· ROZPRAWY HABILITACYJNE UNIWERSYTETU ŁÓDZKIEGO ·

Piotr Łukowski

PARADOKSY

WYDAWNICTWO UNIWERSYTETU ŁÓDZKIEGO • ŁÓDŹ 2006

RECENZENT
Janusz Czelakowski

REDAKTOR WYDAWNICTWA UŁ
Elżbieta Marciszewska-Kowalczyk

REDAKTOR TECHNICZNY
Wiesława Łubiech

SKŁAD KOMPUTEROWY
Małgorzata Boczkowska

KOREKTORZY
Danuta Bąk, Bogusława Kwiatkowska

OKŁADKĘ PROJEKTOWAŁ
Łukasz Łukowski

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
2006
Wydanie I. Nakład 100 + 50 egz.
Ark. druk. 33,5. Papier kl. III, 80 g, 70 × 100
Przyjęto do Wydawnictwa UŁ 27.10.2005 r.
Zam. 38/3952/2006. Cena zł 35,–
Drukarnia Uniwersytetu Łódzkiego
90-236 Łódź, ul. Pomorska 143

ISBN 83-7171-954-X

Synowi mojemu Łukaszowi

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Z odczuciem paradoksalności jakiejś sytuacji lub czyjejś wypowiedzi mamy do czynienia na co dzień. Niejednokrotnie stwierdzamy, że wnioski wynikające z takich to a takich przesłanek są paradoksalne. Dana sytuacja czy wypowiedź okazuje się dla nas paradoksalna wówczas, gdy jest w jakiś istotny sposób niezgodna z naszymi dobrze uzasadnionymi przekonaniami i wynikającymi z nich oczekiwaniami. Oznacza to, że nie zawsze jesteśmy skłonni stwierdzić paradoksalność jakiegoś zjawiska, czy to językowej, czy pozajęzykowej natury. Uczynimy to dopiero wówczas, gdy zaobserwowane zjawisko okaże się, w naszym najgłębszym przekonaniu, niezgodne z czymś co wynika z dobrze przemyślanego, logicznego, a więc niesprzecznego poglądu. Ten niesprzeczny pogląd, czyli taki zbiór przekonań, z którego nie wynika żadna para zdań: *A* i *nie-A*; jest dla nas punktem odniesienia w ocenie zachodzących wokół nas zjawisk. Pojawienie się sprzeczności tam, gdzie się jej nie spodziewamy staje się dla nas źródłem odczucia paradoksalności. Sprzeczności zaś nie spodziewamy się wszędzie tam, gdzie w naszym najgłębszym przekonaniu pozostajemy w zgodzie z czymś, co określamy mianem logiczności. Jeśli więc, mimo naszych starań, które wyrażają się w przestrzeganiu reguł i praw logicznego myślenia, natrafiamy na sprzeczność, to w takiej właśnie sytuacji jesteśmy skłonni stwierdzić, iż mamy do czynienia z paradoksem. Dojdziemy zatem do wniosku, że wygrana, uchodzącej za słabszą, drużyny piłkarskiej, grającej w osłabionym składzie i na stadionie przeciwnika jest jakimś paradoksem. Paradoksem będzie również wygrana w demokratycznych wyborach właśnie tego polityka, który na krótko przed wyborami został przyłapany na ewidentnych, dobrze udokumentowanych, a co najważniejsze, ściganych prawem kłamstwach. Nas jednak termin „paradoks" będzie interesował w takim znaczeniu, które ma wyłącznie językowe odniesienie. Z tego też powodu, pominiemy wszelką możliwą potocznie pojmowaną paradoksalność sytuacji i ograniczymy nasze rozważania do paradoksalnych wypowiedzi, tez, poglądów. Interesujące dla nas będą zatem paradoksalne wypowiedzi, poglądy, wnioski itd. Nie jest niczym zaskakującym fakt, iż od tak rozumianych paradoksów nie są wolne wyniki badań naukowych, w tym również wyniki, uchodzących za ścisłe, nauk przyrodniczych. W fizyce znane są: paradoks kota Schrödingera, paradoks bliźniąt, paradoks Einsteina-Podolsky'ego-Rosena, czy wreszcie sam dualizm korpuskularno-falowy; w kosmologii zaś, np. paradoks Olbersa. Również w naukach społecznych obserwuje się pewne paradoksalne zależności, np. grube kłamstwa są łatwiej akceptowalne przez duże skupiska ludzi, niż przez mniej liczne grupy. Nawet ścisła, i to w stopniu maksymalnym, matematyka jest pełna paradoksalnych wyników.

Krzysztof Szymanek w swojej publikacji *Sztuka argumentacji. Słownik terminologiczny* podaje cztery następujące rozumienia słowa „paradoks"[1]: „Paradoks (gr. παραδοξος, *paradoksos* – sprzeczny z powszechnym mniemaniem) 1. Potocznie: twierdzenie, pogląd niewiarygodne, zaskakujące; również rozumowanie prowadzące do takich wniosków [...]. 2. W ujęciu Arystotelesa – twierdzenie, pogląd niezgodne z mniemaniem danej grupy ludzi (np. publiczności przysłuchującej się dyskusji). Tak więc wykazanie, że twierdzenie jest paradoksalne, wymaga sprawdzenia poglądów danej grupy ludzi. Ten sam pogląd może być paradoksem dla jednej grupy ludzi, a nie być nim dla innej. 3. Antynomia. 4. (*znaczenie retoryczne*) Zaskakujące, często w warstwie literalnej wewnętrznie sprzeczne sformułowanie, z którego dopiero właściwa interpretacja znaczeń, przenośni, idiomów itp. wydobywa – często uderzająco trafną, intrygującą – ogólną myśl, obserwację, hasło itp." Ponieważ, ciekawa skądinąd, kwestia zabiegów retorycznych wykracza poza to rozumienie paradoksalności, które jest tematem niniejszej książki, skupimy się na trzech pierwszych postaciach paradoksu.

Dotychczas rozważaliśmy przypadki odczucia paradoksalności, które byłyby zgodne z pierwszym i drugim, wskazanym przez Szymanka, znaczeniem. W istocie, wydaje się, że odczucie paradoksalności nie jest czymś, co musi dotyczyć, w jakiejś konkretnej kwestii, każdego człowieka. Przecież wiedza, doświadczenie, światopogląd, pragnienia i oczekiwania są, w przypadku każdego człowieka inne. Zatem, również inna musi być ocena tego samego zjawiska dokonana przez różnych ludzi. Nic więc dziwnego, że jeden i ten sam pogląd będzie dla jednej osoby paradoksalnym, a dla innej czymś zupełnie zrozumiałym. Aby jednak mogło tak być, pogląd ten powinien spełniać warunek logiczności, czyli niesprzeczności. W przeciwnym razie, odczucie paradoksalności powinno być udziałem każdego logicznie myślącego człowieka, który ma kontakt z danym, prowadzącym do sprzeczności, poglądem. Zatem, powinna być wykluczona możliwość wyprowadzenia sprzeczności ze zdań konstytuujących ten pogląd, który u jednych wzbudza odczucie paradoksalności, u innych zaś, nie. Niestety, założenie to jest daleko posuniętą idealizacją. Należy przecież pamiętać, że przekonania znacznie bardziej podlegają woli, niż rozumowi. Oznacza to, że jeśli ktoś chce zaakceptować dany pogląd, to i tak go zaakceptuje, godząc się nawet z odczuciem nielogiczności. W takiej sytuacji wrażenie paradoksalności zostanie „przezwyciężone" do tego stopnia, że nie

[1] Szymanek, [2001], s. 222.

będzie uznane przez tego człowieka za kłopotliwe – ktoś, kto bardzo chce coś sobie wytłumaczyć i tak to uczyni. Ponieważ jednak, autor reprezentuje logiczny punkt widzenia, musimy odrzucić ten „życiowy" aspekt i przyjąć wspomnianą idealizację. Oznacza to, że z naszego punktu widzenia, jakiś pogląd może być paradoksalny dla kogoś i nieparadoksalny dla kogoś innego, tylko wówczas, gdy jest niesprzeczny. Każdy zaś pogląd, który prowadzi do zaskakującej, bo niespodziewanej sprzeczności musi być uznany za paradoksalny. Podejście to wyłania dwie podstawowe klasy paradoksów: pierwszą stanowią niesprzeczne poglądy, które okazują się jednak być niezgodne z oczekiwaniami jakiejś grupy ludzi; oraz drugą poglądy niespodziewanie prowadzące do sprzeczności. Naturalnie, drugą grupę stanowią poglądy sprzeczne. Okazuje się, że do grupy drugiej należą paradoksy w trzecim, wskazanym przez Szymanka, sensie, czyli antynomie. Co więcej, rozumienie antynomialności przyjęte przez Szymanka wyraźnie wskazuje na to, iż cała nasza druga klasa paradoksów to właśnie antynomie[2]: Antynomia (gr. αντινομια, *antinomia*; *anti* – przeciw, νομοζ, *nomos* – prawo) (*znaczenie logiczne*) rozumowanie, w którym pozostając w zgodzie z wszelkimi znanymi wymogami poprawności uzasadnia się parę zdań sprzecznych. Wykrycie antynomii prowadzi zwykle do prób jej „rozwiązania", to znaczy sformułowania takich nie znanych wcześniej warunków poprawności rozumowań, po których uwzględnieniu dane rozumowanie staje się niepoprawne". Istnieje jednak inne, węższe rozumienie antynomii, zgodnie z którym, antynomialne jest każde takie rozumowanie, które prowadzi do uzasadnienia równoważności dwóch zdań sprzecznych: *A wtedy i tylko wtedy, gdy nie-A*. Z takiego punktu widzenia, rozumowanie prowadzące od jakiegoś, uprzednio zaakceptowanego, zdania *A* do zdania *nie-A* nie musi być antynomialne, niewątpliwie jest natomiast „zwykłym" paradoksem. W naszej książce, słowo „antynomia" jest wzięte w węższym znaczeniu, zaś „paradoks" jest terminem maksymalnie szerokim, w szczególności więc, zawierającym antynomie oraz paradoksy obu wskazanych przez nas klas. Co więcej, ze względów stylistycznych, słowo „paradoks" jest przez nas stosowane zamiennie ze słowem „dylemat", co jest zgodne z potocznym rozumieniem tego drugiego, niezgodne zaś z jego ścisłym logicznym rozumieniem, jako wnioskowania z tzw. trzech przesłanek, np.: z $(p \vee q)$, $(p \rightarrow r)$, $(q \rightarrow r)$ wynika r.

Pewną podklasę szeroko rozumianych paradoksów stanowią sofizmaty[3]: „Sofizmat (gr. σοφισμα, *sophisma* – fałszywy wniosek, wykręt) termin użyty przez Arystotelesa na określenie argumentu w istocie niepoprawnego, lecz pozornie poprawnego. W literaturze utarło się nazywać sofizmatem błędny argument przedstawiany z intencją wprowadzenia kogoś w błąd". Przyjęte w naszej książce rozumienie słowa „sofizmat" pokrywa się z tym drugim

[2] Szymanek, [2001], s. 30.
[3] Szymanek, [2001], s. 295.

rozumieniem, zakładającym intencję wprowadzenia odbiorcy w błąd. Pokrewnym wobec sofizmatu terminem jest „paralogizm”[4]: „Paralogizm (gr. παραλογισμοζ, *paralogismos* – fałszywy wniosek) rozumowanie zawierające błąd, prezentowane jednak bez świadomości tego błędu, albo bez zamiaru wprowadzenia kogoś w błąd: dla żartu, w celach dydaktycznych itp.” Tak też będziemy rozumieli słowo „paralogizm”. Widać wyraźnie, że formalne odróżnienie sofizmatu od paralogizmu, jak również samo stwierdzenie, że dana argumentacja jest, lub nie jest, sofizmatem lub paralogizmem nie jest możliwe. Kluczowym elementem podobnego rozstrzygnięcia musi być przecież intencja osoby prezentującej dany paradoks. Oznacza to, że powinno być dość trudnym zadaniem trafne zaliczenie danego paradoksu do sofizmatów lub paralogizmów, gdyż koniecznym do uwzględnienia elementem jest w tym przypadku intencja oraz świadomość osoby głoszącej dany paradoks. Okazuje się jednak, że w praktyce jest to możliwe i to bez brania pod uwagę osoby prezentującej dane paradoksalne rozumowanie. Pewne paradoksy są bowiem na tyle proste i na tyle dobrze rozpoznane, że jedynym celem ich głoszenia może być, albo żart, albo jakiś cel dydaktyczny. Z tego punktu widzenia, wszystkie tego typu paradoksy są paralogizmami. Można jednak, w sposób, rzecz jasna, całkowicie subiektywny, uznać za paralogizmy również i te paradoksy, które są wciąż żywo dyskutowane, mimo iż można je rozwiązać w prosty sposób. Naturalnie, wartość tych paradoksów jest wątpliwa, a mimo to są głoszone z całą powagą należną poważnym logicznym problemom. Trudno jest jednak przypuszczać, że analizujący je logicy postępują z pełną premedytacją. Znacznie bezpieczniej jest przyjąć, iż czynią to bez świadomości możliwości prostego uporania się z daną kwestią. Stosując to właśnie kryterium należy raczej przypuszczać, iż dość dobrze znany paradoks Newcomba oraz paradoks Fitcha są niczym innym, jak współczesnymi paralogizmami[5]. Ponieważ, ani sofizmaty, ani paralogizmy nie mogą być traktowane jako poważne problemy natury logicznej, matematycznej, filozoficznej czy teologicznej, zostały one przez nas zaliczone do wstępnej grupy paradoksów, omówionych w rozdziale nienumerowanym, co oznacza, iż klasa sofizmatów i paralogizmów nie mieści się w ramach, przyjętego w tej książce, podziału paradoksów.

Możliwy jest bowiem taki podział paradoksów, który uwzględniałby istotę danego problemu, najlepiej ujawniającą się w trafnym rozwiązaniu. Wypracowanie takiego właśnie podziału stało się pierwszym, z dwóch celów niniejszej książki. Przyjęte w ten sposób przez nas kryterium klasyfikacji wydaje się być dość dobrze uzasadnione z metodologicznego punktu widzenia. Przecież jedynie dotarcie do sedna paradoksu może być gwarancją trafnego, a nie

[4] Szymanek, [2001], s. 224.

[5] Paradoks Fitcha już od pewnego czasu jest w literaturze logicznej określany mianem paralogizmu, dla przykładu patrz Lindström [1996].

pozornego, rozwiązania danego dylematu. Z naszego punktu widzenia, każdy inny podział wydaje się bazować na powierzchownym rozpoznaniu problemu wyrażonego w danej paradoksalnej argumentacji. I tak, jeśli zaakceptowalibyśmy któryś z tradycyjnych podziałów, wtedy powinniśmy przyjąć takie kategorie, jak np.: *a)* paradoksy Zenona z Elei, *b)* paradoksy racjonalnego działania, *c)* paradoksy racjonalnych przekonań, *d)* paradoksy teorii mnogości oraz *e)* paradoksy prawdziwości[6]. Wówczas jednak, musiałoby się zdarzyć tak, że z jednej strony, dwa paradoksy wynikające np. z popełnienia tego samego rodzaju błędu, jakim jest wieloznaczność, powinny zostać zaliczone do dwóch różnych kategorii, z drugiej zaś strony, w jednej kategorii znalazłyby się bardzo różne w swej istocie paradoksy, np.: jakiś paradoks wynikający z błędu wieloznaczności, jakiś paradoks ze swej natury nie posiadający rozwiązania, oraz paradoks będący skutkiem samozwrotnej konstrukcji myślowej. Należy podkreślić, że tradycyjnie, paradoksy klasyfikuje się właśnie ze względu na ich „zewnętrzną" postać. Tym samym, bardzo często kryterium podziału nie dotyka w ogóle sedna problemów kryjących się za paradoksalnymi argumentacjami. Z przyjętej przez nas perspektywy, kierowanie się w klasyfikacji paradoksów, powierzchowną treścią dylematu przy jednoczesnym pominięciu jego sedna jest zabiegiem nieuzasadnionym, który może z łatwością wprowadzać w błąd – istota analizowanego z takiej perspektywy problemu może pozostać nierozpoznaną. Z podobnego powodu odrzuciliśmy podział na paradoksy semantyczne, a więc te, związane z językiem, znaczeniem, odniesieniem, oraz logiczne, czyli głównie teorio-mnogościowe. Podział ten okazuje się być niezbyt przydatny, gdyż jako dość powierzchowny, nie dociera do sedna problemów kryjących się za paradoksalnymi argumentacjami. Można rzec, iż podział na paradoksy semantyczne i logiczne jest zbyt formalny, aby mógł uporządkować zbiór paradoksów. Ponadto, nie obejmuje większości analizowanych w tej książce problemów.

Wydaje się więc, iż przyjęte przez nas kryterium podziału dylematów ma swoje głębokie uzasadnienie. Co więcej, mimo swojej naturalności, stanowi pewne *novum* wśród publikacji poświęconych paradoksom.

Omówienie kolejnych rozdziałów zacznijmy od powtórzenia, iż rozdział nienumerowany znajduje się poza przyjętą przez nas klasyfikacją i służy jedynie temu, aby znane, historyczne już przykłady prostych, a nawet banalnych paradoksów nie utożsamiać z wciąż żywymi problemami natury logicznej czy filozoficznej. Oznacza to, że każdy z sofizmatów i paralogizmów należy do którejś z pozostałych czterech grup przyjętego przez nas podziału.

Ponieważ o rozwiązaniu problemu można mówić dopiero wówczas, gdy dysponujemy zarówno językiem umożliwiającym formułowanie zdań, jak

---

[6] Patrz Sainsbury, [1988].

i logiką ustalającą reguły rządzące argumentacją, przyjęcie zadeklarowanego przez nas kryterium podziału paradoksów oznacza, że pierwszy dwudzielny podział winien uwzględniać to, jaki język i jaka logika mogą stanowić podstawę proponowanych rozwiązań. Z tej perspektywy, wydaje się zasadne, aby odróżnić paradoksy dające się sformułować i rozwiązać w języku naturalnym, formalnym, czy mieszanym, na gruncie logiki klasycznej, od tych paradoksów, które chociaż dają się wysłowić w przynajmniej jednym z tych języków to, mimo wszystko, ich rozwiązanie nie jest możliwe na gruncie logiki klasycznej. Te niemożliwe do „klasycznego" rozwiązania dylematy zostały nazwane paradoksami ontologicznymi, gdyż ich poprawne rozwiązanie wymaga struktur myślowych, które byłyby różne od tych proponowanych przez klasyczną matematykę i klasyczną logikę. Pojęcie zbioru tak bardzo podstawowe dla dominujących w filozofii europejskiej ontologii, najwyraźniej nie powinno mieć w nich jakiegokolwiek zastosowania. Paradoksy, zwane tu ontologicznymi, niejako, rozsadzają struktury naszego filozoficznego, jak również tego zwykłego, codziennego myślenia, pokazując nietrafność budowania ontologii opartej na pojęciu zbioru typowego dla klasycznej matematyki. Ponadto, paradoksy te ujawniają istotną i fundamentalną niezgodność, z jednej strony, języka i logiki, którymi operujemy, z drugiej zaś, świata realnego. Jest więc czymś zrozumiałym, iż ranga tych paradoksów jest wysoka i znacznie górują one nad wszystkimi pozostałymi problemami logicznymi. Omówienie tych wyjątkowo ważnych dylematów, jak również sformułowanie wniosków wynikających z przeprowadzonych analiz zajmuje najdłuższy w tej książce rozdział czwarty i zarazem ostatni. Drugim celem niniejszej publikacji jest ujawnienie i podkreślenie znaczenia paradoksów ontologicznych, jak również dowiedzenie niesprowadzalności problemów przez nie wyrażonych, do naszego języka i naszych matematycznych struktur myślowych. Paradoksy ontologiczne wydają się należeć do innego, niestety, w pewnym istotnym sensie, niedostępnego dla nas, świata. Swoistym paradoksem jest to, iż ten inny świat jest światem realnym.

Wszystkie nieontologiczne paradoksy są dylematami należącymi do naszego, nierealnego, sztucznego, bo pojmowanego w matematyczny sposób, świata. Są to właśnie te problemy, które, w opinii Quine'a, pojawiają się jedynie tam, gdzie jest precyzja, teoria mnogości i semantyka. Naszym zdaniem, logika klasyczna stanowi wystarczającą podstawę dla przeprowadzania analizy tych paradoksów oraz ich ewentualnego rozwiązywania, o ile takie rozwiązanie w ogóle może istnieć. Jeśli więc paradoksy te mają rozwiązanie, to rozwiązanie to daje się przeprowadzić na gruncie logiki klasycznej. Można zatem przyjąć, że nasze podejście do tych wszystkich paradoksów jest swoistą pochwałą logiki klasycznej – jest ona bowiem uznana za właściwą bazę dla wszystkich tych problemów, które nie wykraczają poza zmatematyzowany obraz świata. Paradoksy tej klasy dają się podzielić na trzy grupy, naturalnie, ze względu na posiadane, lub nie, rozwiązanie.

I tak, w rozdziale pierwszym znalazły się wszystkie te dylematy, które z natury rzeczy nie mają rozwiązania[7] – nie mają go, gdyż nie mogą go mieć. I to właśnie jest ich istotą. Odczucie paradoksalności jest w ich przypadku skutkiem wyłącznie braku dostosowania naszej wiedzy, głównie matematycznej, oraz wynikającej z niej naszej intuicji, do problemów będących istotą tych paradoksów. Jedyną metodą na zniesienie odczucia paradoksalności jest, w ich przypadku, rozwój naszej wiedzy oraz jej popularyzacja, co powinno doprowadzić do wykształcenia w nas takiej intuicji, która zapewniłaby uznanie najnowszych odkryć nauki za nieparadoksalne. Naturalnie, w rozdziale tym znalazły się również i te paradoksy, które jak najbardziej wymagają rozwiązania, chociaż i one są skutkiem nietrafnych intuicji, które legły u podstaw przyjęcia takich, a nie innych założeń. Paradoksy te wskazują więc na konieczność rewizji tychże założeń. Do tej klasy dylematów należą paradoksy teorii mnogości Georga Cantora. Pewnego wyjaśnienia wymaga użyty tu termin „intuicja". To kluczowe, dla rozpoznania pierwszej grupy paradoksów, słowo w różnych użyciach może mieć odmienne odniesienia. W naszym przypadku, słowo to należy rozumieć jak najbardziej potocznie – intuicja jest wypadkową naszego doświadczenia, w tym językowego, zdobytej wiedzy oraz wynikających z nich oczekiwań.

Rozdział drugi jest poświęcony paradoksom, które nie tylko mają rozwiązanie, lecz ponadto rozwiązanie to jest zależne od usunięcia z paradoksalnych argumentacji błędu wieloznaczności. Sednem tych dylematów jest więc ten wyjątkowo powszechny logiczny błąd wypowiedzi. Paradoksy omówione w tym rozdziale zostały dobrane tak, aby jasne było jak bardzo różnorodną postać może przybrać prosty przecież w swej naturze, błąd wieloznaczności. Należy tu dodać, iż większość paradoksów omówionych w rozdziale nienumerowanym to paradoksy wieloznaczności.

Rozdział trzeci zawiera dylematy, które w rozmaity sposób wiążą się z tak zwanym samoodniesieniem się, określanym też jako samozwrotność czy kolistość. Ponieważ samozwrotność nie jest żadnym błędem logicznym, paradoksy samozwrotności nie zawsze wymagają rozwiązania. Niekiedy należy się jedynie pogodzić z ich istnieniem i z wynikającymi z niego, najczęściej niechcianymi, konsekwencjami. Również w przypadku tego rozdziału dobór analizowanych paradoksów wskazuje na bogactwo samozwrotnych struktur myślowych.

Nie sposób nie zauważyć, że przyjęty podział nie jest podziałem logicznym. Nie jest w nim bowiem zachowana ani rozłączność, ani adekwatność podziału. Ze względu na ogromną ilość paradoksów, brak adekwatności wydaje się być jak najbardziej uzasadniony. Trudno jest również przyjmować, aby paradoksalne

[7] Oczywiście, nie znaczy to wcale, że w rozdziale tym są wyłącznie paradoksy nie posiadające rozwiązania.

rozumowanie będące skutkiem struktury samozwrotnej nie mogło prowadzić do wniosków, które są niezgodne z naszą intuicją.

Zaproponowanemu w książce podziałowi paradoksów odpowiada następujące, zgodne z istotą omawianych dylematów, uporządkowanie rozdziałów:

<table>
<tr><th>PARADOKSY ZGODNE Z MATEMATYCZNIE POJĘTYM, PRECYZYJNYM OBRAZEM ŚWIATA (rozdziały 1, 2, 3):</th><th>PARADOKSY ONTOLOGICZNE, NIE MIESZCZĄCE SIĘ W MATEMATYCZNIE POJĘTYM, PRECYZYJNYM OBRAZIE ŚWIATA (rozdział 4):</th></tr>
<tr><td>Paradoksy będące skutkiem niedoskonałości intuicji – nie posiadają rozwiązań (rozdział 1)</td><td rowspan="3">Paradoksy różnic minimalnych:
paradoksy stosu (paragraf 4.1)
i paradoksy wielu (paragraf 4.2)
oraz
Paradoksy zmian (paragraf 4.3)</td></tr>
<tr><td>Paradoksy wieloznaczności – posiadają rozwiązania (rozdział 2)</td></tr>
<tr><td>Paradoksy samozwrotności - mogą, lecz nie muszą posiadać rozwiązania (rozdział 3)</td></tr>
</table>

Jak już wspomnieliśmy, książka jest podzielona na pięć rozdziałów: jeden nienumerowany oraz cztery tworzące podział paradoksów ze względu na ich istotę. Stosowane w tekście słowo „rozdział" dotyczy jedynie tych pięciu, głównych partii materiału. Każda mniejsza jednostka tekstu jest nazywana paragrafem. W wielu paragrafach możliwe jest wyróżnienie pewnych części, stanowiących jakieś odrębne sekwencje. Ze względu na wielką liczbę symboli występujących w książce, ważność każdego z nich jest zachowana w obrębie takiej właśnie sekwencji. Chociaż symbole „(1)", „(2)", „*A*", „*B*", „*nie-A*" itp. mogą być wykorzystywane w tekście wielokrotnie w różnych miejscach w różnym znaczeniu, to jednak ich „wieloznaczne" zastosowanie, ze względu na przestrzeganie odrębności wspomnianych sekwencji, nie powinno prowadzić do nieścisłości.

Każdemu pierwszemu wystąpieniu nazwiska postaci już historycznej towarzyszy podanie daty narodzin oraz daty śmierci tej osoby.

W książce, istnieją też pewne zamierzone, chociaż mamy nadzieję że drobne, powtórzenia, dotyczące problemów poruszonych we wcześniejszych rozdziałach. Ich celem jest to, aby każdy paragraf danego rozdziału stanowił pewną całość, której lektura jest możliwa bez konieczności dokładnej znajomości paragrafów z wcześniejszych rozdziałów.

W niniejszej książce, poza prezentacją istniejących już w literaturze rozwiązań omawianych tu paradoksów, są przedstawiane własne rozwiązania zaproponowane przez autora tej książki. Każde takie autorskie rozwiązanie jest poprzedzone wyróżnionym pogrubioną czcionką tytułem: „Propozycja rozwiązania paradoksu/antynomii" i dotyczą: paradoksu Newcomba; paradoksu koła Arystotelesa, paradoksu Trójcy Świętej; paradoksu Protagorasa, paradoksu klubu bez nazwy, paradoksu kamienia; antynomii kłamcy, paradoksu Buridana, uogólnionej postaci antynomii kłamcy, paradoksu kata (nieoczekiwanego sprawdzianu), paradoksu krokodyla.

W przypadku paradoksów nieostrości, zmiany w tym ruchu (Zenona z Elei) oraz tożsamości przedstawiona jest diagnoza problemów, zgodna z opinią Herniego Bergsona.

Autor pragnie podziękować: prof. Januszowi Czelakowskiemu, prof. Ryszardowi Kleszczowi, prof. Grzegorzowi Malinowskiemu, prof. Markowi Nowakowi, prof. Andrzejowi Pietruszczakowi, prof. Jerzemu Pogonowskiemu, dr Markowi Genslerowi, dr Mateuszowi Oleksemu, dr Arturowi Przybysławskiemu, mgr Robertowi Podkońskiemu; za cenne uwagi i sugestie oraz za inspirujące i wyjaśniające rozmowy. Dotarcie do niezbędnych dla powstania tej książki materiałów było możliwe dzięki pomocy: prof. Kena Akiby, prof. Paula Horwicha, prof. Dominica Hyde'a, prof. Grahama Priesta, prof. Zelmy Putermana, prof. Marka Sainsbury'ego, prof. Jerzego Szymury, prof. Micheala Tye'a, prof. Wojciecha Żełańca, dr Norihiro Kamide, mgr Agnieszce Wiśniewskiej-Adamus, mgr Małgorzacie Walczak i Marii Balcerak. Wszystkie te osoby zasługują na szczególną wdzięczność autora.

SOFIZMATY I PARALOGIZMY

Obiektywna, czyli wolna od pozalogicznego czynnika intencji nadawcy, nazwa „paradoks" winna ustąpić miejsca jakiejś innej nazwie, wszędzie tam, gdzie wygłoszeniu paradoksalnej argumentacji towarzyszy chęć wprowadzenia w błąd lub pragnienie rozbawienia odbiorcy przekazu. Jak już zauważyliśmy wcześniej we *Wstępie*, odróżnienie sofizmatu od paralogizmu nie jest proste, gdyż kluczem do podobnego rozróżnienia jest intencja oraz świadomość osoby wygłaszającej daną argumentację. Jeśli więc mamy do czynienia z rozumowaniem celowo wprowadzającym w błąd, a ponadto intencja nadawcy tego błędnego przekazu jest zła, to przekaz ten określamy mianem sofizmatu[1]. Jeśli jednak intencja nadawcy nie jest najgorsza, gdyż faktyczny cel danego przekazu ma charakter rozrywkowy lub dydaktyczny, jak również wówczas, gdy głoszący daną argumentację nie ma świadomości, iż jakiś prosty błąd jest przyczyną jej paradoksalności, to przekaz ten określimy jako paralogizm. Widać więc, że niezwykle trudno jest rozstrzygnąć z całą pewnością, czy to oto rozumowanie jest sofizmatem, paralogizmem, czy może ani jednym, ani drugim. Trafne odróżnienie wymaga bowiem rozpoznania prawdziwych intencji nadawcy. Problem wygląda na szczególnie kłopotliwy, gdy mamy do czynienia z przekazem pisanym, a w tej właśnie formie dotrwała do naszych czasów większość interesujących nas paradoksów. W takich przypadkach pozostaje nam jedynie przypuszczenie. Z tego punktu widzenia, uzasadnionym wydaje się więc zaliczenie sofizmatów i paralogizmów do jednej klasy rozumowań. Nie jest to jednak koniec metodologicznych kłopotów związanych z klasyfikacją argumentacji określanych tym mianem. Oczywisty problem tkwi bowiem w tym, jak odróżnić sofizmaty i paralogizmy od zwykłych paradoksalnych rozumowań. Przecież duża liczba paradoksów jest związana z jakimś mniej lub bardziej jawnym błędem. Kluczowa więc, dla naszego rozstrzygnięcia, intencja oraz świadomość popełnienia błędu przez nadawcę błędnego przekazu jest jedynym kryterium odróżnienia paradoksalnego rozumowania od sofizmatu i paralogizmu. Wszystko więc zależy od poziomu intelektualnego nadawcy, a ściślej

[1] Naturalnie, zachodzi tu istotna trudność odróżnienia sofizmatu od zwykłego kłamstwa, które również może mieć postać jakiejś argumentacji.

rzecz ujmując, od różnicy poziomu intelektualnego nadawcy i odbiorcy. Przecież ten sam argument w ustach jednej osoby może być prawdziwym „szczerym" paradoksem, w ustach zaś innej osoby, zwykłym sofizmatem czy paralogizmem. Przedstawione niżej rozumowania, zwłaszcza te z pierwszego paragrafu zatytułowanego *Każde dwie liczby są różne*, bez wątpienia, zawierają proste do rozpoznania, dla wielu uczniów wyższych klas szkoły podstawowej, błędy. Te same argumentacje mogą się jednak okazać prawdziwym problemem dla wielu uczniów klas niższych. Podobnie, ktoś swobodnie poruszający się w obszarze innych równie błędnych argumentacji może stosować znacznie poważniejsze, uchodzące za prawdziwe logiczne problemy, rozumowania w celu świadomego wprowadzenia w błąd dowolnie wybranej osoby, która nie jest specjalistą w zakresie logiki czy filozofii. Oznacza to, że trafne odróżnienie sofizmatów i paralogizmów od pozostałych kłopotliwych argumentacji jest niezwykle kłopotliwe i do pewnego stopnia arbitralne. Nie jest więc niczym zaskakującym, że najczęściej przyjmowane kryterium polega na rozpoznaniu stopnia trudności danego rozumowania. Jeśli, po pierwsze, dana argumentacja jest problemem dawno rozwiązanym, a po drugie zawiera ona prosty i łatwy do rozszyfrowania błąd, to jesteśmy skłonni zaliczyć ją do wspólnej klasy sofizmatów i paralogizmów. Jeśli natomiast, dana argumentacja wywołuje trudności, których rozwiązanie nadal jest kwestią otwartą lub nie jest jasne, które z istniejących rozwiązań można uznać za trafne i ostateczne, to bez wątpienia, argumentacja ta nie jest ani sofizmatem, ani paralogizmem. Podobnie, ani za sofizmat, ani za paralogizm nie będzie uznane każde takie problematyczne rozumowanie, które mimo istniejącego już od jakiegoś czasu rozwiązania, reprezentuje dość wysoki poziom trudności. Z oczywistych też powodów nie zamierzamy ściśle i kategorycznie odróżniać sofizmaty od paralogizmów.

Z powyższych uwag jasno wynika, iż zaliczenie danej argumentacji do klasy sofizmatów i paralogizmów jest kwestią podlegającą dyskusji. Można się więc zastanawiać, czy dane błędne rozumowanie zostało trafnie zaliczone do tej klasy, jak również to, czy nie zakwalifikowanie do niej jakiegoś innego rozumowania było trafne. Mając tego świadomość, proponujemy zilustrować problem sofizmatów i paradoksów wykorzystując niżej przedstawione argumentacje.

1. KAŻDE DWIE LICZBY SĄ RÓWNE

Już sam tytuł tego akapitu jest paradoksalny. Skoro bowiem mamy na myśli dwie dowolne liczby – w tytule mamy przecież zwrot „każde dwie" – to w szczególności możemy wziąć pod uwagę dwie różne liczby. Wówczas, tytuł brzmi absurdalnie: *każde dwie różne liczby są równe*, albo *każde dwie różne* *liczby nie są różne*. Ponieważ rozumowania kryjące się za tym tytułem pełnią ważną funkcję dydaktyczną w procesie nauczania matematyki w niższych klasach, uznajmy je za paralogizmy, a nie, jak to się tradycyjnie czyni, za sofizmaty. Jako ilustrację, przedstawmy dwie argumentacje zamieszczone na edukacyjnej stronie internetowej, poświęconej paradoksom i sofizmatom:

Paralogizm równości dwóch dowolnych liczb (wersja a)[2]

Niech $a > b$ i niech $a = b + c$.

Równość tę mnożymy stronami przez $a - b$:	$a(a - b) = (b + c)(a - b)$
Wykonujemy mnożenie:	$a^2 - ab = ba - b^2 + ca - cb$
Porządkujemy obie strony równości:	$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$
Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias:	$a(a - b - c) = b(a - b - c)$
Dzielimy stronami przez $(a - b - c)$:	$a = b$.

Dalej, na tej samej stronie znajdujemy proste i narzucające się rozwiązanie tego pseudoproblemu: „Wniosek, że $a = b$, jest fałszywy, mimo iż pozornie wydaje się nam prawdziwy. Błąd powstał wskutek dzielenia równania przez wyrażenie, którego wartość wynosi 0 ($a - b - c = 0$)".

Paralogizm równości dwóch dowolnych liczb (wersja b)[3]

Niech $x = y$.

Mnożymy tę równość stronami przez x:	$x^2 = yx$.
Odejmujemy od obu stron równania y^2:	$x^2 - y^2 = yx - y^2$.
Przekształcamy:	$(x - y)(x + y) = y(x - y)$.
Dzielimy stronami przez $(x - y)$:	$x + y = y$.
Ponieważ z założenia $x = y$, więc:	$2y = y$.
Zatem, na przykład:	$2 = 1$.

Naturalnie, również w tym przypadku, przyczyną błędnego wyniku jest dzielenie przez wyrażenie równe zeru.

Zabronione w matematyce dzielenie przez wyrażenie równe zeru umożliwia dowodzenie równości dwóch różnych liczb na wiele, aby nie rzec, nieskończenie wiele sposobów. Ze względów historycznych przypomnijmy jeszcze analogiczny paralogizm, który wraz z podobnym rozwiązaniem znajdujemy w sławnej książeczce *Paradoxien des Unendlichen*, po raz pierwszy opublikowanej w roku 1851, a więc w trzy lata po śmierci jej autora, Bernarda Bolzano (1781–1848)[4]:

---

[2] Szkoly.edu, [a].
[3] Szkoly.edu, [a].
[4] Bolzano, [1851], s. 64.

Paralogizm równości dwóch dowolnych liczb (wersja *c*)
„Niech a i b będą parą różnych wielkości. Zachodzą wtedy dwie tożsamości

$$a - b = a - b$$
$$b - a = b - a$$

Zatem przez dodanie [stronami] otrzymamy

$$a - a = b - b$$

albo

$$a(1 - 1) = b(1 - 1).$$

Jeśli więc wolno obie strony równania dzielić przez czynnik równoważny zeru, otrzymamy niedorzeczny wynik $a = b$, czymkolwiek byłyby a i b. A powszechnie jest znane to, że przy większych rachunkach aż nadto łatwo bywa natknąć się na błędny wynik, jeśli się usunie wspólny czynnik z obu stron równania bez upewnienia się uprzednio, że nie jest on zerem".

Łamanie różnych reguł obowiązujących w algebrze liczb jest podstawą pomysłowego dowodzenia niewyprowadzalnych przecież w matematyce równości. Poza zakazem dzielenia przez zero, inną regułą, której łamanie jest szczególnie często wykorzystywane w argumentacjach powszechnie uważanych za sofizmaty lub paralogizmy jest ta, określająca obliczanie pierwiastków parzystych liczb. Jeśli bowiem, mamy, dla przykładu, równanie $a^2 = 25$, to własności działań na potęgach parzystych każą pamiętać o tym, że poza $a = 5$, innym rozwiązaniem tego równania jest $a = -5$. Kolejny paralogizm jest przykładem na złamanie tej właśnie reguły.

Paralogizm równości dwóch dowolnych liczb (wersja *d*)[5]

$$16 - 36 = 25 - 45$$
$$16 - 36 + 81/4 = 25 - 45 + 81/4$$
$$(4 - 9/2)^2 = (5 - 9/2)^2$$
$$4 - 9/2 = 5 - 9/2$$
$$4 = 5$$

2. PARADOKS KONI

Paradoks koni jest przykładem argumentacji w niewłaściwy sposób wykorzystującej zasadę indukcji matematycznej. Treść tej argumentacji przytoczmy za Wikipedią, dostępną w internecie *Wolną encyklopedią*[6]:

---

[5] Szkoly.edu, [a].
[6] Wikipedia, [g].

Paradoks koni

„Udowodnimy, że wszystkie konie są jednej maści. Posłużymy się indukcją matematyczną względem liczby koni. Sprawdzimy pierwszy krok indukcyjny – zbiór złożony z jednego konia jest zbiorem koni jednej maści. Zakładamy teraz, że (dla ustalonego n) wszystkie konie w każdym n-elementowym zbiorze koni są jednej maści. Pokażemy, że w takim razie teza zachodzi także dla wszystkich $(n+1)$-elementowych zbiorów koni. Dodajmy do dowolnego n-elementowego zbioru nowego konia. Mamy zbiór $(n+1)$-elementowy. Teraz odprowadźmy z tego zbioru któregoś konia, ale nie tego, którego właśnie dodaliśmy. Otrzymujemy więc zbiór n-elementowy koni. Z założenia indukcyjnego, wszystkie konie w tym zbiorze są jednej maści. W takim razie nowododany koń jest tej samej maści, co pozostałe. Teraz możemy z powrotem przyprowadzić konia usuniętego z naszego zbioru (który to koń jest oczywiście tej samej maści, co pozostałe) i otrzymujemy $(n+1)$-elementowy zbiór koni jednej maści. Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy więc, że wszystkie konie są jednej maści".

Na tej samej stronie znajdujemy rozwiązanie tego problemu. Prawdą jest, że sprawdzenie indukcyjne dla $n = 1$ wskazuje na to, iż faktycznie każdy jednoelementowy zbiór koni jest zbiorem koni jednej maści. Jest to raczej oczywisty krok rozumowania. Jednak, rozumowanie indukcyjne załamuje się już na drugim kroku i tylko na tym kroku. Załóżmy bowiem, że mamy jednoelementowy zbiór koni złożony z konia karego. Dodajemy do tego zbioru konia siwego i odprowadzamy na bok konia karego. Mamy więc znowu jednoelementowy zbiór koni, tym razem złożony z konia siwego. Mimo iż faktycznie każdy jednoelementowy zbiór koni jest zbiorem koni jednej maści, dodanie z powrotem konia karego do zbioru złożonego tylko z siwka da dwuelementowy zbiór koni, który jednak nie jest zbiorem koni jednej maści. Chociaż więc, bez wątpienia, prawdziwe jest założenie indukcyjne dla $n = 1$, że każdy n-elementowy zbiór koni jest zbiorem koni jednej maści, to nie jest prawdą, że z założenia tego można wyprowadzić tezę indukcyjną głoszącą, że każdy $(n+1)$-elementowy zbiór koni jest zbiorem koni jednej maści. Naturalnie, jeśli przyjmiemy założenie indukcyjne dla $n \geq 2$, że każdy n-elementowy zbiór koni jest zbiorem koni jednej maści, to dowiedziemy tezy indukcyjnej zgodnie, z którą każdy $(n+1)$-elementowy zbiór koni jest zbiorem koni jednej maści. Załóżmy bowiem, że dla $n \geq 2$, każdy n-elementowy zbiór koni jest zbiorem koni jednej maści. Dodajemy do nich jednego konia i odprowadzamy na bok jednego z koni pierwotnego n-elementowego zbioru. Nowo otrzymany zbiór składa się także z n koni, co zgodnie z przyjętym założeniem indukcyjnym oznacza, że jest to zbiór koni jednej maści. Zatem nowo dodany koń musi być tej samej maści co pozostałe $n-1$ koni z dawnego n-elementowego zbioru[7]. Oznacza to, że do pierwotnego, n-elementowego zbioru mogliśmy dodać jedynie konia tej samej maści, co konie tworzące ten zbiór. Zatem, powstały $(n+1)$-elementowy zbiór koni faktycznie jest zbiorem koni jednej maści.

Cały problem tkwi jednak w tym, że nie jesteśmy w stanie udowodnić, że wszystkie dwuelementowe zbiory koni są zbiorami koni jednej maści. Przeszkoda ta przerywa proces rozumowania indukcyjnego już na samym jego początku, na drugim kroku rozumowania i tylko na tym drugim kroku. Widać więc wyraźnie, że w argumentacji paradoksu koni dowodzi się uprzednio założonej tezy, czyli popełnia się błąd *petitio principi*: dowodzimy, że wszystkie konie są jednej maści zakładając, że każde dwa konie są tej samej maści.

3. PARADOKS SKUTECZNEJ KURACJI

To pochodzące ze starożytności rozumowanie dotyczące skutecznego leczenia się a prowadzące do paradoksalnego wniosku zacytujemy za Szymankiem[8]:

Paradoks skutecznej kuracji
Pijąc lekarstwo w chorobie czynimy coś dobrego. Powinniśmy czynić możliwie najwięcej dobra – a więc powinniśmy pić jak najwięcej lekarstwa w chorobie.

Jest to klasyczny przypadek, najprawdopodobniej celowo, źle postawionego problemu, polegający na użyciu we wnioskowaniu nieprecyzyjnej, a więc fałszywej przesłanki. Czy pijąc lekarstwo w chorobie zawsze czynimy dobrze? Oczywiście tylko wtedy, gdy po pierwsze lekarstwo jest odpowiednio dobrane do choroby, a po drugie, gdy jest odpowiednio dawkowane. Tak więc, zarówno zażywając niewłaściwe lekarstwo, jak i zażywając właściwe ale w niewłaściwych proporcjach, czynimy źle. Łatwo widać, że proste zastąpienie przesłanki „Pijąc lekarstwo w chorobie czynimy coś dobrego" zdaniem „Pijąc w chorobie odpowiednie lekarstwo w odpowiednich ilościach czynimy coś dobrego" ostatecznie uniemożliwiamy wyprowadzenie wniosku twierdzącego,

---

[7] Ponieważ każdy dwuelementowy zbiór koni jest zbiorem jednej maści, wszystkie konie muszą być jednej maści, gdyż tworzenie zbiorów jest działaniem abstrakcyjnym i dotyczy wszelkich możliwych kombinacji: jeśli więc mamy dwuelementowe zbiory koni $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$, to mamy także dwuelementowy zbiór $\{a, c\}$. Zatem, skoro $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ są zbiorami koni jednej maści, to $\{a, c\}$ również jest zbiorem koni jednej maści. Oznacza to, że $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ są zbiorami koni jednej maści, i to w obu przypadkach, tej samej maści.

[8] Szymanek [2001], s. 224.

że „powinniśmy pić jak najwięcej lekarstwa w chorobie". Nie sposób nie zauważyć, że mamy tu do czynienia z jeszcze jedną nieścisłością. Otóż, mówiąc, że jakieś lekarstwo jest dobre lub złe, tak naprawdę mamy na myśli to, że jest ono pożyteczne (skuteczne), lub niepożyteczne (nieskuteczne) dla danego, konkretnego chorego.

Paradoks skutecznej kuracji jest więc przykładem sofizmatu wykorzystującego w swojej argumentacji fałszywą przesłankę: *Pijąc lekarstwo w chorobie czynimy coś dobrego.* Ponadto, znajduje tu swoje zastosowanie znany od wieków, dzięki Sokratesowi i Platonowi, problem utożsamienia tego co dobre z tym co pożyteczne. Trudno jest jednak zaliczyć argumentację Sokratesa, znaną nam z platońskiego dialogu *Protagoras* do sofizmatów lub paralogizmów. Prawdopodobnie, klasyfikacja taka mogłaby być niesprawiedliwą, a więc krzywdzącą oceną Sokratesa.

4. PARADOKS NEWCOMBA

Przeanalizujmy teraz dylemat, którego zaliczenie do klasy sofizmatów i paralogizmów, może u jednych wywołać oburzenie, innych zaś może wprawić w zakłopotanie, lub nawet zawstydzić. Uważa się bowiem, że paradoks ten odegrał dużą rolę w dyskusji nad obowiązywaniem tych zasad, którym powinno podlegać racjonalne podejmowanie decyzji. Trudno jednak uwierzyć, do jakich, wartościowych z naukowego punktu widzenia, wniosków może doprowadzić analizowanie niepoważnego, wydumanego, a przede wszystkim tożsamego z błędem wieloznaczności problemu. Rozwiązanie tego paradoksu jest bowiem bardzo proste i nie ma nic wspólnego z procedurami podejmowania decyzji. Tak więc, w przypadku tego dylematu, nierozpoznanie błędu wieloznaczności legło u podstaw szeregu analiz kwestii dotyczących, między innymi, „racjonalnego zawieszania" praw logiki. Z punktu widzenia teorii racjonalnego wyboru, a szczególnie z punktu widzenia logiki, problem Newcomba jest w takim samym stopniu pseudo-paradoksem, jak inny, omówiony w paragrafie 1.4, dylemat rzekomo dotyczący kwestii racjonalności przekonań, a znany jako paradoks czarnego kruka.

Po raz pierwszy paradoks Newcomba został opublikowany w 1969 r. w pracy Roberta Nozicka *Newcomb's problem and two principles of choice*. Jednak, sam autor tego artykułu twierdzi, że właściwym odkrywcą tego dylematu jest William Newcomb, fizyk z Livermore Radiation Laboratories w Kalifornii.

Paradoks Newcomba
W eksperymencie, w którym istotną rolę odgrywa nieomylny jasnowidz musimy dokonać racjonalnego wyboru. Miarą racjonalności tego wyboru jest maksy-

malizacja naszego zysku. Dwa pudełka są odpowiednio oznaczone „*A*" oraz „*B*". W pudełku *A* znajduje się tysiąc dolarów. W pudełku *B* nie ma, na razie, żadnych pieniędzy. Musimy podjąć decyzję: albo wybierzemy pudełko *B*, albo wybierzemy oba pudełka *A* i *B*. Naszą wygraną jest więc, albo zawartość samego *B*, albo suma zawartości pudełek *A* i *B*. Okazuje się jednak, że zawartość pudełka *B* zależy od naszego wyboru. Jeśli bowiem wybierzemy jedynie pudełko *B*, to wiedząc o tym wcześniej, jasnowidz włoży do niego milion dolarów. Jeśli natomiast wybierzemy oba pudełka, to wiedząc o tym wcześniej, jasnowidz nie włoży do pudełka *B* żadnych pieniędzy. Naturalnie, reguły te są nam znane.

Jasne jest więc, że powinniśmy wybrać jedynie pudełko *B*, bo wówczas wygrywamy milion dolarów. Jeśli bowiem wybralibyśmy oba pudełka, to naszą wygraną byłoby zaledwie tysiąc dolarów. Nasze nastawienie na maksymalizację zysku sprawia więc, że wybieramy samo pudełko *B*.

Powstaje jednak dylemat, gdyż okazuje się, że z drugiej strony, racjonalniejszym jest wybór obu pudełek. Oznaczmy przez c zawartość pudełka *B*. Jeśli wybierzemy jedynie pudełko *B*, to nasz zysk wynosi c dolarów, jeśli jednak wybierzemy oba pudełka, to nasz zysk wyniesie $1000 + c$. Ponieważ jednak $1000 + c > c$, kierując się więc maksymalizacją zysku, powinniśmy wybrać oba pudełka[9].

