

dr hab. Marek Kałuszka, prof. PŁ
Instytut Matematyki
Politechniki Łódzkiej
ul. Wólczańska 215
90-924 Łódź

Łódź, dn. 10 stycznia 2017 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej
magister Emilii Fraszki-Sobczyk

pt. UOGÓLNIONE MODELE COXA-ROSSA-RUBINSTEINA
WYCENY OPCJI Z PARAMETRAMI ZMIENIAJĄCYMI SIĘ
W CZASIE I ICH FORMUŁY GRANICZNE

Praca doktorska pani Emilii Fraszki-Sobczyk zawiera kilka modyfikacji klasycznego modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina (w skrócie, modelu CRR) polegających na uzależnieniu wielkości wzrostu i spadku cen aktywów od czasu oraz analizie przejść granicznych, w wyniku których uzyskuje się wzory na wycenę opcji kupna typu europejskiego uogólniające sławny wzór Blacka-Scholesa. Recenzowana rozprawa ma 115 stron maszynopisu. Składa się ze wstępu, sześciu rozdziałów, dodatku i bibliografii zawierającej 18 pozycji. Praca jest napisana poprawnie pod względem stylistycznym, językowym i redakcyjnym.

Pierwszy rozdział zawiera opis modelu CRR, podstawowe twierdzenie CRR o wycenie opcji metodą replikacji oraz wzór Blacka-Scholesa uzyskany ze wzoru CRR w wyniku przejścia do nieskończoności z liczbą zmian składu portfela w przedziale o długości T przy kalibracji (parametryzacji) CRR wielkości wzrostu lub spadku ceny w jednym podprzedziale i ich prawdopodobieństw. Szkoda, że napotkamy w nim na pewne drobne nieścisłości, które utrudniają zrozumienie tematu (patrz uwagi krytyczne 1-13).

W rozdziale drugim Autorka zaproponowała następującą kalibrację modelu dwumianowego

$$(1) \quad u_n = \exp\left(\frac{\rho}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \quad d_n = \exp\left(\frac{\rho}{n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \quad p = \frac{1}{2},$$

gdzie n jest liczbą podprzedziałów przedziału $[0, T]$ o jednakowej długości, d_n i u_n są wielkościami spadku lub wzrostu ceny akcji wzrostu w każdym z podprzedziałów, ρ zaś jest dowolną liczbą rzeczywistą. Autorka wyprowadza wzór na cenę opcji kupna typu europejskiego i podaje jej postać graniczną przy n dążącym do nieskończoności. Uzyskane rezultaty opublikowano w roku 2014 w czasopiśmie *Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź*.

Niestety, trudno mi uznać wyniki drugiego rozdziału za oryginalny wkład Autorki, gdyż kalibracja (1) i jej konsekwencje były badane przez Jarrowa i Rudda w roku 1983, a ich praca jest omawiana w wielu książkach i artykułach, np. Etheridge (2002)

A Course in Financial Calculus, Cambridge University Press, str. 46; Bellallah (2010) *Derivatives, Risk Management and Value*, World Sci., str. 350; Leisen i Reimer (1996) *Binomial models for option valuation - examining and improving convergence*, Applied Mathematical Finance, str. 319-346; Chance (2008) *A Synthesis of Binomial Option Pricing Models for Lognormally Distributed Assets*, Journal of Applied Finance, str. 38-56. Warto dodać, że kalibracje CRR i Jarrowa-Rudda nie są jedynymi znanymi w literaturze.

Przejdę teraz do omówienia wyników zamieszczonych w rozdziałach 3-5, które zawierają zasadniczą i niewątpliwie najciekawszą część rozprawy doktorskiej. Przedstawię problem docelowy, do którego rozwiązania Autorka dochodzi w kilku etapach. Rozważmy m okresów, np. miesięcy. Każdy z tych okresów dzielimy na n równych części (np. dni) i zakładamy, że w każdej z n części i -tego okresu zwrot $R_{i,n}$ z akcji może wynieść $u_{i,n} = \exp(\sigma_i/\sqrt{n})$ (wzrost ceny) lub $d_{i,n} = \exp(-\sigma_i/\sqrt{n})$ (spadek ceny) niezależnie od tego co działo się w przeszłości, gdzie $\sigma_i > 0$. Stopa wolna od ryzyka równa się r_i w i -tym okresie, tzn. inwestując w banku jednostkę pieniężną na początku i -tego okresu uzyskamy na końcu tego okresu kwotę $\exp(r_i)$.

