

120

Ewa Kusidel

**BADANIE KOINTEGRACJI NA PODSTAWIE
WEKTOROWO-AUTOREGRESYJNYCH MODELI
EKONOMETRYCZNYCH.
PODEJŚCIE JOHANSENA**

Seria C

Łódź 1997

WSTĘP

W ostatnich latach coraz większe zainteresowanie budzi badanie kointegracji zmiennych i coraz częściej włączane jest jako typowy etap analizy szeregów czasowych. Do popularnych metod badania kointegracji należy procedura Engle'a i Grangera. W pracy tej podejmuje się próbę wskazania jej wad, na których tle pokazana jest metoda Johansena, bazująca na modelach wektorowo-autoregresyjnych. Metoda Johansena jest coraz częściej dołączana do pakietów komputerowych jako typowy element analizy szeregów czasowych. Nie należy jej jednak stosować mechanicznie. Bardzo istotnym etapem w badaniu kointegracji metodą Johansena jest właściwa specyfikacja modelu wektorowo-autoregresyjnego. Dalsza część badania, tzn. badanie związków kointegracyjnych może być wykonywana automatycznie, lecz wiarygodność wyników zależy właśnie od etapu wstępnego.

Praca ta ma na celu szczegółową prezentację kolejnych etapów algorytmu znajdowania wektora kointegrującego metodą Johansena, a w szczególności etapu wstępnego, polegającego na specyfikacji postaci modelu. Wśród prezentowanych testów na uwagę zasługują przede wszystkim dwa z nich:

- test długości opóźnień
- test badający występowanie wyrazu wolnego w wektorze kointegrującym

Testy te rzadko są stosowane jako typowy etap analizy kointegracyjnej, pomimo ich prostej konstrukcji, niewątpliwej przydatności i ciekawej interpretacji.

1. BADANIE KOINTEGRACJI- DWA ALTERNATYWNE PODEJŚCIA

Bardzo popularnym algorytmem badającym skointegrowanie zmiennych jest podejście Engla- Grangera (por. R.F.Engle, C.W.J. Granger [1987], s.251-256), gdzie w pierwszym kroku bada się rząd integracji zmiennych, a następnie estymuje związek długookresowej równowagi np.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + e_t \quad (1.1)$$

Reszty z powyższego równania są odchyleniami od długookresowej równowagi. Jeśli odchylenia te są stacjonarne, to zmienne $y_t, z_t \sim CI(1,1)$, a wektor kointegrujący ma postać $[1 \quad -\beta_0 \quad -\beta_1]$.

Metoda Engla i Grangera jest dość prostym narzędziem testowania kointegracji, lecz ma kilka istotnych wad. Po pierwsze procedura ta bazuje na dwustopniowej estymacji. W pierwszym kroku generujemy reszty ze związku długookresowej równowagi, które, w kroku drugim, są podstawą następnej regresji. Jeśli więc regresja równania równowagi była obciążona błędem, jest on przenoszony do etapu drugiego. Drugą wadą podejścia Engle'a i Grangera jest to, że estymacja związku długookresowej równowagi wymaga jednoznacznego rozstrzygnięcia, która ze zmiennych wystąpi w roli zmiennej objaśniającej, a która objaśnianej. Weźmy pod uwagę zmienne z modelu (1.1). Możliwe jest dla nich badanie dwóch związków długookresowej równowagi:

$$y_t = \beta_{10} + \beta_{11} z_t + e_{1t} \quad (1.1a)$$

$$z_t = \beta_{20} + \beta_{21} y_t + e_{2t} \quad (1.1b)$$

Jeśli rozmiar próby rósłby w nieskończoność, to zgodnie z teorią asymptotyczną, testowanie istnienia pierwiastka jednostkowego w e_{1t} jest równoznaczne z testowaniem istnienia pierwiastka szeregu e_{2t} . Jednocześnie

jednak właściwość ta, charakterystyczna dla dużych prób nie jest przydatna tam, gdzie badacz dysponuje ograniczoną próbą, a z taką sytuacją mamy zazwyczaj do czynienia. W praktyce więc, możliwa jest sytuacja, że regresja równania (1.1a) wskazuje na istnienie kointegracji zmiennych, a regresja równania (1.1b) wskazuje na brak kointegracji.

Po trzecie zagadnienie kointegracji jest proste w przypadku dwóch zmiennych (objaśnianej i objaśniającej). Wtedy bowiem związek długookresowej równowagi można wyznaczyć jednoznacznie (lub stwierdzić, że zmienne nie są skointegrowane). Z bardziej skomplikowaną sytuacją mamy do czynienia, gdy rośnie liczba zmiennych objaśniających, wraz z którą rośnie liczba możliwych związków kointegrujących. Np. jeśli liczba zmiennych w modelu wynosi n istnieje od 0 do $n-1$ liniowo niezależnych wektorów kointegrujących. Procedura Engle'a i Grangera nie formułuje przepisu (testu) na wyznaczanie liczby wektorów kointegrujących.