Uważa się, że paradoks Newcomba powstaje jako efekt konfliktu dwóch prakseologicznych zasad: *zasady racjonalnego wyboru* (*ZRW*) oraz *zasady dominacji* (*ZD*)[10]. Pierwsza z tych zasad głosi, że powinniśmy wybrać tę opcję, która daje nam większy zysk. Kierując się tą właśnie zasadą dochodzimy do wniosku, że powinniśmy wybrać samo pudełko *B*. Śledząc literaturę poświęconą paradoksowi Newcomba można dostrzec, że ten wątek rozumowania nie wzbudza żadnych wątpliwości. Główny nacisk kładzie się natomiast na uzasadnienie tego, że w przypadku problemu Newcomba zachodzi sytuacja, w której powinna być zastosowana zasada dominacji. Zgodnie z *ZD*, jeśli jakaś opcja przeważa w każdej możliwej sytuacji, to powinniśmy tę właśnie opcję wybrać. Jeśli więc w każdym przypadku mamy już zapewnione c dolarów, to należy wybrać tę opcję, która daje nam jeszcze coś ponad c, czyli $1000 + c$. Zatem, kierując się *ZD*, powinniśmy wybrać oba pudełka. Zasadę dominacji można zilustrować w nieco inny, częściej w literaturze stosowany sposób, a mianowicie, za pomocą przedstawionego zestawienia[11]. Rozważmy cztery sytuacje będące wypadkowymi dwóch alternatyw. Pierwszą alternatywę określa nasz wybór: albo wybieramy pudełko *B*, albo wybieramy oba pudełka. Druga alternatywa dotyczy tego, co uczyni jasnowidz: albo włożył do pudełka *B* milion

---

[9] Prezentacja paradoksu wykorzystująca stałą c ma miejsce np. w Priest, [2004].
[10] Sainsbury, [1988], s. 51–64; Hurley, [1994]; Kiekeben, [1996].
[11] Sainsbury, [1988], 54–55.

dolarów, albo do *B* nie włożył żadnych pieniędzy. Nasz zysk jest więc wypadkową obu tych wyborów[12]:

	jasnowidz włożył do *B* milion dolarów	jasnowidz nie włożył do *B* żadnych pieniędzy
wybieramy *B*	wygrywamy 1 000 000 $	wygrywamy 0 $
wybieramy *A* i *B*	wygrywamy 1 001 000 $	wygrywamy 1000 $

Już prosta obserwacja pokazuje, że wybór obu pudełek jest trafniejszy, gdyż przynosi większy zysk, zarówno wtedy, gdy jasnowidz włoży do *B* milion dolarów (przecież 1 001 000 $ > 1000000 $), jak i wtedy, gdy nie włoży do *B* żadnych pieniędzy (skoro 1000 $ > 0 $).

Propozycja rozwiązania paradoksu

Nie powinien budzić najmniejszych wątpliwości fakt, że w przypadku problemu Newcomba, zastosowanie ma zasada racjonalnego wyboru, która nakazuje wybrać jedynie pudełko *B*. Czy zachodzi tu jednak jakikolwiek konflikt między tą zasadą a zasadą dominacji? Czy faktycznie zasada dominacji może być tu zastosowana do uzasadnienia wyboru obu pudełek? Jeśli nie, to znaczy, że nie ma żadnego konfliktu z *ZRW*, gdyż *ZD* nie powinna być po prostu stosowana. Wróćmy więc do analizy wykorzystującej stałą *c*, reprezentującą ilość pieniędzy w dolarach, znajdujących się w pudełku *B*. Graham Priest twierdzi wprost, że *c* oznacza *desygnat sztywny* (*rigid designator*), czyli jeden i ten sam, nie podlegający zamianie, stały obiekt[13]. Takie jest też powszechnie przyjmowane założenie. Można je uzasadnić w sposób następujący. Jasnowidz, widząc z pewnym wyprzedzeniem, które z pudełek otwieramy, także z pewnym wyprzedzeniem, do pudełka *B*, wkłada lub nie, milion dolarów. Nie zmieniając w jakiś istotny sposób warunków paradoksu Newcomba, przyjmijmy więc, że jasnowidz wkłada lub nie milion dolarów do pudełka *B* na dzień przed dokonaniem przez nas wyboru, po czym już nigdy więcej nie dotyka tego pudełka. Jeśli więc mamy w piątek dokonać wyboru między zawartością samego pudełka *B* lub zawartościami obu pudełek *A* i *B*, to w czwartek nieomylny jasnowidz włoży lub nie do pudełka *B* milion dolarów. Zatem, podejmując w piątek decyzję, stoimy wobec faktu, iż od 24 godzin zawartość pudełka *B* jest już ustalona. Oznacza to, że bez ryzyka utraty miliona dolarów, możemy zdecydować się na oba pudełka, gdyż jasnowidz nie może już niczego zmienić.

---

[12] Sainsbury, [1988], s. 55.
[13] Priest, [2004].

W tym też sensie zawartość pudełka *B* jest uznana za sztywny desygnat. Oczywiście pogląd ten jest błędny. Przecież, nieomylny jasnowidz widząc przyszłość widzi co robimy w piątek i w zależności od naszych działań podejmuje odpowiednią, a do tego bezbłędną decyzję. Jeśli więc w piątek otwieramy tylko pudełko *B*, jasnowidz wiedząc o tym w czwartek wkłada do *B* milion dolarów. W przeciwnym razie jasnowidz nie włoży do *B* żadnych pieniędzy. Zatem z naszego punktu widzenia zawartość pudełka *B* nie jest ustalona z góry i to przez jasnowidza, lecz zależy od naszego piątkowego wyboru i w tym też sensie nie jest żadnym sztywnym desygnatem. Co więcej, nasz dokonany w piątek wybór jest jak najbardziej wolny. Naturalnie, odczuwamy tu pewną nienaturalność, która najprawdopodobniej wynika z tego, iż nie mamy na co dzień do czynienia z nieomylnymi jasnowidzami. Jest więc dla nas dość dziwne to, iż zawartość pudełka *B* jest od 24 godzin ustalona, a mimo to zależy od tego co uczynimy za chwilę do tego stopnia, że możemy zrobić co tylko zechcemy kierując się w pełni wolną wolą a nawet sami możemy nie wiedzieć co za chwilę zrobimy. Tak długo, jak korzystając z wolnego wyboru wahamy się między otworzeniem jedynie pudełka *B* a otworzeniem obu pudełek, tak długo nie możemy mówić o tym, że z naszego punktu widzenia zawartość pudełka *B* jest już z góry ustalona[14].

Tak więc, w przypadku problemu Newcomba nie może być mowy o stałości desygnatu c. Przecież to, czym jest c, zależy od decyzji podjętej przez osobę dokonującą wyboru między zawartością pudełka *B* a łączną zawartością pudełek *A* i *B*. Zatem, z punktu widzenia osoby dokonującej wyboru, c nie jest niczym stałym, a przecież w ocenie trafności i racjonalności podjętej decyzji rozstrzygający powinien być właśnie punkt widzenia osoby podejmującej rozważaną decyzję. Prawidłowa, czyli precyzyjna formalizacja analizowanej kwestii winna więc operować nie jednym symbolem „c", lecz dwoma „c_1" oraz „c_2". Jeśli dokonamy wyboru pudełka *B*, wówczas w *B* będzie milion dolarów, a zatem będzie w nim $c_1 = 1\,000\,000$ \$. Jeśli natomiast wybierzemy oba pudełka, w *B* nie będzie żadnych pieniędzy, a więc będzie w nim $c_2 = 0$ \$. Miejsce prowadzącej do paradoksalnego wniosku nierówności $1000 + c > c$, zajmie teraz niewątpliwie nie prowadząca już do jakiegokolwiek paradoksu nierówność $c_1 > 1000 + c_2$, wyrażająca oczywistą skądinąd prawdę, że 1 000 000 \$ > 1000 \$ + 0 \$.

Oznacza to, że w sytuacji charakteryzującej problem Newcomba nie znajduje zastosowania zasada dominacji, nie jest bowiem prawdą, że bez względu na okoliczności, zawsze jeden i ten sam wybór jest korzystniejszy. Podobny wniosek wynika natychmiast z precyzyjnej analizy sprawdzającej, za pomocą cytowanego zestawienia, prawomocność stosowania *ZD*. Z czterech

[14] W przeciwnym razie popełniamy błąd podobny do tego, który towarzyszy stwierdzeniu, iż skoro Bóg wie co uczynimy, to najwidoczniej nie mamy wolnej woli.

przypadków uwzględnionych w zestawieniu, dwa są niemożliwe do zajścia (te dwa wykluczone przypadki mają w zestawieniu szare tło). Wynika to z prostej zależności wyrażonej dwoma następującymi warunkami:

w1. jasnowidz włożył do *B* milion dolarów, tylko wówczas, gdy wybraliśmy samo pudełko *B*;

w2. jasnowidz nie włożył do *B* żadnych pieniędzy, tylko wówczas, gdy wybraliśmy oba pudełka.

Wprost z warunku pierwszego wynika, że nie jest możliwe, abyśmy wygrali 1 001 000 $. Na mocy drugiego warunku niemożliwe jest, abyśmy nie wygrali żadnych pieniędzy. Zatem, rozpatrywanie czterech przypadków w kontekście paradoksu Newcomba jest nieuczciwe.

Przytoczona wcześniej, nieścisła analiza, dopuszczająca cztery wymienione w zestawieniu przypadki, przypomina następującą, niewątpliwie błędną, bo niezgodną z warunkami problemu, analizę następującej, analogicznej do powyższej sytuacji, polegającej na tym, że abym przestał być głodny muszę coś zjeść. Przyjmijmy zatem, założenie podobne do tego iż w pudełku *B* jest milion dolarów tylko wówczas, gdy wybiorę samo pudełko *B*, a mianowicie: *przestanę być głodny tylko wówczas, gdy zjem wystarczająco duży posiłek.* Rozumując analogicznie do wyżej przytoczonego przypadku uzasadniającego zastosowanie zasady dominacji, dochodzę do wniosku, że może dojść do jednego z czterech następujących zdarzeń:

z1. nie zjem wystarczająco dużego posiłku i będę głodny;

z2. nie zjem wystarczająco dużego posiłku i przestanę być głodny;

z3. zjem wystarczająco duży posiłek i będę głodny;

z4. zjem wystarczająco duży posiłek i przestanę być głodny.

Naturalnie, z przyjętego założenia jasno wynika, że ani zdarzenie drugie ani trzecie nie może mieć miejsca. Jaki jest więc sens uwzględniania tych dwóch, przecież jawnie niezgodnych z ustaleniami, przypadków?[15] Jeśli uznamy, że należy je uwzględniać w logicznej analizie problemu, to traci sens nie tylko wszelki wysiłek logicznego rozwiązania wszystkich pozostałych paradoksów, ale również proste stwierdzenie, że 2 + 2 = 4. Łamiąc ustalone, a określające dany problem zasady, uniemożliwiamy wszelką logiczną refleksję analizującą dany problem. Zajmujemy się wówczas nie wiadomo czym, a takie działanie traci przecież swój sens. Pikanterii dodaje fakt, iż dopuszczenie możliwości zajścia, zarówno sytuacji polegającej na tym, że nie zjem wystarczająco dużego posiłku, a mimo to przestanę być głodny, jak również i tej, w której

[15] Jasne jest, że jesteśmy w stanie wymyślać przeróżne sytuacje, w których zajdzie zdarzenie drugie bądź trzecie, np. gdy z powodu długotrwałego głodu stracę rozum, a może zdolność standardowego odczuwania, a może nawet życie. Jednak żadna z tych i wszelkich innych podobnych sytuacji nie mieści się w granicach jasno wyznaczonych przez warunki analizowanego problemu.

zjem wystarczająco duży posiłek i pozostanę głodny, jest uzasadniane jakąś teorią ... racjonalnego działania. Czy faktycznie pragnienie działania racjonalnego każe mi dopuszczać, że głód można, z jednej strony zaspokoić postem, z drugiej zaś podtrzymywać jedzeniem?

Widać wyraźnie, że z paradoksem Newcomba wiążą się jedynie dwie z czterech wspomnianych sytuacji. Oznacza to, że zasada dominacji nie ma w tym przypadku zastosowania, a zatem nie ma żadnego konfliktu między nią a zasadą racjonalnego wyboru. W problemie Newcomba jest więc opisana sytuacja, w której należy kierować się zasadą racjonalnego wyboru, nie zaś zasadą dominacji. Mimo istnienia tak prostego i narzucającego się rozwiązania, w niektórych analizach paradoksu Newcomba wskazuje się na dodatkowe trudności, albo te wynikające z omylności jasnowidza, albo związane ze sprzecznością do jakiej musi doprowadzić jakiekolwiek działanie podjęte w minionym już czasie.

Jeśli jasnowidz jest człowiekiem omylnym, to zakwestionowane zostają zasady opisujące problem Newcomba. Pozostają nam wówczas, mniej lub bardziej precyzyjne spekulacje, których wartość jest wątpliwa, zwłaszcza z punktu widzenia samego paradoksu. Cóż bowiem można by było sensownego stwierdzić na przykład w przypadku omawianego w paragrafie 3.5 paradoksu kata, gdyby przyjąć, że człowiek wykonujący egzekucje nie zawsze stosuje się do wyroków sądowych. Podobnie, niczego mądrego nie można by powiedzieć w przypadku innego, przedstawionego w paragrafie 3.6, paradoksu krokodyla, gdyby przyjąć, że czasami krokodyl nie dotrzymuje danego słowa. Jeśli więc Richard Mark Sainsbury twierdzi, że skoro jasnowidz odgaduje przyszłość z prawdopodobieństwem p, to aby trafnie ocenić, który wybór jest najlepszy, należy każdą z czterech spodziewanych wygranych z powyższej tabeli pomnożyć przez wartość p, to jego uwaga nie dotyczy przecież paradoksu Newcomba[16].

Zaskakująca jest również uwaga Martina Gardnera, który w swej książce z 1982 roku *Aha! Gotcha. Paradoxes to puzzle and delight*[17], rozważa dwie odmienne postawy człowieka dokonującego wyboru. Pierwsza, cechuje się logicznością i polega na tym, że człowiek dokonuje wyboru jedynie pudełka *B*, gdyż wie, że wtedy i tylko wtedy będzie w tym pudełku milion dolarów. Druga postawa cechuje człowieka, który wiedząc, że powinien wybrać samo pudełko *B*, wybiera oba, gdyż uważa, że jasnowidz i tak wie, że wybrane będzie tylko pudełko *B*, bo taki jest przecież jedyny rozsądny wybór, a więc i tak włoży do *B* milion dolarów. Można więc przez zaskoczenie, przechytrzyć jasnowidza i zdobyć 1 001 000 dolarów. Co ciekawe, pierwszą postawę Gardner nazywa

[16] Sainsbury, [1988], s. 54.
[17] Gardner, [1982].

męską, drugą zaś kobiecą. Trudno jednak nie zauważyć, że jasnowidz widzi przyszłość i jedynie tym się kieruje. Będzie więc wyraźnie widział, jak spryciarz wybiera oba pudełka i wobec tego nie włoży do *B* żadnych pieniędzy. Co więcej, jasnowidz widząc, że ktoś (w przyszłości) wybiera oba pudełka nie musi nawet wiedzieć czemu ten ktoś postępuje tak nieracjonalnie – sprawa ta jest dla jasnowidza zupełnie nieistotna. Ta cała analiza myślenia człowieka w drugim, wskazanym przez Gardnera, przypadku jest bezcelowa, bo nie ma wpływu na decyzję jasnowidza, a przede wszystkim wykracza poza sam problem Newcomba.

Niekiedy, w paradoksie Newcomba miejsce jasnowidza zajmuje człowiek posiadający wehikuł czasu, a więc mogący odbywać podróże w czasie[18]. Zmiana ta jest dość istotna bowiem prowadzi do zamiany paradoksu Newcomba na paradoks dziadka:

Paradoks dziadka
Jeśli pan *A* może wędrować w czasie w przeszłość, to może cofnąć się w czasie tak, aby spotkać swojego dziadka, zanim ten zostanie ojcem. Jeśli wówczas *A* zabije swojego dziadka, to *A* nigdy się nie urodzi, a więc nigdy nie zabije swojego dziadka.

Istotnie, podróże w czasie, zwłaszcza te w przeszłość implikują sprzeczność[19]. Wystarczy bowiem, cofając się w czasie spowodować cokolwiek, aby w konsekwencji musiało dojść do realizacji zdarzenia sprzecznego. Jeśli więc, w paradoksie Newcomba, nie mamy do czynienia z jasnowidzem, lecz z kimś podróżującym w czasie, to istotnie dochodzimy w naszej analizie do sprzeczności: otwieramy jedynie pudełko *B*, które jest przecież puste; wówczas osoba podróżująca w czasie cofa się w przeszłość i wkłada do pudełka *B* milion dolarów; otwieramy więc puste pudełko *B*, w którym jest milion dolarów.

Tak więc, paradoks Newcomba z wehikułem czasu, zastępującym jasnowidza, jest już zupełnie innym paradoksem, znanym pod nazwą „paradoksu dziadka".

Na koniec należy poruszyć jeszcze jedną kwestię. Wszelkie rozważania dotyczące tego w jaki sposób osoba obsługująca pudełko *B* ma do niego włożyć milion dolarów są nieistotne, zwłaszcza z punktu widzenia paradoksu. Łatwo przecież wyobrazić sobie prostą zabawkę posiadającą dwa pudełka *A* i *B* oraz dwa przyciski *b* i *ab*. Naciśnięcie przycisku *b* uruchamia mechanizm wprowadzający do pudełka *B* plik pieniędzy i otwierający jedynie wieko pudełka *B*. Naciśnięcie przycisku *ab* uruchamia natomiast mechanizm jedynie

---

[18] Wikipedia, [h].

[19] Naturalnie, sprzeczności tej nie ma, gdy zmianie jakiegoś zdarzenia towarzyszy odpowiednia zmiana wszystkich konsekwencji zmienionego zdarzenia – patrz dalsze dwa paragrafy, 2.6 i 2.7, poświęcone paradoksom wszechmocy Boga.

otwierający wieka obu pudełek, bez wprowadzania do pudełka *B* jakichkolwiek pieniędzy. Na jednej ze stron internetowych mamy podobną zabawkę, którą można bawić się wielokrotnie dzięki opcji odświeżania strony. Na stronie tej widnieją dwa obrazki skrzyń. Jedna jest otwarta i widać na jej dnie pewną, niewielką ilość złota. Druga jest zamknięta. Pod obrazkami skrzyń znajdują się dwa „przyciski". Na jednym widnieje napis „wybieram skrzynię *B*", na drugim zaś „wybieram obie skrzynie". Po kliknięciu na pierwszy przycisk, otwarta dotychczas skrzynia *A* zamyka się, zaś zamknięta skrzynia *B* otwiera się i widać w niej wielką górę złota. Jednocześnie, pojawia się komentarz: „Wiedziałem że tak uczynisz! To rozsądny wybór!". Kliknięcie na drugi przycisk powoduje otworzenie się zamkniętej dotychczas skrzyni *B*, która okazuje się zupełnie pusta. Drugiej opcji towarzyszy szyderczy komentarz. Ta prosta strona dobitnie pokazuje, że w paradoksie Newcomba, poza błędem wieloznaczności, nie ma niczego interesującego. Jest to zwykły paralogizm.

Jak widać, wyrażenie problemu Newcomba wcale nie wymaga założenia, że osoba obsługująca pudełko *B* posiada jakiekolwiek nadprzyrodzone, czy choćby w najmniejszym stopniu niezwykłe zdolności. Jest to prosty, nieprowadzący do jakiegokolwiek paradoksu, problem wskazujący na potrzebę zastosowania jedynie zasady racjonalnego wyboru, nie zaś zasady dominacji, która przecież w tym przypadku nie ma zastosowania. Dopiero popełnienie błędu wieloznaczności, umożliwia zastanawianie się nad sensownością zastosowania zasady dominacji. Wszelkie inne, niezwiązane z wieloznacznością, trudności z jakimi można kojarzyć ten paradoks mają charakter psychologiczny i mogą być skutkiem jedynie ludzkich słabości, takich jak chociażby pazerność, czy chęć przechytrzenia innego człowieka. Naturalnie, także w tej wypaczonej, czyli psychologicznej, a nie logicznej postaci, problem Newcomba nie jest żadnym paradoksem, lecz przypomina raczej dramat małpy złapanej w hinduską pułapkę: w pudełku z otworem tak małym, że przechodzi przez niego jedynie pusta dłoń małpy znajduje się banan; małpa chcąc zdobyć owoc, wkłada dłoń do pudełka, chwyta go i nie może już wydobyć dłoni z powrotem; zostaje złapana, gdyż jej pazerność nie pozwala zrezygnować z banana. Podobnie człowiek, który mogąc zdobyć milion dolarów, co jest odpowiednikiem wolności małpy, traci go łaszcząc się na tysiąc dolarów, odpowiadających bananowi z hinduskiej pułapki.

5. PARADOKS FITCHA

Na koniec tego krótkiego rozdziału, przeanalizujmy paradoks, znany w literaturze anglojęzycznej pod nazwą *The Paradox of Knowability* (*paradoks poznawalności*). Dylemat ten wyrasta ze sporu realistów, uznających, iż prawda jest pojęciem nieepistemicznym w tym sensie, że istnieją sądy prawdziwe, które z różnych względów całkowicie umykają naszemu poznaniu, z antyrealistami, którzy mimo, iż przyjmują istnienie sądów, których nigdy się do końca nie zna, to jednak odrzucają jakąś zasadniczą niepoznawalność tych sądów. Dobrym kontrprzykładem często wykorzystywanym przez antyrealistów jest zbiór wszystkich prawdziwych zdań teorii liczb. Chociaż nie poznamy wielu, a nawet nieskończenie wielu, z tych zdań, to jednak nie należy przypuszczać, że z zasady umykają one naszemu poznaniu. Jesteśmy bowiem w stanie poznać każde z tych zdań wzięte z osobna, chociaż w wielu przypadkach poznanie takie byłoby zapewne okupione jakimś ogromnym wysiłkiem. Należy przyjąć, iż antyrealistyczne stanowisko wymaga zaakceptowania, tak zwanej, *zasady poznawalności* (*The Knowability Principle*): Każdy sąd prawdziwy jest poznawalny.

Paradoks Fitcha ma w tę zasadę godzić, gdyż wychodząc od oczywistych przesłanek dotyczących wiedzy, prawdy i możliwości, dowodzi, że: *Jeśli istnieje sąd prawdziwy, którego prawdziwości nikt nie zna, to istnieje sąd prawdziwy, którego prawdziwości nikt nie pozna.* W roku 1963, w pracy zatytułowanej *A Logical Analysis of Some Value Concepts*, Frederic Fitch sformułował swoje sławne twierdzenie piąte, zgodnie z którym jeśli jest jakaś nieznana prawda to, to, że taka nieznana prawda jest, jest niepoznawalną prawdą[20]. Rozumowanie Fitcha można przedstawić następująco:

Paradoks Fitcha (paradoks poznawalności)

Przyjmijmy, że *q* jest sądem prawdziwym, którego prawdziwość nie jest znana. Rozważmy kolejny sąd:

(1) *q* i nie wiadomo, że *q*.

Jest to sąd prawdziwy, a mimo to nie jest poznawalny. Przypuśćmy bowiem, że w pewnej sytuacji zachodzi:

(2) Wiadomo, że: *q* i nie wiadomo, że *q*.

Ponieważ wiedza rozkłada się względem koniunkcji, otrzymujemy:

(3) Wiadomo, że *q*

oraz

(4) Wiadomo, że nie wiadomo, że *q*.

Ponieważ wiedza implikuje prawdziwość[21], z (4) wynika:

(5) Nie wiadomo, że *q*,

co pozostaje w sprzeczności z (3).

---

[20] Fitch, [1963]; Brogaard i Salerno, [SEPh].

[21] To, że wiedza implikuje prawdziwość wyraża się w prostej regule: *z faktu, iż wiemy, że p, wynika p.*

Zatem, wspomniana w punkcie (2) sytuacja jest wykluczona. Oznacza to, że sąd (1) jest niepoznawalny.
Dość często, prezentacja tego paradoksu wykorzystuje predykat K, dla którego tautologiami są: (*) $K(\alpha \wedge \beta) \rightarrow K(\alpha) \wedge K(\beta)$ oraz (**) $K(\alpha) \rightarrow \alpha$. Wówczas kolejne kroki powyższego rozumowania są następujące[22]:

Załóżmy, że	(1) $q \wedge \neg K(q)$.
Niech ponadto	(2) $K(q \wedge \neg K(q))$.
Zatem, na mocy (*) i (2) mamy	(3) $K(q)$
oraz	(4) $K(\neg K(q))$.
Wobec (**) i (4) otrzymujemy	(5) $\neg K(q)$.
Z (3) i (5)	(6) $K(q) \wedge \neg K(q)$ – sprzeczność.
Zatem,	(7) $\neg K(q \wedge \neg K(q))$.

Mogłoby się wydawać, że analizując powyższe rozumowanie, niezależnie, od tego, czy podane w mniej, czy w bardziej sformalizowanej postaci, nie sposób nie zauważyć, iż zawiera ono zupełnie podstawowy błąd polegający na tym, że w założeniach (1) i (2) dany jest konkretny sąd q, mimo iż z założenia powinien on być nieznany, a więc nie powinien być reprezentowany przez jakikolwiek konkretny symbol. Użycie symbolu q oznacza tu bowiem fakt, iż mówimy o konkretnym sądzie q. Innymi słowy, przyjęcie, iż formuła $q \wedge \neg K(q)$ reprezentuje istnienie nie znanego sądu prawdziwego jest niedorzeczne: q jest sądem prawdziwym i my nie wiemy, że sądem tym jest właśnie q, chociaż cały czas myślimy przecież o q i tylko o q. Zatem, q jest takim niezwykłym sądem prawdziwym, o którym zarazem wiemy i nie wiemy że jest prawdziwy. Nic więc dziwnego, że jesteśmy w stanie wyprowadzić sprzeczność (6) $K(q) \wedge \neg K(q)$. Wniosek w postaci wiersza siódmego $\neg K(q \wedge \neg K(q))$ jest jak najbardziej zrozumiały i nawet w najmniejszym stopniu nie paradoksalny: Nie jest prawdą, że w przypadku jakiegokolwiek konkretnego sądu q wiemy zarazem, że (jest prawdziwy i nie wiemy, że jest prawdziwy).

Można więc przyjąć, że paradoks Fitcha nie reprezentuje żadnego paradoksalnego rozumowania. Paradoksalne jest natomiast kojarzenie paradoksu Fitcha z kwestią istnienia prawdziwych sądów, które nie są poznawalne.

Właściwe rozumowanie powinno wychodzić od rekonstrukcji obu założeń. Jasnym jest przecież, że formułą reprezentującą stanowisko realistów istnienia prawdziwych, niepoznawalnych sądów nie jest (1) lecz:

$$\exists x\, (x \wedge \neg K(x)).$$

---

[22] Inne wersje paradoksu Fitcha można znaleźć w Brogaard i Salerno, [SEPh].

Jeśli teraz uznamy, iż mamy świadomość prawdziwości tego założenia, a więc w miejsce (2) przyjmiemy, że:

$$K(\exists x\,(x \wedge \neg K(x)));$$

to, z tak naturalnego skądinąd założenia, nie wyprowadzimy jakiejkolwiek sprzeczności. Przecież czymś zupełnie oczywistym, i w tym też sensie dla nas znanym, jest to, iż istnieją jakieś prawdziwe sądy, o których nie wiemy, że są prawdziwe.

Dość dobrym przykładem pokazującym trafność powyższej diagnozy problemu Fitcha jest prosta analiza dwóch wzajemnie sprzecznych sądów reprezentowanych przez następujące zdania: p_0 – *Bóg istnieje* oraz $\neg p_0$ – *nieprawda, że Bóg istnieje*. Wydaje się, iż nie sposób nie przyjąć, że dokładnie jeden z tych dwóch sądów jest prawdziwy[23]. Jednocześnie musimy się zgodzić również i z tym, że sąd prawdziwy reprezentuje zarówno $\neg K(p_0)$ jak i $\neg K(\neg p_0)$. Zatem, dokładnie jedna z dwóch koniunkcji; albo $p_0 \wedge \neg K(p_0)$, albo $\neg p_0 \wedge \neg K(\neg p_0)$; reprezentuje sąd prawdziwy. Oczywiście, nie tylko, że nie wiemy, która reprezentuje sąd prawdziwy, lecz co więcej, istnieją dość istotne podstawy do tego, aby sądzić, że nigdy za życia wiedzieć tego nie będziemy.

Najwyraźniej, przypadek ten jest argumentem na rzecz realistów, dostarcza bowiem przykładu dwóch sądów, których ocena prawdziwości w ogóle nie zależy od naszego wysiłku. To, czy prawdziwy jest sąd p_0, czy $\neg p_0$ jest przecież wyłącznie kwestią wiary. Przykład ten ilustruje jednak jeszcze coś więcej, a mianowicie prawdziwość przyjętych przez nas założeń będących poprawionymi wersjami (1) i (2). Chociaż nie wiemy, czy prawdą jest $p_0 \wedge \neg K(p_0)$, czy może $\neg p_0 \wedge \neg K(\neg p_0)$, to jednak wiemy (!) i to na mocy logiki a nie wiary, że któreś z nich jest prawdziwe. A zatem, prawdą jest zarówno $\exists x\,(x \wedge \neg K(x))$, jak i $K(\exists x\,(x \wedge \neg K(x)))$. Co więcej, prawdziwość drugiego z tych sądów, a więc $K(\exists x\,(x \wedge \neg K(x)))$ nie prowadzi do sprzeczności.

Paradoks Fitcha, podobnie jak paradoks Newcomba, jest przykładem logicznego problemu „na życzenie", a więc, niestety, pseudo-problemu. Jedynie przymykając oko na wskazany w powyższej analizie prosty błąd w zapisie rozsądnej i całkiem naturalnej przecież tezy, możemy próbować wykazywać jakąś rzekomą paradoksalność tej tezy[24]. Jak najbardziej oczywistą dla nas

---

[23] Zauważmy, że prawdziwość przekonania iż jedno z tych dwóch zdań musi wyrażać prawdziwy sąd nie zależy od sposobu w jaki rozumiemy słowo „Bóg".

[24] Istnieje bogata literatura poświęcona paradoksowi Fitcha, traktująca go z całą powagą jako faktyczny, ważny problem logicznej natury. Interesujący przegląd tych propozycji wraz z obszerną listą najważniejszych publikacji poświęconych paradoksowi Fitcha znajduje się w Brogaard i Salerno, [SEPh]. Należy jednak zauważyć, że waga tych ciekawych skądinąd rozważań zależy wyłącznie od tego, czy formuły (1) i (2) dobrze reprezentują stanowisko realistów. Jeśli jednak tak

prawdą jest nie tylko istnienie sądów zarazem prawdziwych i dla nas nie znanych, lecz również i to, że wiemy, że sądy takie istnieją.

6. PODSUMOWANIE

Liczba znanych od wieków sofizmatów i paralogizmów jest olbrzymia. Listy tych, w oczywisty sposób, błędnych argumentacji możemy znaleźć w publikacjach książkowych współczesnych i dawnych autorów. Prawdziwymi mistrzami sofizmatów i paralogizmów byli średniowieczni filozofowie: Francuz Jean Buridan oraz Anglik Richard Kilvington. Ich zbiory wprowadzających w błąd, i nierzadko w osłupienie, argumentów uchodzą za najobszerniejsze, dostępne w literaturze, kolekcje. Najważniejszymi pozycjami poświęconymi sofizmatom i paralogizmom, najczęściej, tym sformułowanym przez Buridana, są następujące książki:

- A. de Libera, *César et le Phénix. Distinctiones et sophismata parisiens du XIIIe siècle.* Centro di cultura medievale, 4; Scuola Normale Superiore, Pisa 1991.
- L. M. De Rijk, *Some Earlier Parisian Tracts on Distinctiones sophismatum.* Ingenium Publishers, Nijmegen 1988.
- T. K. Scott, *Johannes Buridanus. 'Sophismata'. Critical Edition with an Introduction.* Grammatica Speculativa, 1; Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Cannstatt 1977.
- N. Kretzmann, and B. E. Kretzmann, *The 'Sophismata' of Richard Kilvington.* University Press for The British Academy, Oxford 1990.
- J. Pinborg, *Sigerus de Cortraco, 'Summa modorum significandi sophismata'; New Edition, on the Basis of G. Wallerand's editio prima, with Additions, Critical Notes, an Index of Terms and an Introduction.* J. Benjamins, Amsterdam 1977.
- J. Longeway, *William Heytesbury: On Maxima and Minima. Chapter 5 of 'Rules for Solving Sophismata', with an Anonymous Fourteenth Century Discussion, a Translation with an Introduction and Study.* Synthese Historical Library, 26; Reidel, Dordrecht 1984.
- F. Pironet, *Guillaume Heytesbury, Sophismata asinina. Une introduction aux disputes médiévales. Présentation, édition critique et analyse.* Collection Sic et Non; Vrin, Paris 1994.

---

nie jest, a wszystko na to wskazuje, to całe, pominięte tu milczeniem, rozważania dotyczą nie tyle problemu istnienia kłopotliwych sądów, co sprzecznego przecież założenia, że w przypadku jakiegoś konkretnego sądu *q* nie wiemy, że *q* jest prawdą i na dodatek o tym wszystkim wiemy.

- T. K. Scott, *Sophisms on Meaning and Truth.* Appleton Century Crofts, New York 1966.
- J. Biard, *Jean Buridan, Sophismes.* Collection Sic et Non; Vrin, Paris 1993.
- G. E. Hughes, *John Buridan on Self-Reference. Chapter Eight of Buridan's 'Sophismata'. An Edition and a Translation with an Introduction and a Philosophical Commentary.* Cambridge University Press, Cambridge 1982.

O ile jednak Buridan czy Kilvington, jak i współcześni im filozofowie i studenci, doskonale zdawali sobie sprawę z tego, iż dana argumentacja jest zwykłym sofizmatem, a właściwie paralogizmem, to jak się okazuje, na przełomie XX i XXI wieku funkcjonują prosto rozwiązywalne problemy, które są powszechnie uznawane za niebanalne, logiczne dylematy. Ich przykładami są, zarówno paradoks Newcomba, jak i paradoks Fitcha.

Na koniec tego rozdziału przypomnijmy niektóre z występujących w literaturze raczej znane i proste do rozwiązania sofizmaty i paralogizmy. W tym celu zacytujmy *Sztukę argumenatcji. Słownik terminologiczny* Szymanka. Niektóre z nich, jako będące przykładami rozumowań zawierających błąd wieloznaczności są dokładniej omówione w rozdziale drugim zatytułowanym *Paradoksy wynikające z wieloznaczności.* A oto krótka lista wybranych sofizmatów i paralogizmów[25]:

ARGUMENTACJE O STAROŻYTNYM RODOWODZIE

X: Czy ten pies jest twoim psem?
Y: Tak.
X: Czy ten pies jest ojcem tych szczeniąt?
Y: Tak.
X: A więc ten pies jest twój i jest ojcem – zatem jest twoim ojcem.

Ten posąg jest dziełem sztuki i jest to twój posąg – a więc ten posąg jest twoim dziełem sztuki.

Siedzący wstał, i teraz stoi, a więc: siedzący stoi.

Skoro żaden złodziej nie chce brać niczego, co jest złe, to pragnie tylko rzeczy dobrych – a kto pragnie tylko rzeczy dobrych, jest dobry; zatem każdy złodziej jest dobry.

---

[25] Szymanek, [2001], s. 224–225.

To, co nie jest niesprawiedliwe, gdy je czyni Teodor, nie może być nazwane niesprawiedliwym, gdy czyni je Hipparchia. Teodor nie postępuje niesprawiedliwie, bijąc sam siebie – więc i Hipparchia, bijąc Teodora, nie postępuje niesprawiedliwie.

Koriskos jest człowiekiem, a Sokrates to nie Koriskos, zatem Sokrates nie jest człowiekiem.

ARGUMENTACJE O ŚREDNIOWIECZNYM RODOWODZIE

Pani Wiśniewska chciałaby być żoną pana Kowalskiego. Żona pana Kowalskiego ma na imię Ewa, zatem pani Wiśniewska chciałaby mieć na imię Ewa.

Jeśli powiem, że jesteś osłem, to powiem, że jesteś ssakiem. Jeśli powiem, że jesteś ssakiem, to powiem prawdę. Zatem, jeśli powiem, że jesteś osłem, to powiem prawdę.

Kto pije, ten śpi; kto śpi, nie grzeszy; kto nie grzeszy, jest święty; zatem: kto pije, jest święty. W łacińskim oryginale: *Qui bibit, dormit; qui dormit, non peccat; qui non peccat, sanctus est; ergo: qui bibit, sanctus est.*

Jeśli podejmiesz walkę, to albo twój przeciwnik cię pokona, albo ty pokonasz przeciwnika. Jeśli zostaniesz pokonany, to nie będziesz miał się czym chwalić. Jeśli pokonasz przeciwnika, to znaczy, że jest on od ciebie gorszy, a pokonać gorszego nie przynosi chluby, więc i w tym przypadku nie będziesz miał się czym chwalić. Tak czy owak – nie będziesz miał się czym chwalić.

Co kupiłeś, to zjadłeś. Kupiłeś surowe mięso, zatem zjadłeś surowe mięso. W łacińskim oryginale: *Quisquid emisti, comedisti; carnes crudas emisti; ergo: carnes crudas comedisti.*

To sukno jest z Anglii. Anglia to ziemia. Zatem to sukno jest z ziemi.

Mysz gryzie książkę. Mysz to sylaba. Zatem, sylaba gryzie książkę.

1

PARADOKSY WYNIKAJĄCE Z NIEDOSKONAŁOŚCI INTUICJI

W swej większości, paradoksy składające się na treść tego rozdziału nie mają rozwiązań, a to dlatego, że nie są problemami wymagającymi jakiegokolwiek rozwiązania. Wynikają one bowiem z niedoskonałości naszej intuicji, można by rzec, z jej niedostosowania do bieżących odkryć, i to właśnie jest ich istotą. W bardziej lub mniej ścisły sposób wiążą się one z niezwykłym rozwojem matematyki. Rozwój ten systematycznie zaskakuje samych matematyków, prowadząc ich od jednych, niezgodnych z intuicjami, do kolejnych, w jeszcze większym stopniu nieintuicyjnych odkryć. Jeśli więc jakieś odkrycie matematyczne przeczy naszym intuicjom, to z racji niemalże niezawodnego statusu twierdzeń matematycznych winne są raczej intuicje[1]. To podążający za rozwojem matematyki rozwój naszej intuicji jest jedynym lekarstwem na pozbycie się odczucia nielogiczności, absurdalności, braku sensu wniosków wynikających z niektórych, dokonywanych na gruncie matematyki, odkryć. Można wręcz zaobserwować postęp w rozwoju naszej, bazującej na matematyce, intuicji, gdyż to, co kiedyś, jeszcze nie tak dawno, bo na przełomie XIX i XX wieku uchodziło za niezwykłe i niezrozumiałe, dziś wydaje się być czymś naturalnym, a więc również i intuicyjnym.

Niekiedy jednak niewłaściwe intuicje stają się punktem wyjścia dla formułowania błędnych tez o całkiem fundamentalnym znaczeniu. Najlepszym przykładem jest tu teoria mnogości Georga Cantora. Błędność takich założeń, w tym przypadku aksjomatyki cantorowskiej teorii mnogości, została ujawniona przez serię paradoksów, wśród których szczególnie ważną pozycję zajmuje antynomia Russella. Naturalnie paradoksy te, pokazujące sprzeczność ówczesnej teorii mnogości, wymagały rozwiązania, czyli takiego ufundowania nowej teorii mnogości, która byłaby od nich wolna. Nie ulega wątpliwości fakt, iż paradoksy

[1] Słowo „niemalże" ma wyrażać świadomość tego, iż zdarzyło się już kiedyś (patrz antynomia Russella), że matematyka okazała się sprzeczna. Nieraz też w matematyce obowiązywały twierdzenia, z których później matematycy byli zmuszeni zrezygnować. Ponadto, takie kierunki jak konstruktywizm, intuicjonizm każą zastanowić się nad statusem niektórych obowiązujących na gruncie matematyki klasycznej zasad. Gdyby nie te „przypadki" matematyka słusznie powinna uchodzi za niezawodną, a to z racji swojej dedukcyjnej metody.

cantorowskiej teorii mnogości, mimo, iż wymagają rozwiązania, to podobnie jak i inne omawiane w tym rozdziale dylematy, które rozwiązań nie potrzebują, są skutkiem niedoskonałości naszej intuicji.

1.1. PARADOKS BUTELKI STEVENSONA, czyli nieintuicyjność wniosków, wynikających z wystarczająco wielokrotnego powtórzenia nawet prostych rozumowań

Paradoks butelki Stevensona jest uważany za inną postać paradoksu niespodziewanego sprawdzianu, czyli paradoksu kata[2], omówionego w trzecim rozdziale. Okazuje się jednak, że formalne, wydawać by się mogło dość ścisłe, podobieństwo jakie zachodzi między strukturą argumentacji występującej w paradoksie butelki Stevensona i paradoksie kata nie wystarcza do uznania obu paradoksów za dwie wersje jednego i tego samego problemu. Zasadnicza różnica tkwi w tym, że paradoks butelki Stevensona nie ma rozwiązania, podczas gdy paradoks kata ma. O różnicy tej stanowi fakt, iż w paradoksie kata (nieoczekiwanego sprawdzianu) mamy do czynienia ze swoistą kolistością, samozwrotnością argumentacji, która nie kończy się w miejscu, w którym kończy się argumentacja paradoksu butelki Stevensona.

Paradoks butelki Stevensona

Wyobraźmy sobie, że możemy kupić butelkę z uwięzionym w niej arabskim dżinem spełniającym jedno, ale za to dowolne życzenie. Zakup ten stawia jednak przed nami pewien bardzo ważny warunek, który musimy spełnić. Otóż, gdy dżin zrealizuje nasze pragnienie, musimy butelkę odprzedać za sumę mniejszą od ceny za jaką sami tę butelkę kupiliśmy. W przeciwnym razie skażemy się na nieopisane męki, które będą trwały przez wieczność.

Problem jaki stwarza warunek paradoksu butelki Stevensona jest jasny. Nie możemy kupić butelki za jeden grosz, ponieważ wówczas nie moglibyśmy jej sprzedać. Również za dwa grosze jej nie kupimy, bo ktoś musiałby ją od nas kupić za jeden grosz, a wtedy osoba ta nie mogłaby jej sprzedać. Trudno więc w podobnej sytuacji liczyć na znalezienie nabywcy. Także za trzy grosze nie kupimy butelki z dżinem, bo musielibyśmy ją sprzedać za dwa grosze lub za jeden, ale jak to zostało wykazane, w żadnym z tych przypadków nowy nabywca nie znajdzie kolejnego nabywcy. Ponieważ nie możemy kupić butelki za trzy grosze, więc nie możemy jej kupić również i za cztery grosze. Jeślibyśmy bowiem zakupili butelkę za cztery grosze, ktoś musiałby ją od nas odkupić za co

---

[2] Por. Mathworld, [a].

najwyżej trzy grosze, ale to jest wykluczone. Powtarzając to rozumowanie dostateczną liczbę razy jesteśmy w stanie pokazać, że nie można butelki kupić za żadną, nawet bardzo wysoką cenę. Jeśli bowiem transakcja raz by się dokonała, to ktoś musiałby za to zdarzenie zapłacić spędzeniem wieczności na nieopisanych cierpieniach.

Naturalnie, powyższe rozumowanie narzuca konieczność dodania, iż ktoś kto nie ma poczucia odpowiedzialności za innych może kupić butelkę z dżinem uruchamiając tym samym prawdziwą lawinę zdarzeń, które muszą się wówczas dokonać. Zdarzeniami tymi są kolejne zakupy butelki przerwane tragedią ostatniego jej nabywcy. Z psychologicznego punktu widzenia, decyzja o pierwszym zakupie butelki jest tym łatwiejsza im wyższa jest jej cena. Wówczas bowiem faktyczna niemożność sprzedania butelki wydaje się być tak odległą, że aż nierealną sytuacją: „jest czymś co mnie na pewno nie spotka, inni zaś mnie nie interesują". Jednak bez względu na to jaka jest ta pierwsza cena butelki, nieszczęście musi spaść na kogoś od kogo nikt już nie będzie chciał jej kupić. Sytuację polegającą na pierwszym zakupie można porównać do przewrócenia pierwszej, z całej serii odpowiednio ustawionych kostek domina. Tu również następujące po sobie zdarzenia, polegające na przewracaniu się kolejnych kostek domina, są nie do powstrzymania.

Paradoks butelki Stevensona jest więc przykładem dylematu, którego jedynym źródłem jest to, że konieczne jest wystarczająco wielokrotne powtórzenie pewnego wnioskowania, które choć proste to jednak powtórzone dostatecznie wiele razy sprawia, że ostateczny wniosek może wydawać się zaskakujący. Łatwo jednak zauważyć, że paradoks butelki Stevensona, ani nie kryje w sobie żadnej szczególnej tajemnicy, ani nie wynika z jakiegokolwiek błędu, tak jak przewracające się kolejno kostki domina tworzące długi rząd nie kryją w sobie żadnego innego sekretu poza tym, wynikającym z precyzji i determinacji człowieka, który je ustawił. Jeśli więc czujemy się zaskoczeni końcowym wnioskiem, to tylko dlatego, że nie zwykliśmy w codziennym życiu operować rozumowaniami polegającymi na dostatecznie wielokrotnym powtarzaniu jednego i tego samego kroku inferencyjnego.

Nieuchronność ostatecznego nieszczęścia jakie musi spaść na ostatniego nabywcę butelki sprawia, że paradoks ten nie ma rozwiązania. Jeśli bowiem ktoś kupi butelkę, to nie sposób już uniknąć tragedii, do której prędzej czy później i tak musi dojść. Oznacza to, że jeśli faktycznie nie chcemy niczyjego nieszczęścia, to nie powinniśmy dopuścić do zakupu butelki nawet za ogromną sumę pieniędzy.

Ostatnia teza pomija problem treści życzenia osoby kupującej butelkę. Jeśli bowiem któryś z nabywców butelki, niekoniecznie ten ostatni, wyrazi życzenie wykluczające karę, która miałaby dotknąć osobę nie będącą już w stanie jej sprzedać, to należałoby wówczas rozważyć możliwość zakupu butelki za dowolną cenę, bez jakichkolwiek niepożądanych konsekwencji. W przypadku, gdy bierzemy pod uwagę ten dodatkowy czynnik, problem butelki Stevensona przestaje nam się kojarzyć z nieuchronnie przewracającymi się klockami domina.

1.2. PARADOKS WSPÓLNYCH URODZIN, czyli nieintuicyjność niektórych wyników uzyskanych na gruncie rachunku prawdopodobieństwa

Określenie prawdopodobieństwa zdarzeń na mocy reguł rachunku prawdopodobieństwa prowadzi zazwyczaj do intuicyjnych wniosków. Trudno bowiem nie zgodzić się na przykład z oczywistością tego, że zdarzenie polegające na wyrzuceniu reszki w jednym rzucie symetryczną monetą ma prawdopodobieństwo równe 1/2. Na ogół, wynikające z teorii rachunku prawdopodobieństwa wyniki obliczeń prawdopodobieństw zdarzeń są dość intuicyjne. Istnieją jednak przypadki, które mogą nas zaskakiwać. Przedstawiony niżej problem, znany pod nazwą paradoksu wspólnych urodzin, pokazuje, że nawet w ramach tak intuicyjnej teorii można znaleźć przykłady nieintuicyjnych wyników.

Paradoks wspólnych urodzin

Załóżmy, że na przyjęciu są 23 osoby. Gdyby przyszło nam stwierdzić, czy duże jest prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dwie osoby z tego grona obchodzą urodziny tego samego dnia, zapewne powiedzielibyśmy, że to prawdopodobieństwo nie jest zbyt duże. A już na pewno nie znając wyniku wyliczenia tego prawdopodobieństwa, nie powiedzielibyśmy, że bardziej prawdopodobne jest to, że dwie osoby spośród 23 obchodzą urodziny tego samego dnia, niż że tak nie jest. Tymczasem, okazuje się, że prawdopodobieństwo wspomnianego zdarzenia wynosi aż 0,507297, a więc jest większe od 0,5. Oznacza to, że zdarzenie przeciwne jest co prawda minimalnie, ale jednak mniej prawdopodobne[3]:

$$P_{23} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} = 0{,}507297234\ldots$$

---

[3] W powyższym wyliczeniu zostało przyjęte uproszczenie, że nikt spośród wspomnianych 23 osób nie urodził się w roku przestępnym. Uwzględnienie tego faktu nie jest jednak trudne i nie wpływa w istotny sposób na ostateczną wartość prawdopodobieństwa.

Tak zaskakująco wysokie prawdopodobieństwo wynika z faktu, że grono osób jest odpowiednio liczne. Jeśli bowiem policzymy prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dwie przypadkowo wybrane osoby obchodzą urodziny jednego dnia, to okaże się, że jest ono niezwykle małe:

$$P_2 = 1 - \frac{365 \cdot 364}{365^2} = 0{,}002739726...$$

Można jedynie przypuszczać, że ten raczej intuicyjny i w najmniejszym stopniu nie zaskakujący fakt małego prawdopodobieństwa drugiego z rozważanych zdarzeń ma wpływ na to, iż pierwsze z rozważanych tu zdarzeń również oceniamy jako bardzo mało prawdopodobne. Zwłaszcza że prawdopodobieństwa zdarzeń polegających na tym, że w gronie trzech oraz czterech przypadkowo spotkanych osób dwie obchodzą urodziny tego samego dnia również są bardzo małe i wynoszą odpowiednio: P_3 = 0,0082... oraz P_4 = 0,0163... Nawet, jeśli grono osób zwiększymy do dziesięciu, nadal prawdopodobieństwo rozważanego zdarzenia nie będzie znacząco większe: P_{10} = 0,1169... Można więc przyjąć, że w przypadku problemu wspólnych urodzin paradoks nie pojawi się tak długo, jak długo rozpatrywane grono osób nie będzie w wystarczającym stopniu liczne.

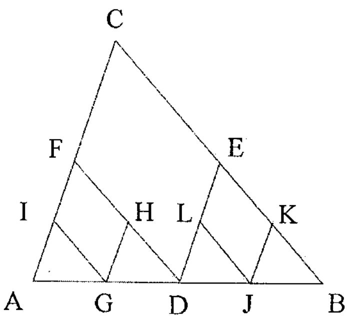
Tak jak w przypadku paradoksu butelki Stevensona, paradoks wspólnych urodzin nie dotyczy żadnej szczególnej matematycznej czy filozoficznej kwestii, nie wynika też z jakiegokolwiek błędu. Jedynym jego źródłem jest to, iż pewne matematyczne obliczenia są przeprowadzane na tyle rzadko, że ich wyniki wydają się nam nieintuicyjnymi. Można nawet przypuszczać, że dla kogoś, kto z jakichś, na przykład zawodowych, powodów musiałby stale wykonywać podobne obliczenia, ich wyniki stałyby się nie tylko intuicyjne, lecz wręcz oczywiste.

1.3. PARADOKS APROKSYMACJI ORAZ PARADOKS RÓWNIKA, czyli nieintuicyjność niektórych wyników uzyskanych na gruncie geometrii Euklidesa

Mogłoby się wydawać, że w przeciwieństwie do geometrii nieeuklidesowych, intuicyjność geometrii euklidesowej nie może budzić wątpliwości. Istnieją jednak przykłady kwestionujące zasadność tej dość powszechnej opinii. Niezgodność intuicji z wynikami ścisłego matematycznego rozumowania bazującego na prostych faktach geometrii euklidesowej dobitnie pokazują dwa kolejne dylematy. Pierwszy z nich znany jest pod nazwą paradoksu aproksymacji:

Paradoks aproksymacji[4]

Niech dany będzie trójkąt *ABC*. Niech ponadto, punkty *D*, *E* i *F* dzielą na połowy odpowiednio boki *AB*, *BC* i *AC*. Powstałe w ten sposób dwa trójkąty *ADF* i *DBE* są podobne do trójkąta *ABC*. Przyjmijmy dalej, że punkty *G*, *H*, *I*, *J*, *K*, *L* dzielą na połowy odpowiednio boki *AD*, *DF*, *FA*, *DB*, *BE*, *ED*. W ten sposób powstałe cztery nowe trójkąty *AGI*, *GDH*, *DJL*, *JBK* również są podobne do trójkąta *ABC*. Proces dzielenia kolejnych boków coraz to mniejszych trójkątów możemy kontynuować w nieskończoność. Rozważmy więc nieskończony ciąg krzywych *ACB*, *AFDEB*, *AIGHDLJKB* oraz wszystkich tych, które powstaną w wyniku dalszego dzielenia na połowę kolejnych boków coraz to mniejszych trójkątów. Każda z krzywych wraz z bokiem *AB* ogranicza powierzchnię o coraz mniejszym polu. Pola powierzchni ograniczonych kolejnymi krzywymi i odcinkiem *AB* tworzą ciąg zbieżny do zera. Mogłoby z tego wynikać, że długości kolejnych krzywych tworzą ciąg zbieżny do długości *AB*. Tymczasem, wprost z konstrukcji trójkątów wynika, że każda krzywa ma długość równą długości krzywej *ACB*. Zatem długości krzywych tworzą ciąg stały. Oznacza to, że istnieje malejący do zera ciąg pól taki, że każde pole tego ciągu ma obwód o dokładnie tej samej długości[5].



