly discussed.