Pewien przełom w badaniach nad kointegracją nastąpił wraz z opublikowaniem pracy S. Johansena [1988] (s. 231-54), który proponuje badanie związków długookresowej równowagi na podstawie modeli wektorowo-autoregresyjnych -VAR- postaci:

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + \dots + A_k x_{t-k} + \epsilon_t \quad (1.2)$$

gdzie:

x_t - wektor o wymiarach $(n \times 1)$ zawierający zmienne włączone do modelu VAR,

$$x_t = [x_{1t} \quad x_{2t} \quad \dots \quad x_{nt}]'$$

A_0 - wektor wyrazów wolnych, $A_0 = [a_{01} \quad a_{02} \quad \dots \quad a_{0n}]'$,

A_i - $(n \times n)$ macierz parametrów przy opóźnionych zmiennych wektora x_t ,

ϵ_t - jest $(n \times 1)$ wektorem zakłóceń losowych. Przyjmuje się, że ϵ_t mogą być

jednocześnie skorelowane (korelacja pomiędzy poszczególnymi równaniami), ale nie podlegające autokorelacji (w czasie), zatem macierz kowariancji nie jest diagonalna.

W celu użycia modelu VAR do badania kointegracji należy go przekształcić do postaci modelu korekty błędem VECM (*ang. Vector Error Corretion Model*). Reprezentację VECM dla modelu (1.2) otrzymujemy poprzez odjęcie x_{t-1} od obu stron równania (1.2):

$$\Delta x_t = A_0 + (A_1 - I)x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + A_3 x_{t-3} + \dots + A_k x_{t-k} + \epsilon_t$$

Kolejne przekształcenia polegające na odejmowaniu wyrażenia $(A_1 - I)x_{t-2}$, $(A_2 + A_1 - I)x_{t-3}$..., doprowadzają do otrzymania modelu z korektą błędem postaci:

$$\Delta x_t = A_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \pi_i \Delta x_{t-i} + \pi x_{t-k} + \epsilon_t \quad (1.3)$$

gdzie:

$$\pi = \sum_{i=1}^k A_i - I$$

$$\pi_i = \sum_{j=1}^i A_j + I$$

Johansen dowiódł, że w przypadku wielowymiarowym, do badania kointegracji można użyć rzędu macierzy π , który jest równy liczbie niezależnych wektorów kointegrujących, a w szczególności:

1. Jeśli rząd π wynosi 0, to wszystkie elementy tej macierzy muszą być zerowe i model (1.3) jest typowym modelem VAR w pierwszych różnicach, dla którego nie istnieje reprezentacja korekty błędem - nie istnieje zatem kombinacja liniowa tych zmiennych, która jest stacjonarna.

2. Jeśli macierz π jest pełnego rzędu, wtedy szeregi wektora x_t są stacjonarne.
3. Jeśli macierz π jest rzędu pierwszego, istnieje tylko jeden wektor kointegrujący a wyrażenie πx_{t-p} jest czynnikiem korekty błędem. W pozostałych przypadkach tzn. $1 < \text{rzęd}(\pi) < n$ występuje wiele wektorów kointegrujących.

Zwróćmy uwagę, że procedura Johansena nie bazuje na dwustopniowej estymacji, uwzględnia każdą ze zmiennych jako objaśnianą, oraz pozwala na wyznaczenie liczby związków kointegrujących - jest więc pozbawiona wad którymi obarczony jest algorytm Engla-Grangera.

1.1. Wyraz wolny

W procedurze Engle'a i Grangera włączenie wyrazu wolnego w związek długookresowej równowagi pomiędzy zmiennymi był jednoznaczny z pojawieniem się jego reprezentacji w wektorze kointegrującym. Pokazane to zostało np. przy estymacji związku (1.1) i towarzyszącemu mu wektorowi kointegracyjnemu. W przypadku procedury Johansena, skupiającej się na oszacowaniach macierzy π widzimy, że włączenie wyrazu wolnego do równania (1.2), lub (1.3) nie powoduje pojawienia się jego reprezentacji w wektorze lub wektorach kointegrujących. Możliwe są w tej sytuacji trzy drogi postępowania:

1. Pominąć wyraz wolny, tzn. szacować model (1.2) i / lub (1.3), dla którego wektor $A_0 = 0$,
2. Włączyć wyraz wolny w sposób pokazany w modelu (1.2) i/lub (1.3), pamiętając jednocześnie, że metoda taka nie spowoduje pojawienia się jego reprezentacji w wektorze lub wektorach kointegrujących,
3. Włączyć wyraz wolny do wektora lub wektorów kointegrujących.