Paradoks aproksymacji pokazuje jak bardzo nasze intuicje są zawodne. Mimo iż pola powierzchni tworzą ciąg zbieżny do zera, to jednak ograniczające je krzywe mają wciąż tę samą długość. Jak widać, paradoks aproksymacji przeczy naszemu intuicyjnemu przekonaniu, że pola tworzące zbieżny do zera ciąg muszą mieć długości obwodów tworzące ciąg, jeśli nie zbieżny do zera, to przynajmniej malejący.

Paradoks równika stanowi kolejny przykład na to, iż wynik ścisłego, opartego na geometrii euklidesowej wnioskowania nie zawsze jest intuicyjnie przewidywalny, mimo iż sama geometria euklidesowa uchodzi za szczególnie intuicyjną teorię.

Paradoks Równika

Rozważmy dwie kule K_1 i K_2. Promień pierwszej ma długość $R_1 = 6300\,km$, drugiej zaś $R_2 = 3\ cm$. Można więc powiedzieć, że w przybliżeniu pierwsza kula ma wielkość kuli ziemskiej, druga natomiast piłki do gry w tenisa. Długość

---

[4] Argumentacja tego paradoksu może służyć „udowodnieniu", że suma długości dwóch boków dowolnego, niezdegenerowanego trójkąta jest równa długości trzeciego boku.

[5] Paradoks aproksymacji nie wiąże się jedynie z ciągiem odpowiednio konstruowanych trójkątów. Podobnie zaskakujący wniosek można bowiem otrzymać wykorzystując odpowiedni ciąg półokręgów, trapezów itd.

największych obwodów kuli K_1 oraz K_2 wynosi odpowiednio $2\pi R_1$ i $2\pi R_2$. Opaszmy więc obie kule wzdłuż ich równików dwoma sznurkami o długościach równych odpowiednio $2\pi R_1 + 1\ m$ oraz $2\pi R_2 + 1\ m$. Ponieważ oba sznurki są o metr dłuższe od największych obwodów kul R_1 i R_2, powstanie odległość między każdym ze sznurków a powierzchnią odpowiedniej kuli. Intuicja podpowiada nam, że odległość między sznurkiem o długości $2\pi R_1 + 1\ m$ a powierzchnią kuli R_1 mierzonej wzdłuż równika powinna być znacznie mniejsza od odległości między sznurkiem o długości $2\pi R_2 + 1\ m$ a powierzchnią kuli R_2 również mierzonej wzdłuż równika. Tymczasem, okazuje się, że obie odległości są równe. Niech R_1' i R_2' oznaczają długości promieni okręgów, jakie utworzyły odpowiednio oba sznurki. Wówczas

$$R_1' = \frac{2\pi R_1 + 1m}{2\pi} \quad \text{oraz} \quad R_2' = \frac{2\pi R_2 + 1m}{2\pi}.$$

Zatem

$$R_1' = R_1 + \frac{1m}{2\pi} \quad \text{oraz} \quad R_2' = R_2 + \frac{1m}{2\pi}.$$

Oznacza to, że w obu przypadkach odległość między sznurkiem a powierzchnią kuli wynosi $\frac{1}{2\pi}m$, czyli w przybliżeniu 16 *cm*, i najwyraźniej nie jest zależna od promienia kuli, lecz jedynie od dodanej długości.

1.4. PARADOKS HEMPELA (CZARNEGO KRUKA, POTWIERDZANIA), czyli nieintuicyjność niektórych wyników uzyskanych na drodze rozumowania indukcyjnego

W rozdziale poświęconym sofizmatom i paralogizmom został omówiony paradoks koni, będący skutkiem błędnie zastosowanego rozumowania wykorzystującego indukcję matematyczną. Jak to zostało pokazane, przyczyny tego, że wniosek wynikający z argumentacji paradoksu koni jest dla nas zaskakujący nie należy upatrywać w jakiejś niedoskonałości naszej intuicji. Co więcej, odczucie paradoksalności wniosku, świadczy o tym, że w tym konkretnym przypadku nasza intuicja jest właściwa i nie zawodzi nas nawet w najmniejszym stopniu. Pewnym odwróceniem problemu jest paradoks czarnego kruka, którego argumentacja bazuje na zwykłym rozumowaniu indukcyjnym, nie zaś na indukcji matematycznej. W tym przypadku, nieintuicyjność wniosku świadczy o pewnej niedoskonałości naszej intuicji.

Rozważany tu paradoks został odkryty przez współczesnego filozofa, przedstawiciela logicznego pozytywizmu, Carla Gustava Hempela (1905–1997) i był efektem, oczywiście nie jedynym, jego badań nad kwestią potwierdzania tez. Stąd inną nazwą tego dylematu jest *paradoks potwierdzania*. Chyba jednak problem ten jest najlepiej znany jako *paradoks czarnego kruka*, gdyż sam Hempel przedstawił go w postaci analizy sposobów potwierdzania prawdziwości zdania stwierdzającego, że wszystkie kruki są czarne. Dylemat ten przypomnijmy cytując internetową encyklopedię Wikipedię[6]:

Paradoks czarnego kruka

Paradoks czarnego kruka to paradoks dotyczący wnioskowania za pomocą logiki induktywnej. Zgodnie z zasadami indukcji, za każdym razem, kiedy widzimy, że pewne twierdzenie zachodzi, nasze poczucie, że zachodzi zwiększa się. Czyli np. jeśli twierdzenie to brzmi „wszystkie kruki są czarne", widzimy jakiegoś kruka – i okazuje się być on rzeczywiście czarny – nasza wiara w to twierdzenie wzrasta. Lecz twierdzenie to jest równoważne twierdzeniu „wszystko co nie jest czarne nie jest krukiem". Czyli jeśli widzimy np. szarego słonia, nasza wiara w to, że wszystkie kruki są czarne również powinna wzrosnąć, co jest wnioskiem bardzo nieintuicyjnym".

Na tej samej stronie czytamy dalej[7]: „Pomimo tej nieintuicyjności, wniosek ten ma pewne uzasadnienie – jeśli zobaczymy już wszystkie nie-czarne obiekty we wszechświecie, i nie będzie wśród nich żadnego kruka, możemy uczciwie powiedzieć, że wszystkie kruki są czarne".

Zaproponowane w Wikipedii rozwiązanie problemu nie jest pełne. Kwestią paradoksu jest bowiem wzrastanie pewności prawdziwości twierdzenia „wszystkie kruki są czarne" spowodowane obserwacją, na przykład, szarego słonia. Zatem, rozwiązanie tego problemu nie wiąże się z obejrzeniem wszystkich obiektów wszechświata. Nie idzie tu bowiem o nabranie pewności w jakiejś kwestii. Problem jest inny i dotyczy wyłącznie wspomnianego wzrastania pewności prawdziwości jakiejś, uzasadnianej indukcyjnie tezy.

Po pierwsze, zauważmy, że istotnie zdanie *Z*1 = „wszystkie kruki są czarne" jest równoważne zdaniu *Z*2 = „wszystko co nie jest czarne nie jest krukiem". Prawdą jest także i to, że spostrzeżenie każdego czarnego kruka zwiększa naszą wiarę w prawdziwość zdania *Z*1. Ten fakt jest jednak wyrażony skrótowo.

---

[6] Patrz, Wikipedia, [e].

[7] Wydaje się, że niepotrzebne jest także kojarzenie tego dylematu z tak zwanym *twierdzeniem Bayesa* głoszącym, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia *X* pod warunkiem zajścia zdarzenia *Y* wyraża się ułamkiem, którego licznik jest iloczynem prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia *X* i prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia *Y* pod warunkiem zajścia zdarzenia *X*, mianownikiem zaś jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia *Y*, patrz Wikipedia, [e], [f].

W pełnej, bardziej precyzyjnej postaci stwierdzenie to winno brzmieć: spostrzeżenie, że jakiś kruk okazuje się być czarny zwiększa naszą wiarę w prawdziwość zdania Z1. Analogicznie precyzyjne stwierdzenie dotyczące szarego słonia powinno być więc następujące: spostrzeżenie, że jakiś szary, a więc nie-czarny obiekt okazuje się być słoniem, czyli nie-krukiem zwiększa naszą wiarę w prawdziwość zdania Z1. Przecież, dostrzeżenie wśród szarych obiektów kruka, obaliłoby rozważaną tezę w taki sam sposób, jak odkrycie wśród kruków szarego egzemplarza. Zatem, niedostrzeżenie wśród szarych obiektów kruka, musi potwierdzać rozważaną tezę w taki sam sposób, jak nie-odkrycie wśród kruków szarego egzemplarza. Wyrażenia „widzę szarego słonia" oraz „widzę, że szary (tj. nie-czarny) obiekt jest słoniem (tj. nie-krukiem)" mogą być zastępowane w wielu kontekstach. Jednak w tym konkretnym użycie każdego z tych dwóch wyrażeń kieruje nasze skojarzenia na inne tory. Zdanie każdy kruk jest czarny można w języku rachunku kwantyfikatorów zapisać następująco:

$$\forall x\,(K(x) \rightarrow Cz(x)),$$

gdzie predykaty K i Cz oznaczają odpowiednio: bycie krukiem oraz bycie czarnym. Fakt, że równoważnym temu zdaniu jest zdanie postaci:

$$\forall x\,(\neg Cz(x) \rightarrow \neg K(x))$$

nie wydaje się być czymś szczególnie nieintuicyjnym, a tym bardziej paradoksalnym. Tymczasem, problem paradoksu czarnego kruka sprowadza się właśnie do wspomnianej równoważności obu zdań.

Dla lepszej ilustracji tego problemu wyobraźmy sobie następującą sytuację: wiemy, że w pewnym pudełku znajdują się wyłącznie kule i sześciany. Ponadto, wiemy, że każda bryła jest w jednym z dwóch kolorów: czarnym lub białym. Aby stwierdzić prawdziwość zdania „wszystkie kule są czarne", wystarczy, że sprawdzimy, czy wszystkie kule są czarne, jednak wystarczającym będzie również i to, gdy sprawdzimy, czy wszystkie nie-czarne, czyli białe obiekty są nie-kulami, czyli sześcianami. Każde sprawdzenie, czy to przeprowadzone pierwszą metodą, czy drugą będzie tak samo dobre. Możliwe jest nawet połączenie obu metod.

Jak się więc okazuje, problemem analizowanego tu dylematu jest użycie zdania „widzę szarego słonia" jako skrótu zastępującego dłuższe, lecz precyzyjniejsze, a co najważniejsze znacznie bardziej intuicyjne zdanie „widzę, że nie-czarny obiekt jest nie-krukiem". Sedno problemu Hempela leży najprawdopodobniej w tym, że mamy nieodparte wrażenie, że znacznie łatwiej, a więc i praktyczniej jest sprawdzić, czy wszystkie kruki faktycznie są czarne, aniżeli to, czy wszystkie nie-czarne obiekty są nie-krukami.

W pierwszej sytuacji mamy bowiem do sprawdzenia mniej przypadków, niż w sytuacji drugiej[8]. Na tej podstawie możemy odnieść wrażenie, że każde potwierdzenie uzyskane w sytuacji pierwszej jest cenniejsze, tak jak cenniejsze wydaje się sprawdzenie kieszeni, niż lodówki w trakcie poszukiwania kluczy do mieszkania. Nie znaczy to jednak, że logicznie wykluczone jest, aby klucze znalazły się w lodówce. W argumentacji problemu Hempela nie ma jednak mowy o tym, że pewne sprawdzenia są mniej cenne od innych, lecz jedynie to, że w ogóle jakieś obserwacje uchodzą za prawomocne potwierdzenia tez ogólnych. W tym właśnie sensie problem Hempela nie jest żadnym paradoksem.

Autorem takiego właśnie rozwiązania jest sam Hempel, który przedstawił podobną argumentację pokazującą, że zaobserwowanie białego buta potwierdza tezę, że wszystkie kruki są czarne: stwierdzono bowiem, że coś co jest białe okazało się nie być krukiem[9]. Jest to sytuacja podobna do tej, w której zaobserwowany kruk okazuje się być czarny.

Nietrudno zauważyć, że opinia ta nie jest powszechnie podzielana przez filozofów. I tak dla przykładu Sainsbury w swojej książce *Paradoxes* odrzuca argumentację Hempela, proponując własną. Twierdzi on, iż paradoks ten jest skutkiem jednoczesnej akceptacji dwóch zasad odpowiedzialnych za racjonalność przekonań. Są nimi[10]:

zasada $E1$: *Jeśli dwie hipotezy są znane a priori jako równoważne, wówczas każde potwierdzenie jednej z nich jest potwierdzeniem drugiej*;

zasada $G1$: *Teza ogólna jest potwierdzana przez każde swoje podstawienie.*

Zdaniem Sainsbury'ego, rozwiązanie problemu Hempela może polegać na odrzuceniu zasady $E1$ lub na odrzuceniu $G1$. Przyznaje również, że można, tak jak uczynił to sam Hempel, uznać wniosek wieńczący całą argumentację paradoksu za poprawną i *de facto* nieparadoksalną konkluzję. Uważa jednak, że stanowisko to musi pociągać za sobą konieczność wymyślenia jakiejś skomplikowanej historii uzasadniającej końcową tezę, taką jak chociażby ta, która głosi, że zaobserwowanie białego buta potwierdza prawdziwość zdania „wszystkie kruki są czarne". Dyskutując sensowność odrzucenia raczej oczywistej zasady $E1$ oraz odrzucenia niemniej oczywistej zasady $G1$, ostatecznie Sainsbury opowiada się za drugim stanowiskiem, przyznając, że

[8] Naturalnie, wrażenie to jest w pewnym sensie iluzoryczne, gdyż i tak nie sprawdzimy przecież wszystkich kruków.

[9] Sainsbury, [1988], s. 80–81.

[10] Sainsbury, [1988], s. 75–80.

cena jaką płaci w ten sposób za rozwiązanie paradoksu Hempela jest bardzo wysoka[11].

Paradoks Hempela jest przykładem na to, iż mając świadomość paradoksalności wielu tautologii logiki klasycznej, jesteśmy niekiedy skłonni uznać pewne nieparadoksalne wyniki za paradoksalne, tylko dlatego, że nie podejmujemy się zgłębienia faktycznego sensu tych wyników. Dziwne jest jednak to, że niektórzy filozofowie, w obronie swoich racji, decydują się na takie rozwiązania, bądź co bądź wątpliwych jeśli idzie o ich paradoksalność, problemów, które prowadzą do niewątpliwie paradoksalnych i bardzo trudnych do zaakceptowania konsekwencji. Wówczas, konsekwencje rozwiązań danych problemów okazują się znacznie bardziej problematyczne niż te problemy.

Pozostańmy więc przy naszej opinii, że rozwiązanie paradoksu Hempela wymaga co prawda pewnego wysiłku, ale jedynie takiego, który prowadzi do głębszego zrozumienia kwestii będącej jego istotą. Problem Hempela jest więc zaledwie pseudoparadoksem, który przez pomyłkę stał się inspiracją do „poważnych" dyskusji nad kwestią racjonalnego akceptowania przekonań[12].

1.5. PARADOKSY NIESKOŃCZONOŚCI, czyli nieintuicyjność niektórych wyników uzyskanych na gruncie teorii mnogości

Świadomość co najmniej potencjalnego istnienia wielkości nieskończonych była naturalną konsekwencją operowania liczbami naturalnymi, jak również punktami tworzącymi takie obiekty geometryczne jak prosta, półprosta, płaszczyzna, itd. Nic więc dziwnego, że towarzyszyła człowiekowi od starożytności, wzbudzając przy tym zrozumiałe, jak się okazało, kontrowersje. Interesujący, historycznej natury, wykład zmagań człowieka z pojęciem nieskończoności można znaleźć w takich książkach jak chociażby *Tajemnica alefów. Matematyka, Kabała i poszukiwanie nieskończoności*, Amira D. Aczela, czy *Krótka historia nieskończoności. Achilles i żółw w kwantowym Wszechświecie*, Richarda Morrisa[13]. Pominmy jednak ten skądinąd interesujący wątek historyczny skupiając naszą uwagę na konkretnych paradoksach, poczynając od dylematów znanych już w starożytności.

---

[11] Sainsbury, [1988], s. 81–82.

[12] W podobny sposób, trywialny problem Newcomba jest z logicznego punktu widzenia, pseudo-problemem, chociaż stał się tematem chyba jeszcze bardziej poważnych dyskusji, tym razem, nad tzw. teorią racjonalnego podejmowania decyzji – patrz paragraf 4.

[13] Aczel, [2000], Morris, [1997].

1.5.1. PARADOKS KÓŁ ARYSTOTELESA, czyli definicja zbioru nieskończonego

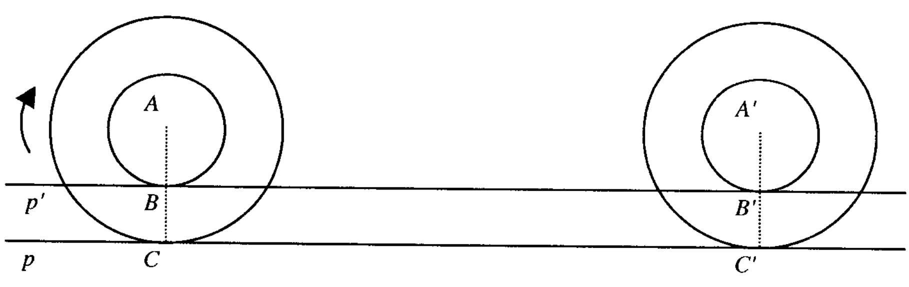
Studiując literaturę poświęconą paradoksom wyjątkowo trudno znaleźć choćby wzmiankę na temat bardzo interesującego problemu dostrzeżonego przez Arystotelesa (384–322 p.n.e.) a dotyczącego dwóch współśrodkowych kół poruszających się z tą samą prędkością kątową. Formułując ten paradoks Arystoteles ujawnił problem, który musiał czekać na swoje rozwiązanie przeszło dwa tysiące lat, czyli tak długo, aż wystarczający dla uporania się z tym problemem okazał się rozwój teorii mnogości. Wbrew pozorom, paradoks kół Arystotelesa nie stanowi bowiem ani problemu geometrycznego, ani tym bardziej nie jest zagadnieniem mechaniki klasycznej, lecz jest kwestią właściwą dla teorii zbiorów.

W złożonej z jednej księgi *Mechanice* Arystotelesa czytamy[14]:

Paradoks kół Arystotelesa

„Powstaje trudność, dlaczego to z dwóch kół osadzonych na tej samej osi większe rozwija [przy obrocie] drogę równą [drodze rozwijanej] przez mniejsze koło? W razie rozwijania ich oddzielnie drogi rozwijane mają się do siebie tak, jak się mają wymiary jednego z kół do wymiarów drugiego. Znowu zaś gdy oba mają jedną i tę samą oś, to droga, którą one rozwijają, ma albo taką długość, jaką rozwija koło mniejsze samo przez się, albo też taką, jaką [rozwija] większe. Jest oczywiste, że koło większe rozwija dłuższą drogę. Okręg każdego koła utworzony przez własną średnicę jest, jak się zgodnie z naocznością wydaje, kątem, który jest większy dla większego koła, mniejszy zaś dla mniejszego, tak iż mają się do siebie tak, jak się mają do siebie drogi wyznaczone [przez obroty każdego z kół], zgodnie z naocznością. Jednakże oczywiste jest również, że [koła te] rozwijałyby jednakową drogę, gdyby były osadzone na tej samej osi. A przeto bywa, że [ta droga] jest równa już to drodze, po której dokonuje obrotu koło większe, już to tej, po której mniejsze".

Argumentację Arystotelesa zilustrujmy rysunkiem:



[14] Arystoteles, *Mechanika*, p. 24, 855a–855b, s. 462–464.

Dwa koła, oba o środku w punkcie A i promieniach r i R o różnych długościach, przy czym $r < R$, są ze sobą połączone tak, że stanowią jeden obiekt. Zatem, żadne z nich nie może wykonać jakiegokolwiek ruchu jeśli drugie się nie porusza. Na każdym z okręgów[15] zaznaczmy po jednym punkcie; na okręgu mniejszym punkt B, a na większym C tak, aby punkt C był zarazem punktem styczności koła większego z prostą p, zaś B był punktem wspólnym odcinka AC i okręgu mniejszego. Zatem, $r = AB$ i $R = AC$. Załóżmy teraz, że koło większe zaczyna się toczyć po prostej p zgodnie ze zwrotem strzałki. Ruch ten trwa tak długo, aż większe koło wykona jeden pełny obrót, czyli punkt C okręgu większego ponownie dotknie prostej p. W wyniku jednego pełnego obrotu koła większego punkt C pokrył się z punktem C'. Zatem odcinek CC' jest drogą jaką pokonało koło większe wykonując jeden pełny obrót podczas toczenia się po prostej p. Oznacza to, że $CC' = 2\pi R$. Jednak, mniejsze koło, jako że tworzy z większym jeden obiekt, również wykonało jeden pełny obrót poruszając się po prostej p' tak, że punkt B pokrył się z punktem B' w tym samym momencie, co punkt C z punktem C'. Zatem, $BB' = 2\pi r$. Ponieważ, $BB' = CC'$, więc $2\pi r = 2\pi R$, a zatem $r = R$, co jest jednak sprzeczne z założeniem.

W powyższym rozumowaniu przyjęliśmy za punkt odniesienia toczenie się koła większego i wykazaliśmy, że mniejsze poruszając się razem z większym musiało pokonać tę samą drogę co większe koło, czyli drogę dłuższą niż tę, którą pokonałoby tocząc się samodzielnie. Zgodnie z zacytowaną uwagą Arystotelesa, cały problem można odwrócić i za punkt wyjścia przyjąć toczenie się mniejszego koła. Wówczas okaże się, że koło większe poruszając się razem z mniejszym pokona drogę krótszą niż $2\pi R$. Naturalnie, w obu przypadkach dochodzimy do tej samej sprzeczności: $r \neq R$ i $r = R$.

Propozycja rozwiązania paradoksu

Rozwiązanie tego paradoksu poprzedźmy uwagą, że nie ulega najmniejszej wątpliwości, że wniosek stwierdzający równość długości obu promieni jest nie do przyjęcia. Możemy być natomiast pewni, że w pierwszym przypadku, czyli wówczas gdy toczy się koło większe, a mniejsze mu tylko towarzyszy, oba koła w wyniku jednego pełnego obrotu pokonują drogę długości $2\pi R$. Za to w drugim przypadku, gdy toczy się koło mniejsze a większe mu tylko towarzyszy, oba koła w wyniku jednego pełnego obrotu pokonują drogę długości $2\pi r$.

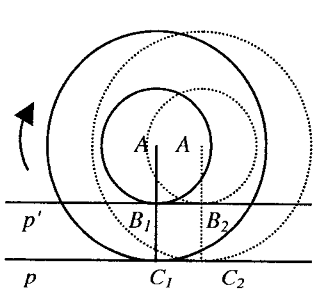
Co jest więc przyczyną tego, że koło „towarzyszące" obrotowi koła toczącego się „dostosowuje" swój pełny obrót do innej długości, niż ta, wynikająca z długości jego własnego promienia? Okazuje się, iż odpowiedzi na

[15] Naturalnie, okręg jako brzeg danego koła jest jego częścią. Zamienne stosowanie słów „koło" oraz „okręg" jest zależne wyłącznie od kontekstu wypowiedzi i ma na celu jej precyzję.

to pytanie nie znajdziemy analizując ten problem z geometrycznego, czy mechanicznego punktu widzenia. Nie w geometrii i nie w mechanice kryje się bowiem przyczyna tego niezwykle interesującego, niebłahego i niewątpliwie paradoksalnego wyniku. Właściwe rozwiązanie tego problemu jest bowiem możliwe na gruncie teorii mnogości.

Zauważmy, że jednoczesny ruch obrotowy obu kół jest faktycznym toczeniem się jednego z nich oraz ruchu nie będącego ani ślizganiem się, ani tarciem drugiego. Aby udowodnić to stwierdzenie, rozważmy dwa przypadki. W pierwszym, toczy się koło większe, zaś mniejsze mu towarzyszy, w drugim zaś, większe koło towarzyszy toczeniu się koła mniejszego.

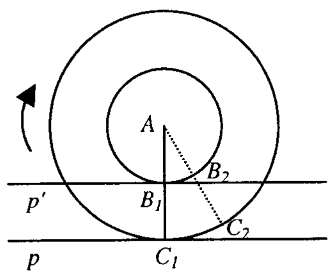
Przypadek pierwszy. Ponieważ koło mniejsze towarzyszy toczeniu się koła większego, pokonuje więc na prostej p' drogę równą odcinkowi dłuższemu niż wówczas, gdyby toczyło się samodzielnie. Może się więc pojawić podejrzenie, że koło mniejsze doznaje podczas swojego ruchu poślizgu. Z poślizgiem tego koła mielibyśmy do czynienia wówczas, gdyby istniał na nim taki punkt, który miałby styczność nie z dokładnie jednym punktem prostej p', lecz z punktami tworzącymi na tej prostej jakikolwiek odcinek o niezerowej długości. Załóżmy więc, że jeden punkt na mniejszym okręgu ma styczność z punktami prostej p', tworzącymi odcinek o niezerowej długości, którego krańcami są B_1 i B_2. Zatem, $B_1 \neq B_2$. Styczność w danym punkcie okręgu z prostą oznacza prostopadłość tej prostej do odcinka łączącego ten punkt z środkiem okręgu. Zatem, oba odcinki AB_1 i AB_2 są prostopadłe do prostej p'. Oczywiście, na przecięciu prostych AB_1 i AB_2 z okręgiem większym leżą dwa różne punkty C_1 i C_2. Ich różność jest gwarantowana przez różność punktów B_1 i B_2. Nie jest bowiem możliwe, aby w przypadku współliniowości punktów A, B_1 i C_1 oraz współliniowości punktów A, B_2 i C_2 zachodziły jednocześnie dwa następujące warunki: $B_1 \neq B_2$ oraz $C_1 = C_2$. Zatem, $C_1 \neq C_2$[16]. Naturalnie, w punktach tych okręg większy jest styczny do prostej p, gdyż odcinki AC_1 i AC_2 są przedłużeniami odcinków AB_1 i AB_2, zaś proste p i p' są równoległe. Oznacza to, że okręg większy również ma poślizg, tyle że po prostej p. Zatem, poślizg koła mniejszego implikuje poślizg koła większego. Całą sytuację ilustruje rysunek.



Przypadek drugi. Tym razem, koło większe towarzyszy toczeniu się koła mniejszego, pokonując na prostej p drogę równą odcinkowi krótszemu od tego, równego drodze pokonanej w wyniku swojego samodzielnego toczenia się.

[16] Rozumowanie to przypomina argument Jana Dunsa Szkota przeciwko atomistycznej wizji świata. Patrz paragraf 4.3.3. *Paradoksy ruchu: dychotomii, Achillesa i żółwia, strzały* oraz Podkoński [2004].

Można więc podejrzewać, że koło większe doznaje w trakcie swojego ruchu tarcia. Z tarciem tego koła mielibyśmy do czynienia wówczas, gdyby istniał na prostej p taki punkt, który miałby styczność nie z jednym wyłącznie punktem na okręgu, lecz z punktami tworzącymi wycinek o niezerowej długości, będący fragmentem tego okręgu. Załóżmy, że tak właśnie jest, czyli, że jeden punkt prostej p ma styczność z punktami okręgu większego, tworzącymi wycinek tego okręgu o niezerowej długości. Niech krańcami tego wycinka będą punkty C_1 i C_2. Z założenia, mamy więc, że $C_1 \neq C_2$. Na przecięciach odcinków AC_1 i AC_2 z okręgiem mniejszym są odpowiednio punkty B_1 i B_2. Oczywiście, $B_1 \neq B_2$. W chwili, w której odcinek AC_1 jest prostopadły do prostej p, odcinek AB_1 jest prostopadły do prostej p'. Ponadto, skoro styczność prostej p z każdym punktem wycinka C_1C_2 okręgu większego zachodzi w dokładnie jednym punkcie prostej p, to również w dokładnie jednym punkcie prostej p' zachodzi styczność prostej p' z każdym punktem niezerowego wycinka B_1B_2 okręgu mniejszego. Oba punkty styczności (prostej p z okręgiem większym oraz prostej p' z okręgiem mniejszym) leżą na prostej, do której należy środek A obu okręgów, a która jest prostopadła do p, a przez to i do p'. Oznacza to, że jeden punkt prostej p' ma styczność z każdym punktem wycinka o niezerowej długości, będącego fragmentem okręgu mniejszego. Zatem, również okręg mniejszy doznał tarcia. Pokazaliśmy tym samym, że tarcie koła większego implikuje tarcie koła mniejszego.



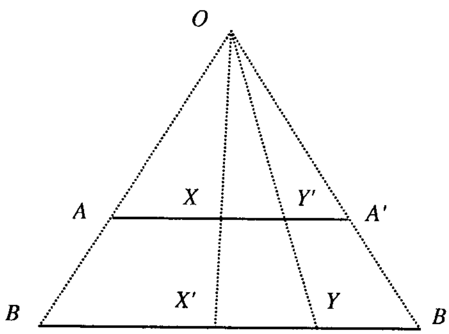
Toczenie się okręgu po odpowiedniej dla niego prostej jest przyporządkowywaniem każdemu punktowi tego okręgu jednego, dla każdego punktu okręgu innego punktu odcinka zawartego w prostej, którego długość wynosi albo $2\pi r$ albo $2\pi R$. Toczenie się danego okręgu po odpowiedniej prostej odpowiada więc zdefiniowaniu funkcji różnowartościowej i na, czyli w skrócie funkcji 1–1, przyporządkowującej wszystkim punktom danego okręgu wszystkie punkty odcinka o długości albo $2\pi r$ albo $2\pi R$.

Jeśli rozważamy przypadek polegający na tym, że toczy się koło większe, mniejsze zaś jedynie mu „towarzyszy”, to w wyniku jednego pełnego obrotu koła większego, jak również mniejszego, zostaje udowodniony fakt, iż na każdym z okręgów jest tyle samo punktów co na odcinku o długości $2\pi R$. Jeśli natomiast koło większe „towarzyszy” toczącemu się mniejszemu kołu, wówczas udowodniony jest fakt, iż na każdym z kół jest tyle samo punktów co na odcinku o długości $2\pi r$. Oba dowody wzięte razem pokazują, że na odcinku o długości $2\pi R$ jest tyle samo punktów, co na odcinku o długości $2\pi r$.

Jasne jest, że oba przypadki stanowią dwa niewiele różniące się dowody na to, że na obu okręgach jest tyle samo punktów. Zatem, formułując swoją argumentację Arystoteles nie zdawał sobie sprawy, że przedstawia dowód tezy, która w przeszło dwadzieścia wieków później będzie doskonale znana w teorii mnogości, a zgodnie z którą, na każdym okręgu jest tyle samo punktów (na każdym odcinku jest tyle samo punktów), czyli innymi słowy, każde dwa okręgi (każde dwa odcinki) są równolicznymi zbiorami punktów[17].

Argumentacja Arystotelesa przypomina więc inny, nieco prostszy chociaż również geometryczny dowód na to, że na każdym odcinku jest tyle samo punktów.

Rozważmy leżące w jednej płaszczyźnie dwa równoległe odcinki *AA'* oraz *BB'*:



Niech ponadto, $AA' < BB'$. Zatem, proste *AB* oraz *A'B'* mają jeden punkt wspólny. Oznaczmy go symbolem „*O*''.

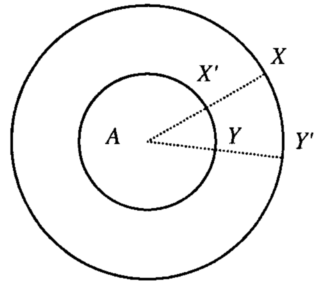
Wykorzystując operację rzutowania odcinka *AA'* na odcinek *BB'* względem punktu *O*, przyporządkowujemy każdemu punktowi *X* odcinka *AA'* jeden i dla każdego punktu odcinka *AA'* inny punkt *X'* odcinka *BB'*. Rzutując zaś odcinek *BB'* na odcinek *AA'* również względem punktu *O*, przyporządkowujemy każdemu punktowi *Y* odcinka *BB'* jeden i dla każdego punktu odcinka *BB'* inny punkt *Y'* odcinka *AA'*. Zdefiniowanie obu tych operacji dowodzi doskonale znanej w teorii mnogości tezy, że oba odcinki są równolicznymi zbiorami punktów[18]. Oczywiście, punkty obu odcinków tworzące równoliczne zbiory są rozumiane jako *cięcia Dedekinda*, czyli jako takie rozdzielenia prostej, odcinka, itd. na dwie części, które nie powodują straty – wszystko cokolwiek było przed dokonaniem cięcia nadal jest, tyle że albo po jednej, albo po drugiej stronie przeprowadzonego cięcia. Swoistym paradoksem jest dość powszechne wśród matematyków przekonanie, że prosta, odcinek itd. składają się z tak właśnie pojmowanych punktów. Oznacza to bowiem, że coś może składać się

[17] Zbiór *A* jest *równoliczny* ze zbiorem *B* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja, która przekształca wzajemnie jednoznacznie zbiór *A* na zbiór *B*. Mówimy, że funkcja taka ustala równoliczność zbioru *A* ze zbiorem *B*, patrz Borkowski, [1991], s. 235.

[18] Ten dowód, podobnie jak inne wykazujące równoliczność takich zbiorów punktów jak odcinek, półprosta, prosta można znaleźć w Hunter, [1982], s. 34–39.

z niczego, byleby to nic było wzięte dostatecznie wiele razy, czyli nieskończenie wiele razy[19].

Łatwo zauważyć, że paradoks kół Arystotelesa jest pewnego rodzaju zastosowaniem znacznie prostszego dowodu o równoliczności dwóch zbiorów punktów będących odpowiednio dwoma dowolnymi okręgami. Ilustracją tego, również geometrycznego dowodu, analogicznego do wyżej przedstawionego, jest poniższy rysunek.



Punkt *A* jest tu naturalnie, środkiem obu okręgów. Linie przerywane symbolizują proste operacje wzajemnie jednoznacznego rzutowania mniejszego okręgu na okręg większy, a więc i rzutowania okręgu większego na mniejszy.

Przedstawione wyżej rozwiązanie jest w pełni matematyczne, może się zatem wydawać niewłaściwe z mechanicznego punktu widzenia. Jednak jest to odpowiednie rozwiązanie kwestii kół Arystotelesa, a to z tego powodu, iż argumentacja tego dylematu, jako że jest czysto matematyczna, nie ma nic wspólnego z takimi czynnikami jak chociażby znane z fizyki siły lepkości, tarcia, nacisku itd. Arystoteles przedstawił więc sytuację, w której siły te nie odgrywają żadnej roli, można by rzec, cały eksperyment rozgrywa się w warunkach idealnych w tym sensie, że bez udziału jakichkolwiek funkcjonujących w przyrodzie sił. Potraktowanie więc paradoksalnego rozumowania Arystotelesa jako kwestii mechanicznej musi świadczyć o niezrozumieniu problemu. Wydaje się, że sam Arystoteles nie rozumiejąc w pełni charakteru odkrytego przez siebie tego wyjątkowego problemu postawił go w rzędzie czysto praktycznych kwestii natury mechanicznej, umieszczając go w księdze zatytułowanej *Mechanika.* Łatwo jednak zauważyć, że paradoks dwóch współśrodkowych kół nie ma związku z inną rzeczywistością, jak tylko matematyczną. Sam Arystoteles, swój problem przedstawił w podany wyżej sposób, wcale nie twierdząc, że np. oś z dwoma kołami o różnych promieniach nie skręca podczas samoczynnego toczenia się, lecz, że toczy się prosto.

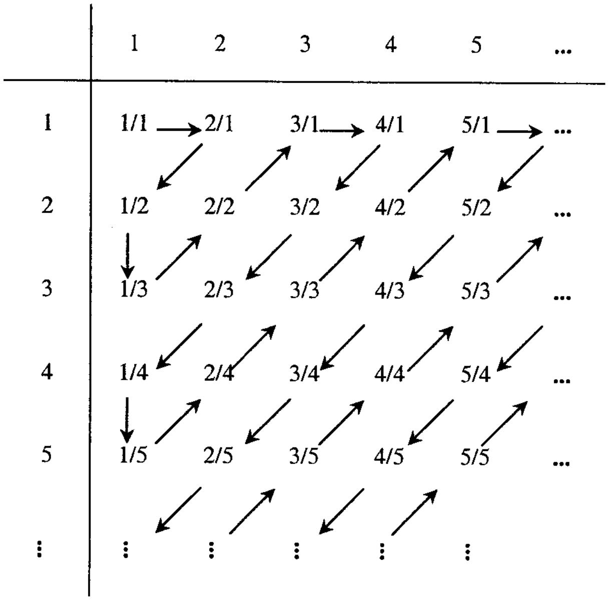
Argumentacja z jaką mamy do czynienia w problemie dotyczącym kół Arystotelesa, podobnie jak wszystkie inne dowody pokazujące równoliczność jakiegoś zbioru z pewnym jego właściwym podzbiorem[20] wydają się nam

---

[19] Nie chodzi tu bynajmniej o jakąś szczególnie dużą nieskończoność, bo zaledwie drugą spośród nieskończenie wielu znanych nieskończoności.

[20] Zbiór *A* jest *podzbiorem zbioru B*, gdy każdy element zbioru *A* jest elementem zbioru *B*. Zbiór *A* jest *właściwym podzbiorem zbioru B*, gdy *A* jest podzbiorem *B*, a ponadto istnieje w zbiorze *B* element nie będący elementem zbioru *A*. Niewłaściwe zawieranie to zawieranie się zbioru w samym sobie.

paradoksalnymi tak długo, jak długo będziemy wierzyli w to, iż każdy zbiór ma tę własność, że usunięcie z niego któregoś z jego elementów nieuchronnie musi prowadzić do zmniejszenia ilości elementów tego zbioru. Wspomniana, intuicyjna przecież własność dotyczy jednak wyłącznie zbiorów skończonych. Jeśli bowiem ze zbioru n-elementowego, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną większą od zera, usuniemy jeden element, to otrzymany w ten sposób zbiór ma $n-1$ elementów, czyli niewątpliwie mniej niż n. Jeśli jednak, zbiór jest nieskończony, to usunięcie pewnych elementów tego zbioru, niekiedy nawet ich nieskończonej liczby, może nie wpłynąć na zmianę liczby elementów wyjściowego zbioru. Jednym z prostszych przykładów jest usunięcie ze zbioru wszystkich liczb naturalnych N, co drugiej liczby, począwszy od liczby 1. Otrzymany w ten sposób zbiór $A = \{2n: n \in N\}$ jest równoliczny ze zbiorem N. Funkcją ustalającą tę równoliczność jest $f: N \rightarrow A$ taka, że $f(n) = 2n$, dla $n \in N$. Innym dowodem jest ten, odkryty przez Cantora, który pokazuje równoliczność zbioru N ze zbiorem Q wszystkich liczb wymiernych. Cantor wpadł na prosty sposób uporządkowania w ciąg zbioru wszystkich liczb wymiernych.



Już samo uporządkowanie w ciąg zbioru Q jest wystarczającym dowodem na równoliczność tego zbioru i zbioru N, gdyż oznacza ono przyporządkowanie każdej liczbie z Q dokładnie jednego i za każdym razem innego indeksu, będącego przecież liczbą z N. Krokiem pośrednim jest uporządkowanie wszystkich dodatnich liczb wymiernych. W tym celu wykorzystuje się produkt kartezjański $(N-\{0\})^2$ zbioru liczb naturalnych bez zera. Uporządkowanie to

definiuje funkcję odwzorowującą cały zbiór Q^+ w zbiór N. Sformułowanie odwrotnego odwzorowania jest trywialne.
Strzałki łączące liczby wymierne informują, w jakiej kolejności liczby te występują w tworzonym ciągu. Ustawienie w ciąg zbioru wszystkich dodatnich liczb wymiernych nie kończy, rzecz jasna, dowodu na równoliczność zbioru Q ze zbiorem N. Można jednak w podobny sposób uporządkować w ciąg zbiór wszystkich ujemnych liczb wymiernych. Następnie, dysponując obydwoma ciągami, można utworzyć nowy ciąg, którego wyrazy o parzystych indeksach tworzą znany ciąg dodatnich liczb wymiernych, zaś wyrazy o indeksach nieparzystych tworzą ciąg ujemnych liczb wymiernych. Również dodanie zera nie stanowi najmniejszego problemu. Tak więc, istotnie zbiór liczb wymiernych jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Badania nad zbiorami nieskończonymi zaowocowały sformułowaniem definicji zbioru nieskończonego, którą trudno byłoby nazwać intuicyjną:

Definicja Dedekinda i Peirce'a zbioru nieskończonego
Powiemy, że pewien zbiór jest nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy jest on równoliczny z pewnym swoim właściwym podzbiorem[21].

Paradoksalność tej definicji wynika z faktu, iż przeczy ona tym intuicjom, które każą uznawać, iż zawsze część jest mniejsza od całości. Zgodnie z definicją zbioru nieskończonego, istnieją bowiem takie całości, a są nimi właśnie zbiory nieskończone, których pewne części nie są od nich mniejsze.

Dość powszechnie uważa się, iż tym, który jako pierwszy przedstawił dowód na to, że zbiór nieskończony ma tę niezgodną z intuicjami własność, posiadania takiej samej ilości elementów, co pewien jego właściwy podzbiór, jest Galileusz. Do wniosku tego doszedł, łącząc w pary kolejne liczby naturalne z ich kwadratami: (1,1), (2,4), (3,9), (4,16), (5,25), ... Niestety, w swoim traktacie z roku 1638 zatytułowanym *Rozmowy i dowodzenia matematyczne: W zakresie dwóch nowych umiejętności dotyczących mechaniki i ruchów miejscowych* nie odważył się wyraźnie orzec, że zbiór „liczb kwadratowych" ma tyle samo elementów, co zbiór wszystkich liczb naturalnych. W dziele tym,

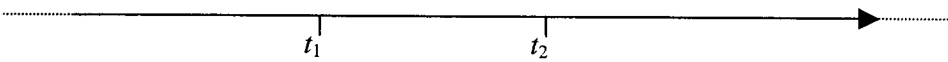
---

[21] Definicja ta określa tak zwany *zbiór refleksywny*, zwany też *nieskończonym w sensie Dedekinda*. Jej niezależnymi od siebie autorami są Dedekind i Peirce, chociaż uważa się, że definicja ta była antycypowana przez wcześniejszych uczonych, takich jak chociażby Galileusz, czy Leibniz. Inną, jak się po latach okazało, równoważną zaproponowanej przez Dedekinda i Peirce'a definicję zbioru nieskończonego podał Russell, który zdefiniował tak zwany *zbiór induktywny*: zbiór Z nazywamy induktywnym, gdy istnieje liczba naturalna *n*, taka, że Z ma dokładnie *n* elementów. Następnie, Russell udowodnił indukcyjnie twierdzenie mówiące, że zbiór induktywny nie jest równoliczny z żadnym ze swoich podzbiorów właściwych, aby ostatecznie zdefiniować zbiór nieskończony jako zbiór, który nie jest induktywny, patrz Marciszewski, *Aksjomatyczne ujęcie teorii mnogości*, [w:] Marciszewski, [1987], s. 124–125.

mającym formę dialogu inteligentnego Salviatiego z mniej błyskotliwym Simpliciem, Salviati stwierdza tylko, że kwadratów liczb naturalnych nie jest wcale mniej niż liczb naturalnych[22], co rzecz jasna jest łagodniejszą formą stwierdzenia, że oba zbiory mają tyle samo elementów. Ta przyjęta przez Galileusza ostrożna forma prezentacji swojego odkrycia sprawia, że być może zaszczytną pozycję Galileusza jako odkrywcy sprzeczności zachodzącej między pojęciem nieskończoności a naszymi intuicjami, powinien zająć William Ockham, który interesujące i bez wątpienia paradoksalne rozumowanie zawarł w swoim dziele _Quodlibeta_ (II 5)[23].

Paradoks Ockhama

Rozważmy wieczne trwanie świata reprezentowane przez prostą bez początku i bez końca. Na prostej tej zaznaczmy dwa punkty. Pierwszy t_1, odpowiadający początkowi dnia dzisiejszego oraz drugi t_2, oznaczający koniec dnia dzisiejszego:



Niech A oznacza tę część nieskończonego czasu, która trwała od nieskończonej przeszłości do chwili t_1; B zaś tę część nieskończonego czasu, która zaczyna się w chwili t_1 i będzie trwała wiecznie. W podobny sposób, niech punkt t_2 wyznaczy nieskończone części C oraz D tak, aby A była częścią C, zaś D częścią B. Zostały więc wyznaczone cztery półproste: A i B o początkach w punkcie t_1 oraz C i D o początkach w punkcie t_2 takie, że i $D \subset B$.

Niech $dł(x)$ oznacza długość x. Zauważmy teraz, że oczywistym faktem jest równość $dł(A) = dł(B)$. Ponadto, skoro $D \subset B$, równie oczywista jest nierówność $dł(B) > dł(D)$. Z tych dwóch faktów wynika natychmiast, że $dł(A) > dł(D)$. Ponieważ jednak, $dł(C) = dł(D)$, więc $dł(A) > dł(C)$. Tymczasem, $A \subset C$. Oznacza to, że w przypadku obiektów nieskończonych, część jest większa od całości.

Na pozór, paradoks Ockhama wydaje się być łatwy do rozwiązania, jeśli tylko zastosujemy definicję zbioru nieskończonego, z której jasno wynika, że długość prostej jest równa długości każdej półprostej. Problem jednak w tym, że nie wiemy jaką nieskończoną wielkością wyraża się wspomniana długość. Liczby nieskończone, którymi operujemy służą wyrażaniu mnogości elementów, nie zaś miar długości, powierzchni, objętości. Tak więc, poza oczywistym już dzisiaj problemem, dylemat ten dotyczy również i tej kwestii, która wciąż czeka na

[22] Aczel, [2000], s. 50.
[23] Murdoch, [1982], s. 173.

swoje rozwiązanie. Łatwo przecież zauważyć, że ani liczba wyrażająca ilość liczb naturalnych, ani liczba wyrażająca ilość liczb rzeczywistych nie mogą oznaczać długości prostej: dla dowolnej liczby naturalnej istnieje nieskończenie wiele liczb rzeczywistych, które są od niej większe oraz dla dowolnej liczby rzeczywistej istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, które są od niej większe. Co więcej, jeśli założymy, że każda z liczb, a więc w szczególności każda liczba nieskończona powinna mieć swoje miejsce na osi, problem zaczyna wyglądać szczególnie interesująco.

Kolejny paradoks wiąże się ściśle z definicją zbioru nieskończonego. Jest jednak omówiony w odrębnym paragrafie, jako że stanowi ważny i dość interesujący problem wykraczający poza ramy matematyki.

1.5.2. PARADOKS TRÓJCY ŚWIĘTEJ

Dogmat Trójcy Świętej jest jedną z fundamentalnych, a zarazem najbardziej tajemniczą prawdą wiary religii katolickiej. Zgodnie z nauką Kościoła Katolickiego[24]: „rozum z obserwacji przyrody i życia ludzkiego jest w stanie poznać, że istnieje Bóg Stwórca wszechmocny i Duch nieskończenie doskonały". Jednak, wiedzę o istnieniu Trójcy Świętej należy czerpać z „objawienia Bożego, zawartego w Piśmie św. i Tradycji"[25]. Dalej, w tym samym tekście *Propedeutyki teologii katolickiej*, poświęconym istocie i przymiotom Boga czytamy[26]: „Dla naszego rozumu Trójca Św. jest tajemnicą. Rozum nie może domyślić się, że w Bogu są trzy Osoby, gdyż na ziemi nie zachodzi podobny wypadek, który mógłby człowiekowi nasunąć myśl, że Bóg jest jeden w Trzech Osobach. Nawet po objawieniu tej tajemnicy przez Boga rozum nie potrafi jej zgłębić. Nie widzi jednak żadnej sprzeczności w tym, że w Bogu są trzy Osoby. Jeśli bowiem coś jest niemożliwe w świecie materialnym, to z tego jeszcze nie wynika, że jest to niemożliwe także w świecie Bożym, gdzie panują inne prawa niż tu na ziemi".

Kwestia Trójcy Świętej ma wymiar zarazem teologiczny, filozoficzny i logiczny. Złożoność ta sprawia, iż analiza tego problemu może być prowadzona z różnych punktów widzenia. Jednym z nich jest np. tożsamość Osób Trójcy Świętej[27]. Nas jednak interesować będzie inny problem, który dotyczy niesprzeczności idei trzech różnych obiektów, z których każdy jest zawarty w każdym, a więc każdy zawiera w sobie dwa pozostałe. Innymi słowy,

---

[24] Witkowiak, [1971], s. 194.
[25] Witkowiak, [1971], s. 194.
[26] Witkowiak, [1971], s. 195.
[27] Patrz Geach, [1972]; Hill, [1985]; Martinich, A.P., [1987]; van Invagen, [1988]; Williams, [1994]; Ziemiński, [1999].

rozważymy kwestię, czy logika dopuszcza możliwość, aby trzy różne obiekty tworzyły całość zawartą w każdym z tych trzech obiektów. Spróbujemy więc przedstawić niesprzeczną, matematyczną konstrukcję takich właśnie obiektów, pomijając wszelkie inne zagadnienia teologiczne i filozoficzne związane z pojęciem Trójcy Świętej, a więc znacznie upraszczając złożoną przecież kwestię Trójcy Świętej.