Przez $R_{i,(n)}$ oznaczymy zwrot w okresie i , przy założeniu, że prawdopodobieństwo wzrostu równa się $p_{i,n}^*$, a spadku $q_{i,n}^* = 1 - p_{i,n}^*$, gdzie

$$p_{i,n}^* = \frac{e^{r_i/n} - d_{i,n}}{u_{i,n} - d_{i,n}},$$

dla $i = 1, 2, \dots, m$. Oczywiście,

$$R_{i,(n)} = R_{i,1} R_{i,2} \dots R_{i,n} = \exp\left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n V_{i,j}\right),$$

gdzie $V_{i,j}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi oraz $V_{i,j}$ przyjmuje wartość 1 lub -1 odpowiednio z prawdopodobieństwem $p_{i,n}^*$ i $q_{i,n}^*$.

Oznaczmy przez S_{i-1} cenę akcji na początku okresu i . Niech $C_{0,n}^{(m)}(S_0)$ będzie minimalną kwotą na początku pierwszego okresu, która pozwoli na konstrukcję strategii samofinansującej się i replikującej wypłatę $(S_m - K)^+$ na końcu okresu m , gdzie $a^+ = \max(a, 0)$. Zgodnie z modelem CRR, aby zreplikować wypłatę $(S_m - K)^+$ trzeba mieć na początku okresu m kwotę

$$\begin{aligned} C_{m-1,n}(S_{m-1}) &= e^{-r_m} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p_{m,n}^*)^k (q_{m,n}^*)^{n-k} (S_{m-1} u_{m,n}^k d_{m,n}^{n-k} - K)^+ \\ &= e^{-r_m} E[(S_{m-1} R_{m,(n)} - K)^+ | S_{m-1}]. \end{aligned}$$

Aby mieć gwarancję posiadania kwoty $C_{m-1,n}(S_{m-1})$ na początku okresu $m-1$ nabymy opcję na początku okresu $m-2$, która wypłaci tę kwotę i będzie kosztowała zgodnie z modelem CRR

$$\begin{aligned} C_{m-2,n}(S_{m-2}) &= e^{-r_{m-1}} E[C_{m-1,n}(S_{m-1}) | S_{m-2}] \\ &= e^{-(r_{m-1}+r_m)} E[(S_{m-2} R_{m-1,(n)} R_{m,(n)} - K)^+ | S_{m-2}]. \end{aligned}$$

Powtarzając powyższe rozumowanie w kolejnych okresach (indukcja wsteczna) dochodzimy do wniosku, że zreplikujemy wypłatę $(S_m - K)^+$, gdy na początku pierwszego

okresu będziemy posiadać kwotę

$$(2) \quad C_{0,n}^{(m)}(S_0) = e^{-r} E(S_0 R_{(n)} - K)^+,$$

gdzie S_0 jest znaną liczbą, $r = \sum_{i=1}^m r_i$ oraz $R_{(n)} = R_{1,(n)} R_{2,(n)} \dots R_{m,(n)}$.

W rozdziałach 3-5 udowodniono trzy najważniejsze twierdzenia rozprawy. Pierwsze dotyczy granicznej postaci ceny $C_{0,n}^{(m)}(S_0)$, gdy $n \rightarrow \infty$, tzn. wykazano, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(m)}(S_0) = C_0^{(m)}(S_0) := S_0 \phi(d_+) - K e^{-r} \phi(d_-),$$

gdzie ϕ oznacza dystrybucję standaryzowanego (standardowego) rozkładu normalnego $N(0, 1)$, zaś

$$d_{\pm} = \frac{\ln \frac{S_m}{K} + r \pm \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma},$$

gdzie $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}$ (tw. 5.4 na str. 90). Jak wiadomo,

$$(3) \quad C_0^{(m)}(S_0) = e^{-r} E(S_0 X - K)^+$$

gdzie $\ln X$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną $r - \frac{\sigma^2}{2}$ i wariancją σ^2 . Gdy parametry r_i i σ_i nie zależą od i (nie zmieniają się w okresach), cena $C_0^{(m)}(S_0)$ jest ceną Blacka-Scholesa.