Oczywiście każde z tych podejść ma różne konsekwencje i interpretacje.

Rozważmy model:

$$\Delta x_t = A_0 + \pi x_{t-1} + \epsilon_t \quad (1.3a)$$

Jeśli istnieje długookresowa równowaga pomiędzy zmiennymi to $\pi x_{t-1} = 0$, a zatem szeregi Δx_{it} mają wartości oczekiwane równe kolejnym elementom a_{0i} . Zagregowanie kolejnych a_{0i} w czasie daje wyrażenie $a_{0i}t$. A zatem włączenie różnych a_{0i} jest jednoznaczne z przyjęciem założenia o występowaniu liniowego trendu deterministycznego w procesach generujących zmienne. Możliwe jest jednakże włączenie wyrazu wolnego do wektora kointegrującego. W tym przypadku zmienne nie wykazują trendu.

Jedną z możliwości pojawienia się wyrazu wolnego w wektorze kointegrującym jest nałożenie restrykcji na wektor wyrazów wolnych w modelu (1.3). Weźmy pod uwagę model (1.3a) i przyjmijmy, że rząd macierzy π wynosi 1. Jeśli tak, to poszczególne rzędy macierzy π różnią się tylko o pewien skalar (wniosek ten wypływa bezpośrednio z faktu, że rząd macierzy jest równy liczbie liniowo niezależnych wektorów ją tworzących). Jeśli dla modelu:

$$\Delta x_t = A_0 + \pi x_{t-1} + \epsilon_t, \quad (1.4)$$

rząd macierzy π wynosi 1, to n zmiennych tworzących wektor Δx_t można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned}
\Delta x_{1t} &= \pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \dots + \pi_{1n}x_{nt-1} + a_{10} + \epsilon_{1t} \\
\Delta x_{2t} &= s_2(\pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \dots + \pi_{1n}x_{nt-1}) + a_{20} + \epsilon_{2t} \\
&\dots \\
\Delta x_{nt} &= s_n(\pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \dots + \pi_{1n}x_{nt-1}) + a_{n0} + \epsilon_{nt}
\end{aligned}$$

gdzie s_i oznaczają takie skalary, że $s_i\pi_{1j} = \pi_{ij}$

Włączenia wyrazu wolnego do wektora kointegrującego można dokonać po znalezieniu takich a_{i0} , że $a_{i0} = s_i a_{10}$. Model (1.4) może być wtedy zapisany jako:

$$\begin{aligned}
\Delta x_{1t} &= (\pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \dots + \pi_{1n}x_{nt-1} + a_{10}) + \epsilon_{1t} \\
\Delta x_{2t} &= s_2(\pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \dots + \pi_{1n}x_{nt-1} + a_{10}) + \epsilon_{2t} \\
&\dots \\
\Delta x_{nt} &= s_n(\pi_{11}x_{1t-1} + \pi_{12}x_{2t-1} + \dots + \pi_{1n}x_{nt-1} + a_{10}) + \epsilon_{nt}
\end{aligned}$$

lub w bardziej zwartej formie jako:

$$\Delta x_t = \pi^* x_{t-1}^* + \epsilon_t \quad (1.5)$$

gdzie :

$$x_{t-1}^* = [x_{1t-1}; x_{2t-1}; \dots; x_{nt-1}, 1]'$$

$$\pi^* = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1n} & a_{10} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2n} & a_{20} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \pi_{n1} & \pi_{n2} & \dots & \pi_{nn} & a_{n0} \end{bmatrix}$$

Jedną z bardziej interesujących aspektów procedury Johansena jest możliwość testowania ograniczonej formy wektora lub wektorów kointegrujących.

2. TESTOWANIE HIPOTEZ W ANALIZIE KOINTEGRACYJNEJ

Procedurę znajdowania ilości wektorów kointegrujących można podzielić na trzy zasadnicze etapy:

1. Badanie integracji zmiennych. Metoda Johansena, podobnie jak procedura Engle'a i Grangera wymaga tego samego stopnia integracji zmiennych. Ze względu na powszechność stosowania testów badających rząd integracji nie zostaną one tutaj omówione. Ich opis można znaleźć w np. D.A. Dickey [1981], s. 1057-1072, W. Charemza [1993], s. 130-135, lub W. Enders [1995], s. 221-225 i 239. Zakłada się, że wynikiem tego etapu jest stwierdzenie, że zmienne są zintegrowane rzędu 1-ego (w przypadku zmiennych opisujących zjawiska ekonomiczne rzadko zdarza się integracja stopnia drugiego. Jeśli jednak taka sytuacja wystąpi, do dalszego badania można wziąć np. przyrosty zmiennej, które są zintegrowane rzędu pierwszego).
2. Badanie długości opóźnień, tzn. wielkości k w (1.2). Jeśli analiza ma się koncentrować jedynie na stwierdzeniu istnienia i estymacji wektora lub wektorów kointegrujących, to wystarczy, gdy wielkości k będą na tyle duże, aby wyeliminowały autokorelację składnika losowego z poszczególnych równań. Jeśli jednak ten etap badań ma posłużyć do budowy i interpretacji modelu korekty błędem tzn. postaci (1.3) to duże wartości k mogą być niezgodne z przesłankami ekonomicznymi. W modelu (1.3) długość opóźnień odpowiada długości reakcji na odchylenia od długookresowej równowagi, zgodnie z interpretacją mechanizmu korekty błędem. Zazwyczaj przyjmuje się, że korekta ta występuje w relatywnie krótkim czasie, zatem k nie mogą być zbyt duże.
3. Zastosowanie testów badających obecność wyrazu wolnego w modelu wyjściowym lub w wektorze kointegracyjnym. Znaczenie tego etapu omówiono w paragrafie 1.1.

2.1. Testy długości opóźnień

Często wiedza o badanym zjawisku jest nie wystarczająca do jednoznacznego wyznaczenia wielkości k w modelu VAR. Pomocny wtedy jest *test długości opóźnień* bazujący na statystyce współczynnika wiarygodności (por. np. W. Enders [1995], s.313).

Badanie należy rozpocząć z najdłuższym prawdopodobnym opóźnieniem (np. dla danych kwartalnych może to być wielokrotność czterech), lub możliwie najdłuższą długością ze względu na liczbę stopni swobody.

Następnie należy postawić zespół hipotez:

H_0 : długość opóźnienia zmiennych wynosi $k - r$,

H_1 : długość opóźnienia zmiennych wynosi k ,

gdzie:

k - jest maksymalną długością opóźnienia od której rozpoczęliśmy badanie,

r - ilość opóźnień o które chcemy zredukować model.

Niech Σ_k oznacza macierz wariancji-kowariancji reszt z modelu o maksymalnej ilości opóźnień. Chcąc zredukować model o r opóźnień, należy reestymować model dla tej samej próbki, używając opóźnienia $k - r$ i obliczyć macierz wariancji-kowariancji reszt Σ_{k-r} . Ażeby przetestować postawiony zespół hipotez należy obliczyć statystykę współczynnika wiarygodności¹ (*ang.likelihood ratio statistic*) postaci:

$$LRS = (T - c)(\log|\Sigma_{k-r}| - \log|\Sigma_k|) \quad (2.1)$$

gdzie:

T - ilość dostępnych obserwacji,

¹ Jest to statystyka współczynnika wiarygodności z poprawką Simsa [1980] -por. W. Enders,

c - ilość parametrów estymowanych w każdym z równań nieograniczonego (z maksymalną ilością opóźnień) modelu VAR,

$\log|\Sigma_k|$ - logarytm naturalny z wyznacznika Σ_k ,

$\log|\Sigma_{k-r}|$ - logarytm naturalny z wyznacznika Σ_{k-r} .

Statystyka LRS ma asymptotyczny rozkład χ^2 z ilością stopni swobody, $v = (k - r) * n^2$, równą ilości ograniczeń nałożonych w całym systemie.

2.2. Badanie ilości wektorów kointegrujących- rzędu kointegracji

W badaniu rzędu macierzy π w modelu (1.3) można wykorzystać fakt, że rząd macierzy jest równy ilości jej niezerowych pierwiastków charakterystycznych. Ilość różnych (liniowo niezależnych) wektorów kointegrujących może być zatem wyznaczana poprzez badanie pierwiastków charakterystycznych macierzy π . Załóżmy, że mamy n pierwiastków charakterystycznych uporządkowanych tak, że $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots \lambda_n$. Jeśli zmienne wchodzące w skład wektora x_t są nieskointegrowane, rząd macierzy π wynosi 0 i wszystkie pierwiastki charakterystyczne są równe zero. Podobnie, jeśli rząd macierzy π wynosi 1, to wiadomo, że tylko jeden z pierwiastków charakterystycznych jest różny od zera, a dokładnie: $\lambda_1 > 0$, zaś pozostałe są zerowe.