Jednym z największych autorytetów w dziedzinie logiki, który wyraźnie opowiedział się za niesprzecznością pojęcia Trójcy Świętej był Jan Łukasiewicz (1878–1956). W swej książce *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa* z 1910 roku tak oto pisze o swoich doznaniach związanych z tym pojęciem[28]:

„Wczytywałem się w proste, a potężne słowa symbolu św. Atanazego, w przecudną pieśń o jego Trójcy. Sprzeczności jawnej w tym hymnie nie ma, nie ma w nim także sprzeczności ukrytej, jeśli słowa hymnu interpretujemy zgodnie z teologią. Kto jednak podda się biernie religijnie-estetycznemu działaniu wiersza, nie myśląc wcale o kwestiach teologicznych, ten odczuje przez chwilę, że wierzy w dwa sądy, które zdają się być sprzeczne. Wolnym, poważnym miarowym rytmem, w jednakowo zbudowanych, odmierzonych zdaniach, dzwonią potężnie przejmujące słowa:

Inna jest bowiem osoba Ojca, inna Syna, inna Ducha Świętego,
Lecz Ojca, i Syna, i Ducha Świętego jedno jest Bóstwo, równa chwała, współwieczny majestat.
Jaki Ojciec, taki Syn, taki Duch Święty.
Niestworzony Ojciec, niestworzony Syn, niestworzony Duch Święty.
Niezmierzony Ojciec, niezmierzony Syn, niezmierzony Duch Święty.
Wiekuisty Ojciec, wiekuisty Syn, wiekuisty Duch Święty.
A jednak nie trzej wiekuiści, lecz jeden wiekuisty.
Jak i nie trzej niestworzeni, ani trzej niezmierzeni, lecz jeden niestworzony i jeden niezmierzony.
Podobnie wszechmocny jest Ojciec, wszechmocny Syn, wszechmocny Duch Święty.
A jednak nie trzej wszechmocni, lecz jeden wszechmocny.
Podobnie Bogiem jest Ojciec, Bogiem jest Syn, Bogiem jest Duch Święty.
A jednak nie trzej Bogowie, lecz jeden jest Bóg.
Tak też Panem jest Ojciec, Panem jest Syn, Panem i Duch Święty.
A jednak nie trzej Panowie, lecz jeden jest Pan[29].

---

[28] Łukasiewicz, [1910], s. 35–36.

[29] Tekst pieśni w przekładzie z *Breviarum fidei*, opr. J. M. Szymusiak, SJ, S. Głowa SJ, Poznań–Warszawa–Lublin 1969, s. 742–743 (patrz przyp. 2 do rozdz. V w Łukasiewicz, [1910], s. 35).

Umysł wierzący, który te słowa bierze po prostu i czytając je w skupieniu ducha nie analizuje ich treści teologicznej, doznaje uczucia niezgłębionej tajemnicy. Wierzy bowiem, że są trzy różne Osoby Boskie, a każda jest Bogiem prawdziwym, i wierzy zarazem, że nie ma trzech Bogów, tylko jest jeden Bóg niestworzony, niezmierzony, wszechpotężny i wieczny. Sądzę, że właśnie te akty wierzenia, tyczące się sądów pozornie sprzecznych, wywołują uczucie tajemniczości i grozy. Pod wpływem zapewne takich stanów duchowych szukali sprzeczności w pojęciu Boga nawet niektórzy teologowie; dość wspomnieć o kardynale Mikołaju z Kuzy, który upatrywał w Bogu *coincidentiam oppositorum*".

Faktem jest, że przytoczone rozważania posłużyły Łukasiewiczowi do zakwestionowania i w końcu do odrzucenia psychologicznej zasady niesprzeczności. W konsekwencji swoją dalszą uwagę koncentruje jedynie na ontologicznej i logicznej zasadzie niesprzeczności.

Przypomnijmy za Łukasiewiczem, że według ontologicznej zasady niesprzeczności „żaden przedmiot nie może zarazem tej samej cechy posiadać i nie posiadać", według zaś logicznej zasady niesprzeczności „dwa sądy, z których jeden tę właśnie cechę przedmiotowi przyznaje, jakiej mu drugi odmawia, nie mogą być zarazem prawdziwe"[30]. Dalej Łukasiewicz zauważa równoważność obu zasad, twierdząc że możliwe jest albo jednoczesne ich przyjęcie, albo też jednoczesne ich odrzucenie.

Nauka Kościoła Katolickiego wskazuje wyraźnie na niezgodny z naszymi intuicjami wymiar prawdy o Trójcy Św. Ta właśnie nieintuicyjność dogmatu może być podstawą zaklasyfikowania go w poczet paradoksów analizowanych w tym rozdziale, czyli uznania go za dylemat powstały w wyniku ograniczeń naszej intuicji.

O ile wspomniane zgłębienie dogmatu Trójcy Św. może istotnie być problemem przekraczającym możliwości człowieka, o tyle kwestia samej niesprzeczności tej prawdy powinna zachęcać do podejmowania prób zbudowania niesprzecznego modelu matematycznego Trójcy Św. Istnienie takiego modelu byłoby dowodem na niesprzeczność tego niezwykłego pojęcia. Próbę konstrukcji odpowiedniego modelu poprzedźmy wyraźnym i precyzyjnym sformułowaniem rozważanego problemu. Aby rzetelnie wyrazić badaną kwestię, paradoks Trójcy Św. sformułujmy wykorzystując odpowiednie trzy punkty Katechizmu Kościoła Katolickiego w ich pełnym brzmieniu[31]:

---

[30] Łukasiewicz, [1910], s. 37. Łukasiewicz tradycyjnie posługuje się, popularną do dziś, nazwą „zasada sprzeczności". My nazwę tę zastępujemy inną, wydaje się, że bardziej uzasadnioną, „zasadą niesprzeczności".

[31] Katechizm Kościoła Katolickiego, punkty 253, 254, 255, s. 69.

Paradoks Trójcy Świętej

253 *KKK*. Trójca jest jednością. Nie wyznajemy trzech bogów, ale jednego Boga w trzech Osobach: „Trójcę współistotną". Osoby Boskie nie dzielą między siebie jedynej Boskości, ale każda z nich jest całym Bogiem: „Ojciec jest tym samym, co Syn, Syn jest tym samym, co Ojciec, Duch Święty tym samym co Ojciec i Syn, to znaczy jednym Bogiem co do natury". „Każda z trzech Osób jest tą rzeczywistością, to znaczy substancją, istotą lub naturą Boga".

254 *KKK*. Osoby Boskie rzeczywiście różnią się między sobą. „Bóg jest jedyny, ale nie jakby samotny" (*quasi solitarius*). „Ojciec", „Syn", „Duch Święty" nie są tylko imionami oznaczającymi sposoby istnienia Boskiego Bytu, ponieważ te Osoby rzeczywiście różnią się między sobą: „Ojciec nie jest tym samym, kim jest Syn, Syn tym samym, kim Ojciec, ani Duch Święty tym samym, kim Ojciec czy Syn". Różnią się między sobą relacjami pochodzenia: „Ojciec jest Tym, który rodzi; Syn Tym, który jest rodzony; Duch Święty Tym, który pochodzi". Jedność Boska jest trynitarna.

255 *KKK*. Osoby Boskie pozostają we wzajemnych relacjach. Rzeczywiście rozróżnienie Osób Boskich – ponieważ nie dzieli jedności Bożej – polega jedynie na relacjach, w jakich pozostaje jedna z nich w stosunku do innych: „W relacyjnych imionach Osób Boskich Ojciec jest odniesiony do Syna, Syn do Ojca, Duch Święty do Ojca i Syna; gdy mówimy o tych trzech Osobach, rozważając relacje, wierzymy jednak w jedną naturę, czyli substancję". Rzeczywiście, „wszystko jest (w Nich) jednym, gdzie nie zachodzi przeciwstawność relacji". Z powodu tej jedności Ojciec jest cały w Synu, cały w Duchu Świętym; Syn jest cały w Ojcu, cały w Duchu Świętym; Duch Święty jest cały w Ojcu, cały w Synu".

Z punktu 253 *KKK* wynika, że każda z trzech Osób Trójcy Świętej jest całym Bogiem, a więc Trójca Święta winna być bytem, którego każda z trzech części jest nim samym, a więc całością. Naturalnie w świecie wielkości skończonych nie sposób jest znaleźć obiekt, którego właściwa część, a więc część powstająca z odrzucenia czegoś przynależnego do tego obiektu byłaby nadal całym obiektem. Wiadomo jednak, że ta nieintuicyjna własność nie tylko, że przysługuje, lecz wręcz definiuje zbiory nieskończone. Kojarzenie Boga z nieskończonością ma długą tradycję w kulturze judeo-chrześcijańskiej[32]. Tę sugestię nakazującą widzieć w Bogu nieskończoność znajdujemy w następnym po trzech wyżej cytowanych punkcie Katechizmu:

256 *KKK*. Święty Grzegorz z Nazjanzu, nazywany również „Teologiem", przekazuje katechumenom w Konstantynopolu następujące streszczenie wiary trynitarnej:

---

[32] Aczel, [2000].

> [...] Daję wam jedno Bóstwo i Potęgę, Jednego istniejącego w Trzech i zawierającego Trzech na różny sposób. Bóstwo bez różnicy substancji czy natury, stopnia wyższego, który podnosi, ani stopnia niższego, który poniża ... Nieskończona współnaturalność Trzech nieskończonych. Cały Bóg w każdym z osobna [...] Bóg Trójjedyny ujmowany jako całość... [...][33].

Prosty podział zbioru nieskończonego na trzy podzbiory równoliczne z wyjściowym[34] nie jest jednak wystarczającym krokiem w konstrukcji modelu, gdyż każda z trzech Osób Trójcy Świętej jest całym Bogiem. Oznacza to, że każdy z podzbiorów winien zawierać w sobie cały zbiór. Łatwo zauważyć, że przeliczalnie nieskończony zbiór identycznych kul:

$$K = \{..., \mathrm{O}, \mathrm{O}, \mathrm{O}, \mathrm{O}, \mathrm{O}, ...\}$$

można podzielić na trzy podzbiory identyczne z wyjściowym. Jednak pomysł ten jest o tyle nietrafny, gdyż zbiór K „składa" się nie z trzech, lecz z nieskończonej ilości swoich powtórzeń. Zatem, nie jest to model dla trójki obiektów, lecz dla nieskończonej liczby obiektów. Co więcej, każdy z tych obiektów jest nieodróżnialny od pozostałych, co kłóci się z założeniem, że „Ojciec nie jest tym samym, kim jest Syn, Syn tym samym, kim Ojciec, ani Duch Święty tym samym, kim Ojciec czy Syn", (254 *KKK*). Co więcej, różnica ta ma źródło we wzajemnych relacjach w jakich pozostają trzy Osoby Trójcy Świętej. Należy więc skonstruować model złożony z trzech obiektów tak, aby obiekty te były ze sobą tożsame, lecz ich pochodzenie było różne. Innymi słowy, powinny to być trzy obiekty sobie równe, lecz relacyjnie różne.

Propozycja rozwiązania paradoksu

Rozważmy trzy ciągi o wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, 3\}$, zdefiniowane następująco:

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ dla } n = 4k \text{ lub } n = 4k + 1; \\ 2, \text{ dla } n = 4k + 2; \\ 3, \text{ dla } n = 4k + 3; \end{cases}$$

---

[33] Cytat zawarty w punkcie 256 *KKK* zaczerpnięty z Św. Grzegorz z Nazjanzu, *Orationes*, 40, 41: PG 36, 417 [w:], *Katechizm Kościoła Katolickiego*, punkt 256, s. 69–70.

[34] Na przykład, zbiór liczb naturalnych N można podzielić na trzy równoliczne z nim podzbiory: $A = \{k = 3n: n \in N\}$, $B = \{k = 3n+1: n \in N\}$, $C = N-(A \cup B)$. Jednak, żaden z tych trzech zbiorów nie zawiera zbioru N. Poza tym ta konstrukcja nie byłaby modelem dla trzech Osób, lecz dla czterech: A, B, C, N.

$$b_n = \begin{cases} 1, \text{ dla } n = 4k; \\ 2, \text{ dla } n = 4k + 1 \text{ lub } n = 4k + 2; \\ 3, \text{ dla } n = 4k + 3; \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 1, \text{ dla } n = 4k; \\ 2, \text{ dla } n = 4k + 1; \\ 3, \text{ dla } n = 4k + 2 \text{ lub } n = 4k + 3; \end{cases}$$

gdzie k jest liczbą całkowitą ($k \in C$)[35]. Przy mniej precyzyjnym zapisie, każdy z trzech powyższych obiektów ma postać:

$$a_n = \{..., 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, ...\},$$
$$b_n = \{..., 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, ...\},$$
$$c_n = \{..., 1, 2, 3, 3, 1, 2, 3, 3, 1, 2, 3, 3, ...\}.$$

Proste sprawdzenie pokazuje, że każdy ciąg zawiera się w innym w sposób właściwy, tzn. każdy z trzech ciągów może powstać z dowolnego przez usunięcie odpowiednich elementów. Dla przykładu sprawdźmy właściwą inkluzję $b_n \subset a_n$, czyli fakt, że ciąg b_n jest podciągiem ciągu a_n. W tym celu zapiszmy jeszcze raz ciąg a_n podkreślając te jego elementy, które tworzą ciąg b_n:

$$a_n = \{..., \underline{1}, 1, \underline{2}, 3, 1, 1, \underline{2}, \underline{3}, 1, \underline{1}, \underline{2}, 3, 1, 1, \underline{2}, \underline{3}, 1, \underline{1}, \underline{2}, 3, 1, 1, \underline{2}, \underline{3}, ...\}.$$

Jak widać, usuwając wszystkie nie podkreślone elementy ciągu a_n otrzymujemy ciąg b_n. W podobny sposób można pokazać pozostałe inkluzje, co w konsekwencji prowadzi do wniosku:

$$a_n \subset c_n \subset b_n \subset a_n.$$

Zatem, każdy z ciągów jest właściwym podciągiem każdego, a więc także samego siebie. Oznacza to, że istotnie, trzy zupełnie różne ciągi są w pewnym sensie jednym i tym samym ciągiem. Każdy z nich zawiera w sobie pozostałe i wszystkie razem. Każdy z nich jest całością i każdy z nich jest tą samą całością. Jednocześnie, w oczywisty sposób, każdy z nich jest różny od pozostałych, a różnica ta sprowadza

---

[35] Standardowo, wyrazy ciągu indeksuje się liczbami naturalnymi. W naszym przypadku indeksowanie liczbami całkowitymi ma na celu uniknięcie zarzutu, że każdy z tych ciągów ma początek. Naturalnie, znacznie prostsze jest tradycyjne zdefiniowanie wszystkich trzech ciągów, zwłaszcza że w przypadku indeksowania liczbami naturalnymi, ciągi te również spełniają odpowiednie warunki wyrażone w punktach 253–255 *KKK*.

się do relacji jakie zachodzą między tymi ciągami, gdyż „substancja" tych ciągów jest jedna ukonstytuowana przez nieskończony ciąg {...,1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...}.

Niewątpliwie, ciągi te różnią się nazwami. Oczywiście, „a_n", „b_n", „c_n" nie są nazwami tych ciągów. Symbole te, równie dobrze mogłyby być zastąpione innymi. Właściwymi nazwami są bowiem,

„{..., 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 1, ...}",
„{..., 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, ...}",
„{..., 1, 2, 3, 3, 1, 2, 3, 3, 1, 2, 3, 3, ...}".

Nazwy te, w sposób pokazany wyżej, określają jeden ciąg. Skoro substancja tych ciągów jest jedna, różnice między nimi można określić jako wyrażone w relacyjności nazw. Zachodzi więc warunek wyrażony w punkcie 255 *KKK*: „W relacyjnych imionach Osób Boskich Ojciec jest odniesiony do Syna, Syn do Ojca, Duch Święty do Ojca i Syna; gdy mówimy o tych trzech Osobach, rozważając relacje, wierzymy jednak w jedną naturę, czyli substancję". W każdym przypadku, odniesieniem tym jest odpowiednia inkluzja. Zauważmy, że każda inkluzja jest inna. Mimo, iż każda wiąże się z „usunięciem" tych samych elementów, to jednak w przypadku każdej inkluzji, elementy te tworzą właściwą dla tej właśnie inkluzji, a różną od pozostałych, sekwencję: „Różnią się między sobą relacjami pochodzenia: 'Ojciec jest Tym, który rodzi; Syn Tym, który jest rodzony; Duch Święty Tym, który pochodzi'" (254 *KKK*).

Zapewne, z teologicznego punktu widzenia, nie byłoby niczym trudnym wykazać, że trójka $\{a_n, b_n, c_n\}$ ciągów jest zbyt prosta, aby była pełnym, a więc właściwym modelem Trójcy Świętej. Jednak celem przedstawionej tu propozycji było pokazanie, iż istnieje możliwość pogodzenia tak paradoksalnie brzmiących warunków jakie charakteryzują Trójcę Świętą. Co więcej, pojęcie Trójcy Świętej okazuje się być do pomyślenia na gruncie nie tylko teologii, lecz także na gruncie najbardziej ścisłej nauki jaką człowiek dysponuje, a mianowicie, matematyki.

1.5.3. PARADOKSY TEORII MNOGOŚCI GEORGA CANTORA

Rozwój matematyki najczęściej wiąże się z przełamywaniem nieuprawnionych, chociaż powszechnie uznawanych, nawet, a właściwie głównie przez matematyków, opinii formułowanych na podstawie intuicji. Nic więc dziwnego, że podane wyżej dylematy są niemożliwe do rozwiązania. Dowodzą one bowiem tylko tego, że nasza intuicja jest zawodna. Właściwe podejście do tych paradoksów nie może więc zakładać jakiegoś ich rozwiązania, bo takowe po prostu jest niemożliwe. Powinno się ono wyrażać raczej w dążeniu do kształtowania naszych intuicji zgodnie z rozwojem matematyki. To kształtowanie intuicji nie może dokonywać się inaczej jak tylko przez rozwój wiedzy i doskonalenie procesu edukacji. Podążające za rozwojem matematyki kształtowanie intuicji jest procesem trwającym od wieków. Można dostarczyć wielu przykładów na tezy ongiś paradoksalne nawet dla najwybitniejszych umysłów, a dziś nie budzące przynajmniej w świecie matematyki żadnych wątpliwości.

Jednym z najbardziej spektakularnych przykładów jest przypadek odkrycia istnienia liczby, która nie jest wymierna. Ujawnienie tej niezwykłej wówczas tajemnicy, skrzętnie skrywanej przez związek pitagorejski, groziło wymierzeniem kary śmierci każdemu kto poważyłby się na podobny postępek. Innymi niemniej spektakularnymi przykładami są konstrukcje geometrii nieeuklidesowych. Ich pierwszy twórca, sławny już wówczas matematyk, astronom i fizyk Carl Friedrich Gauss (1777–1855) wstydził się opublikować swoje prace wychodzące od zakwestionowania niezwykle przecież intuicyjnego piątego aksjomatu Euklidesa. Także powstanie teorii liczb urojonych z budzącym ongiś wielkie emocje pierwiastkiem z minus jeden dokonało weryfikacji intuicji dotyczących pojęć i twierdzeń matematycznych.

Na tle całej matematyki, której rozwój jest procesem ściśle związanym z obalaniem kolejnych mitów, wyróżnia się jednak w sposób absolutnie szczególny teoria mnogości. Symptomatyczne i zarazem pocieszające jest to, że nawet ten, który uczynił bodaj najwięcej dla rozwoju współczesnej teorii mnogości, matematyk Georg Cantor (1845–1918), musiał sukcesywnie rezygnować z własnych przekonań, a to z powodu odkrywanych przez samego siebie twierdzeń. W liście do innego matematyka Juliusa Wilhelma Richarda Dedekinda (1831–1916) z dnia 29 czerwca 1877 roku, swój dowód twierdzenia głoszącego, iż mnożąc kartezjańsko zbiór liczb rzeczywistych przez siebie otrzymuje się zbiór równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych, skomentował sławnym już dziś stwierdzeniem „widzę, ale nie mogę w to uwierzyć". Co więcej, sam Dedekind w odpowiedzi na list Cantora zalecał mu ostrożność w głoszeniu odkrytych przez siebie tez, a zwłaszcza odradzał Cantorowi informowania opinii publicznej o swoich odkryciach w formie podobnej do tej ze wspomnianego już, wysłanego do Dedekinda, listu[36]. Nie zawsze jednak Cantor sam ogłaszał twierdzenia niezgodne ze swoimi intuicjami. W 1897 roku matematyk Cesare Burali-Forti (1861–1931) opublikował w artykule wydanym w języku włoskim *Una questione sui numeri transfiniti*[37] pierwszy paradoks teorii Cantora, mimo iż sam ten fakt był już Cantorowi znany od 1895 roku. Paradoks ten przypomnijmy w wersji zaproponowanej przez Ludwika Borkowskiego[38]:

[36] Aczel, [2000], s. 101, 107–108.
[37] Burali-Forti, [1897].
[38] Borkowski, [1991], s. 296.

Paradoks Burali-Fortiego

Niech W będzie zbiorem wszystkich liczb porządkowych[39]. Zbiór W jest więc zbiorem dobrze uporządkowanym przez relację $\leq$. Niech $\alpha = [W]$. $\alpha \in W$, a więc zbiór $W(\alpha)$ wszystkich liczb porządkowych mniejszych od α jest odcinkiem zbioru W[40]. Zatem $[W(\alpha)] = \alpha$. Zbiór W jest więc podobny do swego odcinka $W(\alpha)$. Jednak żaden zbiór dobrze uporządkowany nie jest podobny do żadnego swego odcinka.

Paradoks Burali-Fortiego przypomina paradoks zbioru uniwersalnego[41] oraz paradoks zbioru wszystkich zbiorów[42] – kolejne dylematy, z których istnienia Cantor doskonale zdawał sobie sprawę[43]. Sam bowiem udowodnił wcześniej, znany dziś jako *twierdzenie Cantora* fakt, iż moc zbioru potęgowego[44] danego zbioru X jest większa od mocy zbioru X. Dzięki temu twierdzeniu jasnym się stało, że nie może istnieć, ani zbiór uniwersalny, ani zbiór wszystkich zbiorów. Założenie bowiem istnienia któregokolwiek z tych zbiorów prowadzi w prosty sposób do sprzeczności:

---

[39] Powiemy, że dwa zbiory A i B uporządkowane odpowiednio przez relacje R i S, $<A, R>$ oraz $<B, S>$ są podobne, gdy istnieje funkcja f ustalająca równoliczność zbioru A ze zbiorem B taka, że dla dowolnych $x, y \in A$: xRy wtw $f(x)Sf(y)$. Relacja podobieństwa dla zbiorów uporządkowanych jest relacją równoważności. Określenie relacji podobieństwa dla zbiorów liniowo uporządkowanych umożliwia zatem podział tych zbiorów na typy porządkowe. Wyróżnia się: a. typy porządkowe zbiorów skończonych, utożsamiane z liczbami naturalnymi. Typ porządkowy n jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od n, uporządkowanym przez relację $\leq$. Naturalnie, 0 jest typem porządkowym zbioru pustego; b. typ porządkowy ω reprezentowany przez zbiór liczb naturalnych uporządkowany przez relację $\leq$. Zatem, $\omega = [<N, \leq>]$; c. typ porządkowy η reprezentowany przez zbiór liczb wymiernych uporządkowany przez relację $\leq$. Zatem, $\eta = [<Q, \leq>]$; d. typ porządkowy λ reprezentowany przez zbiór liczb rzeczywistych uporządkowany przez relację $\leq$. Zatem, $\lambda = [<\boldsymbol{R}, \leq>]$. Zbiorem *dobrze uporządkowanym* jest zbiór liniowo uporządkowany, którego każdy niepusty podzbiór ma element pierwszy. Zbiorem *liniowo uporządkowanym* jest zbiór częściowo uporządkowany $<X, R>$, w którym relacja porządkująca R spełnia warunek: $\forall x, y \in X$ (xRy lub yRx). Para $<X, R>$ jest zbiorem *częściowo uporządkowanym*, jeśli relacja R określona na zbiorze X spełnia warunki: 1. $\forall x \in X\ xRx$; 2. $\forall x, y, z \in X$ ((xRy i yRz) implikuje xRz; 3. $\forall x,y \in X$ ((xRy i yRx) implikuje $x = y$). Liczbą porządkową nazywamy typ porządkowy zbiorów dobrze uporządkowanych, patrz Borkowski, [1991], Rasiowa, [1979].

[40] *Odcinek zbioru* dobrze uporządkowanego A wyznaczony przez element a zbioru A jest to zbiór wszystkich elementów zbioru A wcześniejszych od a.

[41] *Zbiorem uniwersalnym* nazywamy zbiór wszystkich przedmiotów. Zatem, każdy zbiór zawiera się w zbiorze uniwersalnym, (patrz Borkowski, [1991], s. 147, 266).

[42] *Zbiorem wszystkich zbiorów* nazywamy zbiór, którego elementami są wszystkie zbiory i tylko zbiory, Borkowski [1991], s. 266.

[43] Paradoks zbioru wszystkich zbiorów przedstawił Cantor w liście do Dedekinda z 1899 r.

[44] *Zbiorem potęgowym* $P(X)$ zbioru X nazywamy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X, symbolicznie $P(X) = \{Y: X \subseteq Y\}$, (patrz Borkowski, [1991], s. 264.

Paradoks zbioru uniwersalnego
Moc zbioru[45] uniwersalnego jest największą liczbą kardynalną, bo każdy zbiór jest zawarty w zbiorze uniwersalnym. Z drugiej strony z twierdzenia Cantora wynika, że dla każdej liczby kardynalnej istnieje liczba kardynalna od niej większa, a więc moc zbioru uniwersalnego nie jest największą liczbą kardynalną[46].

Paradoks zbioru wszystkich zbiorów (paradoks Cantora)
Niech Z będzie zbiorem wszystkich zbiorów. Każdy podzbiór zbioru Z jest więc elementem zbioru Z. Zatem, zbiór potęgowy $P(Z)$ zbioru Z jest podzbiorem zbioru Z. Oznacza to, że moc zbioru $P(Z)$ jest niewiększa od mocy zbioru Z: $[[P(Z)]] \leq [[Z]]$. Jednak na mocy twierdzenia Cantora, moc zbioru $P(Z)$ jest większa od mocy zbioru Z: $[[P(Z)]] > [[Z]]$.

Udowodnienie nieistnienia zbioru uniwersalnego U sprawiło, że dostrzeżono konieczność ścisłego określania dziedzin dla analizowanych przypadków zbiorów. Skoro bowiem nie ma zbioru U, nie można mówić o dopełnieniu jakiegokolwiek zbioru A. Zbiór $U–A$ także nie może istnieć. Skoro jednak określimy dziedzinę D, w której rozważamy zbiór A, to możemy mówić o dopełnieniu $D–A$ zbioru A do dziedziny D. W podobny sposób można umożliwić zdefiniowanie zbioru, który jest własnym elementem. Intuicyjność zbiorów, które nie są własnymi elementami jest oczywista. Zbiór jabłek, nawet ten jednoelementowy, nie jest jabłkiem, zatem nie może należeć do jakiegokolwiek zbioru utworzonego z samych jabłek. W szczególności więc, zbiór jabłek nie jest własnym elementem. Podkreślana jest natomiast nieintuicyjność zbioru, który jest własnym elementem. Tymczasem, zbiór wszystkich nie-jabłek, jako że sam nie jest jabłkiem, jest zbiorem należącym do siebie, pod jednym wszakże warunkiem, mianowicie tym, że zostanie wcześniej określona dziedzina, do której ograniczamy naszą analizę. W przeciwnym razie, zbiór wszystkich nie-jabłek nie istnieje.

Wprost z nieistnienia zbioru uniwersalnego wynika nieistnienie zbioru wszystkich zbiorów równolicznych z danym zbiorem:

Paradoks zbioru wszystkich zbiorów równolicznych z danym zbiorem
Niech Z_A będzie zbiorem wszystkich zbiorów równolicznych z danym zbiorem A. Wówczas, suma rodziny[47] Z_A zbiorów jest zbiorem uniwersalnym. Istnieje więc zbiór uniwersalny.

---

[45] *Moc zbioru* zwana też liczbą kardynalną określa liczebność tego zbioru w taki sposób, że dwa zbiory mają tę samą moc wtedy i tylko wtedy, gdy są równoliczne, (por. Borkowski, [1991], s. 235–237).

[46] Borkowski, [1991], s. 266.

[47] *Suma rodziny zbiorów K* jest to zbiór wszystkich i tylko tych przedmiotów, które należą do jakiegoś (przynajmniej jednego) zbioru rodziny *K*, Borkowski, [1991], s. 154.

Posługując się pojęciem uogólnionej sumy liczb kardynalnych[48] dowodzi się twierdzenia, zgodnie z którym dla każdego zbioru liczb kardynalnych istnieje liczba kardynalna, będąca właśnie sumą uogólnioną wszystkich liczb kardynalnych tego zbioru, większa od każdej liczby należącej do tego zbioru. Na mocy tego twierdzenia wyklucza się więc istnienie zbioru wszystkich liczb kardynalnych:

Paradoks zbioru wszystkich liczb kardynalnych[49]
Niech *Kard* będzie zbiorem wszystkich liczb kardynalnych. Ponieważ, dla każdego zbioru liczb kardynalnych istnieje liczba kardynalna większa od każdej liczby należącej do tego zbioru, istnieje więc liczba kardynalna większa od każdej liczby kardynalnej zbioru *Kard*. Zatem, istnieje liczba kardynalna większa od samej siebie.

Jednak najsławniejszym paradoksem teorii Cantora, okazała się antynomia odkryta przez Bertranda Russella (1872–1970) analizującego paradoks Cantora. Podobno kilka lat wcześniej odpowiednika tej antynomii był świadom, lecz uznając jego oczywistość pominął milczeniem Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953)[50]. Russell opublikował ten paradoks w *Principles of Mathematics*, książce wydanej w 1903 roku[51]. Wcześniej podzielił się swoim odkryciem z Gottlobem Fregem (1848–1925) w liście datowanym na 16 czerwca 1902 roku[52]. Samego odkrycia Russell dokonał jednak cały rok wcześniej, w czerwcu 1901 roku.

Antynomia Russella
Niech *Z* będzie zbiorem wszystkich tych zbiorów, które nie są własnymi elementami. Czy zbiór *Z* jest własnym elementem? Załóżmy, że tak. Wówczas, zbiór *Z* znajduje się poza zbiorem *Z*, gdyż w nim są tylko te i wszystkie te zbiory, które nie są własnymi elementami. Zatem zbiór *Z* nie należy do siebie. Udowodniliśmy, że jeśli zbiór *Z* jest własnym elementem, to nie jest własnym

---

[48] *Suma uogólniona zbioru* $K_{[I]}$ liczb kardynalnych jest liczbą kardynalną sumy takiej rodziny zbiorów rozłącznych, że każdy zbiór tej rodziny ma moc równą jednej i tylko jednej z liczb kardynalnych zbioru $K_{[I]}$, (patrz Borkowski, [1991], s. 268).

[49] Paradoks ten w pewnym sensie wykracza poza serię przypomnianych przed nim paradoksów Burali-Fortiego, zbioru uniwersalnego, zbioru wszystkich zbiorów, zbioru wszystkich zbiorów równolicznych z danym zbiorem, gdyż zarówno w dowodzie istnienia jak i w dowodzie warunku jedyności sumy uogólnionej liczb kardynalnych wykorzystuje się aksjomat wyboru, który sam jest źródłem pewnych konsekwencji, (patrz Borkowski, [1991], s. 269–270).

[50] Aczel, [2000], s. 149.

[51] Russell, [1903].

[52] Russell, [1902]. W liście tym Russell skarżył się Fregemu, że wcześniej, list o podobnej treści wysłał do Peano, lecz ten jak dotąd nie zareagował.

elementem. Załóżmy więc, że zbiór Z nie jest własnym elementem. Wówczas, zbiór Z należy do zbioru Z, gdyż w nim są wszystkie zbiory nie będące własnymi elementami. Zatem zbiór Z jest własnym elementem. Udowodniliśmy więc, że jeśli zbiór Z nie jest własnym elementem, to jest własnym elementem. Obie dowiedzione implikacje wzajemnie odwrotne dają równoważność:

zbiór Z jest własnym elementem
wtedy i tylko wtedy, gdy
zbiór Z nie jest własnym elementem.

W zapisie symbolicznym,

$$Z \in Z \quad \text{wtw} \quad Z \notin Z.$$

Mogłoby się wydawać, że antynomia Russella jest pewną odmianą paradoksu Cantora. Nie jest bowiem możliwe wyprowadzenie paradoksalnej równoważności, jeśli nie założymy że rozważamy zbiór wszystkich(!) zbiorów nie będących własnymi elementami. Okazuje się jednak, że istotą tej antynomii jest jednak coś więcej. Jest ona skutkiem przyjętego przez Cantora „intuicyjnego" założenia, że każdej własności odpowiada zbiór wszystkich i tylko tych przedmiotów, które tę własność posiadają[53]. W pracy *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* z 1882 roku[54] Cantor zamieścił zdanie „Istnieje zbiór X złożony ze wszystkich obiektów x spełniających $\Phi(x)$"[55]. Odzwierciedleniem tego przekonania była aksjomatyka teorii mnogości, którą Cantor przyjął. Tworzyły ją dwa aksjomaty, pierwszy *ekstensjonalności*, definiujący równość dwóch zbiorów oraz drugi *abstrakcji*, utożsamiający istnienie dowolnej własności φ z istnieniem zbioru $A = \{x\colon \varphi(x)\}$, wszystkich tych i tylko tych obiektów x, które tę własność posiadają:

$$\forall A\ \forall B\ \forall x\ ((x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B),$$
$$\exists A\ \forall x\ (x \in A \leftrightarrow \varphi(x)).$$

Jak wykazał Russell, całkiem poprawnym na gruncie teorii Cantora, a więc dopuszczalnym podstawieniem drugiego aksjomatu jest formuła:

$$\exists y\ \forall x\ (x \in y \leftrightarrow x \notin x),$$

[53] Zauważmy, że odwrotna zależność nie budzi wątpliwości. Każdemu zbiorowi odpowiada bowiem własność, przysługująca wszystkim elementom tego zbioru i tylko tym elementom. Własnością tą jest właśnie należenie do danego zbioru.

[54] Cantor, [1882].

[55] Kuratowski, Mostowski, [1978], s. 73.

z której natychmiast wyprowadzamy sprzeczną formułę, zwaną dziś antynomią Russella:

$$\exists y\,(y \in y \leftrightarrow y \notin y).$$

Widać więc, że antynomia ta dowodzi błędności kolejnej intuicji nakazującej w pewien, wzajemnie jednoznaczny sposób wiązać pojęcie zbioru z pojęciem własności. To jakże intuicyjne, choć jak widać błędne przekonanie wyrażone w drugim aksjomacie teorii mnogości Cantora, sprawiło, że teoria ta zyskała miano *naiwnej*. Jak się bowiem okazuje, mimo iż bez wątpienia każdy zbiór wyznacza własność, to jednak nie każda własność wyznacza zbiór. Co ciekawe, nie chodzi tu wcale o własności sprzeczne, czyli takie jak „x zarazem jest zbiorem i nie jest zbiorem". One bowiem wyznaczają zbiór pusty, nie generując tym samym sprzeczności. Istnieją natomiast własności, które skądinąd należy uznać za całkiem rozsądne, jak na przykład „x nie jest własnym elementem", a mimo to implikujące sprzeczność. Poza odkryciem ściśle teoriomnogościowej antynomii, Russell zauważył, iż ma ona również swój formalno-logiczny odpowiednik. Nie trzeba przecież odwoływać się ani do pojęcia zbioru, ani do pojęcia relacji należenia do zbioru, aby otrzymać analogiczną sprzeczność. Wystarczy, nie wychodząc poza logikę kwantyfikatorów, rozważyć właśnie taką własność, która polega na tym, że własność ta ma nie przysługiwać:

$$\exists y\,\forall x\,(P(x,y) \leftrightarrow \neg P(x,x)).$$

Wówczas, w szczególności

$$\exists y\,(P(y,y) \leftrightarrow \neg P(y,y))^{56}.$$

Przykładem tego typu dylematu jest powszechnie znany paradoks golibrody, a także antynomie Richarda, Berry'ego i Grellinga[57]. Zarówno antynomia Russella, jak i wspomniane paradoksy semantyczne wskazują na istnienie pewnej logicznej zasady, której złamanie nieuchronnie prowadzi do sprzeczności. Na istnienie tej zasady wskazał być może już Russell, chociaż trudno dzisiaj o jakąkolwiek pewność w tej sprawie. Willard van Orman Quine (1908–2000), w książce zatytułowanej *Quiddities. An Intermittenly Philosophical Dictionary* przypomina, iż opublikował tę zasadę w 1941

---

[56] Patrz, Mostowski, [1948], s. 211–212.

[57] Antynomia Russella jest dylematem ściśle związanym z problemem samozwrotności, podobnie jak paradoks golibrody, czy antynomie Richarda, Berry'ego oraz Grellinga, które są omówione w rozdziale poświęconym paradoksom samozwrotności.

roku[58]: „Żaden przedmiot *danego rodzaju* nie może pozostawać w relacji do wszystkich i tylko tych rzeczy *tego rodzaju*, które nie pozostają w tej relacji do samych siebie". Widać więc, że zasada ta ujawnia trudność wynikłą z pewnego rodzaju samoodniesienia się. Dlatego też paradoksy Richarda, Berry'ego i Grellinga są omówione w rozdziale poświęconym problemom wynikającym z samozwrotności. Faktem oczywistym jest to, iż antynomia Russella mogłaby być omówiona w tym samym, dalszym rozdziale książki. Jednak jej związek z teorią mnogości jest tak istotny i kluczowy dla podstaw matematyki, że mając wybór omówienia antynomii Russella, albo w tym rozdziale, albo w rozdziale dotyczącym samozwrotności, bez wahania należy przyjąć opcję pierwszą, nie zapominając o tym, że istotą tej antynomii jest właśnie problem cyrkularności.

Wszystkie omówione w tym paragrafie propozycje rozwiązań paradoksów naiwnej teorii mnogości można podzielić na trzy następujące grupy:

1) rozwiązania wykorzystujące ideę teorii typów,
2) rozwiązania bazujące na aksjomatyzacji teorii mnogości,
3) rozwiązania łączące teorię typów z aksjomatyzacją teorii mnogości,
4) rozwiązania bazujące na systemach Leśniewskiego.

Warto zauważyć, że zasygnalizowane rozwiązania mają charakter ogólny, w tym sensie, że wykraczają poza problem antynomii Russella. Ich celem jest bowiem niesprzeczne ufundowanie matematyki, czyli konstrukcja wolnego od paradoksów systemu logicznego, obejmującego rachunek zbiorów oraz teorię relacji, umożliwiającego wyprowadzenie arytmetyki. Nic więc dziwnego, że w podejściach tych znika nie tylko antynomia Russella, lecz także pozostałe paradoksy cantorowskiej teorii mnogości.

1.5.3.1. ROZWIĄZANIA WYKORZYSTUJĄCE TEORIĘ TYPÓW

Twórcą pomysłu leżącego u podstaw teorii typów jest Russell. W swoim artykule *Mathematical logic as based on the theory of types*, opublikowanym w 1908 roku, przedstawił ją w wersji pierwotnej, dalekiej jednak od ścisłości[59]. Rozwiniętą postać tej teorii, zwaną *rozgałęzioną teorią typów* (*ramified theory of types*) zawarł wspólnie z Alfredem Northem Whiteheadem (1861–1947) w ich sławnym dziele *Principia Mathematica*[60]. Kluczową ideą teorii typów jest podział obiektów na typy. Innego typu są zbiory, a innego elementy tworzące te

---

[58] Quine, [1987], s. 131.
[59] Russell, [1908].
[60] Whitehead i Russell, [1913].

zbiory, jeszcze inny typ stanowią zbiory zbiorów itd. Przy takim podejściu zdania stwierdzające, że jakiś zbiór należy, czy też nie należy do siebie, tracą sens i jako takie nie należą do teorii zbiorów. Krytyka rozgałęzionej teorii typów zaowocowała powstaniem prostej teorii typów. Ze względu na faktyczną prostotę tej drugiej, prosta teoria typów jest zwykle omawiana jako pierwsza. Rozgałęzioną teorię typów referuje się zwykle w odniesieniu do teorii prostej. Podobną strategię przyjmujemy w poniższej prezentacji.

Prosta teoria typów, ogólna teoria klas[61]**.** Opublikowanie przez matematyka, logika, filozofa, malarza i teoretyka sztuki Leona Chwistka (1884–1944) w latach 1923–1924 *The theory of constructive types*[62], oraz przez zmarłego w młodym wieku, matematyka, logika i filozofa, związanego z Cambridge, Franka Plumptona Ramseya (1903–1930) w roku 1926 *The foundations of mathematics* spowodowało wyparcie rozgałęzionej teorii typów przez nowszą, uproszczoną, zwaną *prostą teorią typów*, w dojrzałej formie przedstawioną po raz pierwszy przez Alonso Churcha (1903–1995) dopiero w 1940 roku *A formalisation of the simple theory of types*[63]. W nowej teorii, tak jak w rozgałęzionej, obiekty są podzielone na nieskończenie wiele niepustych i wzajemnie rozłącznych klas, zwanych właśnie *typami*. Omawianie prostej teorii typów w znaczny sposób ułatwia indeksowanie typów. Jeśli $t_1, ..., t_n$ są indeksami pewnych typów, to $(t_1, ..., t_n)$ również jest indeksem typu. Typ o indeksie i zawiera wszystkie indywidua. Indeks (t) reprezentuje typ zbiorów, czy też własności obiektów typu o indeksie t (w skrócie, typu t). W szczególności, (i) jest indeksem klasy zbiorów, których elementami są wyłącznie indywidua. Typ relacji dwuczłonowej zachodzącej między obiektami odpowiednio typów t_1 i t_2 ma indeks (t_1, t_2).

Wszystkie typy są następnie podzielone indukcyjnie na *poziomy* (także, *rzędy*). Do poziomu zerowego należą indywidua. Do poziomu n-tego należą typy, których członami są obiekty o typie niższym niż n i jednocześnie takie, że przynajmniej jeden obiekt jest typu $n-1$. Tak więc, do poziomu pierwszego należą na przykład (i), (i,i), (i,i,i), do poziomu drugiego, zaś $((i))$, $((i),i)$, $((i,i))$, $((i, i),(i),i)$. Numerem poziom danego typu określa się także wszystkie obiekty tego typu. Dany obiekt ma więc ten sam poziom, co typ do którego należy.

Jeśli więc przyjmiemy, że indywidua, a więc obiekty typu i są liczbami rzeczywistymi, to relacje wyrażone wzorami $x < y$, $y = x + z$, $y = \lim_{x \to a} f(x)$ są odpowiednio obiektami następujących typów: (i,i), (i,i,i), $(i,(i,i),i)$.

---

[61] Patrz S. Krajewski, *Teoria typów* [w:] Marciszewski, [1987], s. 112– 120 oraz H. Stonert, *Prosta teoria typów* [w:] Marciszewski [1988], s. 202–206.

[62] Chwistek, [1924].

[63] Church, [1940].

Okazuje się, że ta wyjątkowo bogata w typy teoria jest równoważna znacznie prostszej teorii ograniczonej do typów indywiduów, klas indywiduów, klas klas indywiduów itd. Jest to o tyle zrozumiałe, że relacje można rozważać jako klasy par uporządkowanych, zaś pary uporządkowane, jako odpowiednie klasy. Ten prostszy fragment teorii jest nazywany *ogólną teorią klas*, w której mamy do czynienia z wyłącznie następującymi typami: *i*, (*i*), ((*i*)), (((*i*))), ((((*i*)))), (((((*i*))))),... Typy te są indeksowane odpowiednio przez 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... Łatwo zauważyć, że typy ogólnej teorii klas cechuje to, iż elementami zbioru danego poziomu mogą być wyłącznie obiekty z poziomu o jeden niższego niż poziom tego zbioru.

Słownik języka ogólnej teorii klas zawiera zmienne v^i_j dla $i, j = 0, 1, 2, \ldots$ oraz predykaty „=" i „∈" Formułami atomowymi są więc, $v^i_j = v^i_k$ oraz $v^i_j \in v^{i+1}_k$, dla $i, j, k = 0, 1, 2, \ldots$[64]. Jak widać, predykat równości może łączyć wyrażenia tego samego typu, zaś predykat należenia obiekt danego typu z obiektem typu o jeden wyższego. Ponadto, do budowy formuł złożonych służą spójniki zdaniowe i kwantyfikatory.

Łatwo zauważyć, iż z kształtu zdań atomowych ogólnej teorii typów wynika, że jest ona wolna od antynomii Russella, gdyż odpowiednie dla tej antynomii zdanie nie występuje w języku tej teorii.

Aksjomatykę teorii stanowi aksjomatyka rachunku kwantyfikatorów rozszerzona o dwie grupy aksjomatów:
aksjomat ekstensjonalności, dla każdego typu $k \neq 0$:

$$\forall x^k\, \forall y^k\, \forall z^{k-1}\, ((z^{k-1} \in x^k \leftrightarrow z^{k-1} \in y^k) \rightarrow x^k = y^k)$$

oraz *aksjomat istnienia klas*, również dla każdego typu $k \neq 0$:

$$\exists y^k\, \forall x^{k-1}\, (x^{k-1} \in y^k \leftrightarrow A),$$

gdzie A jest dowolną formułą, w której zmienna y^k nie występuje jako wolna.

Jak widać, oba aksjomaty cantorowskiej teorii mnogości, z których drugi o istnieniu zbioru wyznaczonego przez dowolną własność odpowiada za wyprowadzalność antynomii Russella, określają także ogólną teorię klas. Jednak, zarówno forma jaką może przybrać w języku tej teorii formuła A jak i formuła atomowa $x^{k-1} \in y^k$, obie występujące w drugiej grupie aksjomatów, w oczywisty sposób uniemożliwiają wyprowadzenie tej antynomii w ogólnej teorii klas.

---

[64] Zaproponowana prezentacja języka ogólnej teorii klas zawiera pewne uproszczenie. W języku tym, tak naprawdę nie występuje ani predykat „=", ani „∈", lecz klasa predykatów „$=^k$", ani „$\in^k$" dla k = 0, 1, 2, ... Ponieważ jednak argumenty występujące w zdaniu atomowym wskazują już na typ samego predykatu, indeks występujący przy predykacie najczęściej jest pomijany.

W przypadku prostej teorii typów, oba aksjomaty mają bardziej złożoną postać, odpowiadającą przecież znacznie bogatszemu językowi:

$$\forall x^{(t1,\ldots,tn)} \forall y^{(t1,\ldots,tn)} \forall z^{t1}\ldots\forall z^{tn} ((x^{(t1,\ldots,tn)}(z^{t1},\ldots,z^{tn}) \leftrightarrow y^{(t1,\ldots,tn)}(z^{t1},\ldots,z^{tn})) \to x^{(t1,\ldots,tn)} \leftrightarrow y^{(t1,\ldots,tn)});$$

$$\exists y^{(t1,\ldots,tn)} \forall x^{t1}\ldots\forall x^{tn} (y^{(t1,\ldots,tn)}(x^{t1},\ldots,x^{tn}) \leftrightarrow A),$$

gdzie A jest dowolną formułą, w której zmienna $y^{(t1,\ldots,tn)}$ nie występuje jako wolna. Zamiast dokładnie definiować język prostej teorii typów, co znacznie wykracza poza ramy niniejszej prezentacji, wspomnijmy tylko, że formuła $y^{(t1,\ldots,tn)}(x^{t1},\ldots,x^{tn})$ oznacza tyle, co $(x^{t1},\ldots,x^{tn}) \in y^{(t1,\ldots,tn)}$. Zatem, oba aksjomaty są w istocie powtórzeniem tych, określających naiwną teorię mnogości Cantora. Naturalnie, ewentualna antynomialność jest tu zablokowana przez ograniczenie sensowności wyrażeń.

Jedną ze słabości tak prostej teorii typów, jak i ogólnej teorii klas jest konieczność postulowania w każdej z nich, istnienia klasy nieskończonej. W tym celu aksjomatykę teorii wzbogaca się o dodatkowy aksjomat nie będący już schematem zdań, lecz zdaniem. Jego postać w ogólnej teorii klas może być następująca:

$$\exists x^2 (\exists y^1\, y^1 \in x^2 \wedge \forall y^1 (y^1 \in x^2 \to \exists z^1 (z^1 \in x^2 \wedge \forall t^0 (t^0 \in y^1 \to t^0 \in z^1) \wedge \exists t^0 (t^0 \in z^1 \wedge t^0 \notin y^1)))).$$

W przypadku prostej teorii typów jest analogiczna:

$$\exists x^{((i))} (\exists y^{(i)}\, x^{((i))}(x^{(i)}) \wedge \forall x^{(i)} (x^{((i))}(x^{(i)}) \to \exists y^{(i)} (x^{((i))}(y^{(i)}) \wedge \forall x^i (x^{(i)}(x^i) \to y^{(i)}(x^i)) \wedge \exists x^i (y^{(i)}(x^i) \wedge \neg y^{(i)}(x^i))))).$$

Wspomniana trudność związana z istnieniem zbioru nieskończonego nie jest jedyna. Istnieją problemy świadczące o pewnej sztuczności, tak prostej teorii typów jak i ogólnej teorii klas. Dla przykładu można zauważyć, że dopełnienie danej klasy obiektów jest ograniczone wyłącznie do klasy wszystkich obiektów tego samego typu, co dana klasa. Oddzielnego wprowadzenia do teorii wymagają wszystkie te obiekty i operacje, które z natury rzeczy są związane nie z jednym typem, lecz z co najmniej dwoma. Dla każdego typu istnieje właściwa mu klasa pusta, co w konsekwencji daje istnienie nieskończenie wielu klas pustych. Również konstrukcja liczb naturalnych musi być powtórzona dla każdej klasy z osobna. Prowadzi to do takich sytuacji, w których każde twierdzenie dotyczące liczb naturalnych także musi być dowiedzione osobno dla każdej klasy. Autorzy *Principiów* zastosowali nawet tak zwaną „systematyczną wieloznaczność", umożliwiającą przeprowadzenie jednego dowodu wspólnego dla wszystkich typów. Jednak najciekawszy i chyba najistotniejszy zarzut przeciw teorii typów wysunął Max Black (1909–1988)[65], który wskazał na to, iż samo pojęcie typu jest przyjęte bez jakiegokolwiek ograniczenia co do typu tego pojęcia. Przyznając Blackowi rację Russell stwierdził: „samo słowo *typ* grzeszyło przeciw literze tej *teorii*"[66].

Rozgałęziona teoria typów[67]. Podstawową różnicą między prostą a rozgałęzioną teorią typów jest to, że w tej drugiej poza podziałem obiektów na typy rozróżnia się jeszcze stopnie obiektów należących do tych samych typów. Podstawą tego dodatkowego rozróżnienia jest sposób definiowania lub definiowalności obiektów. I tak dla przykładu, chociaż formuły $G(x^i)$ i $\forall x^i\ F(x^{(i)}, x^i)$ definiują odpowiednio jakieś zbiory indywiduów Z_1 i Z_2, oba należące do jednego typu, to formuły te są w teorii rozgałęzionej rozróżnione stopniem.

Metodę przypisywania stopni, przedstawmy na przykładzie zbiorów, czyli relacji jednoczłonowych:

Niech F będzie formułą zdaniową zawierającą jedną zmienną wolną x^t, typu t i poziomu k. Ponadto, t jest typem relacji jednoczłonowej. Niech formuła F definiuje zbiór Z typu t i poziomu k. Wówczas:

1. Jeśli formuła F nie zawiera kwantyfikatora wiążącego zmienną poziomu wyższego niż k, to zbiór Z jest *stopnia pierwszego*. Stopień pierwszy przypisuje się również stałej denotującej zbiór Z, oraz samej formule F, którą nazywa się *formułą predykatywną*.

