

# RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGR ALEKSANDRY ZAKRZEWSKIEJ

MACIEJ BORODZIK

**Wstęp.** Praca mgr Aleksandry Zakrzewskiej nosi tytuł „Skoki liczb Milnora deformacji liniowych osobliwości krzywych”. Dotyczy ona następującego problemu. Rozpatrujemy rodzinę wielomianów  $f_s : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , gdzie  $s$  jest parametrem (zazwyczaj  $s$  należy do dysku jednostkowego), takich że dla wszystkich  $s$  krzywa  $f_s^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^2$  ma osobliwość izolowaną w  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Patrzymy na liczbę Milnora  $\mu_s$  jako funkcję parametru deformacji. Dla generycznego zbioru parametrów  $\mu_s$  jest stała (można ją oznaczyć przez  $\mu_{gen}$ ). Pytamy o wielkość  $\lambda(f_s) = \mu_0 - \mu_s$ .

Główne pytanie, jakie jest postawione w pracy dotyczy tego, czy dla ustalonego kielka osobliwości  $f_0$  i zadanej liczby  $\theta$  istnieje deformacja  $f_s$  taka, że  $\lambda(f_s) = \theta$ . Inaczej mówiąc, pytamy o wyznaczenie zbioru możliwych wartości  $\lambda$  przy ustalonym  $f_0$ , a zwłaszcza o wyznaczenie minimalnego  $\lambda > 0$ . Sabir Gusein-Zade w 1993 roku podał przykłady osobliwości dla których minimalne dodatnie  $\lambda$  jest większe od jedności.

Już na pierwszy rzut oka widać, że odpowiedź może zależeć od typu analitycznego osobliwości  $f_0$ , a nie tylko od jej typu topologicznego. Istotnie, samo pytanie o rodzinę osobliwości przyległych do  $f_0$  zależy od typu analitycznego osobliwości.

Uproszczeniem problemu jest ograniczenie się do badania deformacji liniowych, to znaczy deformacji typu  $f_s = f_0 + sg$  dla pewnego wielomianu  $g$ . Wynik Alberich–Roé z 2005 roku pokazuje, że przyległość liniowa jest wyznaczona kombinatorycznie przez diagram Enriquesa osobliwości  $f_0$ . W szczególności, przy ograniczeniu się do deformacji liniowych, zbiór możliwych skoków  $\lambda$  zależy od topologicznego typu osobliwości.

Autorka w pracy wyznacza minimalne niezerowe  $\lambda$  dla  $f_0$  będącego osobliwością jednorodną i dla deformacji liniowych  $f_s = f_0 + sg$ . Głównym wynikiem, na którym się opiera, jest wspomniana wyżej praca Marii Alberich i Joaquina Roé’go.

Druga część pracy mówi o zachowaniu jakościowym skoku deformacji przy rozdmuchaniu. Uzyskana nierówność (Wniosek 5.8) jest interesującym wkładem jakościowym do badania skoków deformacji.

**Tematyka badań i wynik.** Jakkolwiek tematyka badań wygląda na bardzo niszową, powiązanie jej z ostatnimi pracami Fernandez de Bobadilli, Pe Pereiry i Popescu–Pampu daje szanse na to, że praca będzie zauważona. Szanse na to rosną, w miarę jak praca dotyka bardziej ogólnych własności skoku liczby Milnora, jak na przykład zachowanie przy rozdmuchaniu.

Pierwszy główny wynik pracy zawiera się w Lemacie 4.12, w którym autorka dowodzi górnego oszacowania na liczbę Milnora osobliwości przyległej do osobliwości jednorodnej. Dowód zajmuje 6 stron (z czego dwie strony zajmują rysunki wyjaśniające oznaczenia), przy czym większość zajmują oszacowania na wagi w diagramie Enriquesa. W rozdziale piątym pokazano, w jaki sposób można uogólnić Lemat 4.12

*M. Borodziuk*

na przypadek osobliwości quasijednorodnych. Obliczenia i ostateczne wyniki nie zostały podane w tym przypadku, autorka jedynie pokazuje ogólny pomysł na podejście do problemu.

Drugim głównym wynikiem jest nierówność we Wniosku 5.8, omawiająca zachowanie skoku Milnora przy rozdmuchaniu. Nierówność jest podana w jedną stronę.

Wartościową część pracy stanowi rozdział trzeci, podający dokładne dowody faktów znanych ekspertom.

**Uwagi.** Praca ma 42 strony podzielone na 5 rozdziałów, z których ostatni został dodany w nowej wersji doktoratu. Jest on najmniej spójny, składa się z dwóch niezależnych części. Praca napisana jest bardzo starannie.

Na stronach 4 i 5 autorka przypomina różnicę pomiędzy typem topologicznym a typem analitycznym osobliwości. Jako przykład niezmiennika rozróżniającego typ analityczny pokazuje skok liczby Milnora. Jest to formalnie poprawne, niemniej niebezpiecznie bliskie definicji typu *idem per idem*. Warto było wspomnieć chociażby o liczbie Tyurina.

Autorka używa oznaczenia  $\nu(R_D)$  na wielkość, która jest po prostu krotnością punktu osobliwego. Prawdopodobnie ta drobna w sumie niezręczność prowadzi do tego, że autorka nie zauważa dwóch faktów. Mianowicie:

- Twierdzenie 5.7, wiążące liczby Milnora po rozdmuchaniu z liczbą Milnora przed rozdmuchaniem jest wynikiem klasycznym. Osobiście, kiedy stosuję taki wynik, najczęściej odwołuję się do prac Orevkova i Zajdenberga, jakkolwiek podobny fakt można znaleźć w większości podręczników z teorii osobliwości. Nie ma więc potrzeby dowodzić tego rezultatu.
- Nierówność we Wniosku 5.8 nie ma szans być równością w ogólności. Ustalmy  $m \geq 2$  i dla  $k$  względnie pierwszego z  $m$  oznaczmy przez  $a_k$  skok liniowy liczby Milnora dla osobliwości kwazijednorodnej  $(m; k)$ . Wiadomo, że jeśli  $k-1$  jest względnie pierwsze z  $m$ , zachodzi  $a_k \leq m-1$ , istotnie, deformacja  $x^k + sx^{k-1} + y^m$  ma skok liczby Milnora równy  $m-1$ . Z drugiej strony nierówność we Wniosku 5.8 mówi, że  $a_k \leq a_{k-m} + m-1$ . Gdyby zachodziła równość  $a_k = a_{k-m} + m-1$ , mielibyśmy dla  $k > 2m$   $a_k \geq 2(m-1)$ , sprzeczne z nierównością  $a_k \leq m-1$ .

Z punktu widzenia recenzenta, pokazanie różnicy między zachowaniem przy rozdmuchaniu między skokiem liczby Milnora a liniowym skokiem liczby Milnora jest problemem dość interesującym, do którego być może właściwym językiem byłaby praca Fernandez de Bobadillo, Pe Pereira i Popescu-Pampu.

**Konkluzja.** Praca doktorska mgr Aleksandry Zakrzewskiej spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania dotyczące prac doktorskich. Wnoszę o dopuszczenie mgr Aleksandry Zakrzewskiej do dalszych etapów postępowania o przyznanie stopnia doktora.

Maciej Borodzik