W praktyce możemy otrzymać tylko estymator macierzy π i pierwiastków charakterystycznych. Żaden z nich z pewnością nie będzie równy dokładnie

zero. Musimy zatem skorzystać z kolejnych testów sprawdzających liczbę pierwiastków charakterystycznych, które są nieistotnie (statystycznie) różne od zera. Pomocne tu będą następujące statystyki (por. S. Johansen [1988]):

$$\lambda_{trace}(r) = -T \sum_{i=r+1}^n \ln(1 - \lambda_i) \quad (2.2)$$

$$\lambda_{max}(r, r+1) = -T \ln(1 - \lambda_{r+1}) \quad (2.3)$$

gdzie:

λ_i - oszacowane wartości pierwiastków charakterystycznych (wartości własnych),

T - ilość dostępnych obserwacji.

Pierwsza statystyka testuje hipotezę zerową, że liczba różnych od siebie wektorów kointegrujących jest mniejsza lub równa r . Jeśli wszystkie pierwiastki są zerami, to $\lambda_{trace} = 0$. Im bardziej oddalone są od zera pierwiastki charakterystyczne, tym mniejsze jest $\ln(1 - \lambda_i)$ i tym większa statystyka λ_{trace} .

Druga statystyka testuje hipotezę zerową, że liczba wektorów kointegrujących wynosi r przeciwko hipotezie alternatywnej, że jest ich $r + 1$. Podobnie, jeśli oszacowana wartość pierwiastków charakterystycznych jest bliska zero, statystyka λ_{max} będzie mała. Tabela 1 pokazuje wartości krytyczne tych statystyk (uzyskane metodą badań symulacyjnych):

Tabela 1: Wartości krytyczne statystyki $\lambda_{\max}$ i λ_{trace}

$n-r$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
Model z nieograniczonym wyrazem wolnym				
$n-r$	$\lambda_{\max}$		λ_{trace}	
1	3.962	6.936	3.962	6.936
2	14.036	17.936	15.197	19.310
3	20.778	25.521	29.509	35.397
Model z wyrazem wolnym w wektorze kointegrującym				
$n-r$	$\lambda_{\max}$		λ_{trace}	
1	9.094	12.740	9.094	12.741
2	15.752	19.834	20.168	24.988
3	21.894	26.409	35.068	40.198

Źródło: W. Enders [1995], s. 420

W przypadku, gdy obliczona wartość którejś z wymienionych statystyk jest mniejsza od wartości krytycznej, nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Wartości większe od wartości krytycznych pozwalają na odrzucenie hipotezy zerowej na korzyść alternatywnej.

2.3. Wyraz wolny

W celu przetestowania hipotezy zerowej o obecności wyrazu wolnego w wektorze kointegrującym przeciwko hipotezie alternatywnej o nieograniczonym składniku A_0 (por pp. 1.3), należy estymować obie formy modelu. Oznaczamy uporządkowane pierwiastki charakterystyczne nieograniczonej macierzy π jako $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, a pierwiastki ograniczonej macierzy π jako $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$. Jeśli nieograniczona forma modelu posiada r niezerowych pierwiastków charakterystycznych, to statystyka:

$$-T \sum_{i=r+1}^n [\ln(1 - \lambda_i^*) - \ln(1 - \lambda_i)] \quad (2.4)$$

ma asymptotyczny rozkład χ^2 z $(n - r)$ stopniami swobody.

Jeśli obliczona wartość jest mniejsza od wartości krytycznej nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, wartości większe od wartości krytycznych powodują odrzucenie hipotezy zerowej na korzyść alternatywnej.

3. TESTOWANIE KOINTEGRACJI NA PRZYKŁADZIE SPRZEDAŻY, ZATRUDNIENIA I WYNAGRODZEŃ W ŁODZI

Procedura Johansena przedstawiona zostanie na przykładzie znajdowania ilości wektorów kointegrujących wśród zmiennych:

spr - przychody ze sprzedaży wyrobów i usług w sektorze prywatnym w Łodzi

(w tys. zł),

zpr - liczba pracujących w sektorze prywatnym w Łodzi (w osobach),

wnpr - przeciętne wynagrodzenia netto w sektorze prywatnym w Łodzi (w zł).

Dane mają postać szeregów czasowych o częstotliwości miesięcznej i obejmują okres od czerwca 1992 do września 1996 r. (52 obserwacje). Pochodzą z Biuletynu Urzędu Statystycznego w Łodzi: "Sytuacja społeczno-gospodarcza Łodzi".

Zmienne *spr*, *wnpr* zostały wyrażone w ujęciu realnym, w cenach stałych z września 1996 r. Zastosowane zostały tu odpowiednie ogólnopolskie deflatory cenowe: indeks cen produkcji przemysłowej (*spr*) oraz indeks cen dóbr konsumpcyjnych (*wnpr*).