Drugim wynikiem jest twierdzenie o zbieżności jednostajnej ceny $C_{0,n}^{(m)}$ do $C_0^{(m)}$, tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{S_0 > 0} |C_{0,n}^{(m)}(S_0) - C_0^{(m)}(S_0)| = 0$$

(patrz tw. 3.1.2, str. 26, dla $m = 1$). Udowodniono również, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in N$ takie, że dla każdego $n \geq n_0$ i $S_0 > 0$

$$|C_{0,n}^{(m)}(S_0) - C_0^{(m)}(S_0)| \leq \varepsilon(1 + S_0)$$

(tw. 4.1 na str. 60 dla $m = 2$, tw. 5.1 na str. 79 dla $m = 3$ i tw. 5.3 na str. 90 dla $m = 4$ z oszacowaniem $\varepsilon(1 + \frac{3}{2}S_0)$).

Dowody są zawiłe i polegają na bardzo pomysłowym użyciu szeregu oszacowań i twierdzeń, m.in. nierówności Bernsteina, twierdzenia Skorochoda, twierdzeń o aproksymacji i twierdzenia Lapunowa. Nie wątpię, że wyniki z rozdziałów 3-5 doczekają się publikacji.

W końcowym szóstym rozdziale rozprawy zakłada się, że ceny S_t dla $t = 1, 2, \dots, T$ są wyznaczone ze wzoru rekurencyjnego $S_t(\omega_i) = a(\omega_i)S_{t-1}(\omega_i) + b(\omega_i)S_{t-2}(\omega_i)$, gdzie $\omega_i \in \Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, zaś współczynniki $a(\omega_i)$, $b(\omega_i)$ są znane, zatem mamy do czynienia z modelem dwustanowym jednookresowym – w chwili $t = 0$ nabywamy opcję, a w chwili T następuje jej rozliczenie przy dwóch możliwych wartościach ceny: $S_T(\omega_1)$ lub $S_T(\omega_2)$. Autorka bada, dla jakich współczynników a i b model będzie wolny od arbitrażu, gdy T dąży do nieskończoności. Uważam, że jest to najślabszy rozdział pracy doktorskiej, gdyż determinizm ceny końcowej z punktu widzenia chwili $t = 1$ jest nie do pogodzenia ze standardami spotykanymi w literaturze. Ponadto, nie rozumiem co nowego wnosi on do jednookresowego modelu CRR (rozważanego po raz pierwszy przez Sharpe'a w 1978 roku), w którym dwie możliwe wartości ceny S_T są

dowolne z założenia. Wyniki umieszczone tym rozdziale rozprawy zostały opublikowane w roku 2011 w czasopiśmie *Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź* (współautor dr hab. Michał Jerzy Marczak).

Uwagi krytyczne. Swoje uwagi ponumeruję, aby łatwiej było odwoływać się do nich w razie potrzeby.

1. (str. 6) W definicji 1.1 znajdujemy dziwny zapis $t \in \mathbb{N} \cap t \dots$
2. (str. 6) Drzewo zmian cen na rys. 1.1 powinno kończyć się dwiema gałęziami w dwóch miejscach.
3. (str. 7) W definicjach 1.2, 1.3 i innych, przyjmuje się, że gracz podejmuje również decyzję o zmianie składu portfela w chwili T , gdzie T jest chwilą wygaśnięcia ważności opcji. Po co zmieniać skład portfela w chwili T ?
4. (str. 7) W definicji 1.3 brak informacji o s . Być może umieszczanie w nawiasach komentarzy dotyczących pojęcia „chwila” na str. 7 i dalszych stronach rozprawy, wnosi istotną informację, ale mnie tego typu objaśnienia raczej przeszkadzały. W czwartej linii interpretacji powinno być $S(t+1) = sd$.
5. (str. 8, Def. 1.6) Wycena opcji kupna typu europejskiego $C_T(s)$ oznaczona jest literą $C_0(s)$. Czy mam przez to rozumieć, że jak we wzorze na C_T liczba s należy do zbioru $\{s_0 d^T, \dots, s_0 u^T\}$? Ten sam błąd powielony jest we wzorze

$$P_0(s) = \alpha_0(0) + \beta_0(s) \cdot S(s)$$

oraz w interpretacji definicji 1.6.