2. Jeśli formuła F zawiera kwantyfikator wiążący zmienną poziomu $k+n$, gdzie $n \geq 1$, i nadto F nie zawiera żadnego kwantyfikatora wiążącego zmienną poziomu wyższego niż k, to zbiór Z jest stopnia n+1-go. Podobnie, jak w przypadku stopnia pierwszego, stopień n+1 przypisuje się również stałej denotującej wspomniany zbiór oraz formule F, która nazywa się wówczas *formułą niepredykatywną*.

W podanym wyżej przykładzie formuła $G(x^i)$ jest predykatywna, gdyż nie zawiera kwantyfikatora wiążącego zmienną poziomu wyższego niż $k = 0$, rzędu jedynej występującej w niej zmiennej. Definiowany przez tę formułę zbiór Z_1 jest więc stopnia pierwszego. Formuła $\forall x^i\ F(x^{(i)}, x^i)$ jest natomiast niepredykatywna, ponieważ zawiera kwantyfikator wiążący zmienną poziomu 1, podczas gdy występująca w niej zmienna ma typ t poziomu $k = 0$. Stąd, zbiór Z_2 definiowany przez tę formułę jest stopnia drugiego.

---

[65] Black, [1944].

[66] Krajewski, *Teoria typów* [w:] Marciszewski, [1987], s. 116.

[67] Patrz S. Krajewski, *Teoria typów* [w:] Marciszewski, [1987], s. 112–120 oraz H. Stonert, *Rozgałęziona teoria typów* [w:] Marciszewski [1988], s. 206–208.

Przedstawione wyżej rozróżnienie formuł na predykatywne i niepredykatywne, a więc rozgałęzienie typów miało na celu realizację idei francuskiego matematyka, fizyka, astronoma i filozofa Julesa-Henri'ego Poincaré (1854–1912), uniknięcia błędnego koła w definiowaniu: jeśli definicja jakiegoś obiektu wymaga kwantyfikacji, to obiekt ten nie może być elementem zakresu, który przebiega kwantyfikowana zmienna[68]. Własność „x ma wszystkie cechy właściwe wielkiemu generałowi" jest własnością drugiego rzędu, gdyż nie może definiować wielkiego generała, chociaż w istocie jest jego cechą. Cecha ta jest dopiero wyznaczana przez cechy pierwszego rzędu definiujące wielkiego generała. To błędne koło wyrażało się w paradoksach syntaktycznych. O ile bowiem podział obiektów językowych na typy sprawiał, że takie antynomie jak Russella, Burali-Fortiego, czy paradoks zbioru wszystkich zbiorów znikały, bo nie dawały się nawet sformułować, o tyle w teorii typów bez rozgałęzienia, nadal istniały paradoksy Richarda, Berry'ego czy Grellinga[69]. Z tego powodu, Russell wykluczył możliwość definiowania przedmiotów w swojej rozgałęzionej teorii za pomocą formuł niepredykatywnych. Tak więc, w przytoczonym wcześniej przykładzie, w przeciwieństwie do formuły $G(x^i)$ definicją nie jest formuła $\forall x^i\ F(x^{(i)},x^i)$. Rozgałęziona teoria typów jest teorią wyłącznie definiowalnych klas.

Niestety, mimo ogromnego stopnia skomplikowania, w teorii tej nie jest możliwa rekonstrukcja nawet elementarnych fragmentów matematyki. Przestrzeganie zasady Poincarégo prowadzi do niemożności zdefiniowania wielu pojęć, takich jak chociażby kresu górnego zbioru liczb rzeczywistych. Skutkiem tego ograniczenia niektóre kluczowe twierdzenia analizy matematycznej nie dawały się sformułować, inne zaś udowodnić. Aby ten problem obejść, Russell wprowadził *aksjomat redukowalności* (*sprowadzalności*), zgodnie z którym, dla dowolnej klasy istnieje klasa tego samego typu i poziomu jeden, posiadająca dokładnie te same elementy, co dana klasa. To racjonalne wydawać by się mogło podejście, stawia jednak pod znakiem zapytania całą hierarchię poziomów. Potrzeba usunięcia paradoksów syntaktycznych spowodowała więc wyjątkowe skomplikowanie teorii typów. Ramsey, chcąc uzasadnić swoje, referowane już, uproszczenie teorii typów, przedstawione w książce *The foundations of mathematics and other logical essays* z 1931 roku[70], zaproponował podział wszelkich antynomii na dwie grupy. Do pierwszej zaliczył tzw. paradoksy logiczne w węższym sensie, czyli te usuwane przez wprowadzenie prostej teorii typów, do drugiej zaś pozostałe paradoksy, funkcjonujące do dziś pod nazwami paradoksów syntaktycznych, językowych, epistemologicznych, czy semantycznych[71]. Zdaniem Ramseya, wystarczającą

[68] Poincaré, [1905].
[69] Patrz paragraf 3.3 *Inne paradoksy semantyczne*.
[70] Ramsey, [1931].
[71] Carnap, [1937].

ochroną przed paradoksami drugiej grupy jest odróżnienie języka przedmiotowego od metajęzyka.

Rozgałęziona i prosta teoria typów, jak również ogólna teoria klas, nie wyczerpują rozwiązań bazujących na rozseparowaniu obiektów języka. Pewną odmianą wyżej przedstawionej ogólnej teorii klas jest teoria kategorii semantycznych Alfreda Tarskiego z 1933 roku[72]. Systemy realizujące idee rozgałęzionej teorii typów stały się również tematem prac Paula Lorenzena i Hao Wanga. Jednak uważa się, że lata 50. dwudziestego stulecia są czasem trwałego, jak dotychczas, zmierzchu popularności teorii typów, która ustąpiła miejsca aksjomatycznym teoriom mnogości, a właściwie najpopularniejszej z nich, teorii Zermelo-Fraenkla.

Rozwiązania paradoksów na gruncie teorii typów

Prześledźmy teraz, jak, w konkretny sposób, teoria typów rozwiązuje problemy związane z antynomiami. Niech wprowadzeniem będą słowa Andrzeja Mostowskiego (1913–1975)[73]: „Odróżnianie wyrażeń od ich nazw jest przykładem rozróżniania, ogólnie, pojęć matematycznych od metamatematycznych. Pedantyczne rozróżnienie jednych i drugich wydać się może początkującemu czytelnikowi przysłowiowym rozszczepianiem włosa na czworo. Jest jednak faktem historycznym, że mieszanie ze sobą tych pojęć doprowadziło do sprzeczności, z którymi nie umieli poradzić sobie najwybitniejsi filozofowie i matematycy na początku naszego wieku. Sprzeczności te okazały się pozorne. Nazywamy je antynomiami semantycznymi (dla odróżnienia od antynomii [...] które wynikały z nieumiarkowanego przekraczania zasady czystości typów)".

Paradoks Burali-Fortiego nie zachodzi, gdyż w teorii typów nie może być mowy o zbiorze jakichkolwiek liczb porządkowych, a więc w szczególności o zbiorze wszystkich liczb porządkowych.

Paradoks zbioru uniwersalnego nie zachodzi, bo, mimo iż zbiór uniwersalny, rozumiany jako zbiór wszystkich indywiduów, istnieje w teorii typów, to nie jest prawdą, że każdy zbiór zawiera się w takim zbiorze uniwersalnym. Każdy bowiem typ obiektów ma swój zbiór uniwersalny. Nie można więc stwierdzić, że liczba kardynalna tego zbioru jest największą liczbą kardynalną.

---

[72] Tarski, [1933]. Porównanie rozgałęzionej teorii typów Whiteheada i Russella, a właściwie, wcześniejszej, mniej ścisłej propozycji samego Russella, z propozycją Tarskiego można znaleźć w pracy Alonzo Churcha *Comparison of Russell's Resolution of the Semantical Antinomies with That of Tarki*, Church, [1976].

[73] Mostowski, [1948], s. 315.

Paradoks zbioru wszystkich zbiorów nie zachodzi, bo w teorii typów nie może być mowy o zbiorze wszystkich zbiorów.

Paradoks zbioru wszystkich zbiorów równolicznych z danym zbiorem nie zachodzi, bo nie może być mowy o istnieniu takiego zbioru. Jego elementy nie należałyby bowiem do jednego typu.

Paradoks zbioru wszystkich liczb kardynalnych nie zachodzi, z co najmniej dwóch powodów. Po pierwsze, w teorii typów nie może być mowy o jakimkolwiek zbiorze liczb kardynalnych, a więc w szczególności o zbiorze wszystkich liczb kardynalnych. Po drugie, twierdzenie, na którym opiera się paradoksalne wnioskowanie, a które mówi, że dla każdego zbioru liczb kardynalnych istnieje liczba kardynalna większa od każdej liczby należącej do tego zbioru; wykorzystuje konstrukcję sumy uogólnionej wszystkich liczb kardynalnych danego zbioru, niedopuszczalną w teorii typów.

Antynomia Russella nie zachodzi, gdyż zdania stwierdzające, że dany zbiór należy lub nie należy do siebie samego nie są zdaniami teorii typów. Antynomia ta nie jest więc wyrażalna na gruncie tych teorii.

1.5.3.2. ROZWIĄZANIA BAZUJĄCE NA AKSJOMATYZACJI TEORII MNOGOŚCI

Jak wiemy, źródłem antynomii Russella jest pewnik abstrakcji będący drugim, z dwóch aksjomatów naiwnej teorii mnogości Cantora, gwarantujący istnienie zbioru generowanego przez dowolną własność. Rozwiązania bazujące na teorii typów zachowując ten aksjomat blokowały antynomię Russella przez ograniczenia języka. Inną, możliwą do zastosowania metodą uniknięcia wspomnianej antynomii jest uszanowanie wszystkich możliwych do utrzymania intuicji leżących u podstaw naiwnej teorii mnogości, z jednoczesnym osłabieniem aksjomatu abstrakcji. Ta właśnie idea legła u podstaw rozwiązań, które bez dzielenia obiektów językowych na rozłączne klasy, określały wolną od sprzeczności aksjomatyzację teorii mnogości.

Aksjomatyka Zermelo-Fraenkla[74]. Po kilku latach prac nad zaksjomatyzowaniem teorii mnogości, w roku 1908 ukazał się artykuł Zermelo zatytułowany *Neuer Beweis für die Grundlagen der Mengenlehre*[75], w którym teoria mnogości została określona przez przedstawiony niżej zbiór

---

[74] Patrz W. Marciszewski, *Aksjomatyczne ujęcie teorii mnogości*, [w:] Marciszewski, [1987], s. 121–131 oraz H. Stonert, *Teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema*, [w:] Marciszewski [1988], s. 194—197.

[75] Zermelo, [1908].

aksjomatów z osłabionym pewnikiem wyboru. Przyjęty w pracy, zestaw aksjomatów zabezpieczał teorię mnogości przed zbiorami, które Zermelo nazywał *maksymalnie bogatymi*. Naturalnie, zbiorami tymi są: zbiór wszystkich zbiorów, zbiór wszystkich liczb porządkowych, zbiór wszystkich liczb kardynalnych, zbiór zbiorów, które nie są własnymi elementami. Niebezpieczny dla teorii mnogości pewnik abstrakcji przedstawił więc w takiej formie, żeby nie implikował istnienia tych właśnie zbiorów:

$$\exists x\, \forall y\, (y \in x \leftrightarrow (y \in z \wedge \varphi(y))).$$

Aksjomat abstrakcji w nowej wersji umożliwia tworzenie zbioru przedmiotów mających pewną własność, ale jako podzbioru już istniejących zbiorów. Możemy więc utworzyć zbiór x z tych elementów zbioru z, które spełniają własność φ. Zatem, do utworzenia zbioru nie wystarcza już sama własność, lecz potrzebny jest dodatkowo zbiór, z którego będziemy wybierali elementy posiadające daną własność.

Aksjomatyzacja Zermelo stała się przedmiotem wielu badań, które prowadziły do doskonalenia systemu. Istotny wkład w ostateczną postać aksjomatyzacji zapoczątkowanej przez Zermelo mieli Adolf Abraham Halevi Fraenkel (1891–1965), Thoralf Albert Skolem (1887–1963) i Dimitri Mirimanoff (1861–1945). W niezależny od siebie sposób, dostrzegli oni potrzebę wzbogacenia systemu Zermelo o aksjomat zastępowania. Ponadto, prace Skolema z 1922 roku doprowadziły do sformułowania aksjomatu podzbioru. Pod wpływem idei Mirimanoffa i Johna (Jánosa) von Neumanna (1903–1957), Zermelo około 1930 roku sformułował aksjomat ufundowania, który zabezpieczał teorię mnogości przed istnieniem zbiorów będących własnymi elementami ($x \in x$), jak również zbiorów będących elementami tych zbiorów, które są ich elementami, itd. ($x \in y \wedge y \in x$, $x \in y \wedge y \in z \wedge z \in x$, itd.). Uwzględniając wkład Fraenkla i Skolema w ostateczną postać systemu Zermelo, system ten jest obecnie nazywany systemem Zermelo-Fraenkla (w skrócie systemem ZF) lub systemem Zermelo-Fraenkla-Skolema. Niekiedy, dla zaakcentowania istotnego dla systemu pewnika wyboru, dodanego do wcześniej sformułowanej aksjomatyki przez samego Zermelo w roku 1904[76], system ZF bywa nazywany ZFC: C od słowa *choice*.

Pierwotnymi pojęciami systemu ZFC są „zbiór” oraz predykat należenia do zbioru. Ponadto, system operuje jednym rodzajem zmiennych. System ZFC, poza wspomnianym już wyżej pewnikiem abstrakcji w osłabionej postaci zwanej *aksjomatem wyróżniania* lub *aksjomatem podzbiorów*, określają następujące aksjomaty:

---

[76] Zermelo, [1904].

$\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow y = z$	aksjomat ekstensjonalności
$\forall x\,\forall y\,(x \neq y \rightarrow (\exists z\,\forall v\,(v \in z \leftrightarrow (v = x \vee v = y))$	aksjomat pary
$\forall x\,((\exists y\; y \in x \rightarrow \exists z\,\forall v\,(v \in z \leftrightarrow \exists s\,(v \in s \wedge s \in x)))$	aksjomat sumy
$\forall x\,\exists y\,\forall z\,(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$[77]	aksjomat zbioru potęgowego
$(\forall x \forall y\,(x \in t \wedge x \in t) \rightarrow ((x \neq \varnothing \wedge x \neq y) \rightarrow x \cap y = \varnothing) \rightarrow$ $\exists z\,\forall v\,(v \in t \rightarrow \exists w\,\forall u\,(u \in z \cap v \leftrightarrow u = w))$	aksjomat wyboru
$\exists x\,(\varnothing \in x \wedge \forall y\,(y \in x \rightarrow \{y\} \in x))$	aksjomat nieskończoności
$\forall x\,\exists y\,\forall z\,(\varphi(x,y) \leftrightarrow y = z) \rightarrow$ $\forall v\,\exists w\,\forall t\,(t \in w \leftrightarrow \exists u\,(u \in v \wedge \varphi(u,t)))$	aksjomat zastępowania
$\forall x\,(\neg(x = \varnothing) \rightarrow \exists y\,(y \in x \wedge x \cap y = \varnothing))$	aksjomat ufundowania (regularności)

Występujące w literaturze aksjomatyki ZFC mogą różnić się od tej wyżej przedstawionej, postacią niektórych aksjomatów. Niekiedy, bywa też dodawany aksjomat zbioru pustego[78].

Teoria mnogości Zermelo-Fraenkla cieszy się obecnie największą popularnością, gdyż dobrze pełni funkcję teorii ustanawiającej podstawy matematyki. Obejmuje ona swym zakresem także całą teorię mnogości. System ZFC będąc wolnym od wad teorii typów, nie zawiera jednocześnie antynomialnych twierdzeń. Mimo to, nie zawsze jest w pełni akceptowany. Główną przyczyną wzbudzanych przez ZFC kontrowersji jest pewnik wyboru, aksjomat umożliwiający dowiedzenie istnienia zbioru bez podania efektywnego sposobu jego konstrukcji. Jest więc pewnego rodzaju przeciwieństwem aksjomatu podzbiorów, który także orzeka o istnieniu zbioru, lecz tylko wtedy,

---

[77] Właściwa postać aksjomatu jest bardziej złożona, gdyż symbol zawierania się zbiorów w niej nie występuje. Pojęcie zawierania się zbiorów nie jest przecież pierwotne w ZFC, lecz wprowadzone na mocy dobrze znanego skrótu definicyjnego, zgodnego z wcześniej przypomnianą definicją inkluzji zbiorów. Podobna uwaga dotyczy symbolu iloczynu oraz zbioru pustego, obu występujących w aksjomacie wyboru. Istnienie zbioru pustego wynika z aksjomatu podzbiorów, iloczynu zbiorów definiuje się wykorzystując aksjomaty sumy i podzbiorów.

[78] Patrz np. Kuratowski, Mostowski, [1978].

gdy dysponujemy innym zbiorem oraz określonym predykatem. Mamy więc, w teorii ZFC dopuszczone istnienie zbiorów niezależnych od konstrukcji myślowych i od języka. Fakt ten sprawił, że tradycją stało się, aby odróżniać w matematyce te twierdzenia, których dowody nie są możliwe do przeprowadzenia bez użycia pewnika wyboru. Ponadto, pewnik ten jest źródłem niezwykłego paradoksu Banacha-Tarskiego. Stefan Banach (1892–1945) oraz Alfred Tarski (1901–1983) udowodnili, że w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, kulę o ustalonym promieniu można rozbić na pewną skończoną liczbę części w taki sposób, że z otrzymanych części daje się złożyć już nie jedną, ale dwie kule o promieniach równych promieniowi kuli wyjściowej[79]. Inny zarzut formułowany pod adresem ZFC dotyczy faktu, iż w systemie tym można mówić jedynie o zbiorach „maksymalnie bogatych", co oczywiście zabezpiecza tę teorię przed antynomiami. ZFC ogranicza także w inny sposób zakres rozważanych przez siebie zbiorów. Istnienie zbiorów stwierdzają bowiem zaledwie dwa aksjomaty: zbioru nieskończonego oraz pary. Oznacza to, że trudno jest wprowadzić do ZFC niektóre zbiory, co świadczy o tym, iż teoria Zermelo-Fraenkla zubaża tematykę teoriomnogościową. Nie można bowiem w systemie ZFC mówić o takich zbiorach, które są typami porządkowymi lub liczbami kardynalnymi. Standardowo, wzmacnia się system ZFC dodatkowymi aksjomatami definiującymi odpowiednio podobieństwo i równoliczność, co umożliwia zdefiniowanie dwóch dodatkowych zbiorów, jednego będącego typem porządkowym oraz drugiego będącego liczbą kardynalną. Ponadto, występowanie w dwóch aksjomatach teorii Zermelo-Fraenkla, a mianowicie, w aksjomacie podzbiorów oraz zastępowania, formuły φ sprawia, że te dwa aksjomaty są *de facto* schematami nieskończenie wielu aksjomatów. Oznacza to, że aksjomatyka ZFC nie jest skończona, sama zaś ZFC nie jest teorią skończenie aksjomatyzowalną. Nic więc dziwnego, że zaczęto poszukiwać teorii zwalczających antynomie mniej drastycznymi środkami.

Aksjomatyka von Neumanna-Bernaysa-Gödla[80]. John von Neumann zakwestionował opinię Zermelo, który upatrywał przyczyny antynomii w istnieniu zbyt obszernych zbiorów. Zdaniem von Neumanna przyczyną zaistnienia antynomii logicznych, czyli tych, zaliczanych przez Ramseya do jego pierwszej grupy, nie jest istnienie zbiorów maksymalnie bogatych, lecz niewłaściwe traktowanie tych zbiorów. Zbiory te, są zbyt duże, aby mogły być elementami innych zbiorów. Nie można więc, tworzyć z nich innych zbiorów.

---

[79] Marciszewski, *Aksjomatyczne ujęcie teorii mnogości*, [w:] Marciszewski, [1987], s. 128–129 oraz Aczel, [2000], s. 148–149.

[80] Patrz W. Marciszewski, *Aksjomatyczne ujęcie teorii mnogości*, [w:] Marciszewski, [1987], s. 121–131 oraz H. Stonert, *Teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla*, [w:] Marciszewski [1988], s. 192–194.

Idea ta stała się punktem wyjścia do podziału „kolektywów" na dwie kategorie: zbiorów i klas. Zbiory są to te kolektywy, które mogą zawierać jakieś elementy i same mogą być elementami innych kolektywów. Klasy zaś, są to te kolektywy, które mogą zawierać jakieś elementy, lecz same nie mogą być elementami jakichkolwiek kolektywów. Jak widać, zbiory w sensie von Neumanna pokrywają się ze zbiorami w sensie Zermelo, zaś klasy von Neumanna nie mają w teorii ZFC odpowiedników.

Swoją teorię von Neumann przedstawił w latach 1924–1925, nadając jej niestety bardzo zawiłą formę. Fakt ten sprawił, iż mimo entuzjastycznego przyjęcia samych idei von Neumanna, uznanie jego teorii natrafiało na poważne przeszkody. Sytuacja ta uległa zmianie, gdy w 1937 roku, Paul Isaac Bernays (1888–1977) opublikował pierwszą z serii siedmiu prac pod wspólnym tytułem *A system of axiomatic set theory*[81], w których nadał teorii von Neumanna bardziej przystępną postać, wyrażając całą teorię w języku zbliżonym do języka ZFC.

Język teorii Bernaysa stanowią dwie grupy zmiennych: pierwszego rodzaju, symbolizowane przez małe litery x, y, z, ... reprezentujące zbiory; oraz drugiego rodzaju symbolizowane przez duże litery A, B, C,... reprezentujące klasy. Dla każdego kolektywu istnieje inny predykat wyrażający należenie do tego kolektywu: $\in$ – predykat należenia do zbioru oraz η – predykat należenia do klasy. Poprawne użycie każdego z nich jest takie, że pierwszy może łączyć ze sobą wyłącznie zmienne pierwszego rodzaju, drugi zaś wyłącznie zmienną pierwszego rodzaju ze zmienną drugiego rodzaju, przy czym kolejność ta nie może być odwrócona. Poprawnie zbudowanymi formułami są więc: $x \in y$, $x \, \eta \, A$. Natomiast formułami niepoprawnymi są: $A \in y$, $A \in B$, $x \in A$, $A \, \eta \, y$, $A \, \eta \, B$, $x \, \eta \, y$. Swoją teorię Bernays określił przy pomocy dwóch grup aksjomatów: dla zbiorów oraz dla klas; przy czym, każda grupa aksjomatów zawierała skończony zbiór zdań, nie zaś schematów zdań. Oznaczało to, że aksjomatyka Bernaysa jest skończona.

Kolejnym krokiem na drodze budowania teorii realizującej idee von Neumanna stała się sławna publikacja austriackiego logika Kurta Gödla (1906–1978) *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, z 1940 roku, dotycząca niesprzeczności pewnika wyboru i uogólnionej hipotezy continuum[82] z pozostałymi aksjomatami ZFC[83]. W pracy tej jest wprowadzone pewne uproszczenie teorii Bernaysa. Zaproponowany przez Gödla system jest obecnie nazywany systemem von Neumanna-Bernaysa-Gödla, w skrócie NBG. Gödel zrezygnował w nim z dwóch rodzajów zmiennych, przekształcając system

[81] Bernays, [1937–1954].

[82] Sformułowana przez Cantora *hipoteza continuum* zakłada, że moc zbioru liczb rzeczywistych c jest najmniejszą liczbą kardynalną większą od mocy zbioru liczb naturalnych $\aleph_0$. *Uogólniona hipoteza continuum* zakłada, że dla dowolnej pozaskończonej liczby kardynalnej $\alpha \geq \aleph_0$ nie istnieje liczba kardynalna β większa od α i mniejsza od 2^α, mocy zbioru potęgowego zbioru o mocy α.

[83] Gödel, [1940].

Bernaysa w elementarny. To ujednolicenie zmiennych dokonał prostym kosztem wprowadzenia dwóch dodatkowych predykatów jednoargumentowych Z oraz K. Nie jest niczym zaskakującym, że wyrażenia $Z(a)$ oraz $K(a)$ należy czytać odpowiednio jako: „a jest zbiorem" oraz „a jest klasą". Mówiąc ściślej, w systemie Gödla istnieją klasy oraz klasy właściwe. Pierwsze z nich, to zbiory, które mogą być elementami innych klas. Dzięki temu uproszczeniu, Gödel mógł zrezygnować z jednego z predykatów należenia pozostając przy tradycyjnym: $\in$. Swój system określił przy pomocy pięciu grup aksjomatów.

Aksjomaty grupy A:

$K(x)$ — Każdy zbiór jest klasą

$x \in y \rightarrow Z(x)$ — elementem może być tylko zbiór

$\forall u\,(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y$ — aksjomat ekstensjonalności

$\forall x\, \forall y\, \exists z\, (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))$ — aksjomat pary

Aksjomaty grupy B gwarantujące istnienie klas[84]:

$\exists a\, \forall x\, \forall y\, (<x,y> \in a \leftrightarrow x \in y)$

$\forall a\, \forall b\, \exists c\, \forall x\, (u \in c \leftrightarrow (u \in a \wedge u \in b))$

$\forall a\, \exists b\, \forall x\, (x \in b \leftrightarrow \neg(x \in a))$

$\forall a\, \exists b\, \forall x\, (x \in b \leftrightarrow \exists y\, (<y,x> \in a))$

$\forall a\, \exists b\, \forall x\, \forall y\, (<x,y> \in b \leftrightarrow x \in a)$

$\forall a\, \exists b\, \forall x\, \forall y\, (<x,y> \in b \leftrightarrow <y,x> \in a)$

$\forall a\, \exists b\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (<x,y,z> \in b \leftrightarrow <y,z,x> \in a)$

$\forall a\, \exists b\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (<x,y,z> \in b \leftrightarrow <x,z,y> \in a)$

Aksjomaty grupy C[85]:

$\exists a\, (\neg P(a) \wedge \forall x\, (x \in a \rightarrow \exists y\, (y \in a \wedge x \subset y)))$ — aksjomat nieskończoności

$\forall x\, \exists y\, \forall u\, \forall v\, ((u \in v \wedge v \in x) \rightarrow u \in y)$ — aksjomat sumy

$\forall x\, \exists y\, (u \subseteq x \rightarrow u \in y)$ — aksjomat zbioru potęgowego

$\forall x\, \forall a\, (P(a) \rightarrow \exists y\, \forall u\, (u \in y \leftrightarrow \exists v\, (v \in x \wedge <u,v> \in a)))$ — aksjomat zastępowania

---

[84] Użyte w tej grupie aksjomatów symbole pary oraz trójki uporządkowanej są rozumiane tradycyjnie: $<x,y> = \{\{x\},\{x,y\}\}$ oraz $<x,y,z> = <x,<y,z>>$.

[85] Użyte w tej grupie aksjomatów wyrażenia „$F(x)$" oraz „$P(x)$" należy czytać odpowiednio „x jest funkcją" oraz „x jest klasą pustą". Ich definicje są następujące: $F(x) \leftrightarrow \forall u,v,w\, ((<v,u> \in x \wedge <w,u> \in x) \rightarrow v = w)$ oraz $P(x) \leftrightarrow \forall u\, \neg(u \in x)$. Ponadto, aksjomaty te zawierają symbole inkluzji „$\subseteq$„ oraz inkluzji właściwej „$\subset$„„ które mają tradycyjne znaczenie.

Aksjomat grupy D[86]:

$\neg P(a) \rightarrow \exists u\ (u \in a \wedge Er(u,a))$ — niepusta klasa *a* nie ma żadnego elementu wspólnego z żadnym elementem klasy *a*

Aksjomat grupy E:

$\exists a\ (F(a) \wedge \forall x\ (\neg P(x) \rightarrow \exists y\ (y \in x \wedge \langle y,x \rangle \in a)))$ — aksjomat wyboru

Związki jakie zachodzą między systemem ZFC oraz NBG wyrażają następujące twierdzenia:

1. System NBG jest niesprzeczny, jeśli niesprzeczny jest system ZFC;
2. Zbiór twierdzeń dotyczących klas nie będących elementami innych klas w systemie NBG, jest identyczny ze zbiorem twierdzeń dotyczących zbiorów systemu ZFC.

Rozwiązania paradoksów na gruncie aksjomatycznych systemów teorii mnogości

Restrykcyjność systemu ZFC jest podstawą uniknięcia paradoksów logicznych, czyli Burali-Fortiego, zbioru wszystkich zbiorów, zbioru uniwersalnego, zbioru wszystkich liczb kardynalnych, zbioru wszystkich zbiorów równolicznych z danym zbiorem. Zbiorów, których te paradoksy dotyczą w tej teorii po prostu nie ma. Antynomia Russella jest natomiast zniesiona dzięki ograniczeniu pewnika abstrakcji.

Nieco inaczej problem paradoksów rozwiązuje się w systemie NBG. Zbiory będące przedmiotem antynomialnych konkluzji istnieją co prawda w systemie, lecz ich pozycja jest taka, że nie mogą być elementami innych zbiorów, co wystarcza do uniknięcia paradoksów dotyczących, tak zwanych, maksymalnie obszernych zbiorów.

1.5.3.3. ROZWIĄZANIA ŁĄCZĄCE TEORIĘ TYPÓW Z AKSJOMATYZACJĄ TEORII MNOGOŚCI

Podejścia wykorzystujące teorie typów bazują na segregacji obiektów językowych, podczas gdy rozwiązania aksjomatyzujące teorię mnogości zakładają osłabienie groźnego pewnika abstrakcji. Pomysł połączenia obu idei legł u podstaw budowy dwóch systemów *New Foundations*, w skrócie NF oraz

---

[86] Użyte w aksjomacie wyrażenie „$Er(x,y)$" czytamy „x i y wzajemnie się wykluczają". Formalna definicja ma postać: $Er(x,y) \leftrightarrow \forall u\ \neg(u \in x \wedge u \in y)$.

Mathematical Logic, czyli ML. Autorem obu jest, wspomniany już wcześniej, Willard Van Orman Quine.

Dwa systemy Quine'a[87]. System NF został zaprezentowany przez Quine'a w jego pracy *New foundations for mathematical logic* opublikowanej w roku 1937[88]. Język NF zawiera jeden rodzaj zmiennych x, y, z,... oraz jeden, dwuargumentowy predykat należenia $\in$. Aksjomatyka NF nie jest skończona. Stanowią ją formuła będąca odpowiednikiem aksjomatu ekstensjonalności oraz nieskończona klasa formuł odpowiadająca aksjomatowi abstrakcji:

$$\forall x\, \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y),$$

$$\exists x\, \forall y\, (y \in x \leftrightarrow A),$$

gdzie A jest formułą stratyfikowaną[89] nie zawierającą x jako zmiennej wolnej. Aksjomat nieskończoności jest wyprowadzalny w NF, co gwarantuje definiowalność liczb naturalnych. Ograniczenie drugiego aksjomatu do przypadków formuł stratyfikowanych nie oznacza ograniczenia języka systemu NF do tychże formuł. W systemie tym można bowiem formułować także niestratyfikowane twierdzenia. Ograniczenie nałożone przez Quine'a dotyczy jedynie pewnika definicyjnego, podczas gdy w teorii typów mamy do czynienia wyłącznie ze stratyfikowanymi zdaniami. W NF, pewnik definicyjny gwarantuje istnienie zbiorów podlegających hierarchii typów. Dzięki tej liberalizacji, w systemie Quine'a mamy jeden zbiór pusty, jeden zbiór uniwersalny, jeden zbiór liczb naturalnych, itd. Istnienie zbioru uniwersalnego, jak również istnienie dopełnienia każdego zbioru są elementami różniącymi NF od klasycznej teorii mnogości. Ponadto, fałszywe są: twierdzenie Cantora mówiące, że każdy zbiór ma mniejszą moc niż jego zbiór potęgowy oraz twierdzenie, zgodnie z którym każdy zbiór jest równoliczny ze zbiorem wszystkich swoich jednoelementowych podzbiorów. Aksjomat wyboru może być stosowany tylko wobec tych zbiorów, dla których

---

[87] Patrz S. Krajewski, *Teoria typów*, [w:] Marciszewski, [1987], s. 112–120 oraz H. Stonert, *Teoria mnogości Quine'a*, [w:] Marciszewski [1988], s. 206–208.

[88] Quine, [1937].

[89] Formuła φ jest *stratyfikowana*, gdy powstaje z formuły ogólnej teorii klas przez usunięcie indeksów wskazujących typ. Zatem, formuła jest stratyfikowana, gdy można przypisać indeksy zmiennym tej formuły tak, aby w każdej jej podformule $x = y$, x i y miały ten sam indeks oraz w każdej podformule $x \in y$ indeks y-a był liczbą o jeden większą od indeksu x-a. Jeśli zmiennym występującym w danej formule można przypisać indeksy ze zbioru $\{0, 1, ..., k\}$, to taką formułę nazywa się k-stratyfikowaną, patrz S. Krajewski, *Teoria typów*, [w:] Marciszewski, [1987], s. 117. Formułą stratyfikowaną jest więc $x \in y \wedge y \in z$, niestratyfikowaną natomiast formuła $x \in y \wedge y \in x$, patrz H. Stonert, *Teoria mnogości Quine'a*, [w:] Marciszewski, [1988].

drugie z wymienionych twierdzeń jest prawdziwe. Zbiory te są nazywane *kantorowskimi*. Przykładem zbioru niekantorowskiego jest zbiór uniwersalny równoliczny ze swoim zbiorem potęgowym. Schemat indukcji matematycznej i indukcji pozaskończonej jest dowodliwy tylko dla formuł stratyfikowanych. Ponadto, wysoką ceną za stosowanie formuł stratyfikowanych jest w systemie NF nieoperatywność stosowania skrótów i zdefiniowanych pojęć. Ten podstawowy w każdym systemie formalnym zabieg napotyka w NF na poważne przeszkody, gdyż należy zawsze pamiętać, czy dane twierdzenie jest dowiedzione dla dowolnych formuł czy może tylko dla tych stratyfikowanych, a zatem mających specjalne, nie wyrażone w żaden formalny sposób własności syntaktyczne.

Niech T^* oznacza system ogólnej teorii typów wzmocniony nieskończoną klasą aksjomatów kształtu $B \leftrightarrow B'$, gdzie B' jest formułą powstałą z B poprzez powiększenie wszystkich indeksów typów o jeden. Wówczas, stratyfikowana formuła A jest twierdzeniem NF wtedy i tylko wtedy, gdy każda z formuł języka ogólnej teorii typów powstająca z A przez odpowiednie przypisanie indeksów jest twierdzeniem systemu T^*.

Modyfikację systemu NF, analogiczną do tej, jakiej dokonał von Neumann wobec systemu Zermelo zaproponował sam Quine w książce zatytułowanej *Mathematical Logic* opublikowanej w roku 1940. Język nowej teorii, zwanej właśnie systemem Mathematical Logic, w skrócie ML wzbogacił o nowy, dodatkowy rodzaj zmiennych. Tak więc, zmienne x, y, z, ... były zarezerwowane dla zbiorów, podczas gdy X, Y, Z,..., dla klas. Naturalnie, każdy zbiór jest klasą. Klasami nie będącymi zbiorami są te, które nie są elementami żadnej klasy. Nieskończoną aksjomatykę ML określają wymienione niżej formuła i dwie klasy formuł:

$\forall X\, \forall Y\, (\forall z\, (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \to X = Y)$ — aksjomat ekstensjonalności

$\exists x\, \forall y\, (y \in x \leftrightarrow A)$ — aksjomat istnienia zbiorów

$\exists X\, \forall y\, (y \in X \leftrightarrow A)$ — aksjomat istnienia klas

Podobnie jak w przypadku systemów ZF i NBG, wszystkie twierdzenia teorii ML, w których nie występuje pojęcie klasy nie będącej zbiorem, pokrywają się z twierdzeniami NF.

Rozwiązania paradoksów na gruncie systemów Quine'a

Ograniczenie języka systemów do wyłącznie stratyfikowanych formuł sprawia, że antynomie cantorowskiej teorii mnogości są niewyrażalne w obu systemach. Zbiory, o których mowa w tych antynomiach nie są definiowalne w języku Quine'a.

1.5.3.4. ROZWIĄZANIA BAZUJĄCE NA SYSTEMACH LEŚNIEWSKIEGO[90]

W Polsce, w okresie międzywojennym, powstały trzy szczególnie ważne teorie, które mimo niezaprzeczalnej wartości jaką sobą reprezentują, wciąż pozostają poza głównym nurtem współczesnych badań logicznych. Są to, *prototetyka*, *ontologia* i *mereologia*, trzy systemy autorstwa Stanisława Leśniewskiego (1886–1939) przedstawione w serii niemieckojęzycznych prac z lat 1929–1938[91]. Prototetyka jest systemem logiki zdań. Nadbudowana na niej ontologia, czyli teoria łącznika *jest*, to system obejmujący logikę predykatów z identycznością oraz teorię mnogości. Natomiast, bazująca na prototetyce i ontologii mereologia, będąca teorią zbioru i klasy w sensie kolektywnym, czyli teorią stosunku części do całości, odpowiada rachunkowi indywiduów[92].

Z historycznego punktu widzenia, mereologia była pierwszym systemem stworzonym przez Leśniewskiego, w celu uniknięcia antynomii teorii mnogości, a w szczególności antynomii Russella, ogłoszonym już w 1916 roku. Leśniewski uważał bowiem, że antynomialność ówczesnej teorii mnogości wynika z nie odróżnienia pojęcia zbioru w sensie dystrybutywnym od pojęcia zbioru w sensie kolektywnym. Poszukując odpowiedniej bazy logicznej dla mereologii, Leśniewski skonstruował najpierw system ontologii, a dopiero później prototetyki.

Prototetyka Leśniewskiego[93]. Swą nazwę prototetyka zawdzięcza temu, iż zajmuje się najbardziej pierwotnymi tezami, zwanymi przez Leśniewskiego *prototezami*. Jest ona rachunkiem zdaniowym, którego jedynym terminem pierwotnym jest spójnik równoważności, zaś zdania jak również reprezentowane w systemie wszelkie możliwe funktory zdaniotwórcze, czy funktorotwórcze mogą być kwantyfikowane. Prototetyka może być aksjomatyzowana w różny

---

[90] Prezentacje systemów Leśniewskiego zawierają: Sobociński, [1954]; Słupecki, [1953], [1955], [1958]; Grzegorczyk, [1955]; Luschei, [1962].

[91] Leśniewski, [1929], [1930], [1931], [1938].

[92] Pojęcie zbioru w sensie kolektywnym jest przeciwstawione pojęciu zbioru w sensie dystrybutywnym. „Zbiorem w sensie *kolektywnym* jest jakiś obiekt przestrzenny, a więc bryła, płaszczyzna lub linia, lub też – dający się pojąć na sposób przestrzenny (np. odcinek czasu), złożony z jednorodnych części, przy czym stosunek bycia częścią jest relacją przechodnią, zwrotną i antysymetryczną (tzn. jeśli *a* jest częścią *b*, to *b* nie jest częścią *a*, chyba że *a* jest identyczne z *b*). Zbiór w sensie *dystrybutywnym* – to przedmiot abstrakcyjny, a więc pozaprzestrzenny i pozaczasowy, [...]. Stosunek należenia elementu do zbioru w sensie dystrybutywnym nie jest relacją przechodnią", W. Marciszewski, *Aksjomatyczne ujęcie teorii mnogości*, [w:] Marciszewski [1987], s. 121.

[93] Patrz G. Küng, *Systemy Leśniewskiego*, tłumaczenie J. Kopania [w:] Marciszewski, [1987], s. 397–405; H. Stonert, *Systemy Leśniewskiego: prototetyka, ontologia, mereologia*, [w:] Marciszewski [1988], s. 186–188.

sposób. Jednak, największą popularnością cieszy się aksjomatyka, zaproponowana w 1945 roku przez, jednego z ważniejszych przedstawicieli szkoły lwowsko-warszawskiej, Bolesława Sobocińskiego (1906–1980)[94]. Stanowi ją jeden zaledwie aksjomat:

$$\forall p,q\ ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\forall f\ (f(p,f(p,\forall u)) \leftrightarrow \forall r\, f(q,r)) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p))^{95}.$$

Spójniki negacji, koniunkcji oraz implikacji są wówczas zdefiniowane następująco:

$\forall p\ (\neg p \leftrightarrow (p \leftrightarrow \forall q\ q))$,
$\forall p,q\ ((p\ .\ q) \leftrightarrow \forall f\ (p \leftrightarrow (f(p) \leftrightarrow f(q))))$,
$\forall p,q\ ((p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (p\ .\ q)))$.

System jest wyposażony w reguły, zwane *dyrektywami*: *odrywania* (dla spójnika równoważności), *podstawiania*, *dołączania definicji typu prototetycznego*, *rozdzielności*, *rozkładania kwantyfikatora ogólnego* oraz *dołączania tez ekstensjonalności typu prototetycznego*[96]. Chociaż kategoria zdania jest podstawową kategorią systemu, to reguły definiowania pozwalają poszerzyć go o nowe kategorie: jeśli α, β_1, ..., β_k są jakimiś, określonymi już w systemie kategoriami, to $\alpha/(\beta_1, ..., \beta_k)$ może stać się nową kategorią systemu w tym sensie, że istniejące w systemie funktory kategorii α, β_1, ..., β_k mogą posłużyć do zdefiniowania nowego funktora kategorii $\alpha/(\beta_1, ..., \beta_k)$[97]. W prototetyce istnieje możliwość tworzenia tzw. *funktorów wieloogniwowych*, czyli funktorów tworzonych przy pomocy pewnej ilości tzw. ogniw, przy czym każde ogniwo stanowi odrębną klasę wyrażeń tej samej kategorii semantycznej. Przykładem funktora wieloogniwowego jest $\$\langle.,.\rangle(.,.)$, określony w następujący sposób:

$$\$\langle p,q\rangle(r,s) \leftrightarrow (p\ .\ r) \rightarrow (q\ .\ s)$$

Funktor $\$\langle.,.\rangle(.,.)$ z dwóch argumentów zdaniowych, w naszym przypadku p i q, tworzy funktor $\$\langle p,q\rangle(.,.)$ zdaniotwórczy od kolejnych dwóch argumentów

---

94 Sobociński, [1960].

95 Symbolika formuł prezentowanych w tym paragrafie, jest zbliżona do powszechnie dziś stosowanej w rachunkach zdań i predykatów. Nie przypomina więc, ani oryginalnej symboliki Leśniewskiego, ani tej, którą wykorzystywał także sam Leśniewski, a która znana jest pod nazwą „symboliki Peano-Russella".

96 Omawiany niżej system ontologii Leśniewskiego poza wymienionymi dyrektywami jest wyposażony w dyrektywy: *dołączania definicji typu ontologicznego* oraz *dołączania tez ekstensjonalności typu ontologicznego*.

97 Funktor kategorii $\alpha/(\beta_1, ..., \beta_k)$ umożliwia konstrukcję wyrażenia kategorii α z k argumentów, będących odpowiednio wyrażeniami kategorii: β_1, ..., β_k.

zdaniowych. Podany funktor ma dwa ogniwa, każde wyznaczone przez odpowiednią parę nawiasów: ⟨.,.⟩ oraz (.,.). Tradycyjnie, każde ogniwo jest kojarzone z parą nawiasów o innym kształcie.

Możliwość nieograniczonego wzbogacania systemu prototetyki o nowe formuły, sprawia, że liczba kategorii, stałych, definicji oraz twierdzeń systemu nie jest z góry przesądzona, może więc rosnąć w nieskończoność. Zatem, formuła nie należy do systemu tak długo, jak długo nie jest do niego dołączona.

Ontologia Leśniewskiego[98]. Ontologia Leśniewskiego jest systemem logiki nazw nadbudowanym nad prototetyką, wyposażonym w nowy termin pierwotny „$\in$" oraz nową, z punktu widzenia prototetyki, kategorię nazw. Jedynym aksjomatem dołączonym do prototetyki jest:

$$\forall a,b\,(a \in b \leftrightarrow ((\exists c\; c \in a) \,.\, \forall c,d\,((c \in a \,.\, d \in a) \rightarrow c \in d) \,.\, \forall c\,(c \in a \rightarrow c \in b))).$$

Zgodnie z tym aksjomatem, $a \in b$ wtedy i tylko wtedy, gdy coś jest a i przynajmniej jedna rzecz jest a, i cokolwiek jest a, jest b. Dwiema dodatkowymi regułami są *reguła definiowania ontologicznego* i *reguła ontologicznej ekstensjonalności.*

Mimo swego kształtu, funktor „$\in$" nie powinien być utożsamiany z tym, który wyraża należenie elementu do zbioru. Znacznie bliższy funktorowi Leśniewskiego jest łącznik „jest". To, że jakiś obiekt jest sobą może być bowiem wyrażone w ontologii Leśniewskiego prawdziwym zdaniem, którego głównym spójnikiem jest właśnie „$\in$", np. „Sokrates $\in$ Sokrates" (Sokrates jest Sokratesem). Także zdanie „Sokrates $\in$ człowiek" może stać się, po odpowiednim rozszerzeniu systemu, zdaniem prawdziwym ontologii. Między funktorem Leśniewskiego a łącznikiem „jest" zachodzi jednak pewna wyraźna różnica, którą może zilustrować fakt, iż w przypadku odpowiedniego rozszerzenia systemu, zdanie „człowiek $\in$ zwierzę" okaże się poprawnie zbudowanym, a mimo to fałszywym zdaniem ontologii. Istnieje bowiem więcej niż jeden obiekt będący człowiekiem. Dlatego też, lepszym od „*a* jest *b*" rozumieniem zdania „$a \in b$" jest „*a* jest jednym z *b*". Sam Leśniewski stosował zarówno litery duże jak i małe, chociaż obie klasy liter służyły do oznaczania obiektów tej samej kategorii. Litera duża była przez niego stosowana na oznaczenie pojedynczego obiektu, co wyrażało się tym, że przynajmniej w jednym zapisie występowała przed symbolem funktora $\in$. Natomiast małe litery mogły występować zarówno przed jak i po symbolu „$\in$".

---

[98] Patrz G. Küng, *Systemy Leśniewskiego*, tłumaczenie J. Kopania [w:] Marciszewski, [1987], s. 397–405; H. Stonert, *Systemy Leśniewskiego: prototetyka, ontologia, mereologia*, [w:] Marciszewski [1988], s. 186–188. Bardziej formalne ujęcie ontologii można znaleźć np. w pracy Pietruszczak [2000a].

Ontologia jest systemem, w którym można zdefiniować nie tylko wszelkie możliwe funktory zdaniotwórcze, lecz także wszelkie dające się wyrazić przy pomocy kategorii nazw i zdań funktory nazwotwórcze i funktorotwórcze. G. Küng podaje przykłady, zdefiniowanych przy pomocy $\in$, funktorów[99]:

$\forall a\ ex(a) \leftrightarrow \exists b\ b \in a$	istnienia co najmniej jednego *a*
$\forall a\ sol(a) \leftrightarrow \exists b,c\ ((b \in a\ .\ c \in a) \rightarrow b \in c)$	istnienia dokładnie jednego *a*
$\forall a,b\ a \sqsubset b \leftrightarrow (\exists c\ c \in a\ .\ (\forall c\ c \in a \rightarrow c \in b))$	mocnej inkluzji (*każde a jest b*)
$\forall a,b\ a \subset b \leftrightarrow (\forall c\ c \in a \rightarrow c \in b)$	słabej inkluzji (*wszelkie a jest b*)
$\forall a,b\ a \vartriangle b \leftrightarrow (\exists c\ c \in a\ .\ c \in b)$	częściowej inkluzji (*pewne a jest b*)
$\forall a,b\ a = b \leftrightarrow (a \in b\ .\ b \in a)$	jednostkowej identyczności (*a jest tym samym przedmiotem co b*)
$\forall a,b\ a \square b \leftrightarrow (\exists c\ c \in a\ .\ (\forall c\ c \in a \leftrightarrow c \in b))$	mocnej identyczności (*jedynie każde a jest b*)
$\forall a,b\ a \circ b \leftrightarrow (\forall c\ c \in a \leftrightarrow c \in b))$	słabej identyczności (*jedynie wszelkie a jest b*)

oraz nazw:

$\forall a\ a \in \vee \leftrightarrow (a \in a)$	istniejącego przedmiotu[100]
$\forall a,b\ a \wedge \leftrightarrow (a \in a\ .\ \neg(a \in a))$	nieistniejącego przedmiotu

Nieograniczoność w definiowaniu funktorów ilustrują dwa przykłady, tworzenia czasownika od rzeczownika oraz rzeczownika od czasownika:

$\forall a,b \in [[b]](a) \leftrightarrow (a \in b)$	np. „$\in$ [[*filozof*]]” znaczy „*filozofować*”
$\forall a\varphi\ a \in trm\langle\varphi\rangle \leftrightarrow (a \in a\ .\ \varphi(a))$	np. „*trm*⟨*filozofować*⟩” znaczy „*filozof*”

---

[99] G. Küng, *Systemy Leśniewskiego*, tłumaczenie J. Kopania [w:] Marciszewski, [1987], s. 401–402.

[100] Definiowalność istniejącego przedmiotu nie oznacza tego, iż w ontologii Leśniewskiego, czy w nadbudowanej na niej mereologii można udowodnić istnienie jakiegokolwiek przedmiotu. Twierdzeniem ontologii nie jest bowiem, ani formuła $\exists a\ a \in a$, ani $\exists a\ ex(a)$, G. Küng, *Systemy Leśniewskiego*, tłumaczenie J. Kopania [w:] Marciszewski, [1987], s. 405.

Jednak o szczególnym bogactwie kategorii semantycznych ontologii Leśniewskiego świadczy możliwość definiowania wspomnianych już funktorów wieloogniwowych. Naturalnie, w przypadku prototetyki konstrukcja tych funktorów jest ograniczona przez właściwy dla tego systemu język. Nic więc dziwnego, że wraz z rozszerzeniem o wszelkie możliwe kategorie definiowalne za pomocą kategorii zdań i nazw język ontologii Leśniewskiego staje się maksymalnie bogaty, z punktu widzenia wszystkich możliwych do pomyślenia kategorii semantycznych.

To co wyróżnia ontologię Leśniewskiego to założenie, że nazwy nie nazywają swoich zakresów. Tak więc, dla przykładu, nazwa „pies" nazywa co prawda psy, lecz nie jest nazwą klasy wszystkich psów. Leśniewski odrzucał bowiem istnienie wszelkich zbiorów w sensie dystrybutywnym[101], a więc w szczególności takich przedmiotów abstrakcyjnych, jak klasy wszystkich x-ów, dla jakiejś danej nazwy x. W miejsce tych klas wprowadził wyrażenia językowe denotujące dystrybutywnie. Istnieje więc w systemie ontologii możliwość definiowania pewnych (różnych) klas x-ów dla danej nazwy x. Przykład takich klas dla nazwy „pies" znajdziemy u Künga[102]. Załóżmy, że a jest nazwą pies. Wówczas, w ontologii Leśniewskiego można zdefiniować czasownik „$\subset[[a]]$"

$$\forall a,b \subset[[a]](b) \leftrightarrow (b \subset a),$$

który może być rozumiany jako „tworzą-pewną-klasę-psów", jak również, inny czasownik „Cl[[a]]":

$$\forall a,b\ Cl[[a]](b) \leftrightarrow (b \circ a),$$

który można odczytać jako „tworzą-tę-oto-klasę-psów". Naturalnie, to, że oba czasowniki nie są nazwami nie uniemożliwia im występowanie w pozycji argumentów funktorów zdaniotwórczych. Bogactwo kategorii semantycznych systemu ontologii Leśniewskiego gwarantuje podobnym wyrażeniom odgrywanie kluczowej roli w tworzeniu zdań orzekających o takich, czy innych klasach x-ów. Można więc sformułować takie formalne zdanie, jak chociażby „$Cl[[pies]] \in \subset[[zwierzę]]$", które możemy czytać jako „tworzyć-tę-oto-klasę-psów jest tworzyć-pewną-klasę-zwierząt"[103].