3.1. Badanie rzędu integracji

Pierwszym etapem badań było ustalenie rzędu integracji zmiennych za pomocą testu Dickey'a-Fullera.

Zbiór hipotez dla zmiennej y_t ma postać:

$$H_0: y_t \sim I(1)$$

$$H_1: y_t \sim I(0)$$

Do zbadania rzędu integracji została zastosowana statystyka $DF = \frac{\gamma}{S(\gamma)}$

badająca istotność parametru γ w równaniu:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \gamma y_{t-1}$$

Statystyka DF przypomina statystykę t -Studenta, jednak jej rozkład nie jest standardowy. Wartości krytyczne tego testu można znaleźć np. w W. Enders [1995], s. 419.

Podstawiając pod y_t kolejno zmienną spr , zpr , $wnpr$, otrzymano następujące wartości statystyki DF : $DF_{spr} = -1.845$, $DF_{zpr} = -2.049$, $DF_{wnpr} = -4.093$

Wartość statystyki dla zmiennej $wnpr$ jest mniejsza od wartości krytycznych, nawet dla bardzo niskiego poziomu istotności ($\alpha=0.01$), zatem w tym przypadku należy odrzucić hipotezę zerową na korzyść alternatywnej, mówiącej o stacjonarności zmiennej. W pozostałych przypadkach wartości DF nie przekraczają wartości krytycznych na poziomie istotności $\alpha=0.1$, co skłaniałoby do przyjęcia hipotezy zerowej. Otrzymane wartości są jednak na tyle niskie, że niewielkie zwiększenie poziomu istotności pozwoli na odrzucenie hipotezy zerowej. Badanie funkcji autokorelacyjnej również nie przynosi jednoznacznego rozstrzygnięcia. Jeśli jednak zmienne te są łącznie stacjonarne, powinniśmy otrzymać potwierdzenie tego faktu w trakcie badania rzędu macierzy

π w modelu korekty błędem zbudowanym dla tych zmiennych. Jeśli macierz ta będzie się charakteryzowała pełnym rzędem, to, zgodnie z tym, co zostało powiedziane w p. 1.2, należy stwierdzić, że zmienne użyte w modelu są stacjonarne.

3.2. Badanie długości opóźnień

Do zbadania długości opóźnień posłużył test długości opóźnień opisany w p. 2.2. Badanie rozpoczęto z najdłuższym ze względu na liczbę stopni swobody opóźnieniem $k=12$. Następnie postawiono zespół hipotez:

H_0 : długość opóźnienia zmiennych wynosi 8

H_1 : długość opóźnień zmiennych wynosi 12

W celu przetestowania tego zespołu hipotez oszacowano parametry dwóch modeli w obrębie tej samej próby:

$$1. x_t = A_0 + \sum_{k=1}^{12} x_{t-k}$$

$$2. x_t = A_0 + \sum_{k=1}^8 x_{t-k}$$

gdzie $x_t = [spr_t \quad zpr_t \quad wnpr_t]'$

i obliczono wartość statystyki współczynnika wiarygodności:

$$LRS = (T - c)(\ln|\Sigma_8| - \ln|\Sigma_{12}|) = (40 - 37)(39.9198 - 28.3182) = 34.8047$$

Ponieważ obliczona wartość jest mniejsza od wartości krytycznych rozkładu χ^2 dla 36 stopni swobody ($\chi_{\alpha=0.1}^2 = 47.212$) nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Właściwe jest zatem testowanie mniejszej niż 8 długości opóźnień. W podobny sposób przeprowadzone zostały zatem kolejne testy, które wskazały na długość opóźnienia $k=1$, czyli model:

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} \quad (3.2)$$

gdzie:

$$x_t = \begin{bmatrix} spr_t & zpr_t & wnpr_t \end{bmatrix}'$$

3.3. Badanie rzędu kointegracji

Aby zbadać rząd kointegracji model (3.2) przekształcono do postaci:

$$\Delta x_t = A_0 + \pi x_{t-1} \quad (3.3)$$

Przy wyznaczaniu rzędu macierzy π wykorzystano fakt, że rząd macierzy jest równy ilości jej niezerowych pierwiastków charakterystycznych.

Dla uporządkowanych malejąco pierwiastków charakterystycznych obliczono wartości statystyk $\lambda_{\max}$ i λ_{trace} w celu sprawdzenia, które z nich nieistotnie różnią się od zera. Wyniki pokazuje tabela 2.