6. (str. 8) W opisie wzoru (2): liczba s nie należy do zbioru $\{s_0 d^T, \dots, s_0 u^T\}$.
7. Na str. 8 i w dalszej części rozprawy pojawia się numeracja wzorów, która utrudniała mi czytanie pracy, tzn. najpierw znajdujemy wzór (1.1) potem wzory (1), (2), a na str. 9, wzór (1.2.1). Na str. 22 mamy wzór ((1)), na str. 27 wzór (*), na str. 30, wzór (1), na str. 34, dwa wzory (0), na str. 36 wzór (3.3.1.0) itd.
8. (str. 11) Nie rozumiem Uwagi 1.2.
9. (str. 11) Czy kalibracja modelu CRR polega na dopasowaniu parametrów do danych rynkowych, czyli na analizie statystycznej rynku?
10. (str. 13) W twierdzeniu 1.4.1 zadanie „Ponadto, zakłada się, że σ nie zależy od t ” jest zbędne, gdyż Autorka powołuje się wcześniej na podrozdział 3.2.1 wzór (0).
11. (str. 13) Na tej stronie i na innych stronach rozprawy, Autorka używa niefortunnego sformułowania o „zbieżności modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina do modelu Blacka-Scholesa”, gdy chodzi o „zbieżność formuły Coxa-Rossa-Rubinsteina do formuły Blacka-Scholesa”.
12. (str. 14, tw. 1.4.3.) Zbędne wstawki o $P(S_n = k)$, $E(S_n)$ i $D^2(S_n)$. Czy miara P we wzorze $P(A_{n,i}) = p_n$ jest inna miarą niż P_n we wzorze $P_n(S_n = k) = \dots$? Zginął pierwiastek we wzorze na gęstość rozkładu normalnego.
13. (str. 17) Co oznacza zwrot „empiryczne prawdopodobieństwo”?
14. (str. 22 i dalsze) Zapis komentarzy we wzorach w postaci nawiasów nie jest zbyt czytelny.
15. (str. 26) Brak części całkowitej (funkcja podłoga) we wzorze na $k_{0,n}$.
16. (str. 90, tw. 5.4) Brak ϕ we wzorze (5.4.1).

17. (str. 90, tw. 5.4) Zmienna losowa $R_{i,(n)}$ jest zbieżna według rozkładu do zmiennej e^{Y_i} przy $n \rightarrow \infty$, gdzie Y_i ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $r_i - \sigma_i^2/2$ i wariancji σ_i^2 co jest znanym faktem udowodnionym w modelu CRR (1979), a także na str. 32-33 niniejszej rozprawy. Ponieważ zmienne $R_{i,(n)}$ dla $i = 1, 2, \dots, m$ są niezależne, więc ich iloczyn $R_{(n)}$ jest zbieżny według rozkładu do zmiennej $X = e^Y$, gdzie Y ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $r - \sigma^2/2$ i wariancją σ^2 oraz $r = \sum_{i=1}^m r_i$ i $\sigma^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2$.

Ze wzorów (2) i (3) i z tożsamości $(x - K)^+ = x - K + (K - x)^+$ dostajemy

$$(4) \quad |C_{0,n}^{(m)}(S_0) - C_0^{(m)}(S_0)| = e^{-r} |S_0 E(R_{(n)} - X) + E(K - S_0 R_{(n)})^+ - E(K - S_0 X)^+| \leq S_0 |\delta_n| + |\Delta_n(S_0)|,$$

gdzie $\delta_n = e^{-r}(ER_{(n)} - EX)$ i $\Delta_n(S_0) = e^{-r}(E(K - S_0 R_{(n)})^+ - E(K - S_0 X)^+)$. Ponieważ funkcja $x \rightarrow (K - x)^+$ jest ograniczona i ciągła oraz ciąg $R_{(n)}$ jest zbieżny według rozkładu do zmiennej X , więc $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(S_0)| = 0$ dla każdego $S_0 > 0$. Wykażemy, że $\delta_n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Zmienne $R_{i,(n)}$ są niezależne, zatem wystarczy wykazać, że $ER_{i,(n)} \rightarrow Ee^{Y_i} = e^{r_i}$, gdy $n \rightarrow \infty$ dla dowolnego i . Dowód tego faktu jest zamieszczony na str. 33-34 (Lemat 3.2.2) recenzowanej rozprawy. Podsumowując, dla każdego $S_0 > 0$, $C_{0,n}^{(m)}(S_0) \rightarrow C_0^{(m)}(S_0)$, gdy $n \rightarrow \infty$.