Skutkiem odrzucenia przez Leśniewskiego istnienia przedmiotów abstrakcyjnych, których nazwy miałyby być funktorami jest to, że dopuszczona

---

[101] Pietruszczak, *Metamereologia*, [2000], s. 32–38.

[102] G. Küng, *Systemy Leśniewskiego*, tłumaczenie J. Kopania [w:] Marciszewski, [1987], s. 402.

[103] G. Küng, *Systemy Leśniewskiego*, tłumaczenie J. Kopania [w:] Marciszewski, [1987], s. 402.

przez niego kwantyfikacja nie ma charakteru przedmiotowego. Tak więc, można w systemie ontologii zbudować prawdziwe zdanie „$\neg ex(Pegaz)$”, pociągające za sobą inne, „$\exists a\ \neg ex(a)$”, którego sens nie powinien budzić sprzeciwu.

Mereologia Leśniewskiego[104]. Zgodnie z zamierzeniami Leśniewskiego, systemem, który miał zabezpieczać badania nad zbiorami przed antynomią Russella była mereologia. Z logicznego punktu widzenia, system ten jest późniejszy wobec ontologii Leśniewskiego. Należy więc przyjąć, iż mereologia jest systemem nadbudowanym na ontologii. Jako analizująca stosunek części do całości jest ona teorią zbioru i klasy w sensie kolektywnym[105]. Leśniewski odrzucał możliwość istnienia przedmiotu będącego klasą rozumianą dystrybutywnie. Badane przez niego klasy są więc rozumiane kolektywnie, jako przedmioty złożone z części.

Tak jak w przypadku dwóch wcześniej omówionych systemów Leśniewskiego, także mereologia może być aksjomatyzowana na różne sposoby. Niżej przedstawiona, pochodząca od Leśniewskiego aksjomatyka[106] wykorzystuje jako termin pierwotny *pr* – 7 funktor nazwotwórczy od jednego argumentu nazwowego oznaczający część właściwą swojego argumentu. Wykorzystując ten funktor można więc wyrazić to, iż jakieś *a* jest częścią właściwą jakiegoś *b*: $a \in pr(b)$. Jak wiadomo, relacja należenia elementu do zbioru pojmowanego dystrybutywnie nie jest, bo nie może być przechodnia – elementem zbioru grup studenckich jest grupa, nie zaś student. Własność *bycia częścią* odpowiadająca przynależności do zbioru rozumianego kolektywnie,

[104] Patrz G. Küng, *Systemy Leśniewskiego*, tłum. J. Kopania [w:] Marciszewski, [1987], s. 397–405; H. Stonert, *Systemy Leśniewskiego: prototetyka, ontologia, mereologia*, [w:] Marciszewski [1988], s. 186–188; Pietruszczak, [2000].

[105] Rozróżnienie u Leśniewskiego między klasą kolektywną a zbiorem kolektywnym jest dość subtelne: „Zbiór kolektywny *a*-ków to taki przedmiot *A*, którego każda część ma w sobie część tego lub innego *a*-ka będącego częścią przedmiotu *A*. Klasa kolektywna *a*-ków to przedmiot *A*, którego każda część zawiera w sobie część jakiegoś z *a*-ków, będącego częścią przedmiotu *A* i nadto każdy *a*-k jest częścią przedmiotu *A*.” Obie definicje, za H. Stonert, *Systemy Leśniewskiego: prototetyka, ontologia, mereologia*, [w:] Marciszewski [1988], s. 187. Pietruszczak zauważa jednak, że: „U Leśniewskiego występują jedynie odpowiedniki form postaci 'klasa *S*-ów' oraz 'zbiór *S*-ów'. Termin 'klasa *S*-ów' – gdy użyjemy nierelatywnego terminu 'klasa' (odp. 'zbiór') [...] – ma znaczyć to samo, co termin 'klasa (zbiór) wszystkich *S*-ów', a termin 'zbiór *S*-ów' to samo, co termin 'klasa (zbiór) złożona z jakichś *S*-ów' (wyraz 'jakichś' dopuszcza możliwość, że wszystkich). Pierwszy z terminów może być u Leśniewskiego pusty bądź jednostkowy, a drugi może być: pusty, jednostkowy bądź ogólny. W samej teorii Leśniewskiego nie można powiedzieć, że klasa *S*-ów to zbiór wszystkich *S*-ów, gdyż termin 'zbiór wszystkich *S*-ów' jest niezgodny ze składnią języka tej teorii. Zgodnie z teorią Leśniewskiego: jeśli *x* jest klasą *S*-ów, to *x* jest zbiorem *S*-ów; ponadto: jeśli *x* jest zbiorem *S*-ów, to *x* jest klasą *S*-ów będących elementami *x*-a, albo – po prostu – *x* jest klasą elementów *x*-a. Zatem każda klasa jest zbiorem oraz każdy zbiór jest klasą, jeśli przyjmiemy, że klasa (odp. zbiór) to klasa (odp. zbiór) czegoś.”, Pietruszczak, [2000], s. 33.

[106] G. Küng, *Systemy...*, [w:] Marciszewski, [1987], s. 404.

powinna być natomiast przechodnia – palec jest częścią zarówno ręki jak i całego człowieka. Przechodniość tę gwarantuje pierwszy aksjomat Leśniewskigo:

$$\forall a,b,c\ (a \in pr(b)\,.\ b \in pr(c) \rightarrow a \in pr(c)).$$

Kolejny aksjomat sprawia, że *bycie częścią właściwą* jest własnością antysymetryczną:

$$\forall a,b\ (a \in pr(b) \rightarrow \neg(b \in pr(a)));$$

skoro ręka jest częścią człowieka, to człowiek nie jest częścią ręki. Łatwo zauważyć, że bycie częścią właściwą jest własnością przeciwzwrotną: $\forall a\ \neg(a \in pr(a))$ – nic nie może być częścią właściwą samego siebie. Trzeci aksjomat Leśniewskiego zakłada, że jedynie przedmioty-indywidua mogą mieć części:

$$\forall a,b\ (a \in pr(b) \rightarrow b \in b).$$

Kolejne dwa aksjomaty definiują odpowiednio: *element klasy kolektywnej* (*zbioru kolektywnego*), czyli niekoniecznie właściwą, część jakiejś całości oraz tę *całość*, czyli klasę w sensie kolektywnym.

$$\forall a,b\ (a \in el(b) \leftrightarrow (a \in a\,.\ (a \in pr(b) \vee a = b)),$$
$$\forall a,b\ (a \in Kl(b) \leftrightarrow$$
$$(a \in a\,.\ \forall c\ (c \in b \rightarrow c \in el(a))\,.\ \forall d\ (d \in el(a) \rightarrow \exists e,f\ (e \in b\,.\, f \in el(e))))).$$

Jak widać, własność bycia elementem nie tylko, że nie jest przeciwzwrotna, lecz dla wszystkich indywiduów jest zwrotna. Jeśli tylko a jest przedmiotem-indywiduum, czyli gdy $a \in a$, to ponieważ $a = a$, więc $a \in el(a)$:

$$\forall a\ (a \in a \rightarrow a \in el(a))$$[107].

[107] Powyższe wyprowadzenie tezy, iż każdy przedmiot jest własnym elementem omija podstawowe dla Leśniewskiego pojęcie „ingrediensu". Pietruszczak wyprowadza tę samą tezę wychodząc od pominiętego wyżej pojęcia: „(1) Ingrediensem danego przedmiotu jest on sam oraz każda jego część. (2) Każdy przedmiot jest swoim ingrediensem. (3) x jest zbiorem [kolektywnym, przyp. autora] S-ów wtw. (i) każdy S jest ingrediensem x-a & (ii) każdy ingrediens x-a ma wspólny ingrediens z jakimś S-em. (4) x jest elementem zbioru z wtw. przy pewnym znaczeniu 'S': z jest zbiorem S-ów & x jest S-em. Dalej Pietruszczak pokazuje, że z (3) i (4) wynika: (5) Być elementem to to samo, co być ingrediensem. Zatem, wprost z (2) i (5) mamy: Każdy przedmiot jest własnym elementem.", Pietruszczak, [2002], s. 128.

Każde *a* jest więc częścią samego siebie. Innymi słowy, każdy obiekt jest własnym elementem, zaś obiektów nie będących własnymi elementami w systemie mereologii po prostu nie ma. Jak się dalej okaże, fakt ten ma ogromne znaczenie dla rozwiązania antynomii Russella. Dwa ostatnie aksjomaty gwarantują odpowiednio: jednoznaczność bycia całością (całością dla konkretnej ręki jest jeden i ten sam człowiek) oraz istnienie całości dla danej części, o ile nazwa tej części nie jest pusta.

$\forall a,b,c\ (a \in Kl(c)\ .\ b \in Kl(c) \rightarrow a = b)$,
$\forall a,b\ (a \in b \rightarrow \exists c\ c \in Kl(b))$.

Powyższa aksjomatyka nie przesądza czy istnieją *atomy*, czyli obiekty nie mające części, czy też każdy obiekt ma jakąś część, co implikuje, że atomy nie istnieją. *Nieatomową mereologię* daje wzmocnienie aksjomatyki następującą formułą:

$\forall a\ (a \in a \rightarrow \exists b\ b \in pr(a))$.

Atomową mereologię otrzymujemy rozszerzając aksjomatykę o dwie formuły, z których pierwsza jest definicją atomu:

$\forall a\ (a \in atm \leftrightarrow a \in a\ .\ (\forall b\ b \in el(a) \rightarrow b = a))$,
$\forall a\ (a \in a \rightarrow \exists b\ b \in el(a)\ .\ b \in atm)$[108].

Bez względu jednak na to, czy mereologia ma postać atomową, nieatomową, czy też kwestia istnienia atomów nie jest w niej rozstrzygnięta, najważniejszym, z punktu widzenia antynomii Russella, jest wspomniany już fakt, iż każdy istniejący w systemie przedmiot ma własność bycia własnym elementem.

Rozwiązania paradoksów na gruncie mereologii Leśniewskiego

Andrzej Pietruszczak w swojej książce *Metamereologia* prezentuje rozwiązanie antynomii Russella wykorzystujące zaproponowane przez Leśniewskiego kolektywne rozumienie zbioru. W tym celu przytacza fragment z artykułu Leśniewskiego opublikowanego w 1927 roku[109]: „Pragnąc ‘coś począć’, a nie umiejąc zarazem zarzucić nic rozsądnego żadnemu z domniemanych założeń, na których jest oparta ‘antynomja’ powyższa, ani też rozumowaniu, prowadzącemu na podstawie tych założeń do sprzeczności,

---

[108] G. Küng, *Systemy Leśniewskiego*, tłumaczenie J. Kopania [w:] Marciszewski, [1987], s. 404.

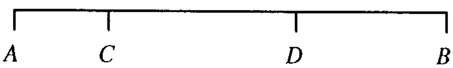
[109] Leśniewski [1927], s. 185–187; także Pietruszczak, [2000], s. 35–36.

zacząłem się zastanawiać nad przykładami sytuacyj, w których w praktyce uważam te a te przedmioty lub też ich nie uważam za klasy *respective* zbiory takich to a takich przedmiotów [...], i poddawać analizie krytycznej wiarę swoją w poszczególne założenia omawianej 'antynomji' z tego punktu widzenia (zagadnienie 'klas pustych' nie stanowiło tematu moich rozważań przy tej sposobności, koncepcję bowiem klas pustych traktowałem od chwili pierwszego z nią zetknięcia jako koncepcję 'mitologiczną', stojąc bez żadnych wahań na stanowisku, że,

(1) jeżeli jakiś przedmiot jest klasą przedmiotów *a*, to pewien przedmiot jest *a*).

Doszedłem na tej drodze do przekonania, że

(2) wciąż się zdarza, że ten a ten przedmiot jest klasą przedmiotów takich a takich i zarazem klasą przedmiotów całkiem innych (tak np. odcinek *AB* z rysunku



jest klasą odcinków, będących odcinkiem *AC* lub odcinkiem *CB*, i zarazem klasą odcinków, będących odcinkiem *AD* lub odcinkiem *DB*), oraz że,

(3) jeśli jeden i tylko jeden przedmiot jest *P*, to *P* jest klasą przedmiotów *P* (tak np. odcinek *AB* z rysunku jest klasą odcinków *AB* z rysunku).

Starając się uchwycić, w jaki też sposób używam naprawdę wyrażeń typu '*P* jest podporządkowane klasie *K*', któremi [...] posługiwałem się [...] *promiscue* z odpowiednimi wyrażeniami typu '*P* jest elementem klasy *K*', ustaliłem definicję, w myśl której twierdziłem, że

(4) *P* jest przyporządkowane klasie *K* wtedy i tylko wtedy, gdy przy pewnym znaczeniu wyrazu '*a*' są spełnione warunki: α) *K* jest klasą przedmiotów a, β) *P* jest *a*."

Dalej Pietruszczak słusznie zauważa, że[110]: „Rozwiązanie przez Leśniewskiego antynomii Russella przy takich założeniach było już <<proste>>. Z (2)–(4) wynikało, że każda klasa jest własnym elementem (dokładniej: każdy przedmiot jest klasą oraz jest własnym elementem), czyli nie ma klas normalnych, wszystkie są nienormalne[111]. Skoro termin 'klasa normalna' jest pusty, więc z (1) dostajemy, że również pusty jest termin 'klasa klas normalnych', gdyż nie ma klas pustych. [...] Zatem <<nie ma o czym mówić>>, czyli <<nie ma problemu>>."

Istotnie, skoro tezą systemu jest formuła $\forall a\ (a \in a \rightarrow a \in el(a))$ antynomia Russella znika, gdyż właśnie te zbiory, tj. kolektywne zbiory normalne, których założenie istnienia prowadzi do wspomnianej antynomii nie istnieją

[110] Pietruszczak, [2000], s. 36, 55.

[111] Zbiór x jest *normalny*, gdy $x \notin x$. Zbiór x jest *nienormalny*, gdy x nie jest normalny, czyli gdy $x \in x$.

w systemie. Nie jest więc w mereologii możliwe wyprowadzenie równoważności: $a \in el(a) \leftrightarrow \neg(a \in el(a))$.

Na koniec, aby uniknąć nieporozumienia, jakie może ewentualnie wyniknąć z tradycyjnego sposobu rozumienia zwrotu „rozwiązanie paradoksu", warto jeszcze raz przytoczyć opinię Pietruszczaka[112]: „Gdyby ktoś mnie zapytał, co ma wspólnego powyższe rozwiązanie z oryginalnym paradoksem Russella, krótko odpowiem, że nic. Oryginalny paradoks Russella dotyczył zbiorów normalnych w sensie dystrybutywnym. Rozważania Leśniewskiego dotyczyły zaś zbiorów normalnych w sensie kolektywnym (których po prostu nie ma). Na koniec jeszcze raz podkreślmy, iż dla Leśniewskiego istniały jedynie zbiory kolektywne. Zatem dla Niego paradoks Russella w oryginalnym sformułowaniu niczego nie dotyczył. Leśniewski chciał raczej pokazać, że dla <<jedynych prawdziwych>> w Jego mniemaniu zbiorów nie ma paradoksu zbioru zbiorów normalnych".

To ograniczenie systemu mereologii jedynie do zbiorów rozumianych kolektywnie, a więc przedmiotów dających się pojmować przestrzennie przy jednoczesnym odrzuceniu możliwości istnienia abstrakcyjnych zbiorów dystrybutywnych sprawia, że nie tylko antynomia Russella lecz także wszelkie pozostałe antynomie cantorowskiej teorii mnogości nie mogą zaistnieć w mereologii:

– W mereologii można zdefiniować zarówno $\vee$ – *jakiś przedmiot* jak i $Kl(\vee)$ – *klasę-całość* dla tego przedmiotu. Istnieje więc możliwość zdefiniowania w mereologii klasy uniwersalnej *Un*:

$$\forall a\ a \in Un \leftrightarrow (a \in a\,.\, a \in Kl(\vee))$$[113].

Trudno jednak, z faktu istnienia kolektywnego zbioru uniwersalnego wyprowadzić sprzeczność, gdyż nie jest możliwe „wyjść" poza ten zbiór wykorzystując jakąkolwiek operację – wszystko cokolwiek istnieje jest w tym zbiorze, a poza nim nie ma niczego. Zatem, tworzenie nieskończonego ciągu zbiorów potęgowych nie ma tu zastosowania. Nie ma więc w mereologii, ani antynomii zbioru uniwersalnego, ani antynomii zbioru wszystkich zbiorów równolicznych z danym zbiorem.

– Ze względu na zdefiniowane przez Leśniewskiego kolektywne „bycie elementem", kolektywny zbiór uniwersalny *Un* jest zarazem zbiorem wszystkich zbiorów, poza który żadna operacja potęgowania nie wyprowadzi. Ponadto, ponieważ nie ma kolektywnych zbiorów normalnych, nie może istnieć kolektywny zbiór wszystkich kolektywnych zbiorów normalnych. Jak widać, nie

---

[112] Pietruszczak, [2002], s. 129.

[113] G. Küng, *Systemy Leśniewskiego*, tłumaczenie J. Kopania [w:] Marciszewski, [1987], s. 405.

ma więc w mereologii, ani antynomii zbioru wszystkich zbiorów, ani antynomii zbioru wszystkich liczb kardynalnych.

1.6. PODSUMOWANIE

Fakt, iż nawet w wyciąganiu wniosków kierujemy się nie tylko logiką, lecz również intuicją sprawia, że w praktyce każde rozumowanie nawet to najbardziej ścisłe, bo matematyczne weryfikujemy, konfrontując konkluzje do jakich ono prowadzi z naszymi oczekiwaniami. Nie inaczej czynił sam Cantor prowadząc swoje badania nad nieskończonością i odkrywając kolejne, szokujące go, twierdzenia. Paradoksy notorycznie ujawniają tę prawdę, dwutorowości naszego myślenia. Z jednej strony rozumujemy tak ściśle jak to tylko możliwe, uwzględniając wszystkie ważne dla rozumowania przesłanki, z drugiej zaś kierujemy się czymś co należy wprost określić mianem intuicji, a czemu przypisujemy rangę weryfikatora osiągniętych w drodze ścisłego rozumowania wniosków. W naszych intencjach wyrażają się nasze oczekiwania. Nic więc dziwnego, że może dojść do niezgodności logicznych wniosków z tymi właśnie oczekiwaniami. Mamy wówczas poczucie paradoksalności wyprowadzonych wniosków. Co więcej, im precyzyjniejsze było rozumowanie prowadzące do tych wniosków, tym silniejsze jest poczucie ich paradoksalności.

W rozdziale tym zostały zebrane i omówione właśnie te paradoksy, które wyrażają konflikt jaki powstaje w wyniku konfrontacji konkluzji uzyskanych na drodze bezbłędnego, wyjątkowo precyzyjnego, bo opartego na matematyce rozumowania z oczekiwaniami wynikającymi z naszych intuicji. Analizowane w tym rozdziale problemy nie są więc typowymi paradoksami. Są one bowiem skutkiem naszych nawyków myślowych oraz niedostatecznej wiedzy, którą dysponujemy na danym etapie, a która jest stale poddawana weryfikacji przez wyniki bieżących odkryć. Tak jak dzisiaj nie jest już uważany za paradoks konflikt jaki wywołuje nasza codzienna obserwacja pozornego ruchu Słońca po nieboskłonie z wiedzą na temat ruchu Ziemi wokół Słońca, tak nie powinny być uważane za paradoksy omówione w tym rozdziale dylematy. Nasze oczekiwania wynikające z określonych doświadczeń i nabytej wiedzy nie są w stanie dorównać bezwzględnie precyzyjnemu, konsekwentnemu rozumowaniu matematycznemu. Jest to dość oczekiwany stan rzeczy, który właściwie nie powinien nas nawet wprawiać w zdumienie. Wciąż rozwijająca się matematyka nieustannie kształtuje naszą intuicję, co sprawia, że twierdzenia paradoksalne i przez to niewiarygodne dla naszych przodków, dla nas przestają być czymś szokującym. Widać to szczególnie dobitnie na przykładzie omówionych paradoksów nieskończoności. Przecież osoby dość dobrze zaznajomione z aksjomatyczną teorią mnogości po pewnym czasie nie widzą niczego paradoksalnego w problemach zaliczanych do tej grupy. Pewne zaskakujące kiedyś, nawet najwytrawniejszych matematyków, fakty z zakresu teorii mnogości dziś wydają się całkiem intuicyjnymi tezami.

Zazwyczaj przyjmuje się, że każdy paradoks jest skutkiem konfliktu do jakiego dochodzi między efektem rozumowania a intuicją. Według przyjętej w niniejszej książce metody klasyfikowania paradoksów, głównym kryterium stanowiącym o przynależności danego dylematu do określonej grupy problemów jest jego istota, najlepiej wyrażająca się w rodzaju rozwiązania tego dylematu. Istnieje wszak pewna grupa paradoksów, które nie mają rozwiązania, bo go mieć nie mogą. Skoro bowiem rozumowanie prowadzące do niezwykłego, czyli niezgodnego z oczekiwaniami wniosku jest niezawodne, jedynym wyjściem jest zmienić oczekiwania. Nieustanna praca nad kształtowaniem naszych intuicji jest jedyną metodą na „rozwiązanie" paradoksów omawianych w tym rozdziale.

Być może wciąż rosnący poziom wiedzy jak również stale zwiększająca się dostępność jej wyników sprawi, że wszystkie omówione w tym rozdziale zagadnienia kiedyś przestaną wydawać się paradoksalnymi dylematami. Należy jednak przyjąć, że wraz z nieustannym rozwojem matematyki wciąż będą pojawiać się kolejne, zaskakujące odkrycia matematyczne, które także będą wymagały czasu, aby stać się całkiem intuicyjnymi twierdzeniami.

Na sam koniec tego rozdziału, który jest poświęcony paradoksom wynikającym z niedoskonałości naszej intuicji, należy podkreślić fakt, iż w przeciwieństwie do paradoksów omawianych w pozostałych rozdziałach, zawiera on dylematy, które powinny być przez nas pożądanymi. Dopóki bowiem, pojawiać się będą problemy reprezentowane przez tę grupę paradoksów, możemy być spokojni, że matematyka i logika rozwijają się w znaczącym stopniu, że na gruncie tych nauk dokonuje się istotny postęp. Wydawać by się mogło, że tak bardzo pożądane odczucie przyjemności wynikającej z braku konfliktu między naszymi intuicyjnymi oczekiwaniami a ustaleniami matematyki, byłoby przecież oznaką zgubnej stagnacji myśli matematycznej i logicznej. Dlatego też, wypada sobie życzyć, aby grupa paradoksów, których źródłem jest niedoskonałość naszej intuicji wciąż wzbogacała się o nowe dylematy.

2

PARADOKSY WYNIKAJĄCE Z WIELOZNACZNOŚCI

Zgodnie z przyjętymi przez nas założeniami, zakwalifikowanie dwóch paradoksów do jednej grupy zależy od tego, czy ich rozwiązania są pod jakimś istotnym względem podobne, co ma miejsce wówczas, gdy sednem każdego z tych paradoksów jest jeden i ten sam problem. Jeśli więc w dwóch, na pozór, kompletnie różnych argumentacjach odczucie paradoksalności jest skutkiem popełnienia tego samego błędu, np. błędu wieloznaczności, obie argumentacje powinny zostać zaliczone do tej samej grupy problemów. W przeciwnym razie można zagubić prawdziwy sens analizowanych dylematów. Jest to o tyle groźne, że może uniemożliwiać trafne rozwiązanie danego problemu. Tak się dzieje, gdy np. sednem znanego od wieków, starożytnego paradoksu Protagorasa będzie dla nas to, co jest w nim zaledwie zewnętrzną, żeby nie powiedzieć zupełnie powierzchowną kwestią, a mianowicie, ewentualną powinnością zapłaty. Wówczas, pojawiają się próby zastosowania wobec problemu ujawnionego przez ten paradoks np. formalnych systemów logiki deontycznej. Jak bardzo zabieg ten jest chybiony widać dopiero wtedy, gdy rozpoznamy, iż źródłem całej trudności jest zwykła, prosta wieloznaczność. Dopiero wówczas, gdy wieloznaczność ta jest usunięta, ma sens jakakolwiek analiza problemu powinności w paradoksie Protagorasa, nieważne, czy przeprowadzana za pomocą jakichś systemów formalnych czy nie. Sens tej analizy jest niewielki – po cóż analizować coś, co nie jest już żadnym istotnym problemem? Jednak, nieusunięcie wieloznaczności sprawia, że wszelkie analizy, i te formalne, i te nieformalne, na pewno nie mają żadnego sensu. Dopiero trafne rozpoznanie błędu, będącego źródłem tajemniczego, wydawać by się mogło, bardzo głębokiego problemu, uświadamia nam faktyczną rangę rozważanej trudności.

Podobnie, można zgubić właściwy sens innych, ważnych problemów logicznych, takich jak paradoks kamienia, będący nieudaną próbą dowodu na nieistnienie Boga, czy też, również znany od średniowiecza, paradoks dotyczący wszechmocnego Boga. Uniknięcie błędu wieloznaczności nadaje sens wszelkim analizom tych, interesujących przecież kwestii z pogranicza logiki i teologii.

W tym rozdziale powinien znaleźć się, omówiony już wcześniej paradoks Newcomba. Jednak wyjątkowo prosty sposób rozwiązania tego problemu dyskwalifikuje go jako ważny paradoks wieloznaczności, chociaż niewątpliwie błąd wieloznaczności jest jego istotą. Warto tu jednak wspomnieć o tym konkretnym paradoksie, gdyż nieracjonalność rozważań kwestii wynikających z błędu wieloznaczności w sytuacji, gdy błąd ten nie jest usunięty, jest przecież oczywista. Niestety, istniejące w literaturze analizy tego paradoksu ignorujące, a więc nieusuwające błędu wieloznaczności są przeprowadzane właśnie w imię teorii racjonalnego działania. Tak więc, wśród wielu zagadnień poruszających niekiedy naprawdę ważne i interesujące kwestie, prawdziwym kuriozum jest właśnie, sformułowany w dwudziestym wieku(!), paradoks Newcomba, w którym błąd wieloznaczności wydaje się być popełniony na życzenie osób zajmujących się tym dylematem. Rozpoznanie tego błędu jest zabójcze, ze skutkiem natychmiastowym, zarówno dla samego paradoksu Newcomba, jak i dla rozgorzałej wokół niego, mogłoby się wydawać, poważnej dyskusji. Jedynie uporczywe niedostrzeganie, iż istotą tego dylematu jest błąd wieloznaczności, stwarza możliwość traktowania paradoksu Newcomba jako problemu racjonalnego podejmowania decyzji. Tylko pod tym warunkiem można zastanawiać się, które z reguł racjonalnego działania powinny być zawieszone, a które zachowane. Tymczasem, z punktu widzenia istoty tego paradoksu, cała tocząca się wokół niego dyskusja robi wrażenie bardzo nieracjonalnej, bo czyż racjonalne jest analizowanie faktycznie nieistniejącego problemu, który istnieje jedynie dzięki temu, że popełnia się prosty, kardynalny błąd myślenia. Warto więc pamiętać, że poza omówionymi w tym rozdziale paradoksami wieloznaczności istnieją inne dylematy, których źródłem jest błąd wieloznaczności, a które, tak jak paradoks Newcomba, robią trudną do wyjaśnienia karierę. Tak więc pełniejszy pogląd w sprawie paradoksów wieloznaczności da połączenie dwóch rozdziałów: przednio omówionego, poświęconego sofizmatom i paralogizmom oraz tego, poświęconego wyłącznie paradoksom wieloznaczności. Istnieje bowiem poważne uzasadnienie, aby do jednej klasy zaliczyć wszystkie te paradoksy, których źródłem jest prosty błąd wieloznaczności, zupełnie nie zważając na to, czy „tradycyjnie" dany paradoks jest kojarzony z kwestią racjonalności podejmowanej decyzji, powinności, czy może wydaje się być zagadnieniem czysto teologicznym.

Wieloznaczność jest nie tylko zjawiskiem powszechnym, lecz, w wielu przypadkach, stanowi bardzo trudny do rozpoznania problem. Warto też nadmienić, iż charakterystyczną, wspólną cechą wszelkich paradoksów wieloznaczności jest to, iż problem będący sednem tych dylematów, jeśli tylko zostanie rozpoznany, staje się banalny, a uzyskane w ten sposób rozwiązanie wydaje się być oczywistym i zupełnie naturalnym.

2.1. PARADOKS PROTAGORASA (EUATHLOSA, NAUCZYCIELA PRAWA)

Niektórzy logicy uważają paradoks Protagorasa za inną wersję paradoksu krokodyla. Tak na przykład sądził jeden z czołowych logików i filozofów szkoły lwowsko-warszawskiej, Kazimierz Ajdukiewicz (1890–1963). W jego artykule *Paradoksy starożytnych*, z 1931 roku, czytamy[1]: „Podobny tok myśli jak w powyższej anegdocie o krokodylu występuje w innym głośnym starogreckim paradoksie o nauczycielu i uczniu". Dalej, na tej samej stronie, po przedstawieniu już samego paradoksu stwierdza wyraźnie: „Paradoks ten rozwiązuje się podobnie jak paradoks o krokodylu"[2]. Istotnie, tok myśli jest nie tylko podobny, ale wręcz analogiczny. Niestety, tym co mimo wszystko różni oba paradoksy jest kontekst sytuacyjny, który sprawia, że rozwiązanie rozsądne w jednym przypadku wydaje się być absurdalne w drugim. I tak, na przykład, Eugeniusz Grodziński, w swojej książce *Paradoksy semantyczne* z 1983 roku, proponuje odróżnić od siebie problemy jakie wiążą się z obydwoma paradoksami[3]: „*Paradoks nauczyciela* prawa wygląda podobnie jak *paradoks krokodyla*. Jest to jednak podobieństwo złudne".

Argumentację paradoksu krokodyla przedstawmy, przytaczając napisany piękną polszczyzną tekst Ajdukiewicza[4]

Paradoks Protagorasa

„Sofista grecki Protagoras miał ucznia nazwiskiem Euathlos, którego kształcił w sztuce prawniczej. Między uczniem a nauczycielem stanęła umowa, mocą której obaj zgodzili się na to, iż Euathlos zapłaci Protagorasowi za naukę, jednak pod tym dopiero warunkiem, że Euathlos wygra pierwszy swój proces sądowy. Nauka się skończyła, Euathlos jednak nie myślał jeść z niej chleba i nie przyjmował żadnego procesu. Trwało to dość długo, aż się Protagorasowi cierpliwość wyczerpała i zaskarżył Euathlosa do sądu o zapłatę. Stanąwszy przed trybunałem tak uzasadniał Protagoras swą pretensję: *albo Euathlos ten proces, który jest jego pierwszym procesem, wygra albo przegra. Jeśli go wygra, to winien mi zapłacić na mocy umowy, która zobowiązuje go do zapłaty, jeśli swój pierwszy proces wygra. Jeśli go zaś przegra, to winien mi zapłacić na mocy wyroku sądowego.* Ale Euathlos pojętnym musiał być uczniem, bo odpowiedział Protagorasowi następującą repliką *albo ja, Euathlos, proces wygram albo przegram. Jeśli go wygram, to znaczy, iż wyrok sądowy uwolni mnie od*

---

[1] Ajdukiewicz, [1931], s.143.

[2] Paradoks krokodyla jest przez nas omówiony w rozdziale poświęconym paradoksom samozwrotności.

[3] Grodziński, [1983], s. 51.

[4] Ajdukiewicz, [1931], s. 143.

obowiązku zapłaty, jeśli przegram, to wobec umowy, która zobowiązywała mnie do zapłaty tylko w wypadku, gdybym mój pierwszy proces wygrał, od obowiązku zapłaty będę wolny".

Dla prostoty rozumowania przyjmijmy, dość naturalne i, co najważniejsze, nie wpływające na paradoksalność anegdoty, dwa założenia. Po pierwsze, proces między nauczycielem i uczniem może się skończyć jedynie, albo wygraną nauczyciela, albo wygraną ucznia – musi więc być jednoznacznie rozstrzygnięty. Po drugie, wygrana nauczyciela jest przegraną ucznia i odwrotnie, wygrana ucznia jest przegraną nauczyciela.

Jak już wspomnieliśmy, Ajdukiewicz uważa, że paradoks ten należy rozwiązać podobnie jak paradoks krokodyla[5], czyli stwierdzając sprzeczność wynikającą z wadliwie sformułowanej umowy. Zdaniem Ajdukiewicza, umowa jaką zawarł Protagoras z Euathlosem sprawia, że nie jest możliwe spełnienie jej warunków. Takie jest też, zaproponowane przez Ajdukiewicza, rozwiązanie paradoksu krokodyla – umowa jaką zawarł krokodyl z matką jest wadliwa do tego stopnia, że jakakolwiek jej realizacja musiałaby być sprzeczna.

Może się wydawać, że zupełnie nowymi wobec podejścia Ajdukiewicza są propozycje Raymonda Smullyana, Lennarta Åqvista, W. Lenzena i wspomnianego już Grodzińskiego. Wszyscy czterej zastanawiają się bowiem nad tym, co powinien uczynić Protagoras, aby odzyskać od Euathlosa pieniądze. Zastępują więc problem logiczny prawniczym, a można by nawet rzec, „życiowym". Kwestią przez nich analizowaną nie jest już sprzeczność stworzonej przez obu filozofów sytuacji, lecz dość prosty, bo pozalogiczny problem odzyskania długu. W swej bardzo popularnej książce, *What is the Name of This Book? – The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*, z 1978 roku, Smullyan stwierdza[6]: „Nie jestem pewny, czy naprawdę znam rozstrzygnięcie tego dylematu. [...] Najlepsze jego rozwiązanie, jakie kiedykolwiek otrzymałem, pochodzi od pewnego prawnika, któremu postawiłem to pytanie. Powiedział on: *Sąd powinien zawyrokować na korzyść ucznia – uczeń nie powinien być zmuszony do płacenia, skoro jeszcze nie wygrał swego pierwszego procesu. Dopiero po zakończeniu procesu uczeń winien jest pieniądze Protagorasowi, wtedy więc Protagoras powinien powrócić do sądu i po raz drugi wnieść sprawę przeciw swemu uczniowi. Tym razem sąd powinien zawyrokować na rzecz Protagorasa, skoro teraz uczeń wygrał swą pierwszą sprawę*". Formalizację takiego właśnie „prawniczego" podejścia proponują Lenzen[7] i Åqvist[8]. Przedstawione w artykule z 1977 roku *Protagoras versus Euathlus: Reflections*

[5] Patrz paragraf 3.6 zatytułowany *Paradoks krokodyla*.

[6] Smullyan, [1978] – tekst w tłumaczeniu B. Chwedeńczuka, Smullyan [1998], s. 188–189.

[7] Lenzen, [1977].

[8] Åqvist, [1981].

on a so-called Paradox, „rozwiązanie" paradoksu Lenzen poprzedza formalizacją dylematu, w której stosuje tak zwaną *logikę bazową*, określoną aksjomatyką klasycznego rachunku zdań, aksjomatami dla operatora konieczności □ modalnego systemu S5 oraz aksjomatami dla predykatu identyczności. Jedyną regułą inferencji logiki bazowej jest *Modus Ponens*. Lenzen proponuje przyjęcie czterech następujących postulatów[9]:

*P*1. $A \Rightarrow (OZb \leftrightarrow G(b,p))$;
*P*2. $(G(b, p^{+}) \leftrightarrow (V(p^{+}) \Rightarrow -\, OZb))\ \&\ (G(a, p^{+}) \leftrightarrow (V(p^{+}) \Rightarrow OZb))$;
*P*3. $p = p^{+}$;
*P*4. $(V(p^{+}) \Rightarrow OZb) \leftrightarrow -\, (V(p^{+}) \Rightarrow -\, OZb)$.

Symbole występujące w formułach *P*1–*P*4 są wprowadzone definicjami[10]:

*D*0. a = Protagoras;
*D*1. b = Euathlos;
*D*2. A = umowa jaką zawarł Protagoras z Euathlosem;
*D*3. Prawdziwe $A \leftrightarrow A$ jest prawdziwe;
*D*4. p = pierwsza rozprawa sądowa, w której Euathlos jest stroną;
*D*5. p^{+} = rozprawa sądowa Protagorasa przeciwko Euathlosowi;
*D*6. $V(p^{+})$ = werdykt sądu w sprawie p^{+};
*D*7. Poprawne $V(p^{+}) \leftrightarrow V(p^{+})$ jest poprawny[11];
*D*8. $OZb \leftrightarrow$ Euathlos jest zobowiązany do zapłacenia za naukę;
*D*9. $G(b,p) \leftrightarrow$ Euathlos wygrywa sprawę p;
*D*10. $G(b,p^{+}) \leftrightarrow$ Euathlos wygrywa sprawę p^{+};
*D*11. $G(a,p^{+}) \leftrightarrow$ Protagoras wygrywa sprawę p^{+};
*D*12. $(A \Rightarrow \Phi) \leftrightarrow \Box$(Prawdziwe $A \rightarrow \Phi$);
*D*13. $(V(p^{+}) \Rightarrow \Phi) \leftrightarrow \Box$(Poprawne $V(p^{+}) \rightarrow \Phi$).

Postulat pierwszy stwierdza, że z umowy *A* wynika, że Euathlos jest zobowiązany zapłacić za naukę wtedy i tylko wtedy, gdy wygra swoją pierwszą rozprawę *p*. Drugi postulat określa wyrok sądu w sprawie wytoczonej Euathlosowi przez Protagorasa, w zależności od tego, czy wygrana przypadnie nauczycielowi czy też uczniowi. Kolejny postulat wyraża fakt, iż sprawa jaką Protagoras wytoczył swojemu uczniowi jest pierwszą rozprawą Euathlosa.

9 Formalizacja Lenzena jest tu przedstawiona w symbolice Åqvista (patrz Åqvist [1981]).

10 Referujący propozycję Lenzena Åqvist precyzuje, że w podanych czternastu definicjach symbole „=", „→", „↔", „□" powinny być odpowiednio czytane jako: „... jest identyczne z ...", „jeżeli ... to ...", „... wtedy i tylko wtedy, gdy ...", „jest konieczne, aby ...".

11 Najprawdopodobniej, poprawność werdyktu sądowego oznacza jego jednoznaczność i niesprzeczność.

Wreszcie ostatni postulat stwierdza, że albo zajdzie sytuacja polegająca na tym, że $V(p^{+}) \Rightarrow OZb$ albo $V(p^{+}) \Rightarrow - OZb$.

Ze zbioru $\{P1, P2, P3, P4\}$ Lenzen wyprowadza następujące formuły:

$C0$.	$G(a,p^{+}) \leftrightarrow - G(b,p^{+})$	Wprost z $P2$, $P3$, $P4$;
$C1$.	$\mathrm{G(b,p)} \leftrightarrow - G(b,p^{+})$	Wprost z $P3$;
$C2$.	Prawdziwe $A \rightarrow (OZb \leftrightarrow G(b,p))$	$P1$, $D12$;
$C3$.	Prawdziwe $A \rightarrow (OZb \leftrightarrow (V(p^{+}) \Rightarrow - OZb))$	$C2$, $C1$, $P2$.

Wykorzystując zaś $C0$–$C3$ Lenzen przeprowadza dowód twierdzenia:

Tw. 1 Ze zbioru przesłanek $\{P1, P2, P3, P4\}$ wynika formuła:
– Prawdziwe $A \vee -$ Poprawne $V(p^{+})$;

Dowód.

1.	Prawdziwe A	Założenie;
2.	$OZb \leftrightarrow (V(p^{+}) \Rightarrow - OZb)$	1, $C3$;
3.	Ozb	Założenie;
4.	$V(p^{+}) \Rightarrow - Ozb$	2, 3;
5.	Poprawne $V(p^{+}) \rightarrow - Ozb$	4, $D13$;
6.	– Poprawne $V(p^{+})$	3, 5;
7.	$OZb \rightarrow -$ Poprawne $V(p^{+})$	3–6;
8.	$- Ozb$	Założenie;
9.	$- (V(p^{+}) \Rightarrow - OZb)$	2, 8;
10.	$V(p^{+}) \Rightarrow OZb$	9, $P4$;
11.	Poprawne $V(p^{+}) \rightarrow OZb$	10, $D13$;
12.	– Poprawne $V(p^{+})$	8, 11;
13.	$- OZb \rightarrow -$ Poprawne $V(p^{+})$	8–12;
14.	$OZb \vee - Ozb$	Tautologia;
15.	$(OZb \vee - OZb) \rightarrow -$ Poprawne $V(p^{+})$	7, 13;
16.	– Poprawne $V(p^{+})$	14, 15;
17.	Prawdziwe $A \rightarrow -$ Poprawne $V(p^{+})$	1–16;
18.	– Prawdziwe $A \vee -$ Poprawne $V(p^{+})$	17.

Z twierdzenia 1 natychmiast wynika kolejne:

Tw. 2 Ze zbioru przesłanek $\{P1, P2, P3, P4, P5\}$ wynika formuła:
– Poprawne $V(p^{+})$;
Ze zbioru przesłanek $\{P1, P2, P3, P4, P6\}$ wynika formuła:
– Prawdziwe A;

gdzie:

$P5$. Prawdziwe A;
$P6$. Poprawne $V(p^{+})$.

Zarówno z pierwszej, jak i z drugiej części twierdzenia 2 wynika ostatecznie:

Tw. 3 Zbiór przesłanek $\{P1, P2, P3, P4, P5, P6\}$ jest sprzeczny.

Tym samym, Lenzen pokazał, że w jego formalizacji zachodzą dwie zależności. Po pierwsze uznanie prawdziwości umowy jaką zawarli Protagoras z Euathlosem implikuje niepoprawność orzeczenia sądu w sprawie Protagoras *versus* Euathlos, jakie by ono nie było, po drugie zaś uznanie poprawności jakiegokolwiek orzeczenia sądu w tej sprawie implikuje nieprawdziwość umowy. Nic więc dziwnego, że jednoczesne założenie prawdziwości umowy oraz poprawności orzeczenia sądu implikuje sprzeczność. Zarówno argumentacja Protagorasa jak i Euathlosa musi więc prowadzić do sprzeczności:

Argumentacja Protagorasa:

1.	$G(a, p^{+})$	założenie pierwsze;
2.	Ozb	1, $P2$, $D13$, $P6$;
3.	$G(b, p^{+})$	założenie drugie;
4.	$G(b, p)$	3, $P3$;
5.	Ozb	4, $P1$, $D12$, $P5$;
6.	$(G(a, p^{+}) \vee G(b, p^{+})) \rightarrow OZb$	1–2, 3–5;
7.	Ozb	6, $C0$.

Argumentacja Euathlosa:

1.	$G(b, p^{+})$	założenie pierwsze;
2.	$- Ozb$	1, $P2$, $D13$, $P6$;
3.	$G(a, p^{+})$	założenie drugie;
4.	$- G(b, p)$	3, $C0$;
5.	$- OZb$	4, $P1$, $D12$, $P5$;
6.	$(G(a, p^{+}) \vee G(b, p^{+})) \rightarrow - OZb$	1–2, 3–5;
7.	$- OZb$	6, $C0$.

Można uznać, iż do tego miejsca Lenzen nie wyszedł poza analizę Ajdukiewicza, która jest przecież znacznie prostsza. Różnica między propozycją Ajdukiewicza a Lenzena tkwi jedynie w postaci prezentacji: nieformalnej w pierwszym przypadku i sformalizowanej w drugim. Przedstawiona wyżej analiza Lenzena jest jednak zaledwie diagnozą problemu, która jest skądinąd doskonale znana. Właściwym bowiem rozwiązaniem paradoksu jest, zdaniem Lenzena, druga zaproponowana przez niego konstrukcja wykorzystująca logikę bazową rozszerzoną o klasyczny kwantyfikator ogólny $\forall$, oraz dziesięć kolejnych definicji:

*D*14. $Z^{\leq t}b \leftrightarrow$ Euathlos zapłacił za naukę do chwili t
*D*15. $G^{\leq t}(b, p) \leftrightarrow$ Euathlos wygrał swoją pierwszą sprawę p do chwili t
*D*16. $G^{\leq t}(b, p^{+}) \leftrightarrow$ Euathlos wygrał sprawę p^{+} do chwili t
*D*17. $O^{t}Zb \leftrightarrow$ Euathlos jest w chwili t zobowiązany zapłacić za naukę
*D*18. t^{+} = czas przed ogłoszeniem wyroku w sprawie p^{+}
*D*19. p^{++} = druga sprawa sądowa wytoczona Euathlosowi przez Protagorasa
*D*20. t^{++} = czas przed ogłoszeniem wyroku w sprawie p^{++} [12]
*D*21. $V(p^{++})$ = werdykt jaki zapadł w sprawie p^{++}
*D*22. $G(b, p^{++}) \leftrightarrow$ Euathlos wygrywa sprawę p^{++}
*D*23. $G(a, p^{++}) \leftrightarrow$ Protagoras wygrywa sprawę p^{++}

Jak widać Lenzen wprowadza współczynnik czasu umożliwiający mu rozważanie dwóch następujących po sobie procesów sądowych. Dysponując powyższymi definicjami analizuje zmieniony zbiór postulatów, którymi w nowy sposób opisuje wyrażoną w paradoksie sytuację:

*P*1*a*. $A \Rightarrow \forall t\, (O^{t}Zb \leftrightarrow (G^{\leq t}(b,p)\ \&\ - Z^{\leq t}b))$;
*P*2*a*. $(G(b, p^{+}) \leftrightarrow - O^{t+}Zb)\ \&\ (G(a, p^{+}) \leftrightarrow O^{t+}Zb)$;
*P*2*b*. $(G(b, p^{++}) \leftrightarrow - O^{t++}Zb)\ \&\ (G(a, p^{++}) \leftrightarrow O^{t++}Zb)$;
*P*3. $p = p^{+}$;
*P*5. Prawdziwe A;
*P*7. $- G^{\leq t+}(b, p^{+})$;
*P*8. $G^{\leq t++}(b, p^{+})$;
*P*9. $- Z^{\leq t++}b$.

Zdaniem Åqvista, najważniejszym postulatem jest *P*1*a*, który głosi: *z umowy A wynika, że dla dowolnej chwili czasu t jest tak, że Euathlos jest w chwili t zobowiązany zapłacić za naukę wtedy i tylko wtedy, gdy Euathlos do chwili t*

[12] Aby postulat *P*7 nie budził wątpliwości definicja *D*20 winna określać chwilę t^{++} jako poprzedzającą chwilę orzeczenia werdyktu w sprawie p^{++} jednak późniejszą względem chwili, w której zapadł wyrok w sprawie p^{+}, [komentarz autora].

wygrał swoją pierwszą sprawę i wciąż jeszcze do chwili t nie zapłacił za naukę Protagorasowi. Postulaty *P2a* oraz *P2b* dotyczą odpowiednio pierwszej i drugiej rozprawy sądowej. Zgodnie z *P2a*: *Euathlos wygra sprawę pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest zobowiązany zapłacić za naukę w chwili poprzedzającej wyrok w pierwszej sprawie.* Zgodnie zaś z *P2b*: *Protagoras wygra sprawę pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy Euathlos jest zobowiązany zapłacić za naukę w chwili poprzedzającej wyrok w pierwszej sprawie.* Postulat *P7* głosi, iż: *nie jest prawdą, że Euathlos wygrał swoją pierwszą sprawę przed zapadnięciem wyroku w pierwszej rozprawie.* Według *P8*: *Euathlos wygrał swoją pierwszą sprawę przed zapadnięciem wyroku w drugiej sprawie.* Ostatni postulat *P9* zakłada, że: *Euathlos nie zapłacił za naukę do chwili ogłoszenia wyroku w drugiej rozprawie.*

Ostatnim krokiem rozumowania rzekomo rozwiązującego paradoks Protagorasa jest udowodnione przez Lenzena następujące twierdzenie:

Tw. 4 Niech $L_1 = \{P1a, P2a, P3, P5, P7\}$, $L_2 = \{P1a, P2b, P3, P5, P8, P9\}$. Wówczas,

(*i*) Ze zbioru L_1 wynika formuła: $-O^{t+}Zb\ \&\ G(b, p^+)$;

(*ii*) Ze zbioru L_2 wynika formuła: $O^{t++}Zb\ \&\ G(a, p^{++})$;

(*iii*) Ze zbioru $L_1 \cup L_2$ wynika formuła:

$-O^{t+}Zb\ \&\ G(b, p^+)\ \&\ O^{t++}Zb\ \&\ G(a, p^{++})$.

Dowód części (*i*):

1.	$\forall t\,(O^tZb \leftrightarrow (G^{\leq t}(b, p)\ \&\ -Z^{\leq t}b))$	*P1a*, *D12*, *P5*;
2.	$O^{t+}Zb \leftrightarrow (G^{\leq t+}(b, p)\ \&\ -Z^{\leq t+}b)$	1;
3.	$-G^{\leq t+}(b, p)$	*P3*, *P7*;
4.	$-O^{t+}Zb$	2, 3;
5.	$G(b, p^+)$	4, *P2a*;
6.	$-O^{t+}Zb\ \&\ G(b, p^+)$	4, 5.

Dowód części (*ii*):

1.	$\forall t\,(O^tZb \leftrightarrow (G^{\leq t}(b, p)\ \&\ -Z^{\leq t}b))$	*P1a*, *D12*, *P5*;
2.	$O^{t++}Zb \leftrightarrow (G^{\leq t++}(b, p)\ \&\ -Z^{\leq t++}b)$	1;
3.	$G^{\leq t++}(b, p)$	*P3*, *P8*;
4.	$O^{t++}Zb$	2, 3, *P9*;
5.	$G(a, p^{++})$	4, P2*b*;
6.	$O^{t++}Zb\ \&\ G(a, p^{++})$	4, 5.

Część (*iii*) *jest natychmiastowym wnioskiem z* (*i*) *oraz* (*ii*). *Kończy to dowód twierdzenia* 4.

Zbiory L_1 i L_2 określają warunki charakterystyczne dla sytuacji związanej odpowiednio z pierwszą i drugą rozprawą Protagorasa przeciwko Euathlosowi. Jak widać, to żmudne, wydawać by się mogło niezwykle dokładne, sformalizowane rozumowanie nie wnosi nic ponad to co zostało powiedziane w zacytowanej wcześniej lakonicznej uwadze Smullyana[13]: *jeśli Protagoras wytoczył swojemu uczniowi dwie rozprawy, to pierwsza skończyła się wygraną Euathlosa i tym samym umożliwiła nauczycielowi wygranie drugiej*. Zatem do zapadnięcia wyroku w pierwszej rozprawie, Euathlos nie był zobowiązany do zapłacenia za naukę. Natomiast od chwili wydania wyroku w pierwszej rozprawie uczeń jest zobowiązany do zapłacenia swojemu mistrzowi pieniędzy. Pojawia się tutaj dość naturalne i wręcz oczywiste pytanie:

Na jakiej podstawie Lenzen i Smullyan rozważają drugą sprawę sądową?