Tabela 2: Wartości statystyki $\lambda_{\max}$ i λ_{trace}

T=51	$\lambda_{\max}$	λ_{trace}
$\lambda_1=0.34417$	21.515	38.166
$\lambda_2=0.21958$	12.644	16.652
$\lambda_3=0.075573$	4.0076	4.0076

Źródło: Obliczenia własne

Zespół hipotez (por. p.2.2) i wartości krytyczne statystyk dla odpowiedniej liczby swobody podają tabele 3 i 4:

Tabela 3: Wartości krytyczne statystyki $\lambda_{\max}$

H_0	H_1	Wartości krytyczne statystyki $\lambda_{\max}$ dla $n-r$ stopni swobody		
		$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
$r=0$	$r=1$	18.697	20.778	25.521
$r=1$	$r=2$	12.099	14.036	17.936
$r=2$	$r=3$	2.816	3.962	6.936

Źródło: W. Enders [1995], s. 420

Tabela 4: Wartości krytyczne statystyki λ_{trace}

H_0	H_1	Wartości krytyczne statystyki λ_{trace} dla $n-r$ stopni swobody		
		$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
$r=0$	$r \geq 1$	26.791	29.509	35.397
$r \leq 1$	$r \geq 2$	13.338	15.197	19.310
$r \leq 2$	$r=3$	2.816	3.962	6.936

Źródło: W. Enders [1995], s. 420

Testowanie ilości wektorów kointegrujących jest możliwe dzięki porównaniu wartości statystyk z tabeli 2 z ich wartościami krytycznymi podanymi w tabelach 3 i 4.

Hipoteza o braku związku kointegrującego ($r=0$) może być odrzucona dla $\alpha=0.05$ w przypadku statystyki $\lambda_{\max}$ i $\alpha=0.01$ w przypadku statystyki λ_{trace} .

Hipotezę o występowaniu jednego tylko wektora kointegrującego odrzucamy na poziomie istotności $\alpha=0.1$ dla $\lambda_{\max}$ i $\alpha=0.05$ dla λ_{trace} .

Weryfikacja zespołu hipotez testujących występowanie dwóch wektorów kointegrujących może być odrzucona w przypadku obu statystyk na poziomie istotności $\alpha=0.05$.

Na poziomie istotności $\alpha=0.1$ możemy zatem stwierdzić istnienie trzech różnych od zera pierwiastków charakterystycznych. Wniosek ten świadczy o stacjonarności zmiennych (macierz π jest pełnego rzędu) i tym samym rozwiewa wątpliwości postawione przy badaniu integracji zmiennych.

3.4. Wyraz wolny

Badanie macierzy π z modelu postaci (3.3) jest tożsame z przyjęciem założenia o braku wyrazu wolnego w wektorze kointegrującym. Następstwa tego faktu były dyskutowane w punkcie 1.3: szacowanie parametrów modelu (3.3), tzn. modelu z tzw. nieograniczonym wyrazem wolnym, jest tożsame z przyjęciem założenia o występowaniu trendu deterministycznego w procesach generujących przynajmniej niektóre ze zmiennych. Procedura Johansena pozwala przetestować alternatywną postać modelu; postać która powoduje włączenie wyrazu wolnego w wektor kointegrujący (mamy wtedy do czynienia ze zmiennymi nie wykazującymi trendu deterministycznego) tak jak to pokazano w punkcie 1.3 - model (1.5). W tym celu należy oszacować pierwiastki charakterystyczne obu postaci, tzn. (3.3) i (1.5), i obliczyć statystykę:

$$-T \sum_{i=r+1}^n [\ln(1 - \lambda_i^*) - \ln(1 - \lambda_i)] \quad (2.4)$$

gdzie r oznacza liczbę niezerowych pierwiastków charakterystycznych modelu z nieograniczonym wyrazem wolnym (por. p. 2.4.).

Badanie to ma tym większe znaczenie, że stwierdzenie w poprzednim punkcie stacjonarności (w sensie wariancji - por. M. Piłatowska [1995], s. 89)

zmiennych kłóci się z obserwacją przebiegu niektórych z nich. W przypadku bowiem zmiennych zpr oraz spr obserwujemy ich powolny wzrost w okresie próby. Fakt występowania trendu deterministycznego w tych zmiennych byłby znakomitą uzupełnieniem zbadania procesów generujących te zmienne. Ponieważ sumowanie we wzorze (2.4) przebiega od liczby pierwiastków nieistotnie różnych od zera, przyjmijmy, że ich ilość w modelu (3.2) wynosi $r=1$ (w tym wypadku mogliśmy odrzucić hipotezę zerową: $r=1$, dopiero na poziomie istotności $\alpha=0.1$).

Do obliczenia statystyki (2.4) należy oszacować pierwiastki charakterystyczne ograniczonej formy macierzy π . Są one następujące: $\lambda_1^*=0.37281$, $\lambda_2^*=0.16779$, $\lambda_3^*=0.00815$.