18. (str. 90, tw. 5.3) Funkcję $\Delta_n(s) = e^{-r}(E(K - sR_{(n)})^+ - E(K - sX)^+)$ można zapisać w postaci $\Delta_n(s) = F(s) - F_n(s)$, gdzie $F(s) = e^{-r}(K - E(K - sX)^+)$ i $F_n(s) = e^{-r}(K - E(K - sR_{(n)})^+)$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajorowanej, wynika, że funkcje F i F_n są ciągłe, gdyż $(K - sZ)^+ \leq K$ dla dowolnej nieujemnej zmiennej losowej Z . Ponadto, F i F_n są niemalejące i ograniczone oraz $\lim_{s \rightarrow \infty} \Delta_n(s) = 0$ i $\lim_{s \rightarrow 0} \Delta_n(s) = 0$, co jest również konsekwencją tw. Lebesgue'a. Z twierdzenia Pólya (patrz punkt 22) wynika, że ciąg funkcyjny $(\Delta_n(\cdot))$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji równej tożsamościowo zero. Dobierzmy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ taką liczbę n_0 aby $|\Delta_n(s)| \leq \varepsilon$ i $|\delta_n| \leq \varepsilon$ każdego $n \geq n_0$ i $s > 0$. Wtedy z (4) wynika, że

$$|C_{0,n}^{(m)}(S_0) - C_0^{(m)}(S_0)| \leq \varepsilon(S_0 + 1).$$

19. (str. 26, tw. 3.1.2) Ze wzorów (2) i (3) i z tożsamości $(x - K)^+ = x - K + (K - x)^+$ otrzymujemy wzór

$$C_{0,n}^{(m)}(S_0) - C_0^{(m)}(S_0) = S_0 \delta_n + \Delta_n(S_0),$$

gdzie δ_n i $\Delta_n(S_0)$ zdefiniowano w punkcie 17. Ciąg funkcyjny $f_n(s) := s\delta_n + \Delta_n(s)$, $n \geq 1$, jest punktowo zbieżny do funkcji $f(s) = 0$ dla każdego $s \geq 0$. Jest on również zbieżny jednostajnie, ale jedynie w przypadku, gdy $\delta_n = 0$ dla prawie wszystkich n , gdyż $\lim_{s \rightarrow \infty} f_n(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s\delta_n)$ i funkcje f_n są ciągłe.

20. (str. 98) Zdanie zaczynające się od słów „Racjonalnie jest przyjąć ...” jest dla mnie niezrozumiałe, gdyż Autorka najpierw zakłada, że $a_1 > 0$ i $b_1 > 0$, a następnie rozważa przypadek $a_1^2 = -4b_1$.

21. (str. 102) Brak pierwiastka we wzorze na gęstość rozkładu normalnego.

22. (str. 103-105, Twierdzenie 1 i 2, Diniego) Nie zamieszczono odsyłaczy do literatury, co może sugerować, że są to nowe wyniki. Czy jest tak w istocie? Moim

zdaniem, Twierdzenia 1 i 2 nie nawiązują do twierdzenia Diniego, a są zmodyfikowaną wersją twierdzenia Pólya zamieszczonego w książce Chowa i Teichera (1988) *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales*, Lemat 3 na str. 265. W twierdzeniu Diniego, z punktowej zbieżności monotonicznego ciągu funkcji ciągłych do funkcji ciągłej na zbiorze zwartym wynika zbieżność jednostajna (patrz np. Kryszewski W. (2009) *Wykład analizy matematycznej*, UMK).

23. (str. 115) W bibliografii zamieszczono 18 pozycji, w tym zaledwie dwie książki ([6] i [18]) z fachowej literatury w języku angielskim. Zabrakło kilku podstawowych pozycji z matematyki finansowej, które są już cenione na całym świecie, np. nie jest cytowana książka Musieli i Rutkowskiego (2005) *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer.

Na koniec tej listy krytycznych uwag pozwolę sobie na małą refleksję. Wydaje się, że napisano już wszystko, co można było napisać na temat wyceny opcji kupna typu europejskiego w modelu z czasem dyskretnym. Baza MathScience zawiera ponad 300 prac matematycznych na ten temat, nie licząc kilku tysięcy prac i książek z finansów niezamieszczonych w tej bazie. Autorka podjęła się karkołomnego zadania wymyślenia czegoś oryginalnego, więc nie dziwi mnie, że mogła niekiedy nie sprostać temu wyzwaniu.

Powyższe uwagi nie zmieniają mojej pozytywnej oceny recenzowanej pracy. Jej Autorka wykazała się śmiałością, pomysłowością i swobodą w posługiwaniu się zaawansowanymi metodami rachunku prawdopodobieństwa, zwłaszcza przy badaniu asymptotyki modelu.

Podsumowując uważam, że recenzowana rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim z matematyki. **Wnoszę o jej przyjęcie i o dopuszczenie pani magister Emilii Fraszki-Sobczyk do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

M. Kałuska

Marek Kałuska