Przecież już na mocy samej umowy *A*, uczeń jest zobowiązany do zapłacenia nauczycielowi. Skoro rozważana jest druga rozprawa, równie dobrze można przyjąć, że Protagoras będzie musiał wytoczyć Euathlosowi trzecią, a może i czwartą, bo widać tu wyraźnie, iż zarówno Lenzen, jak i Smullyan zakładają nieuczciwość Euathlosa. Tymczasem, niepłacenie za naukę jest w tym paradoksie spowodowane jedynie tym, że prowadziłoby do sprzeczności. Jest to prawdziwy problem paradoksu Protagorasa i każde sprowadzenie tego dylematu do problemu odzyskania pieniędzy jest najoczywistszym spłyceniem tej starożytnej kwestii.

Podejście Lenzena i Smullyana jest więc dość nietypowe ze względu na tradycyjną metodę pracy z paradoksami. Wprowadzenie do rozwiązania drugiej rozprawy jest niewłaściwe, bo zakłada nieuczciwość Euathlosa, który, ich zdaniem, najwidoczniej robi wszystko, aby nie zapłacić za naukę. Tymczasem standardowe podejście do paradoksów nakazuje przyjąć i to bez potrzeby wypisywania dodatkowych warunków, że bohaterowie anegdot czynią dokładnie to, co powinni. Zatem w paradoksie krokodyla, krokodyl odda dziecko jeśli okaże się, że powinien, zaś Euathlos zapłaci za naukę, gdy się okaże, że tak właśnie powinien uczynić. Zakładanie, że będzie tego unikał, mimo iż logiczne rozumowanie będzie mu to jednoznacznie nakazywało jest podejściem niezgodnym z tradycją analizowania i rozwiązywania paradoksów. Równie dobrze zamiast przyjąć prawdomówność krokodyla, można by założyć, iż okłamuje on matkę. Fakt, iż unikanie przez Euathlosa podjęcia się sprawy sądowej może rzucać cień na jego uczciwość. Należy jednak pamiętać, że również w tej kwestii postępowanie Euathlosa nie stoi w sprzeczności z zawartą

[13] Publikacja książki Smullyana, w której autor wypowiada się na temat rozwiązania paradoksu za pomocą dwóch rozpraw sądowych jest o rok późniejsza od artykułu Lenzena prezentującego przypomnianą tu analizę.

przez niego umową. Nie jest on przecież w żaden formalny sposób zobowiązany do podjęcia się jakiejkolwiek sprawy sądowej. Paradoks Protagorasa jest więc logicznym problemem, którego nie powinno się zastępować, a więc *de facto* niszczyć jakimiś pozalogicznymi analizami.

Inny powód dla którego rozwiązanie Lenzena jest chybione został wyjaśniony wcześniej i sprowadza się on do tego, że miejsce typowo logicznego problemu zajęła kwestia zastępcza. Przecież istotą paradoksu nie jest problem odzyskania pieniędzy, lecz sprzeczność sytuacji wykreowanej wspólnie przez nauczyciela i jego ucznia. Ponadto, Lenzen zakłada sprzeczność umowy A z innymi postulatami, co jest wyrażone w jego formalizacji, odtwarzając tym samym to co zostało opowiedziane w anegdocie. Nie można więc powiedzieć, że wykracza poza rozwiązanie Ajdukiewicza. To co dzieje się później, czyli po stwierdzeniu sprzeczności jest tak naprawdę rozwiązywaniem problemu o prawnej naturze. Nie ma tu już miejsca na jakąkolwiek kwestię natury logicznej.

Jednak najgorsze jest to, że propozycja Lenzena nie rozwiązuje paradoksu, nie usuwa bowiem sprzeczności, będącej istotą tego problemu. Zapewne zarówno zbiór L_1 jak i L_2 nie są sprzeczne. Mogłoby się więc wydawać, że rozwiązanie jest poprawne: z niesprzecznych zbiorów wynikają pożądane formuły. Jednak tak nie jest. Niemożność wyprowadzenia sprzeczności jest skutkiem specjalnego doboru wyrażeń języka oraz przyjęcia specyficznego zbioru przesłanek. Wybór ten jest sztuczny i niewłaściwy, a to z tego powodu, iż przemilcza to co powinno zostać wyrażone w analizie paradoksu, gdyż jest istotną jego częścią. A zatem,

Po pierwsze: skoro brany jest pod uwagę czas przed wydaniem wyroku w pierwszej sprawie (t^+) oraz czas przed wydaniem wyroku w drugiej sprawie (t^{++}), jest zupełnie naturalne móc uwzględnić czas ogłoszenia wyroku w pierwszej sprawie (t');

Po drugie: przemilczane zostało to, co jest sednem konkretnych wyroków w sprawie pierwszej i w sprawie drugiej. Postulaty $P2a$ oraz $P2b$ stwierdzają jedynie kiedy sąd wyda wyrok korzystny dla Protagorasa, a kiedy dla Euathlosa. Nie ma jednak żadnych postulatów, które mówiłyby co dla Euathlosa oznacza wydanie przez sąd wyroku korzystnego dla Protagorasa, a co oznacza wydanie wyroku korzystnego dla niego samego.

Pierwsza uwaga ma jedynie techniczne znaczenie – ma umożliwić mówienie o tym, co się stanie w chwili ogłoszenia wyroku w pierwszej rozprawie – jak już stwierdziliśmy, druga rozprawa nie ma najmniejszego znaczenia dla paradoksu. Uwaga druga jest bardzo istotna, jej brak uniemożliwia bowiem wyrażenie kluczowej dla całego problemu kwestii, której pominięcie sprawia, że analiza Lenzena obejmuje jedynie część, można by rzec połowę dylematu.

Uzupełnijmy więc przemilczane założenia:

1.	$t^{+} < t' < t^{++}$;	Dodatkowe założenie;
2.	$G(b, p^{+})$	z *tw* 4 (*i*);
3.	$O^{t^{++}}Zb$	z *tw* 4 (*ii*);
4.	$O^{t'}Zb$	z 1, 3;
5.	$G(b, p^{+}) \leftrightarrow - O^{t'}Zb$	Brakujący postulat wyjaśniający co oznacza wygrana Euathlosa;
6.	$- O^{t'}Zb$	z 2, 5;
7.	$O^{t'}Zb \ \& - O^{t'}Zb$	z 4, 6.

Należy podkreślić, że dodane elementy nie tylko, że są zgodne z przyjętymi przez Lenzena założeniami, lecz wręcz je uzupełniają. Krok czwarty powyższego dowodu stwierdza bowiem, że począwszy od chwili wydania korzystnego dla Euathlosa wyroku w jego pierwszej sprawie, uczeń jest zobowiązany do zapłacenia za naukę. W kroku piątym zostaje przyjęty postulat głoszący, że wygrana pierwszej sprawy sądowej oznacza, że Euathlos nie jest zobowiązany przynajmniej w chwili wydania wyroku do zapłacenia za naukę. Przecież, gdyby ten wyrok zobowiązywał Euathlosa do zapłaty, oznaczałby przegraną, a nie wygraną ucznia.

Jak widać, rozwiązanie Lenzena bazuje na niedomówieniach, dzięki którym w całej konstrukcji jest powiedziane na tyle mało, że nie tylko sprzeczności wyprowadzić się nie da, ale niewiadomy jest sens pewnego zdarzenia – sens wydanego wyroku w pierwszej sprawie. Zapewne zaproponowane wyżej uzupełnienie analizy Lenzena nie jest jedyne możliwe. Pokazuje jednak ono, że każde uzupełnienie uwzględniające przemilczaną przez Lenzena a istotną dla całego dylematu kwestię musi prowadzić do pojawienia się sprzeczności w tak poszerzonej formalizacji. Okazuje się więc, że konieczne przecież uzupełnienie propozycji Lenzena pokazuje, iż uzyskał on w wyniku swojej formalizacji jedynie to, co stwierdził w prostych słowach Ajdukiewicz.

Niestety, poddając rozwiązanie Lenzena krytyce w swoim artykule *The Protagoras Case: An Exercise in Elementary Logic for Lawyers*, z 1981 roku, Åqvist nie dostrzega wyżej wymienionych problemów, lecz formułuje zarzuty dotyczące dwóch postulatów *P2a* i *P2b*. Raczej słusznie zauważa, że chociaż oba postulaty powinny być spełnione, to jednak może się zdarzyć, że zarówno pierwszy, jak i drugi zostaną sfalsyfikowane przez decyzje sądu. W przypadku pierwszej rozprawy sądowej może się okazać, że wbrew *P2a* sąd dojdzie do wniosku, iż Euathlus powinien zapłacić za naukę. Wówczas, oba człony koniunkcji jaką jest ten postulat winny zostać odrzucone. W analogiczny sposób Åqvist kwestionuje wartość *P2b*. Jednak nowa postać postulatów, podobnie jak ma to miejsce u Lenzena przemilcza sens, zarówno wygranej, jak i przegranej Euathlosa. Przedstawiając swoją wersję rozwiązania Lenzena, Åqvist zamienia bowiem oba wątpliwe postulaty *P2a* i *P2b* na dwa jeszcze bardziej wątpliwe, chociaż przypominające wcześniejszy postulat *P2*:

$P2.0$ $(G(b, p^{+}) \leftrightarrow (V(p^{+}) \Rightarrow -O^{t+}Zb))$ & $(G(a, p^{+}) \leftrightarrow (V(p^{+}) \Rightarrow O^{t+}Zb))$;
$P2.1$ $(G(b, p^{++}) \leftrightarrow (V(p^{+}) \Rightarrow -O^{t++}Zb))$ & $(G(a, p^{++}) \leftrightarrow (V(p^{+}) \Rightarrow O^{t++}Zb))$.

Jasne jest, że Åqvist stosuje ten sam trik co Lenzen. Postulat *P*2.0 mówi bowiem tylko tyle, że: *Euathlos wygra pierwszy proces wtedy i tylko wtedy, gdy poprawny wyrok sądu pociąga za sobą fakt, iż Euathlos nie jest do chwili wydania wyroku w pierwszej sprawie zobowiązany do zapłacenia za naukę oraz Protagoras wygra pierwszy proces wtedy i tylko wtedy, gdy poprawny wyrok sądu pociąga za sobą fakt, iż Euathlos jest do chwili wydania wyroku w pierwszej sprawie zobowiązany do zapłacenia za naukę*. Zatem, tak jak w przypadku rozwiązania Lenzena, i tutaj nie wiemy, co oznacza korzystny dla Euathlosa wyrok w pierwszej sprawie. Wiemy tylko tyle, że jest korzystny i na tym koniec. Podobnie nie wiadomo jakie konsekwencje dla Euathlosa ma niekorzystny dla niego werdykt sędziów – wyrok ten jest niekorzystny i już. Znane są tylko warunki jakie muszą zostać spełnione, aby sędziowie wiedzieli kiedy mają wydać korzystny, a kiedy niekorzystny dla Euathlosa wyrok. W przypadku postulatu *P*2.1 jesteśmy postawieni wobec dokładnie tych samych problemów.

Tak więc, postać postulatów *P*2.0 oraz *P*2.1 umożliwia uniknięcie mówienia o tym, co w paradoksie faktycznie prowadzi do sprzeczności. Wstrzymanie się od mówienia na temat treści wyroku pomaga nie dostrzec sprzeczności, co nie znaczy, że jej nie ma. W dalszej części pracy, wprowadzając postulat spójny z przyjętymi przez Åqvista założeniami, bez większego trudu, dokładnie tak, jak w przypadku formalizacji Lenzena, wyprowadzimy sprzeczność, pokazując tym samym, że jest ona nadal nieusuwalnym elementem opisu sformalizowanej przez Åqvista sytuacji.

Åqvist zastępuje postulat *P*4 dwoma kolejnymi.

$P4.0$ $(V(p^{+}) \Rightarrow O^{t+}Zb) \leftrightarrow -(V(p^{+}) \Rightarrow -O^{t+}Zb)$;
$P4.1$ $(V(p^{++}) \Rightarrow O^{t++}Zb) \leftrightarrow -(V(p^{++}) \Rightarrow -O^{t++}Zb)$.

Proponuje ponadto rozważyć tę wersję postulatu *P*6, która dotyczy drugiej rozprawy:

$P6.1$ Poprawne $V(p^{++})$.

Zastosowanie nowych postulatów umożliwia Åqvistowi udowodnienie twierdzenia:

Tw. 5 Niech $L^{+} = \{P1a, P2.0, P3, P4.0, P5, P7\}$, $L^{++} = \{P1a, P2.1, P3, P5, P8, P9\}$. Wówczas,
(*i*) Ze zbioru L^{+} wynika formuła: Poprawne $V(p^{+}) \rightarrow G(b, p^{+})$;
(*ii*) Ze zbioru L^{++} wynika formuła: Poprawne $V(p^{++}) \rightarrow G(a, p^{++})$.

Dowód części (*i*):

1.	$\forall t\, (O^{t}Zb \leftrightarrow (G^{\leq t}(b,p)\ \&\ - Z^{\leq t}b))$	$P1a$, $D12$, $P5$;
2.	$O^{t+}Zb \leftrightarrow (G^{\leq t+}(b,p)\ \&\ - Z^{\leq t+}b)$	1;
3.	$- G^{\leq t+}(b,p)$	$P3$, $P7$;
4.	$- O^{t+}Zb$	2, 3;
5.	Poprawne $V(p^{+})$	założenie;
6.	$V(p^{+}) \Rightarrow O^{t+}Zb$	założenie;
7.	– Poprawne $V(p^{+})$	4, 6, $D13$;
8.	Poprawne $V(p^{+})$ & – Poprawne $V(p^{+})$	5, 7;
9.	$- (V(p^{+}) \Rightarrow O^{t+}Zb)$	6–8;
10.	$V(p^{+}) \Rightarrow - O^{t+}Zb$	9, $P4.0$;
11.	$G(b, p^{+})$	10, $P2.0$;
12.	Poprawne $V(p^{+}) \rightarrow G(b, p^{+})$	5–11.

Dowód części (*ii*):

1.	$\forall t\, (O^{t}Zb \leftrightarrow (G^{\leq t}(b,p)\ \&\ - Z^{\leq t}b))$	$P1a$, $D12$, $P5$;
2.	$O^{t++}Zb \leftrightarrow (G^{\leq t++}(b,p)\ \&\ - Z^{\leq t++}b)$	1;
3.	$G^{\leq t++}(b,p)$	$P3$, $P8$;
4.	$O^{t++}Zb$	2, 3, $P9$;
5.	Poprawne $V(p^{++})$	założenie;
6.	$V(p^{++}) \Rightarrow - O^{t++}Zb$	założenie;
7.	– Poprawne $V(p^{++})$	4, 6, $D13$;
8.	Poprawne $V(p^{++})$ & – Poprawne $V(p^{++})$	5, 7;
9.	$- (V(p^{++}) \Rightarrow - O^{t++}Zb)$	6–8;
10.	$V(p^{++}) \Rightarrow - O^{t++}Zb$	9, $P4.1$;
11.	$G(a, p^{++})$	10, $P2.1$;
12.	Poprawne $V(p^{++}) \rightarrow G(a, p^{++})$	5–11.

Oczywistą konkluzją twierdzenia 5 jest ostateczny dla rozwiązania Åqvista wniosek.

Wniosek. (*i*) Ze zbioru $L^{+} \cup \{P6\}$ wynika formuła: $G(b, p^{+})$;
(*ii*) Ze zbioru $L^{++} \cup \{P6.1\}$ wynika formuła: $G(a, p^{++})$;
(*iii*) Ze zbioru $L^{+} \cup L^{++} \cup \{P6, P6.1\}$ wynika formuła:
$G(b, p^{+})\ \&\ G(a, p^{++})$.

Na sam koniec, Åqvist dokonuje jeszcze jednej poprawki, o raczej kosmetycznej naturze, osłabiając postulat $P8$:

$P8^{w}$. $G(b, p^{+}) \rightarrow G^{\leq t++}(b,p^{+})$;

i budując zbiór L^w będący sumą $L^+ \cup L^{++} \cup \{P6, P6.1\}$, w której $P8$ jest zastąpiony przez $P8^w$. Okazuje się, że ze zbioru L^w wynika $G(a, p^{++})$.

Tak jak w przypadku propozycji Lenzena, także i tutaj nie grozi wyprowadzenie jakiejkolwiek sprzeczności z przyjętych przez Åqvista postulatów. Są one zbyt ubogie, bo nie nadają sensu pierwszemu wyrokowi sądowemu. Nic więc dziwnego, że zbiór przesłanek jest niesprzeczny. Uzupełniając luki w treści wyrażonej postulatami Åqvista poprzez dodanie zgodnych z całością postulatów, tak jak to miało miejsce w przypadku konstrukcji Lenzena bez trudu można pokazać, iż sprzeczność wcale nie została tu usunięta. Ona została jedynie przemilczana. Fakt ten łatwo jest zauważyć, wystarczy bowiem przyjąć te same co w przypadku propozycji Lenzena uzupełnienia. Z postulatu *P1a* oraz pierwszej części (*i*) wniosku mamy natychmiast, że Eusthlosa jest zobowiązany z chwilą ogłoszenia wyroku zapłacić Protagorasowi za naukę. Z drugiej zaś strony, skoro werdykt sądu jest dla Euathlosa korzystny, najwidoczniej nie jest on wyrokiem sądu zobowiązany do zapłaty za naukę. Tak oto sprzeczność pozostała nieusunięta.

Dzięki tej zaawansowanej formalnie analizie dowiedzieliśmy się, że... Protagoras wygrywa drugą rozprawę sądową. Jest to więc formalizacja krótkiej, można rzec lakonicznie wyrażonej opinii wygłoszonej przez Smullyana, wyjaśniającej to, co powinno się zdarzyć po wytoczeniu Euathlosowi przez Protagorasa pierwszej sprawy sądowej. Problem tylko w tym, że w anegdocie nie ma mowy ani o drugiej rozprawie sądowej, ani o tym, że Euathlos nie zapłaciłby za naukę, nawet wówczas, gdyby wygrał swoją pierwszą rozprawę. Można więc przyjąć, że Lenzen, Smullyan i Åqvist stworzyli sobie problem, pozalogicznej, prawniczej natury, który potem rozwiązali, pod drodze stosując przemilczenie. Jasne jest, że problem ten nie jest jednak paradoksem Protagorasa.

Jasno widać, że wszystkie uwagi sformułowane pod adresem rozwiązania Lenzena dotyczą w równym, a może i w większym stopniu propozycji Åqvista. Pojawia się jednak jeszcze jedna dodatkowa kwestia, którą artykułuje sam Åqvist, a która dotyczy postulatów P2*a* i *P2b*. Chcąc racjonalnie analizować paradoks Protagorasa, trzymając się idei reprezentowanej przez Lenzena, Åqvista i Smullyana, należałoby raczej przyjąć, że Protagoras jako wytrawny myśliciel, mimo iż późno, to jednak dostrzegł wadliwość umowy. Nie chcąc się więc narażać na śmieszność, wytoczył Euathlosowi sprawę o coś, co nie jest w jakikolwiek sposób związane z ich fatalną umową[14]. Cała sytuacja jest dla nauczyciela o tyle prosta, że Protagoras musi wytoczyć sprawę, którą na pewno przegra, po to tylko, aby spełniony został warunek umowy nakazujący

[14] W anegdocie relacjonującej paradoks nie jest przecież powiedziane pod jakim zarzutem Protagoras wytacza sprawę swojemu uczniowi.

Euathlosowi zapłacić pieniądze za naukę. Tak więc, dla przykładu Protagoras może oskarżyć Euathlosa o to, że ten nie dość nisko ukłonił mu się na ulicy.

Na gruncie polskim propozycja Lenzena, Åqvista i Smullyana ma swój odpowiednik w podejściu Eugeniusza Grodzińskiego, który swoją analizę problemu rozpoczyna od uwagi, że umowa jaką zawarli obaj filozofowie mogłaby zostać zawarta również i dzisiaj[15]: „umowa jaka została zawarta między Protagorasem a Euathlosem, mogłaby być w analogicznej sytuacji zawarta również między innymi osobami. Co prawda w swoich wystąpieniach przed sądem każdy z oponentów popełnił taki sam błąd logiczny, polegający na tym, że każdy z nich przeciwstawił ewentualny korzystny dla siebie wyrok sądu swoim uprawnieniom i obowiązkom wynikającym z zawartej między nimi umowy. Żaden z nich nie uwzględnił tego, że jedyną podstawą orzeczenia sądu mogła być właśnie ta umowa. Jednakże błędy logiczne popełniane przez strony w ich wystąpieniach przed sądem nie są niczym nadzwyczajnym w procesach sądowych". Najwyraźniej, Grodziński nie podziela opinii Ajdukiewicza, Lenzena, Smullyana i Åqvista uznającej, iż umowa ta implikuje sprzeczność, a więc i własną niewykonalność. W proponowanym przez siebie rozwiązaniu, Grodziński przyjmuje założenie, że sprawa sądowa Protagorasa przeciwko Euathlosowi dotyczy umowy i jej przykrych dla Protagorasa konsekwencji. Ponadto zauważa, że sytuacja sądu jest dość wygodna i nie wiąże się z jakąkolwiek trudnością w orzeczeniu wyroku. Powództwo Protagorasa musi zostać oddalone, ponieważ w istocie, Euathlos nie wygrał żadnej sprawy sądowej, nie musiał więc zapłacić Protagorasowi za naukę. Widać tu wyraźnie wadliwość umowy jaką zawarli nauczyciel i jego uczeń. Wadliwość ta nie ma jednak logicznego charakteru lecz wyłącznie, można by rzec, praktyczny. Nie nakładała ona bowiem na Euathlosa najmniejszego obowiązku podjęcia się w odpowiednim, ściśle ograniczonym, przedziale czasu sprawy sądowej. Orzeka jedynie o tym, co się stanie jeśli Euathlos wygra, a co jeśli przegra swą pierwszą sprawę sądową, nie gwarantując tym samym, że w ogóle dojdzie do jakiegokolwiek procesu z udziałem Euathlosa.

Istotnie, Grodziński trafnie wskazuje na fatalną formę umowy. Ma ona bowiem kształt koniunkcji dwóch okresów warunkowych:

$$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q),$$

czyli

$$p \leftrightarrow q,$$

gdzie „p" i „q" symbolizują odpowiednio zdania „Euathlos wygra swój pierwszy proces" oraz „Euathlos zapłaci Protagorasowi za naukę". Tym samym, umowa mówi, co się stanie, gdy stanie się coś innego, nie gwarantując że w ogóle

[15] Grodziński, [1983], s. 51–52.

cokolwiek się stanie. Prawidłowo sformułowana umowa winna więc gwarantować podjęcie się przez Euathlosa sprawy sądowej po ukończeniu pobierania nauki u Protagorasa. Jej postać powinna więc być następująca:

$$s \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q),$$

czyli

$$s \wedge (p \leftrightarrow q),$$

gdzie s może wyrażać następujące zdanie: „w n dni po ukończeniu nauki u Protagorasa, Euathlos podejmie się sprawy sądowej". Winą za niefortunne sformułowanie umowy Grodziński obarcza nauczyciela. W końcu, to Euathlos przyszedł po naukę do Protagorasa, a nie Protagoras do Euathlosa[16].

W proponowanym przez siebie rozwiązaniu, Grodziński przyjmuje założenie, że sprawa sądowa Protagorasa przeciwko Euathlosowi dotyczy umowy i jej przykrych dla Protagorasa konsekwencji. Dalej Grodziński zauważa, że sytuacja sądu jest dość wygodna i nie wiąże się z jakąkolwiek trudnością w orzeczeniu wyroku. Powództwo Protagorasa musi zostać oddalone, ponieważ w istocie, Euathlos nie wygrał żadnej sprawy sądowej, nie musiał więc zapłacić Protagorasowi za naukę. Jednak po zakończeniu pierwszej sprawy sądowej Protagoras może natychmiast wytoczyć drugą sprawę Euathlosowi. Teraz bowiem warunki umowy są spełnione i trudno sobie wyobrazić, aby uczciwi sędziowie w wyniku drugiej rozprawy nie nakazali, aby Euathlos zapłacił Protagorasowi za naukę. Można się tylko zastanawiać, co stało się ze sprzecznością. Czy istotnie mówienie o sprzeczności można zastąpić stwierdzeniem, że błędy logiczne w procesach sądowych nie są niczym nadzwyczajnym? Przecież sprzeczność faktycznie jest inferowalna w opisanej anegdotą sytuacji.

Stanowisko podobne do tego, reprezentowanego przez Grodzińskiego zajmuje Szymanek, który twierdzi, że paradoks Protagorasa nie ma charakteru logicznego lecz jest jedynie problemem prawnym[17]: „Powstający tutaj dylemat jest raczej prawnej, niż logicznej natury: sąd może bowiem, wydając taki czy inny wyrok, po prostu unieważnić wcześniejszą umowę między nauczycielem a uczniem". Takie podejście wydaje się jednak nieuzasadnione. Przecież, również grając w szachy i mając w związku z tym poważny problem do rozwiązania, zawsze można przewrócić stolik. Naturalnie, może się zdarzyć, że

[16] Szymanek w [2001], s. 33, przytacza ciekawą anegdotę wiążącą ten paradoks z innymi imionami. Miejsce Protagorasa zajmuje Koraks (*koraks* to po grecku kruk) nauczyciel sztuki wymowy, Euathlosa zaś uczeń o imieniu Tejzjasz. W tej historii dochodzi do procesu między Koraksem i Tejzjaszem. Orzeczenie sądu jest korzystne dla Tejzjasza. Sędziowie obciążyli bowiem nauczyciela winą za nieudolnie sformułowaną umowę, stwierdzając: „Złego kruka złe jajo".

[17] Szymanek, [2001], s. 33.

stolik wraz z planszą do gry w szachy i z wszystkimi stojącymi na niej figurami i pionami zostanie przewrócony przez czysty przypadek. Co więcej, będzie to niewątpliwie jakieś zakończenie rozgrywki szachowej i rozwiązanie problemu. Nie można jednak z góry planować takiego rozwiązania rozmyślając nad następnym posunięciem. Podobnie, unieważnienie umowy może być skutkiem „ubocznym" jakiegoś przyjętego przez nas rozwiązania. Nie można go jednak z góry przyjmować jako logiczne rozwiązanie paradoksu Euathlosa. Podejście takie byłoby bowiem podobne do stwierdzenia, że właściwym rozwiązaniem paradoksu krokodyla jest to aby, bez względu na wnioski wyprowadzone w toku analizy tego paradoksu, krokodyl po prostu pożarł dziecko. Wówczas niewątpliwie paradoks znika. Trudno jednak, z metodologicznego punktu widzenia uznać argumentację tego typu za właściwe rozwiązanie jakiegokolwiek paradoksu.

Jak widać, prawie wszystkie przedstawione do tej pory rozwiązania uznają, iż zawarta umowa prowadzi do sprzeczności. Z punktu widzenia logicznego problemu paradoksu Protagorasa nie różnią się więc niczym od prosto sformułowanej uwagi Ajdukiewicza. Wszelkie dalsze analizy w postaci żmudnych formalizacji Lenzena i Åqvista są z logicznego punktu widzenia, nieistotnymi dodatkami. Rozwiązania te podpowiadają jedynie Protagorasowi co ma uczynić, aby dostać od Euathlosa pieniądze. Zapoznając się z nimi, aż trudno uwierzyć w to, że żadne rozwiązanie podchodzące do paradoksu od tej właśnie strony nie przewiduje tego, iż Protagoras zwróci się po prostu z prośbą do kogoś, kto zajmowałby się odzyskiwaniem długów. Nie można typowo logicznego zagadnienia zastępować pseudologicznym problemem. Przecież paradoks Protagorasa polega na czymś zgoła innym. Sednem problemu nie jest to, jak Protagoras ma odzyskać pieniądze od Euathlosa, lecz to, że powstała sytuacja nosi znamiona sprzeczności, chociaż jest to, rzecz jasna, sprzeczność o językowym charakterze: bez względu na wynik procesu uczeń musi zapłacić pieniądze nauczycielowi i jednocześnie nie może ich zapłacić. Wchodząc w szczegóły natury prawnej, omija się więc właściwy dylemat, zastępując go pozornym problemem. Naturalnie, można uznać tak jak czyni to Ajdukiewicz, iż całe zło sprzeczności tkwi w fatalnym sformułowaniu umowy i uznać ten fakt za ostateczne rozwiązanie paradoksu.

Czy jednak nie jest możliwe przyjąć, iż być może cała sytuacja jest niesprzeczna, a sprzeczność jest skutkiem niewłaściwego opisu tej sytuacji?

Na tle przytoczonych rozwiązań, szczególnie interesująca wydaje się być propozycja przedstawiona przez prakseologa Tadeusza Pszczołowskiego (1922–1999) w książce *Umiejętność przekonywania i dyskusji*, opublikowanej w 1962 roku[18]: „Dziś rozróżnilibyśmy zobowiązanie pieniężne na podstawie

---

[18] Pszczołowski, [1962], s. 35.

dobrowolnej umowy od wyroku sądowego i rozumowalibyśmy w sposób następujący: Przypuśćmy, że proces wygrywa Euathlos. Sąd zwalnia go od zapłaty mistrzowi, ale w mocy pozostaje umowa. Uczeń, o ile jest człowiekiem honoru, na jej podstawie powinien zapłacić swemu nauczycielowi za jego owocny trud. Gdyby wygrał Protagoras, musiałby płacić na podstawie wyroku sądowego. Ale Protagoras, chcąc respektować swoje słowo, powinien po otrzymaniu pieniędzy oddać je, bo uczeń przegrał swój pierwszy proces".

Spośród wszystkich analizowanych dotychczas rozwiązań, to zaproponowane przez Pszczołowskiego jako jedyne wprowadza rozróżnienie między zobowiązaniem pieniężnym wynikającym z zawartej umowy a zobowiązaniem pieniężnym wynikającym z orzeczonego wyroku sądowego. Niestety, mimo poczynionego rozróżnienia, Pszczołowski rozwiązuje paradoks postrzegając go jako kwestię etycznej natury. Podstawą rozwiązania jest tu bowiem honorowa, nacechowana szacunkiem dla siebie i drugiego człowieka postawa, w jednym przypadku Euathlosa, w drugim zaś Protagorasa, w zależności od tego jaki wyrok zapadnie w rozprawie sądowej.

Spróbujmy zatem, uwzględniając rozróżnienie poczynione przez Pszczołowskiego, rozwiązać paradoks traktując go jednak, podobnie do Ajdukiewicza, jako problem logiczny, nie zaś prawniczy, finansowy czy też kwestię honorową, usuwając sprzeczność poprzez poprawienie, a właściwie uściślenie opisu całego zdarzenia.

Propozycja rozwiązania paradoksu[19].

Sławny paradoks Protagorasa może mieć swój zupełnie banalny odpowiednik. Przypuśćmy, że dwóm dowolnie wybranym ale różnym obiektom nadamy tę samą nazwę. Uzyskanie wówczas sprzeczności jest sprawą niezwykle prostą. Wystarczy wykorzystać jedną jedyną cechę różniącą oba obiekty, aby dwa zdania orzekające o tej cesze a mówiące odpowiednio o obu obiektach nie mogły być jednocześnie prawdziwe. Załóżmy, że dwie nazwy „podręcznik do biologii" oraz „podręcznik do fizyki" zastępujemy jedną wspólną nazwą „podręcznik do biofizyki"[20]. Przeglądając podręcznik do biologii, stwierdzimy wówczas zgodnie z prawdą, że: *korzystając z podręcznika do biofizyki możemy dowiedzieć się o fotosyntezie*. Jednocześnie, przeglądając dokładnie podręcznik do fizyki, z pełnym przekonaniem stwierdzamy, że również prawdziwe jest zdanie: *nieprawda, że korzystając z podręcznika do biofizyki możemy dowiedzieć się o fotosyntezie*. Sprzeczność do jakiej doszliśmy jest więc wynikiem

[19] Łukowski, [2003a].

[20] Oczywiście, zakres badawczy biofizyki jest tu nieistotny. Chodzi wyłącznie o wykorzystanie jakiegokolwiek wyrazu jednocześnie zastępującego słowa „fizyka" i „biologia". Równie dobrze można byłoby użyć neologizmu „biologiofizyka".

zastosowania zbyt ubogiego języka. Dwa różne terminy „biologia" oraz „fizyka" zostały tu bowiem zastąpione jednym: „biofizyka". Czy u podstaw rozważanego przez nas paradoksu nie leży podobna przyczyna? Zamiast używać w każdym kontekście jednego i tego samego zwrotu „zapłacić pieniądze" (ew. „zapłacić za naukę") wystarczy, aby w odpowiednich okolicznościach stosować zwrot „zapłacić wynikające z umowy honorarium" w innych zaś „zapłacić nałożoną przez sąd grzywnę". Okazuje się bowiem, że tak prosty zabieg usuwa niepożądaną sprzeczność. Przyjmijmy, że Euathlos wygrywa proces. Zgodnie z umową, musi więc zapłacić honorarium. Jednocześnie jednak, decyzją sądu, nie zapłaci grzywny. W przypadku, gdy zwycięzcą procesu będzie Protagoras, sytuacja będzie odwrotna – Euathlos nie zapłaci honorarium, lecz będzie musiał zapłacić grzywnę.

Można więc przyjąć, że w sporze Protagorasa z Euathlosem, zwycięstwo w obu przypadkach należy do mistrza. To on bowiem, bez względu na wynik procesu zawsze dostanie pieniądze od swojego ucznia, nie jest jedynie przesądzone, czy będzie to honorarium, czy grzywna. Oznacza to, że Euathlos w obu przypadkach musi zapłacić pieniądze, sprzeczności zaś nie ma żadnej. Gwoli ścisłości należy zauważyć, że może się tak stać, że przegrywając proces Protagoras będzie musiał zapłacić jakąś grzywnę, lecz nie ma to oczywiście żadnego znaczenia z punktu widzenia analizowanego paradoksu. Zauważmy również, że w nowej, klarownej już sytuacji Euathlos ma możliwość snucia całkiem przyziemnych choć zupełnie naturalnych spekulacji, a mianowicie, co się mu bardziej opłaca, zapłacić honorarium, czy grzywnę. Te dwie płatności mogą się przecież różnić, przegranie zaś swojej pierwszej sprawy sądowej może niekorzystnie wpłynąć na reputację młodego prawnika jakim wówczas był Euathlos.

Obecnie, gdy operując precyzyjnym językiem jesteśmy w stanie uniknąć leżącej u podstaw paradoksu Protagorasa wieloznaczności, możemy wrócić do rozważań natury prawnej. Teraz dopiero jest sens pytać o przedmiot sprawy sądowej, o to, co sąd może, a co powinien uczynić, jaki powinien być następny krok Protagorasa itd. Bazując na przedstawionej wyżej propozycji rozwiązania możemy stwierdzić, że istotnie, Protagoras powinien najpierw wytoczyć swojemu uczniowi sprawę o cokolwiek, co nie jest związane z ich umową, a co zagwarantuje Protagorasowi przegraną. Wówczas, Euathlos wygrywając proces na pewno nie zapłaci grzywny, będzie jednak musiał zapłacić honorarium. Nie jest przy tym wcale przesądzone, że Protagoras będzie musiał wytoczyć drugi proces Euathlosowi. Przecież, po pierwsze uczeń nie podejmował się jakiejkolwiek sprawy sądowej, bo umowa nie zobowiązywała go do tego, po drugie zaś, Euathlos uważał, że nie może zapłacić pieniędzy swojemu nauczycielowi, ponieważ byłoby to nielogiczne. Teraz jednak, gdy wszystko jest jasne i proste trudno zakładać, że Euathlos dalej będzie unikał zapłacenia za naukę. Przecież nikt nie zakłada, że krokodyl w paradoksie omawianym w poprzednim rozdziale pożre dziecko nawet wówczas, gdy jedynym logicznym wnioskiem będzie to, że powinien je oddać.

Zastanówmy się jednak, co by się stało gdyby Protagoras zaryzykował i wytoczył sprawę związaną z ich sporem. Wówczas przedmiotem rozprawy musiałaby być postawa Euathlosa. Sprawa między nauczycielem a uczniem, jeśli miałaby rozstrzygnąć spór do jakiego między nimi doszło, winna jednak dotyczyć nie tyle zapłaty za naukę, a właściwie jej niezaistnienia, co niepodjęcia się przez ucznia swojej pierwszej sprawy sądowej. Nie ma to jednak większego znaczenia w jaki konkretnie sposób pozew został sformułowany. Co więcej, wynik rozprawy wcale nie jest sprawą przesądzoną. Protagoras powinien co prawda przewidzieć ewentualne konsekwencje zawarcia takiej, a nie innej umowy. W końcu to on był mistrzem, a nie uczniem, który w chwili zawierania umowy nie rozpoczął jeszcze nauki. Protagoras wyraźnie zapomniał o tym, aby umowa zmuszała Euathlosa do podjęcia się w określonym czasie jakiejkolwiek sprawy sądowej. Nauczyciel zawarł przecież umowę, zgodnie z którą zapłata za naukę nastąpi jeśli zajdzie sytuacja, w której uczeń wygra swoją pierwszą sprawę. Tymczasem, z umowy wcale nie wynika, aby sytuacja taka musiała zajść. To czy Euathlos wygra swą pierwszą sprawę czy przegra zależy bowiem od tego, czy się jej w ogóle podejmie. Oznacza to, że w rzeczywistości fakt zapłacenia za naukę zależy od więcej niż jednego czynnika, podczas gdy umowa uwzględnia tylko jeden. Z drugiej strony, jasne jest, że każdy powinien dostać zapłatę za swoją pracę, a więc i Protagoras. Niech zatem, tak jak chce Åqvist[21], rozstrzygnięcie tego, czy Euathlos miał prawo ociągać się z rozpoczęciem praktyki sądowej pozostanie problemem sądu. My rozważmy wszystkie możliwe przypadki, czyli w tych okolicznościach zaledwie dwie hipotetyczne sytuacje: przegraną Euathlosa oraz jego wygraną. Jeśli sąd uzna rację Protagorasa, czyli orzeknie, iż nie wolno było uczniowi unikać podjęcia sprawy sądowej, to z jednej strony Euathlos będzie musiał zapłacić grzywnę, z drugiej zaś jako ten, który przegrał swoją pierwszą sprawę sądową nie będzie już nigdy musiał zapłacić za naukę. Załóżmy teraz, że zgodnie z opinią Lenzena i Smullyana, sąd uzna racje Euathlosa, czyli orzeknie, iż uczeń nie musiał podejmować żadnej sprawy sądowej. Tym samym zwycięzcą zostanie uczeń i jako taki musi zapłacić honorarium za naukę, chociaż grzywny nie zapłaci. Jak widać otrzymanie przez nauczyciela pieniędzy nie zależy od wyniku tego procesu. Ostateczny wynik rozprawy ma jedynie wpływ na to, czy uczeń zapłaci grzywnę czy honorarium. Oczywiście, jeśli w przypadku swojej wygranej Euathlos nie zapłaci honorarium, czeka go kolejna rozprawa sądowa, którą najprawdopodobniej przegra. Przedmiotem drugiej rozprawy będzie tym razem niedotrzymanie przez Euathlosa umowy, czyli niezapłacenie za naukę, mimo spełnienia warunków umowy.

---

[21] Åqvist, [1981], s. 220.

Zaproponowane przez nas precyzyjne podejście do paradoksu Protagorasa może stać się jednak podstawą do określenia takiej sytuacji, z której wyjście wydaje się być wyjątkowo trudne. Przedstawmy więc nową wersję paradoksu pomijając wstęp opisujący umowę jaką zawarł Protagoras z Euathlosem i przechodząc od razu do samego procesu:

... Protagoras wytoczył sprawę Euathlosowi oskarżając go o unikanie zapłacenia za naukę. Sąd stwierdził, że uczeń nie podejmując się jakiejkolwiek sprawy sądowej świadomie i z premedytacją dążył do sytuacji, w której nie zapłaci nauczycielowi za naukę. Tym samym uczeń nadużył zaufania swojego nauczyciela. Świadczy to, zdaniem sądu, o winie oskarżonego i aby go ukarać za tak wyrachowane działanie na szkodę nauczyciela, sąd nakazuje aby uczeń zapłacił Protagorasowi honorarium. Oczywiście, takie orzeczenie sądu jest równoznaczne z przegraną Euathlosa, a ponieważ przegrana ta dotyczy pierwszej sprawy Euathlosa, zgodnie z umową uczeń jest zwolniony z zapłacenia honorarium.

Czy mamy tu do czynienia ze sprzecznością i czy ta sprzeczność jest usuwalna? Ze sprzecznością mielibyśmy do czynienia wówczas, gdyby orzeczenie sądu niekorzystne dla Euathlosa zmuszało go do zapłacenia honorarium. Na pozór, w przypadku nowej wersji paradoksu, mamy do czynienia z taką właśnie sytuacją. A jednak sytuacja jest zgoła inna. Zdarzyło się bowiem, że w niezaplanowany z góry sposób stolik z szachami został przewrócony. Przecież sąd wydając taki a nie inny wyrok faktycznie unieważnił poprzednią umowę, nakazując uczniowi zapłacenie za naukę, a nie dotrzymanie umowy. Trudno zakładać, że sędziowie rozpatrujący całą sprawę i doskonale znający umowę wydaliby nieegzekwowalny wyrok. Ich wyrok jako akt ostateczny, także czasowo ostatni, jest decyzją której obie strony procesu muszą się podporządkować. Może się jednak wydawać, że sędziowie są w stanie doprowadzić do sprzecznej sytuacji, niefrasobliwie wydając następujące orzeczenie:

Skazujemy Euathlosa na wypełnienie umowy jaką zawarł z Protagorasem.

Z brzmienia sentencji jasno wynika, że Euathlos jest przegranym. Ponadto jest to jego pierwszy proces. Zatem zgodnie z umową nie musi zapłacić nauczycielowi za naukę. Sprzeczności jak widać nie ma żadnej i jest to bodaj jedyny przypadek, w którym nauczyciel nie dostałby pieniędzy od swojego ucznia. Rozważmy jednak inne z możliwych orzeczeń:

Skazujemy Euathlosa na wypełnienie umowy jaką zawarł z Protagorasem, czyli na zapłacenie za naukę.

Wyraźnie widać, że tym razem sędziowie stworzyli sytuację sprzeczną, której sprzeczność jest rzecz jasna językowej natury. Przegrywający swoją pierwszą rozprawę uczeń musi jednocześnie dotrzymać warunków umowy i zapłacić za naukę. Musi więc jednocześnie zapłacić za naukę i nie zapłacić za nią. Jasne jest jednak, że nigdy nie uda mu się zarazem zapłacić i nie zapłacić za naukę. Fakt ten oznacza, że szczęśliwie do żadnej sprzeczności w rzeczywistości nie dojdzie. Możemy przecież nakazać komuś, aby kupił bochenek chleba i nie kupił go jednocześnie, tyle tylko, że z naszego nakazu nic nie będzie wynikało, poza tym, że jest on niewykonalny.

2.2. PARADOKS ELEKTRY (ZASŁONIĘTEGO)

Dość powszechnie uważa się, iż autorem paradoksu Elektry jak również paradoksów rogacza, kłamcy i łysego jest Eubulides z Miletu, uczeń szkoły megaryjskiej, zacięty przeciwnik Arystotelesa, żyjący w IV wieku p.n.e.[22] Diogenes Laertios dodaje jednak, że, zdaniem niektórych filozofów, twórcą paradoksów zasłoniętego i rogacza jest Diodor z Jazos, uczeń Apolloniosa Kronosa, który z kolei był uczniem samego Eubulidesa. Treść anegdoty o Elektrze i jej bracie przytaczamy za Kotarbińskim[23].

Paradoks Elektry

Pytamy, czy Elektra wie, że Orestes jest jej bratem. Pierwsza odpowiedź potwierdza to pytanie, zgodnie z notorycznym stanem rzeczy. Ale Orestes stoi przed Elektrą zasłonięty. Elektra nie wie, że ów zasłonięty człowiek jest jej bratem, a przecież to jest Orestes, więc otrzymuje się drugą odpowiedź: że Elektra nie wie, że Orestes jest jej bratem. A więc – wie to, czego nie wie.

Rozumowanie w anegdocie o Elektrze i Orestesie wychodzi od trudnego do zakwestionowania faktu, iż dwa zdania „Elektra wie, że Orestes jest jej bratem" oraz „Elektra nie wie, że ten człowiek zasłonięty jest jej bratem" są prawdziwe. Ponieważ, Orestes i zasłonięty człowiek to jedna i ta sama osoba, mamy więc prawdziwość dwóch zdań sprzecznych:

Elektra wie, że Orestes jest jej bratem oraz *Elektra nie wie, że Orestes jest jej bratem.*

Proponowane przez Kotarbińskiego rozwiązanie opiera się na zastosowaniu funkcji intensjonalnej: *A* wie, że *x* jest *N*. W przeciwieństwie do funkcji ekstensjonalnych, takich jak negacja, koniunkcja, alternatywa, funkcje inten-

[22] Diogenes, *Żywoty...*, księga II, 108–112, s. 137–139.
[23] Kotarbiński, [1957], s. 187.

sjonalne mają tę własność, że zdanie powstałe z tej funkcji w wyniku podstawienia za zmienną stałej należącej do pewnego określonego zakresu może mieć inną wartość logiczną aniżeli zdanie powstałe z tej samej funkcji w wyniku podstawienia za tę samą zmienną innej stałej z tego samego zakresu. Tym samym dwie nazwy „Orestes" oraz „ten człowiek zasłonięty" mimo iż posiadają ten sam zakres nie są zastępowalne we wszystkich możliwych przypadkach: prawdą jest zdanie „Elektra wie, że Orestes jest jej bratem", chociaż fałszywe jest zdanie „Elektra wie, że ten człowiek zasłonięty jest jej bratem". Swoim rozwiązaniem Kotarbiński utożsamił paradoks Elektry z innym paradoksem, zwanym paradoksem gwiazdy porannej.

Paradoks Gwiazdy Porannej

Patrząc na niebo o świcie Plautus[24] widzi jasno świecącą gwiazdę. Nazywa ją Gwiazdą Poranną. Wieczorem także widzi równie jasno świecącą gwiazdę. Nazywa ją Gwiazdą Wieczorną. Nie wie, że w obu przypadkach patrzy na planetę Wenus. Nie wie więc, że Gwiazda Poranna jest Gwiazdą Wieczorną. Zatem Plautus nie wie, że planeta Wenus jest planetą Wenus[25].

Nie jest niczym trudnym podać wiele innych wersji tego paradoksu. Ajdukiewicz daje przykład, wymyślonej przez Platona, nazwy „dwunoga nieopierzonego" jako równoważnej, choć nie równoznacznej nazwie „człowiek"[26]. Wszystkie te paradoksy rozwiązuje się według zaproponowanego przez Kotarbińskiego wyżej przedstawionego schematu.

Niestety, rozwiązanie Kotarbińskiego toleruje jeden niezwykle ważny błąd jaki tkwi w każdym rozumowaniu analogicznym do tego z paradoksu Elektry. Jest to błąd wieloznaczności. W anegdocie opowiadającej o problemie Elektry podstawowe dla całego rozumowania są dwa już wcześniej przytoczone zdania: „Elektra wie, że Orestes jest jej bratem" oraz „Elektra nie wie, że ten człowiek

---

[24] Titus Maccius Plautus (ok. 250–184 p.n.e.) komediopisarz rzymski. Nazwy „Gwiazda Wieczorna" użył w komedii *Amfitrion*, w kwestii wypowiedzianej przez Sosię (Plautus, [1961], 275, s. 28–29). Diogenes Laertios twierdzi, że odkrycie, iż Gwiazda Poranna i Gwiazda Wieczorna są jednym i tym samym ciałem niebieskim, niektórzy starożytni przypisywali Pitagorasowi, inni zaś Parmenidesowi, Diogenes Laertios, *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, VIII.1, 14, s. 477.

[25] Jasne jest, że paradoks gwiazdy porannej stanowi istotny wyjątek wśród paradoksów omawianych w tym paragrafie. Nie należy on bowiem do grupy paradoksów wywołanych błędem wieloznaczności, lecz do grupy paradoksów spowodowanych nieostrożnym stosowaniem funkcji intensjonalnych.

[26] Definicję tę ośmieszył Diogenes z Synopy (ok. 412–323 p.n.e.). Diogenes Laertios opisuje takie oto zdarzenie: „Gdy Platon podał definicję 'Człowiek jest to istota żywa, dwunożna, nieopierzona' i tą definicją chełpił się i zdobył poklask, Diogenes [z Synopy – przypis autora] oskubał koguta i zaniósł do szkoły na wykład Platona, mówiąc: 'Oto jest człowiek Platona'. Odtąd do tej definicji dodawano słowa: 'o szerokich pazurach'.", Diogenes Laertios, *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, VI, 40; s. 331.

zasłonięty jest jej bratem". Kluczowym dla rozumowania słowem, które występuje w obu zdaniach jest „wie". Nie jest niczym odkrywczym stwierdzić, że słowo to ma wiele znaczeń. W naszym przypadku słowo to ma przynajmniej dwa różne znaczenia, w każdym zdaniu inne. Dzięki temu słowu wziętemu w pierwszym znaczeniu, zdanie „Elektra wie, że Orestes jest jej bratem" oznacza tyle, co „Elektra zna swojego brata o imieniu Orestes". Można się co prawda upierać przy innych znaczeniach słowa „wie", przy których pierwsze zdanie jest równoznaczne zdaniu „Elektra posiada informację, że człowiek o imieniu Orestes jest jej bratem". Dla nas wystarczające jest przyjąć pierwsze rozumienie. Drugie zdanie „Elektra nie wie, że ten człowiek zasłonięty jest jej bratem" z analizowanej anegdoty jest równoznaczne zdaniu „Elektra nie może w tym człowieku zasłoniętym rozpoznać swojego brata Orestesa". Fakt ten jest związany z kolejnym znaczeniem słowa „wie". Zatem, rozumowanie przedstawiające paradoks Elektry opiera się w rzeczywistości na prawdziwości dwóch przesłanek:

Elektra zna swojego brata o imieniu Orestes

oraz

Elektra nie może w tym człowieku zasłoniętym rozpoznać
swojego brata Orestesa.

Prawdziwość pierwszej przesłanki jest oczywista tak jak i prawdziwość przesłanki drugiej. Przecież, każdy z nas nieraz ma poważne kłopoty z rozpoznaniem kogoś nawet bardzo bliskiego z powodu chociażby niedostatecznego oświetlenia, czy zbyt dużej odległości. Oczywiście, z tych dwóch zdań nie wyprowadzimy zdania:

Elektra wie to, czego nie wie.

Możemy natomiast wywnioskować zdanie:

Elektra nie może w danej chwili rozpoznać tego, co skądinąd doskonale zna,

które jednak nie wyraża niczego niezwykłego, a tym bardziej paradoksalnego.

Przedstawione wyżej rozumowanie jest poprawioną wersją przedstawionego wcześniej rozumowania z anegdoty o Elektrze. To co różni obie wersje jest fakt, iż w drugim przypadku zostało rozpoznane różne znaczenie słowa „wie" w dwóch przesłankach, podczas gdy w pierwszym przypadku słowo to zostało wzięte w jednym i tym samym znaczeniu.