Statystyka (2.4) wynosi:

$$-T([\ln(1-\lambda_2^*) - \ln(1-\lambda_2)] + [\ln(1-\lambda_3^*) - \ln(1-\lambda_3)]) = -51([\ln(1-0.21958) - \ln(1-0.16779)] + [\ln(1-0.075573) - \ln(1-0.00815)]) = 6.86717$$

Wartość rozkładu χ^2 dla $(n-r)=(3-1)=2$ stopni swobody wynosi $\chi^2=4.605$ dla $\alpha=0.1$, $\chi^2=5.991$ dla $\alpha=0.05$ oraz $\chi^2=9.210$ dla $\alpha=0.01$. Na poziomie istotności $\alpha=0.05$ możemy odrzucić hipotezę zerową mówiącą o występowaniu wyrazu wolnego w wektorze kointegrującym, na korzyść alternatywnej, o nieograniczonym wyrazie wolnym.

4. PODSUMOWANIE

Celem pracy było zaprezentowanie alternatywnej metodologii badania kointegracji. Skoncentrowano się przede wszystkim na znajdowaniu ilości, a nie "jakości" wektorów kointegrujących. Rozmyślnie pominięto tu wyodrębnianie i interpretację mechanizmu korekty błędem, bowiem ta analiza może być z powodzeniem przeprowadzana na bazie algorytmu Engle'a i Grangera. Algorytm

ten jednocześnie nie formułuje przepisu na znajdowanie ilości związków kointegrujących z czym doskonale radzi sobie procedura Johansena. Pokazany przykład empiryczny daje asumpt do pokazania jednej jeszcze zalety wspomnianej procedury. Zbadanie, że macierz π jest pełnego rzędu świadczy o stacjonarności zmiennych. Możliwość takiego wnioskowania jest znakomitym uzupełnieniem analizy integracyjnej, która, jak zbadano (por M. Piłatowska [1995], s.89), daje często niejednoznaczne, lub nawet sprzeczne ze sobą wyniki.

Testowanie występowania wyrazu wolnego w wektorze kointegrującym jest dodatkową zaletą procedury Johansena. Wiadomo, że niestacjonarność zmiennej wywołana trendem stochastycznym oznacza, że to czynniki losowe (a nie kontrolowane) są podstawowym sprawcą kształtowania się zmiennej. Znalezienie, że w procesach generujących zmienne występuje długookresowa tendencja (trend deterministyczny), jest optymistycznym wnioskiem dla polityki gospodarczej państwa lub regionu.

Przedstawiona procedura badania wektorów kointegrujących na podstawie modeli VAR ma dwa aspekty zastosowań. Po pierwsze zbudowanie modelu wektorowo- autoregresyjnego może posłużyć li jedynie do zbadania ilości związków kointegracyjnych pomiędzy zmiennymi, które, w następnym etapie badań, mogą posłużyć do budowy innego modelu, np. strukturalnego. W tym wypadku model VAR jest jedynie narzędziem do zbadania kointegracji, a nie przedmiotem badań. Często jednak budowa tych modeli (VAR) jest celem analizy ekonometrycznej, a nie jedynie jednym z jej etapów. Sytuacja taka występuje często tam, gdzie model ekonometryczny ma posłużyć do celów progностycznych. Ze względu na obecność jedynie opóźnionych zmiennych jako zmiennych objaśniających w modelach VAR, są one znakomitym narzędziem prognozowania. Prognozy zaś będą tym lepsze im lepiej wyspecyfikowany jest model. Praca ta zawiera wszystkie niezbędne testy towarzyszące kolejnym etapom

budowy modelu i tym samym jest dobrym przewodnikiem dla badaczy, którzy analizę kointegracyjną lub proces budowania prognoz chcą oprzeć na modelach wektorowo-autoregresyjnych.

Bibliografia

W.W. Charemza, D.F. Deadman [1992], *New Directions in Econometric Practise*, Edward Elgar, Hants

D.A. Dickey, W.A. Fuller [1981], *Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root*, *Econometrica*, vol 49, s. 1057-1072

W. Enders [1995], *Applied Econometric Time Series*, John Wiley & Sons, Inc., New York

R. F. Engle, C.W.J. Granger [1987], *Co-integration and error correction: representation, estimation and testing*, *Econometrica*, vol. 55, s. 251-276

S. Johansen [1988], *Statistical Analysis of Cointegration Vectors*, *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 12, s. 231-54

M. Majsterek [1996], *Analiza Kointegracyjna Zjawisk Inflacyjnych w Gospodarce Polskiej*, rozprawa doktorska, Łódź

M. Piłatowska [1995], *Identyfikacja procesów stochastycznych typu random walk*, Materiały na IV Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, Katedra Ekonometrii i Statystyki UMK, Toruń

