prof. dr hab. Adam Paszkiewicz
Katedra Teorii Prawdopodobieństwa i Statystyki
Wydział Matematyki i Informatyki UŁ

Łódź, 23.01.2017 r.

**Opinia o rozprawie doktorskiej Pani mgr Emilii Fraszka-Sobczyk**

***„Uogólnione modele Coxa-Rossa-Rubinsteina wyceny opcji z parametrami zmieniającymi się w czasie i ich formuły graniczne"***

Praca składa się ze wstępu i sześciu rozdziałów i probabilistycznego Dodatku. Dołączony jest starannie przygotowany wykaz oznaczeń i formuł oraz dość bogaty wykaz literatury. Za zasadniczą część należy uznać pięć pierwszych rozdziałów. Rozdział 6. zawiera prosty model jednokrokowej zmiany ceny akcji. Zasadnicza część rozprawy dotyczy uogólnień słynnego dyskretnego modelu rynku C.R.R. (czyli Coxa-Rossa-Rubinsteina). Jest to rynek zawierający jeden rodzaj ryzykownego papieru wartościowego i jeden rodzaj bezryzykownych obligacji. W sensie matematycznym, jest to prosty, elegancki, kombinatoryczny model gry. Należy znaleźć strategię zawsze realizującą pewien cel, przy grze jednego gracza przeciwko naturze. W sensie ekonomicznym jest to najprostszy model, w którym można sformułować i rozwiązać problem wyceny opcji typu europejskiego poprzez strategię replikującą. Pojawia się elegancki wzór dający taką wycenę. Gdy gra ma wiele kroków pojawia się słynne przejście graniczne, dające dokładnie rozwiązanie stochastycznego równania różniczkowego Blacka-Scholesa. Istniejąca literatura, na przykład prace profesora Łukasza Stettnera i współpracowników dotyczące modelowania kosztów za transakcje, zaskakuje jednak złożonością obliczeń. Integralną częścią uogólnień tej elementarnej teorii są bardzo długie rachunki i poszukiwanie odpowiednich notacji.

Podobnie jest w przypadku omawianej rozprawy, gdzie zasadnicza część zajmuje 90 stron. Z drugiej strony zasadniczą rolę w tej teorii odgrywa interpretacja i znaczenie poszczególnych wyników. To z kolei pozwala całkiem krótko omówić zawartość pracy oraz jej rolę w ogólnym rozwoju teorii.

Rozdział 1. jest eleganckim wykładem teorii C.R.R. Dopracowane są oznaczenia. Wyjaśnione są delikatności związane ze stosowaniem Centralnego Twierdzenia Granicznego (pomijane w innych znanych mi wykładach).

Rozdział 2. zawiera naturalne uogólnienie teorii C.R.R. na przypadek, gdy logarytmy cen akcji mają niezerowy dryft rzędu stopy procentowej obligacji. Przejście graniczne prowadzi do naturalnego uogólnienia wzoru Blacka-Scholesa, Twierdzenie 2.2. Opisane są przypadki graniczne (dla bardzo dużych lub bardzo małych parametrów opisujących rynek w czasie ciągłym). Jeden z nich demonstruje naturalny brak arbitrażu (punkt c str. 23). Jest tak, gdy do zera dąży $\sigma^2$, czyli wariancja logarytmu długookresowej zmiany cen akcji. W tym momencie prosta kombinatoryczna teoria staje się niebanalna. Uwagi o interpretacji ekonomicznej są słuszne (lepsze niż w innych znanych monografiach), ale i tak wymagają dalszej pracy.

Rozdziały 1. i 2. warto omówić wraz z Dodatkiem. Zawiera on bardzo porządne i przemyślane zebranie potrzebnych faktów z rachunku prawdopodobieństwa i analizy.

Rozdziały 3., 4. i 5. to najistotniejsza część pracy. Rozpatruje się w nich modele C.R.R., w których stopa procentowa obligacji i parametr $\sigma^2$ dla cen akcji zmienia się skokowo między długimi przedziałami czasu. Precyzyjne przejście graniczne daje eleganckie uogólnienie formuły Blacka-Scholesa (Twierdzenie 3.3 str. 52; Twierdzenie 4.2; Twierdzenie 5.3). Rachunki są zaskakująco długie. W porównaniu z wcześniejszymi pracami na ten temat ([15] Nguyen Van Huu i Tran Trong Nguyen (2001), [16] Natalia Kan (2005)) praca daje nowy opis sytuacji, gdy parametry rynku zmieniają się skokowo, nie zaś w sposób ciągły. Metoda dowodu jest inna i dłuższa. Autorka bazuje na wstępnym udowodnieniu jednostajnej (względem początkowej ceny akcji) zbieżności wycen C.R.R. do wyceny B.S. Zaczyna więc od wyniku, który sam w sobie jest godny odnotowania. Dostrzeżona jest konieczność użycia nierówności Bernsteina. Należy podkreślić, że tak przeprowadzone pracochłonne rozumowanie rozstrzyga więcej niż zostało uchwycone we wspomnianych podsumowujących twierdzeniach 3.3, 4.2, 5.3. Rozważmy kolejne długie przedziały czasu $[0\ T_1]$, $[T_1, T_2]$ ,..., $[T_{i-1}, T_i]$. Niech parametry rynku będą inne dla każdego przedziału. Jeżeli przedziały podzielimy kolejna na $n_1, n_2, ..., n_i$ chwil handlowania, to granica wielokrotna, dla formuły C.R.R. $C(n_1, ..., n_i)$, będzie równa formule C, uogólniającej naturalnie formułę B.S. Granicę bierzemy dla $n_1 \to\infty$, $n_2 \to\infty$, $n_i \to\infty$ i założenie $n_1 = \ ... = n_i = n$ nie jest potrzebne. I to jest wartość przeprowadzonego rozumowania.

Nie mam zastrzeżeń do rachunków. Mam nadal uwagi co do precyzji interpretacji krótkookresowych wariancji $\sigma_n^2$ (w rozdziale 1., a tym samym w rozdziałach 2., 3., 4., 5.), choć praca jest tu bardziej przemyślana niż znane mi monografie. System notacji też wymaga dalszych przemyśleń, skoro rozumowanie załamuje się w rozdziale 5. dla $i = 4$ jako liczby okresów o odmiennych parametrach.

Reasumując, pracę trzeba rozpatrywać jako ciekawy etap badania relacji pomiędzy ciągłymi i dyskretnymi modelami stochastycznymi. W długich rachunkach ukryte są ciekawe spostrzeżenia (użycie Centralnego Twierdzenia Granicznego w wersji Lapunowa, użycie nierówności Bernsteina).

Praca powinna być uznana za spełniającą wymogi rozprawy doktorskiej. Wnoszę o dopuszczenie mgr Emilii Fraszka-Sobczyk do dalszych etapów przewodu doktorskiego.