Może się wydawać, iż pełne rozwiązanie paradoksu Elektry wymaga uwzględnienia obu dyskutowanych w tym paragrafie czynników. Pogląd taki reprezentują również W. Kneale i M. Kneale[27]: „Paradoksy typu Elektry stawiają pytania o różne użycie słowa »wie« i o słuszność założenia, że jeśli *X* jest identyczne z *Y*, to cokolwiek powiedziałoby się prawdziwie o *X* można również powiedzieć prawdziwe o *Y*". Warto jednak zauważyć, że już samo rozróżnienie dwóch znaczeń słowa „wie" prowadzi do rozwiązania problemu. Nie jest wówczas istotne, czy w każdej z dwóch przesłanek rozumowania funkcjonują dwie nazwy „Orestes" oraz „ten człowiek zasłonięty", czy może jedna i ta sama „Orestes".

2.3. PARADOKS ROGACZA, czyli wieloznaczność rozumowania

Jak już powiedzieliśmy, paradoks ten przypisywany dość powszechnie Eubulidesowi z Miletu może być autorstwa Diodora z Jazos[28]. Najczęściej paradoks ten ma formę krótkiego dialogu. Wyobraźmy sobie rozmowę dwóch osób *A* i *B*.

Paradoks rogacza[29]

A: Czy zgubiłeś rogi?
B: Nie! Skądże! Żadnych rogów nie zgubiłem!
A: Ponieważ jeśli ktoś czegoś nie zgubił, to wciąż to coś posiada, masz rogi.

Naturalnie, wieloznaczność nie zawsze musi dotyczyć znaczenia pojedynczego słowa, lub pewnej sekwencji słów. Również samo wnioskowanie może być wieloznaczne. W przypadku powyższego paradoksu, mamy do czynienia z dwuznacznością rozumowania. Kiedy powiemy, że prawdą jest to, że osoba *B* nie zgubiła rzeczy *C*? Oczywiście w dwóch przypadkach:

1. gdy *B* posiadał rzecz *C* i nadal ją posiada;

oraz

2. gdy *B* nie posiadał i nadal nie posiada rzeczy *C*.

Jasne jest, że w paradoksalnym dialogu rogacza każda z osób rozumuje uwzględniając inny przypadek. Osoba *A* ma na myśli przypadek pierwszy,

---

[27] W. & M. Kneale, [1962], s. 114, cytat w tłumaczeniu autora.

[28] Patrz poprzedni paragraf.

[29] Diogenes Laertios przypomina zdroworozsądkową reakcję, wspomnianego już wcześniej, dość niezwykłego, można by rzec ekscentrycznego filozofa Diogenesa z Synopy, który usłyszawszy zastosowaną wobec niego argumentację rogacza, dotknął rękami swojego czoła i stwierdził, że niczego nie zauważa. W podobnie spektakularny sposób miał Diogenes z Synopy zareagować na argumentację paradoksu Achillesa i żółwia – uczynił wówczas krok do przodu, Diogenes Laertios, *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, VI.2, 38, s. 330.

natomiast osoba *B* przypadek drugi. Problem polega na tym, że skrótowa forma wypowiedzi składających się na dialog jest na tyle wieloznaczna, że dopuszcza oba rozumienia. Naturalnie, osoba *A* doskonale wie, że przypadek pierwszy nie zaszedł, czyli że *B* nigdy żadnych rogów nie posiadał. Wykorzystuje jednak w sposób bezwzględny fakt dwuznaczności rozumowania, aby sobie z *B* zadrwić. Ta dwuznaczność rozumowania polega na tym, że przesłanka entymematyczna jest w każdej wersji rozumowania inna.

Mówiąc precyzyjnie, rozumowanie dowodzące, że *B* ma rogi powinno zawierać rozgałęzienie:

1. *B* do chwili *t* nie zgubił rogów (założenie dowodu)
2. *B* do chwili *t* miał rogi lub *B* do chwili *t* nie miał rogów (prawda logiczna)
3. Jeśli *B* miał rogi do chwili *t* i *B* do chwili *t* nie zgubił rogów, to *B* w chwili *t* ma rogi (założenie dowodu)

4.1. *B* do chwili *t* miał rogi (z 2)	4.2. *B* do chwili *t* nie miał rogów (z 2)
5.1. *B* miał rogi do chwili *t* i *B* do chwili *t* nie zgubił rogów (z 1 i 4.1)	
6.1. *B* w chwili *t* ma rogi (z 3 i 5.1)	

Jak widać dowód, iż *B* ma rogi może się powieść jedynie w jednym przypadku reprezentowanym przez gałąź 4.1–6.1. W przypadku drugim (4.2) nie można podobnego wniosku wyprowadzić. Dwa różne przypadki w dowodzie zostały zastąpione jednym, nieprecyzyjnym, bo nie uwzględniającym konieczności założenia iż *B* miał rogi do chwili *t*.

2.4. PARADOKS PIJAKA i inne błędy ekwiwokacji

Omawiając paradoksy wieloznaczności nie sposób pominąć całej serii prostych do rozszyfrowania problemów, wynikających z błędu rozumowania zwanego ekwiwokacją. Ponieważ, jak zauważyliśmy, paradoksy te są banalne do rozwiązania, słusznie bywają zaliczane do sofizmatów i paralogizmów. Dlatego też, nieco dłuższa ich lista jest podana na koniec rozdziału poświęconego sofizmatom i paralogizmom. Tutaj zajmijmy się zaledwie paroma wybranymi.

Autorstwo tego średniowiecznego paralogizmu jest przypisywane żakom. W wersji oryginalnej brzmi on następująco:

Paradoks pijaka

Qui bibit, dormit; qui dormit, non peccat; qui non peccat, sanctus est; ergo: qui bibit, sanctus est[30].

Czyli:

Kto pije, ten śpi; kto śpi, nie grzeszy; kto nie grzeszy, jest święty; zatem: kto pije, jest święty[31].

Schemat tego paradoksu jest prosty i wykorzystuje własność przechodniości implikacji. Jeśli przesłanki wnioskowania mają postać:

$$p \rightarrow q;\ q \rightarrow \neg s;\ \neg s \rightarrow r,$$

to wniosek z nich wynikający musi mieć schemat:

$$p \rightarrow r.$$

Niestety, gdy dokonamy podstawienia zgodnego z zacytowanym wyżej żakowskim żartem:

p – pije, q – śpi, s – grzeszy, r – jest święty,

to chociaż z każdą z przesłanek można się zgodzić, trudno jest zaakceptować wniosek.

Naturalnie, paradoks pijaka jest typowym przykładem ekwiwokacji. Wnioskowanie jest obarczone błędem ekwiwokacji (*fallacia aequivocationis*), gdy spełnione są jednocześnie trzy warunki:

1) pewien kluczowy dla wnioskowania termin występuje w co najmniej dwóch przesłankach;

2) wszystkie przesłanki są jednocześnie prawdziwe tylko wtedy, gdy termin ten w przesłankach, w których występuje ma co najmniej dwa różne znaczenia;

3) wnioskowanie jest poprawne tylko wtedy, gdy termin ten w każdej przesłance w której występuje ma to samo znaczenie.

Jednoczesne spełnienie trzech powyższych warunków sprawia, że wnioskowanie w oczywisty sposób jest fałszywe. Zauważmy, że wyrażenie „nie grzeszy" jest terminem, który w całym rozumowaniu powinien zostać zastąpiony dwoma różnymi terminami. Wyrażenie to występuje w drugiej i trzeciej przesłance. W każdej z tych przesłanek „nie grzeszy" występuje w innym znaczeniu. W zdaniu „kto śpi, nie grzeszy" termin ten służy wyrażeniu dość powszechnie uznawanej opinii, że człowiek śpiący nie ponosi moralnej

---

[30] Szymanek, [2001], s. 225.

[31] Szymanek, [2001], s. 225.

odpowiedzialności za swoje czyny jakich ewentualnie dopuści się w czasie snu. W zdaniu „kto nie grzeszy, jest święty" zwrot „nie grzeszy" odnosi się do niemal całego życia. Widać więc, że nie można uznać jednoczesnej prawdziwości obu przesłanek tak długo jak termin „nie grzeszy" oznacza to samo. Przy jednym i tym samym znaczeniu tego wyrażenia, któraś z przesłanek musi być fałszywa. Gdy termin ten odnosi się do czasu snu, druga przesłanka jest prawdziwa, a trzecia fałszywa. Jeśli termin ten odniesiemy do całego życia, druga przesłanka jest fałszywa, a trzecia prawdziwa. Niestety, poprawność wnioskowania wymaga, aby w obu przesłankach termin „nie grzeszy" był rozumiany dokładnie tak samo. Tylko wówczas, przesłanki te mają odpowiednio postać: $q \rightarrow \neg s$ oraz $\neg s \rightarrow r$, z których na mocy logiki klasycznej wynika, że $q \rightarrow r$. Jeśli jednak zrekonstruujemy oba zdania tak aby będąc prawdziwymi niedwuznacznie wyrażały właściwą myśl, to otrzymamy:

„podczas snu nie grzeszymy",
„święty jest ten, kto żyje bez grzechu".

Lecz wówczas, schematami obu zdań są odpowiednio: $q \rightarrow \neg s_1$ i $\neg s_2 \rightarrow r$. Nie jest więc możliwe z takich przesłanek wyprowadzić wniosek postaci: $q \rightarrow r$.

Problem ekwiwokacji polega więc na tym, że albo któraś z przesłanek jest fałszywa, albo wniosek nie wynika z przesłanek. Nie może natomiast zajść przypadek prawdziwości wszystkich przesłanek i poprawności opartego na nich wnioskowania.

W innym podanym przez Szymanka paradoksalnym wnioskowaniu wyrażeniem kluczowym występującym w dwóch różnych znaczeniach jest „pragnie tylko rzeczy dobrych". Ta starożytna ekwiwokacja ma następującą postać[32]:

Paradoks złodzieja

Skoro żaden złodziej nie chce brać niczego, co jest złe, to pragnie tylko rzeczy dobrych – a kto pragnie tylko rzeczy dobrych, jest dobry; zatem każdy złodziej jest dobry.

Można się chyba pokusić o stwierdzenie, że wieloznaczność dotyczy nie tyle całego zwrotu „pragnie tylko rzeczy dobrych" ile samego wyrażenia „rzecz dobra". W pierwszej przesłance słowa te wyraźnie odnoszą się do materialnej, można by nawet rzec, paserskiej wartości kradzionych przedmiotów, podczas gdy w przesłance drugiej mają znaczenie etyczne i dotyczą nie tyle rzeczy co czynów, a w najlepszym razie skutków podejmowanych przez człowieka działań. Tak więc zrekonstruowane przesłanki winny mieć postać zbliżoną do następujących:

---

[32] Szymanek, [2001], s. 224.

a. Żaden złodziej nie chce brać (kraść) niczego co jest bezwartościowe, zatem pragnie tylko rzeczy, które może sprzedać paserowi.

b. Każdy kto pragnie rzeczy moralnie dobrych jest dobry.

Naturalnie z tak sformułowanych przesłanek trudno jest wywnioskować cokolwiek oryginalnego. Przesłanki te mają bowiem ze sobą niewiele wspólnego chyba tylko tyle, że na ich podstawie powinniśmy być skłonni nazwać złodzieja człowiekiem który nie jest dobry. Innymi ekwiwokacjami przytoczonymi przez Szymanka są[33]:

To sukno jest z Anglii. Anglia to ziemia. Zatem to sukno jest z ziemi.
Mysz gryzie książkę. Mysz to sylaba. Zatem sylaba gryzie książkę.

W pierwszym przypadku terminem wziętym w dwóch różnych znaczeniach jest słowo „Anglia", w drugim zaś, „mysz".

Szczególnym przypadkiem ekwiwokacji jest *błąd czterech terminów* (*quaternio terminorum*). Dotyczy on wnioskowania sylogistycznego, w którym zamiast trzech terminów: średniego (M), mniejszego (S) i większego (P); są cztery: mniejszy (S), większy (P) oraz dwa zastępujące termin średni (M_1 i M_2). Przykładem sylogizmu obarczonego błędem czterech terminów jest rozumowanie[34]:

Każdy, kto pomaga przestępcom, sam jest przestępcą.
Każdy adwokat pomaga przestępcom.
Zatem, każdy adwokat jest przestępcą.

Na pozór wnioskowanie to reprezentuje schemat:

Każde M jest P
Każde S jest M
Zatem: *Każde S jest P*

Niestety, w miejscu terminu średniego M – „[ten kto] pomaga przestępcom" mamy dwa różne terminy: M_1 – „[ten kto] pomaga przestępcom w popełnieniu przestępstwa" oraz M_2 – „[ten kto] udziela pomocy prawnej". Tak więc faktyczny schemat wnioskowania jest następujący:

Każde M_1 *jest P*
Każde S jest M_2
Zatem: *Każde S jest P*

Oczywiście schemat ten jest niepoprawny. Zatem, wniosek nie wynika z przesłanek.

---

[33] Szymanek, [2001], s. 225.
[34] Szymanek, [2001], s. 269.

2.5. PARADOKS KLUBU BEZ NAZWY, czyli ekwiwokacja o metajęzykowym charakterze

W swej monografii zatytułowanej *Paradoksy semantyczne*, Grodziński przytacza anegdotę zatytułowaną „paradoks nocnego klubu". Przytoczymy teraz najważniejszy fragment tekstu opisującego ten problem[35].

Paradoks klubu bez nazwy
W pewnym mieście istnieje kilka ekskluzywnych klubów nocnych noszących dźwięcznie brzmiące nazwy *Eldorado*, *Alhambra*, *Helios*, *Posejdon* itp. Grupa biznesmenów otwiera w tym mieście nowy klub jeszcze bardziej wytworny [...]. Jednak właściciele przez dłuższy czas nie potrafią uzgodnić między sobą nazwy klubu, tak iż goście określają go po prostu jako klub bez nazwy. Wobec tego wyrażenie klub bez nazwy staje się nazwą tego klubu, przynajmniej tymczasową. Skoro jednak klub ten ma już nazwę, wyrażenie *klub bez nazwy* nie może go określać, ponieważ może się odnosić wyłącznie do takiego klubu, który nazwy nie ma. Jeśli wyrażenie *klub bez nazwy* nie jest nazwą klubu, o którym mówimy, innej zaś nazwy ten klub nie posiada, to nie ma on w ogóle żadnej nazwy. Jeżeli ta konkluzja jest słuszna, to wyrażenie *klub bez nazwy* trafnie go określa, czyli jednak jest jego nazwą, i cała historia zaczyna się od początku.

Grodziński proponuje rozwiązać ten problem uznając rozumowanie przedstawione w powyższej anegdocie za ekwiwokację. Wyrażeniem wziętym w zdaniu „Nazwa tego klubu brzmi klub bez nazwy" w dwóch różnych znaczeniach jest słowo „nazwa". Dalej, Grodziński stwierdza[36]: „Zinterpretujemy teraz zdanie »Nazwą tego klubu jest wyrażenie klub bez nazwy« w taki sposób, aby ujawnić ukrytą w nim ekwiwokację. Napiszemy: »Nazwą (czyli wyrażeniem określającym w mowie dany przedmiot i pozwalającym odróżnić go od innych przedmiotów) tego klubu jest wyrażenie klub bez nazwy (czyli bez imienia własnego)«. Paradoks znika, ponieważ nikomu – jak sądzimy – nie przyjdzie do głowy utrzymywać, że wyrażenie klub bez imienia własnego jest imieniem własnym owego klubu".

Czy jednak przedstawiona wyżej argumentacja może być faktycznym rozwiązaniem zagadki? Czy istotnie nie jest do pomyślenia, aby „klub bez imienia własnego" było nazwą własną klubu? Fakt, iż oficjalnego nadania klubowi jego nazwy nie było. Mamy tu jednak do czynienia z sytuacją, gdy nazwa powstaje w sposób spontaniczny i w pewnym sensie nie kontrolowany. Zatem wyrażenie „klub bez imienia własnego" stało się przynajmniej tymczasowo nazwą tego klubu.

---

[35] Grodziński, [1983], s. 65–66.
[36] Grodziński, [1983], s. 66.

Propozycja rozwiązania paradoksu

Wydaje się, że istotnie, u podstaw tego paradoksu leży błąd wieloznaczności. Czy jednak wieloznaczność ta dotyczy słowa „nazwa"? Chyba raczej nie. Gdy czytamy wyżej zacytowaną anegdotę rzuca się w oczy fakt, iż nazwa własna jest napisana inną niż pozostały tekst czcionką. Tymczasem, potrzeba odróżnienia słów użytych w zwykłym sensie od tych będących nazwami własnymi stworzyła zwyczaj stosowania cudzysłowów. Jeśli więc piszemy o klubie, który jeszcze nie ma nazwy nie stosujemy cudzysłowu, jeśli zaś piszemy o nazwie „klub bez nazwy" stosujemy cudzysłów. To właśnie ten fakt jest źródłem zaistniałego problemu. Czy jednak rzeczywiście istnieje tu jakikolwiek problem? Bardzo często zdarza się, iż nadawane spontanicznie przezwiska stoją w jawnej sprzeczności z cechą charakterystyczną osoby przezwanej i właśnie dlatego stają się jej przezwiskiem. Nieraz, tęgi mężczyzna bywa przez kolegów nazwany „chudym", łysy zaś „kudłatym", chociaż nikt nigdy oficjalnie żadnemu z nich nie nadał takiego imienia. Czy w związku z tym istnieje jakaś sprzeczność wynikająca z faktu, że człowiek łysy nazywany jest kudłatym? Oczywiście, nie. Wiadomo przecież, że:

„Kudłaty" jest łysy.

Sprzecznością bowiem byłoby stwierdzić, że:

Kudłaty jest łysy.

Potrzeba odróżnienia języka od metajęzyka jest dość powszechna. Rola cudzysłowu jest w takich sytuacjach kluczowa. Zacytujmy Józefa Marię Bocheńskiego (1902–1995)[37]: „W trakcie stosowania teorii stopni semantycznych sformułowano określone reguły techniczne dla używania cudzysłowu. Są one dzisiaj ściśle przestrzegane przez większość logików i metodologów nauki. Jakieś wyrażenie stawia się w cudzysłowie, jeżeli oznacza ono samo siebie lub wyrażenie równokształtne z nim, bez cudzysłowu nie oznacza ono samego siebie, lecz coś innego. Innymi słowy: wyrażenie w cudzysłowie jest znakiem samego tego wyrażenia, a więc metajęzykowym wyrażeniem w odniesieniu do podobnego wyrażenia bez cudzysłowu".

Ekwiwokację powyższego typu reprezentuje także inny przytoczony przez Grodzińskiego paradoks.

---

[37] Bocheński, [1954], s. 63.

Paradoks Betha[38]

Ponieważ *a*. 343 zawiera trzy cyfry
Oraz *b*. $343 = 7^3$,
Więc 7^3 zawiera trzy cyfry.

W każdej z obu przesłanek wyrażenie „343" ma inne znaczenie. W przesłance *a*, „343" oznacza napis, a mówiąc ściślej jest nazwą liczby 343. W drugiej przesłance *b*, „343" oznacza liczbę 343. Powiemy, że w pierwszym przypadku „343" występuje w supozycji materialnej, w drugim zaś w supozycji prostej. Precyzyjne, zgodne z zasadą wyrażoną przez Bocheńskiego przedstawienie obu przesłanek sprawia, że trudno jest mówić o jakimkolwiek paradoksie:

*a*1. „343" zawiera trzy cyfry
oraz
*b*1. $343 = 7^3$.

Obie przesłanki są w oczywisty sposób prawdziwe. Jasne jest jednak i to, że wniosek „7^3 zawiera trzy cyfry" nie wynika ze zdań *a*1 i *b*1. Prawdą jest bowiem, że: „343" $\neq$ 343.

2.6. PARADOKS WSZECHMOCNEGO BOGA, czyli szczególnie inspirująca ekwiwokacja

Pojęcie Boga zawsze budziło wiele gorących dyskusji najprawdopodobniej z powodów czysto światopoglądowych. Często spory te dotyczyły kwestii logiczno-teologicznych i miały na celu usunięcie pojawiających się dylematów. Ponieważ rozumienie pojęcia „Bóg" nigdy nie było jednoznaczne, proponowane rozwiązania jednego i tego samego problemu bywały różne, a nawet wykluczały się. Jedną z ważniejszych kwestii należących do tej grupy dylematów jest niżej przedstawiony paradoks wszechmocnego Boga, będący wytworem średniowiecznej myśli teologicznej. Argumentacja tego paradoksu próbuje wskazać na logiczny konflikt do jakiego dochodzi, gdy jednocześnie założymy doskonałą dobroć Boga oraz Jego wszechmoc. Zarówno pojęcie „wszechmocy" jak i „doskonałej dobroci" wymagają pewnych wyjaśnień. Dlatego, prezentację samego paradoksu poprzedzimy analizą znaczeń obu kluczowych dla niego pojęć, po to, aby sformułowanie paradoksu nie pociągało dodatkowych niezwiązanych z paradoksem trudności.

Wszechmoc, jak zauważa Mikołaj Olszewski w *Komentarzu do Kwestii 25 Summy teologii* Tomasza z Akwinu (1225–1274), „można by z powodzeniem

---

[38] Grodziński, [1983], s. 64.

określić jako najbardziej średniowieczny ze wszystkich atrybutów Boga"[39]. Dalej, Olszewski przyznaje, że znane są przykłady na to, iż starożytni autorzy rozważali problem wszechmocy Boga. Jednak w porównaniu z literaturą średniowieczną były to przypadki niemal sporadyczne. I tak na przykład Arystoteles w *Metafizyce* zauważa, że pierwszy poruszyciel musi mieć moc nieskończoną, chociaż w *Etyce nikomachejskiej* ogranicza jego moc w zakresie zdarzeń przeszłych, co ma niemały wpływ na Tomasza z Akwinu. Moc Boga analizowana jest także w Pseudo-Arystotelesowej księdze *O świecie*[40] będąc przykładem myśli stoickiej i neoplatońskiej[41]. Wydaje się jednak, że największy wpływ na filozofów Średniowiecza miała Biblia, w której pojęcie „Boga Wszechmogącego" pojawia się wielokrotnie tak w Starym jak i w Nowym Testamencie. Wśród starożytnych autorów także Augustyn (354–430) w swym dziele *O państwie Bożym* rozważa wszechmoc Boga ograniczoną niemożnością wpływania na to co się już dokonało. W epoce średniowiecznej, jak zauważa Olszewski, trudno jest znaleźć filozofa, który nie zajmowałby się wszechmocą Boga. Do najważniejszych myślicieli analizujących to zagadnienie można zaliczyć: Hieronima ze Strydonu (ok. 347–429), Piotra Damianiego (1007–1072), Anzelma z Canterbury (ok. 1033–1109), Piotra Abelarda (1079–1142), Piotra Lombardzkiego (ok. 1095–1159), Tomasza z Akwinu (1225–1274), Jana Dunsa Szkota (ok. 1265–1308), Wilhelma Ockhama (ok. 1285–1349).

Podstawowym problemem wiążącym się z pojęciem „wszechmocy" jest jego ewentualny związek z czymś co określamy mianem „logiczności". Innymi słowy, czy istota wszechmocna jest ponad logiką, czy też z konieczności musi przestrzegać praw logiki. Już samo precyzyjne określenie „praw logiki" jest mocno kłopotliwe. Trudno zgodzić się przecież, aby logiką Boga była logika klasyczna z jej licznymi paradoksami. Tym bardziej trudno jest zaakceptować fakt, iż tę wyjątkową rolę mogłaby pełnić którakolwiek z nieklasycznych logik formalnych. Wydaje się więc, iż całkiem zrozumiałe jest utożsamić pojęcie logiczności danej wypowiedzi z niemożnością wyprowadzenia z tej wypowiedzi sprzeczności. Tak więc, pewna wypowiedź jest niesprzeczna, gdy nie implikuje ona jednocześnie dwóch zdań, z których jedno jest zaprzeczeniem drugiego. W tym właśnie sensie powiemy, że dana wypowiedź jest logiczna. Działanie zaś jest sprzeczne, gdy prowadzi do stanu rzeczy opisanego przez sprzeczny zbiór zdań, czyli zbiór zawierający przynajmniej dwa zdania, z których jedno jest zaprzeczeniem drugiego.

---

[39] Olszewski, *Komentarz do Kwestii 25 „O mocy Boga"*, [w:] Tomasz, *Traktat o Bogu*, s. 832.

[40] Arystoteles, *O świecie*, 397b–398b, s. 589–592.

[41] Olszewski, *Komentarz do Kwestii 25 „O mocy Boga"*, [w:] Tomasz, *Traktat o Bogu*, s. 833.

Już ze względu na samą kwestię logiczności, różne może być rozumienie pojęcia „wszechmocy". Można bowiem przyjąć, że istota wszechmocna nie jest ograniczona logiką, a zatem mogąc czynić wszystko, w szczególności może sprawić, aby coś zaszło i nie zaszło zarazem. Ponadto, przy założeniu prymatu istoty wszechmocnej wobec logiki trudno jest mówić o jakichkolwiek problemach natury logicznej dotyczących pojęcia „wszechmocy". Wszystkie tego typu dylematy są bowiem rozwiązane niejako automatycznie przez sam fakt, iż istota w takim sensie wszechmocna nie jest skrępowana w żaden sposób wymogiem niesprzeczności. W *Komentarzu do Kwestii 25 Summy teologii* Olszewski pisze[42]: „[...] u Damianiego pojawia się jeszcze jeden wątek istotny w późniejszych (zwłaszcza czternastowiecznych) dyskusjach nad mocą Bożą. Otóż wszystkie prawa natury – w tym również te określające bieg czasu – zostały ustanowione przez Boga, zatem mogą być przez Niego jako autora zawieszone lub zgoła odwołane. [...] Toteż Bóg może uchylić swoim działaniem prawo sprzeczności w odniesieniu do zdarzeń rozłożonych w czasie, tak samo jak mógł naruszyć zasadę *ex nihilo nihil* (z niczego nie powstaje nic), stwarzając świat". Piotr Damiani nie był pierwszym spośród tych, którzy stawiali Boga ponad zasadą niesprzeczności. Wyraźne określenie prymatu Boga wobec wszystkiego cokolwiek jest, widzimy chociażby u Filona z Aleksandrii (ok. 20 p.n.e. – ok. 50 n.e.)[43]: „Bóg przekracza możliwości nie tylko natury ludzkiej, lecz także natury nieba i całego wszechświata. [...] Co więcej, Filon mówi wręcz, że Bóg jest nawet ponad Jednym czy Monadą, która jest ponad życiem, ponad cnotą, ponad wiedzą, nawet ponad Dobrem. Nasz filozof [Filon, przyp. autora], powtarzając często stwierdzenie, że Bóg jest <<bez jakości>> (*apoios*), chce powiedzieć właśnie to: Bóg jest ponad wszystkimi możliwymi określeniami jakościowymi (Bóg jest ponad jakąkolwiek formą i jakością). Bóg transcenduje nie tylko byty świata zmysłowego, lecz także byty świata inteligibilnego, ponieważ – jak zobaczymy – jest stwórcą obydwu światów". Pamiętać przy tym należy, że „Jest", Bóg Filona nie jest jedynie zabsolutyzowanym uogólnieniem „bycia"; owo „Jest", to Bóg Mojżesza i proroków[44]. Rozważanie pojęcia „wszechmocy" w kontekście Boga Starego Testamentu jest więc jak najbardziej uzasadnione. Można zatem stwierdzić, że koncepcja Boga, przyjęta przez Filona Aleksandryjskiego, zakłada prymat Stwórcy nad wszystkim o czym tylko możemy pomyśleć, a więc w szczególności nad logiką. Podobieństwo między Bogiem Filona a Bogiem Plotyna nie jest przypadkowe. Znając dzieła swojego poprzednika Plotyn sytuuje Boga

---

[42] Olszewski, *Komentarz do Kwestii 25 „O mocy Boga"*, [w:] Tomasz, *Traktat o Bogu*, s. 838. Olszewski korzysta z Sources Chrétiennes t. 191: Pierre Damien, *Lettre sur la toute-puissance divine*, Introduction, texte critique, traduction et notes par A. Cantin, Paris 1972.

[43] Reale, [1999], tom 4, s. 295.

[44] Legowicz, [1986a], s. 439.

również ponad bytem, ponad myślą, ponad prawdą[45]. Orygenes Chrześcijanin (koniec II i III wiek n.e.) tak pisze o Bogu w *Contra Celsum*, VII, 45[46]: „Czym jest słońce w kręgu rzeczy zmysłowych [...], tym jest Bóg w kręgu rzeczy poznawalnych intelektem; nie jest on ani intelektem, ani intelekcją, ani wiedzą, lecz jest przyczyną intelektu i jego myślenia [...] i dla samej substancji jest przyczyną jej bytu; ponieważ jest ponad wszystkim, może być pojmowany dzięki niewysłowionej mocy". Innym myślicielem rozumiejącym Boga jako absolutną transcendencję w odniesieniu do wszystkiego, co jest dostępne poznaniu dyskursywnemu jest Pseudo-Dionizy Areopagita żyjący w końcu piątego i w początkach szóstego wieku naszej ery[47]. Poza nurtem neoplatońskim, którego niektórzy przedstawiciele zostali wyżej przywołani istniały także inne stanowiska definiujące Boga w sposób implikujący Jego prymat wobec zasady niesprzeczności. Do najważniejszych w średniowieczu można zaliczyć wspomnianego już wcześniej Piotra Damianiego a także Jana Dunsa Szkota. Duns Szkot swoje stanowisko dotyczące wszechmocy Boga opiera na znanym już wcześniej odróżnieniu *potentia absoluta* od *potentia ordinata*. Bóg, którego cechuje *potentia absoluta*, zdaniem Dunsa Szkota, może więc wszystko łącznie z zawieszeniem lub zmienieniem praw rządzących Jego dziełem[48]. Oczywiście, pojęcie *potentia absoluta* nie było rozumiane jednoznacznie, jednak mniejszość stanowili ci myśliciele, którzy tak jak Duns Szkot uważali, iż *potentia absoluta* umożliwia działanie sprzeczne[49].

Z podobnie radykalnym rozumieniem wszechmocy możemy się spotkać także poza średniowieczem. W czasach nowożytnych reprezentował je René Descartes (1596–1650). W swym liście z 29 lipca 1648 roku do teologa i filozofa Antoine'a Arnaulda (1612–1694), zwanego Wielkim Arnauldem, Kartezjusz dopuszcza możliwość, aby Bóg mógł sprawić istnienie góry bez istnienia doliny, czy też spowodować, aby jeden i dwa nie dawały trzy. To, że człowiek nie może sobie tego wyobrazić, nie jest przecież żadnym argumentem na to, że Bóg jest podobnymi kwestiami ograniczony[50]. W innym liście z 2 maja 1644 roku, tym razem do jezuity Denisa Meslanda (1615–1672) pisze[51]: „Co się tyczy trudności w pojęciu, w jaki sposób było wolno a zarazem obojętne Bogu sprawić, aby prawdą nie było to, że trzy kąty trójkąta są równe dwóm prostym, albo ogólnie, że to, co jest sprzeczne ze sobą, nie może iść w parze ze sobą, to

[45] Reale, [1999], tom 4, s. 520.
[46] Reale, [1999], tom 4, s. 357.
[47] Legowicz, [1986a], s. 617–618.
[48] Dokładniejsza analiza obu możności jest podana w dalszej części paragrafu poświęconej rozwiązaniu paradoksu wszechmocnego Boga.
[49] Olszewski, *Komentarz do Kwestii 25 „O mocy Boga"*, [w:] Tomasz, *Traktat o Bogu*, s. 843.
[50] Przypisy, Frankfurt, [1964], s. 262–263.
[51] Descartes, [w:] Alquié, [1989], s. 278.

łatwo ją uchylić zważywszy, że moc Boża nie ma granic, a następnie, że nasz skończony i stworzony umysł ma taką naturę, iż może ujmować jako możliwe te rzeczy, których możliwości Bóg chciał naprawdę, lecz już nie taką, że mógł uczynić możliwymi, a jednak wolał uczynić niemożliwymi. [...] A ponadto z tego, że Bóg chciał, aby pewne prawdy były konieczne, nie można wnosić, iż chciał tego koniecznie, bo czym innym jest chcieć, ażeby były konieczne, czym innym zaś chcieć tego koniecznie lub być zmuszonym do chcenia tego".

Współcześnie, z podobnym rozumieniem wszechmocy Boga możemy się spotkać np. u Harry'ego G. Frankfurta[52].

Pogląd dający prymat wszechmocy nad logiką wydaje się dość radykalny, a jednak nie pozbawiony racji. W końcu już samo pojęcie „wszechmocy" wydaje się być w jakimś istotnym sensie radykalne. Istnieje jednak poważny argument, aby, dla samej czystej logicznej spekulacji, w naszych dalszych rozważaniach ograniczyć się do wszechmocy podporządkowanej wymogowi niesprzeczności. W przeciwnym razie nie jest bowiem możliwe sensowne rozważanie jakichkolwiek paradoksów dotyczących wszechmocy Boga. Przecież każdy dylemat dotyczący tego atrybutu jest natychmiast rozwiązywany przez proste zastosowanie samej definicji wszechmocy. Przecież żadne paradoksy dotyczące tak rozumianej wszechmocy nie mogą nawet zaistnieć. Ich wymiar jest bowiem czysto ludzki. To my jako ludzie nie jesteśmy w stanie zrozumieć pewnych kwestii, co nie znaczy że są one jakimiś realnymi problemami logicznej natury. Warto jednak pamiętać, że wszechmoc z podporządkowaną sobie logiką wydaje się być zupełnie „dobrą" i ... logiczną wszechmocą.

Ograniczenie wszechmocy przez logikę, a mówiąc ściślej przez warunek niesprzeczności działania jest dla wielu filozofów niewystarczające[53]. Ich zdaniem wszechmoc winna być ograniczona również pod innymi względami. Jednym z najwybitniejszych wyznawców tego poglądu jest Tomasz z Akwinu, który stał co prawda na stanowisku, iż moc Boga jest nieskończona, a zatem Bóg jest wszechmocny, jednak z faktu tego nie wynika, że Bóg może czynić absolutnie wszystko o czym tylko jesteśmy w stanie pomyśleć. W Artykule 2, Kwestii 25, *Summa Theologiae* Tomasz rozpoczyna analizę problemu wszechmocy stawiając kwestię w sobie właściwy sposób, czyli wystawiając tezę

[52] Frankfurt, [1964], s. 262–263.

[53] Analizę czterech rodzajów wszechmocy boskiej przeprowadza Th. V. Morris w *A modern discussion of divine omnipotence*, [w:] Davies, [2000]. Poza wszechmocą obejmującą działania sprzeczne, wszechmocą ograniczoną do działań logicznie możliwych Morris rozważa także wszechmoc ograniczoną do działań logicznie możliwych dla Boga oraz wszechmoc ograniczoną do działań logicznie możliwych dla istoty doskonałej. Ta interesująca skądinąd analiza wykracza jednak poza ramy niniejszej pracy. Przedstawione w niej rozwiązanie paradoksu wszechmocnego Boga nie wymaga bowiem aż tak szczegółowych rozróżnień wszechmocy.

sprzeczną z tą, dowodzoną przez siebie[54]: „Wydaje się, że moc Boża nie jest nieskończona." Tomasz nawiązuje do ósmej księgi *Fizyki* Arystotelesa i ósmej księgi *Komentarzy do Księgi Rodzaju* Augustyna. Dalej wykazuje jednak, że pojęcie nieskończoności Arystotelesa nie stosuje się do mocy bożej. Arystoteles twierdzi bowiem, że wszystko co nieskończone jest niedoskonałe[55]. Z tą opinią Tomasz nie zgadza się wskazując na to, iż dla Arystotelesa nieskończoność wynika z materii nieokreślonej przez formę, a tego rodzaju nieskończoność jest nieskończonością wielkości. Istota boska nie jest jednak nieskończona w ten sposób[56]. Dlatego też, zdaniem Tomasza nieskończoność mocy bożej nie musi być niedoskonała. Co więcej, w opinii Tomasza moc Boga musi być nieskończona[57]: „[...] w Bogu jest moc działania w tej mierze, w jakiej On jest urzeczywistniony. Jego istnienie jest nieskończone dlatego, że nie jest ograniczone przez coś przyjmującego. [...] Jest zatem konieczne, by moc działania Boga była nieskończona". Mimo takiego stanowiska Tomasz porusza problem ograniczeń jakim podlega istota boska, które jego zdaniem wcale nie świadczą o tym, że nie jest ona wszechmocna[58]: „Można bowiem wątpić, jak należy rozumieć jej zakres [wszechmocy, przyp. autora], skoro powiada się: »Bóg może wszystko«. Jeżeli jednak ktoś dobrze rozważy, że skoro moc orzekamy w odniesieniu do tego, co możliwe, to twierdzenia, że Bóg może wszystko, nie można trafniej zrozumieć niż tak, że Bóg może to wszystko, co jest możliwe, i od tego nazywany jest wszechmocnym". Nie chodzi tu rzecz jasna o to, że Bóg może wszystko to, co jest dla Niego możliwe. Tomasz słusznie zauważa, że takie stwierdzenie byłoby przykładem błędnego koła[59]: „Nie różniłoby się to bowiem od twierdzenia, że Bóg jest wszechmocny,

---

[54] Tomasz, *Traktat o Bogu, Kwestia 25, Artykuł 2*, s. 369.

[55] Pogląd ten wynika z faktu, iż dla Arystotelesa i dla innych starożytnych Greków „nieskończoność jest przeciwieństwem tego, co się tak zazwyczaj określa. Nie to bowiem jest nieskończone, co już nie ma niczego poza sobą, lecz właśnie to, co zawsze ma coś poza sobą. [...] nieskończonym nazwiemy zbiór tako, do którego można ciągle dobierać z zewnątrz jakiś nowy element. A znów to, co nie ma już nic na zewnątrz, jest skończone i całe. Całością z kolei nazwiemy to, czemu nic nie brakuje; np. całością jest człowiek albo skrzynia. Wobec tego pogląd Parmenidesa, że całość [...] jest skończona, należy uznać za lepszy niż pogląd Melissosa, że całość jest nieskończona. Albowiem połączyć nieskończoność z ogółem i całością, to nie to samo, co złączyć razem dwa końce sznura. Stąd to wywodzi się majestatyczność przypisywana nieskończoności [...]. W rzeczywistości nieskończoność jest materią w kompletnym układzie pewnej wielkości i potencjalną, a nie aktualną całością [...]. Jako nieskończoność nie obejmuje niczego, lecz sama jest obejmowana. Wskutek tego jest również jako nieskończona niepoznawalna; materia jest bowiem pozbawiona formy. W konsekwencji wydaje się, iż nieskończoność występuje raczej w pojęciu części niż całości; bo materia jest częścią całości, tak jak spiż jest częścią posągu spiżowego posągu" (Arystoteles, *Fizyka*, 207a).

[56] Tomasz, *Traktat o Bogu, Kwestia 25, Artykuł 2*, s. 370.

[57] Tomasz, *Traktat o Bogu, Kwestia 25*, s. 370.

[58] Tomasz, *Traktat o Bogu, Kwestia 25, Artykuł 3*, s. 372.

[59] Tomasz, *Traktat o Bogu, Kwestia 25*, s. 372–373.

ponieważ może wszystko, co może. Pozostaje zatem, że Boga nazywamy wszechmocnym dlatego, że może zrobić wszystko, co jest bezwarunkowo możliwe. [...] Nazwiemy zaś coś możliwym lub niemożliwym bezwarunkowo ze względu na to, jak mają się do siebie terminy: możliwym – gdy orzecznik nie jest sprzeczny z podmiotem, na przykład »Sokrates siedzi«, a niemożliwym – gdy orzecznik jest sprzeczny z podmiotem, na przykład »człowiek jest osłem«„ Istotnie, ze zdania „Sokrates siedzi" nie wyprowadzimy żadnej sprzeczności, podczas gdy akceptując zdanie „człowiek jest osłem" akceptujemy zarazem, że „człowiek jest człowiekiem" i „człowiek nie jest człowiekiem", jeśli tylko zaakceptujemy zdanie „osioł nie jest człowiekiem"[60]. Tak rozumiana sprzeczność ogranicza więc zdaniem Tomasza działanie Boga, nie ograniczając przy tym Jego mocy[61]: „we wszechmocy Boga nie mieści się to, co pociąga za sobą sprzeczność". Nawiasem mówiąc, w *Summa contra Gentiles* w rozdziale zatytułowanym *W jaki sposób mówi się o wszechmocnym Bogu, że nie może uczynić niektórych rzeczy*, Tomasz przedstawia długą listę wszystkich tych działań, które uważa za niewykonalne nawet przez Boga[62].

Możliwe jest więc takie zdefiniowanie pojęcia „wszechmocy", aby z założenia, że dana istota jest wszechmocna nie wynikało, że istota ta może wykonywać zadania wewnętrznie sprzeczne. W swojej książce z 1977 roku *The Coherence of Theism*, Richard Swinburne proponuje cztery definicje. Wszystkie wyznaczają logiczne ograniczenia pojęcia „wszechmocy"[63].

[*def. A*] Osoba jest wszechmocna wtedy i tylko wtedy, gdy jest w stanie wykonać jakiekolwiek logicznie możliwe działanie, tzn. takie, którego opis jest spójny.

Zdaniem Swinburna, słabość definicji *A* polega na tym, że nie jest logicznie wykluczone, aby pewne działania były wykonane przez byty jednego typu, podczas gdy jest logicznie wykluczone, aby te same działania były wykonane przez byty innego typu. Na przykład Bóg nie może wziąć w ręce nawet małego kamyka, bo przecież nie posiada rąk, podczas gdy każdy człowiek posiadający

---

[60] Ściślej, rozumowanie to może mieć jedną z dwóch postaci:
albo 1. *Ponieważ „każdy człowiek jest człowiekiem", „jakiś człowiek jest osłem", „każdy osioł nie jest człowiekiem", więc „jakiś człowiek jest człowiekiem" i „jakiś człowiek nie jest człowiekiem"*;
albo 2. *Ponieważ „każdy człowiek jest człowiekiem", „każdy człowiek jest osłem", „każdy osioł nie jest człowiekiem", więc „każdy człowiek jest człowiekiem" i „każdy człowiek nie jest człowiekiem"*.
Niewątpliwie, sprzeczność zachodzi w obu przypadkach.

[61] Tomasz, *Traktat o Bogu, Kwestia 25, Artykuł 4*, s.375–376.

[62] Swinburne, [1995], s. 221.

[63] Swinburne, [1995], s. 208–210.

ręce może to niewykonalne dla Boga zadanie wykonać. Dlatego też Swinburne uważa kolejną definicję za lepszą.

[*def. B*] Osoba jest wszechmocna wtedy i tylko wtedy, gdy jest w stanie sprawić każdy logicznie możliwy stan rzeczy.

Jednak, zdaniem Swinburna wciąż wzorującym się na Tomaszu z Akwinu, i ta definicja jest niewystarczająca. Nie wyklucza ona bowiem możliwości sprawiania stanów przeszłych, czyli zmieniania przeszłości. Zmienianie przeszłości nie mieści się w analizowanym przez Tomasza pojęciu „wszechmocy"[64]: „To zaś, by zdarzenia przeszłe nie zaszły, zawiera sprzeczność. Twierdzenie, że »Sokrates siedzi i nie siedzi«, zawiera taką samą sprzeczność jak twierdzenie, że »siedział i nie siedział«. Powiedzieć zatem, że siedział, to powiedzieć, że tak było, a że nie siedział, że tak nie było. Wszechmocy boskiej nie podlega zatem to, by zdarzenia przeszłe nie miały miejsca. To samo powiada Augustyn w *Przeciw Faustusowi: kto powiada tak: <<jeżeli Bóg jest wszechmocny, niech sprawi, by to, co się stało, nie stało się>>, nie widzi, że mówi: <<Jeżeli Bóg jest wszechmocny, to niech sprawi, by to, co jest prawdziwe, przez to, że jest prawdziwe, było fałszywe>>*. „Filozof [Arystoteles, przyp. autora] zaś w VI księdze Etyki [nikomachejskiej, przyp. autora] powiada, że „tego tylko nie potrafi Bóg, by nie stało się, co się stało". Istotnie, w *Etyce nikomachejskiej* znajdujemy następujący fragment[65]: „to zaś, co się stało, nie może się odstać. Dlatego słuszne są słowa Agatona: „Tej jednej rzeczy nie potrafi nawet Bóg: By się odstało to, co raz już stało się". Analizując niemożność zmiany przeszłości, Tomasz powołuje się także na opinię Hieronima ze Strydonu[66]: „Ale Hieronim powiada: *choć Bóg może wszystko, nie może z niedziewicy zrobić dziewicy*"[67]. Istnieli także filozofowie, których stanowisko w tej kwestii różniło się od Tomaszowego. Przykładem może tu być Anzelm z Canterbury, który co prawda przyznawał, że »Bóg nie może sprawić, by to, co się stało, nie miało miejsca«, lecz tylko dlatego, że konieczność zdarzenia przeszłego jest właśnie wynikiem postanowienia Boga[68].

[64] Tomasz, *Traktat o Bogu, Kwestia 25, Artykuł 4*, s. 376.

[65] Arystoteles, *Etyka nikomachejska*, 1139b, s. 195.

[66] Tomasz, *Traktat o Bogu, Kwestia 25, Artykuł 4*, s. 375.

[67] W *Komentarzu do Kwestii 25* (Tomasz, *Traktat o Bogu*, *Komentarze*, s. 850) Olszewski zauważa, że Tomasz niejako waha się przed zajęciem wyraźnie negatywnego stanowiska w sprawie możności zmieniania przeszłości: „Z jednej strony wbrew obrońcom wszechmocy Boga [Tomasz, przyp. autora] stwierdza, że nie może On odwrócić przeszłości, a zarazem przeciw necesytarystom utrzymuje, że nic nie zmuszało Boga do stworzenia tego właśnie a nie innego świata, i że mógł mu On nadać inny, a nawet doskonalszy, porządek od tego, który rzeczywiście nadał".

[68] Olszewski, *Komentarz do Kwestii 25 „O mocy Boga"*, [w:] Tomasz, *Traktat o Bogu*, s. 840.

Pogląd iż wszechmocny Bóg nie może zmienić przeszłości jest dość powszechny w średniowiecznej filozofii europejskiej jak również w późniejszej względem Średniowiecza tradycji tomistycznej.

Swinburne formułuje więc następną definicję.

[*def. C*] Osoba jest wszechmocna w czasie *t* wtedy i tylko wtedy, gdy jest w stanie sprawić każdy logicznie możliwy stan rzeczy po czasie *t*.

Swinburne podaje jeszcze jedną, jego zdaniem lepszą od *C* definicję *D*, która jeszcze precyzyjniej ogranicza wszechmoc za pomocą parametru czasu[69].

Czy jednak Tomasz z Akwinu i jego kontynuatorzy nie idą zbyt daleko w uzależnianiu wszechmocy od tego co już się wydarzyło? Czy rzeczywiście jest logicznie wykluczona każda zmiana, nawet ta pociągająca za sobą wszelkie swoje konsekwencje? Przytoczony wyżej dowód Tomasza na to, iż zmiana przeszłości pociąga za sobą sprzeczność wydaje się być błędny. Załóżmy, że w przedziale czasu (t_1, t_2) Sokrates siedzi. Po upływie czasu t' od chwili t_2, Bóg sprawia, że w przedziale czasu (t_1, t_2) Sokrates stoi. Zatem w chwili $t_2 + t'$ Bóg sprawił, że w przedziale czasu (t_1, t_2) Sokrates stoi. Załóżmy ponadto, że Bóg zmienił konsekwentnie wszystko to co pociągał za sobą fakt, iż Sokrates siedział w przedziale czasu (t_1, t_2). Zatem, w szczególności zmianie uległa pamięć o zdarzeniach jakie miały miejsce przed chwilą $t_2 + t'$. Wszystkie te zmiany dokonały się w chwili $t_2 + t'$. Tak więc, z perspektywy czasu, czyli w chwili $t_2 + t'$ możemy powiedzieć, że w przedziale czasu (t_1, t_2) Sokrates stał. Gdyby ktoś powiedział, że Sokrates w tym przedziale czasu siedział, uznalibyśmy taką wypowiedź za błędną. Nie pozostałby bowiem żaden ślad tego, że Sokrates siedział w przedziale czasu (t_1, t_2).

W przytoczonym wyżej przykładzie, zmiana przeszłości została przez nas sprowadzona do zamiany jednego stanu rzeczy na inny w ramach tego samego modelu rzeczywistości złożonego z tzw. możliwych światów. Czyż oczywista niesprzeczność wielu semantyk możliwych światów nie jest najlepszym dowodem na to, iż konsekwentna zmiana przeszłości nie pociąga za sobą sprzeczności? Przecież rozwój wiedzy również polega na odrzuceniu pewnych wcześniej uznawanych za prawdziwe teorii naukowych i zastępowaniu ich nowymi. Proces ten może być modelem świata, w którym od czasu do czasu niektóre fakty z przeszłości wraz z wszystkimi swoimi konsekwencjami zostają zmienione. Złudzenie, że zmiana przeszłości prowadzi do sprzeczności wynika z założenia, że to co się stało jest trwałe, a więc nieusuwalne. Zatem, jeśli zostanie dokonana zmiana jakiegoś stanu w przeszłości, to w teraźniejszości mamy do czynienia ze sprzecznością: istnieje bowiem stan rzeczy jaki był przed zmianą i zarazem ten właśnie stan rzeczy nie istnieje, jako że został zmieniony.

---

[69] Definicja *D* jest omówiona w paragrafie poświęconym paradoksowi kamienia.

Jeśli jednak zmiana przeszłości pociągnie za sobą konsekwentną zmianę wiedzy na temat przeszłości, sprzeczność nie zaistnieje.

Zmiana przeszłości może natomiast wywoływać pewne trudności natury etycznej. Nie jest to jednak przesądzone. Wydaje się jednak, że ten niewątpliwie złożony problem nie wiąże się w żaden sposób ze sprzecznością. Dlatego też ograniczenie wszechmocy przez czas ma raczej pozalogiczne podstawy.

Biorąc pod uwagę wszystkie wyżej przedstawione możliwości określenia wszechmocy bożej, w prezentowanym niżej paradoksie przyjmijmy więc wszechmoc określoną przez definicję *B*. Doskonałą dobroć zdefiniujmy natomiast tak jak to uczynił Swinburne[70].

[*def. E*] Osoba jest doskonale dobra wtedy i tylko wtedy, gdy zawsze wykonuje moralnie najlepsze działanie i nie wykonuje żadnego moralnie złego działania.

Pominiemy przy tym kwestię obiektywności sądów moralnych, pozostając przy intuicyjnym rozumieniu pojęcia „grzechu" jako czynu moralnie złego.

Paradoks Wszechmocnego Boga

Bóg jest istotą wszechmocną. Zatem Bóg może uczynić wszystko, co tylko jest logicznie możliwe, a więc w szczególności może uczynić coś złego. Bóg jest istotą nieskończenie dobrą, więc nie może uczynić niczego złego. Mamy zatem sprzeczność. Jest bowiem coś co zarazem Bóg może uczynić i czego nie może uczynić. Tym czymś jest grzech.

Swoją wersję tego paradoksu podaje Tomasz[71]:

Grzech jest działaniem, a Bóg nie może zgrzeszyć ani „zaprzeczyć samemu sobie"[72], jak czytamy w II Liście do Tymoteusza (2,13). Bóg nie jest zatem wszechmocny.

Tomasz proponuje rozwiązać paradoks następująco[73]: „grzech jest ułomnością wobec doskonałego działania. Zatem móc grzeszyć to móc działać ułomnie, co jest sprzeczne z wszechmocą. Bóg nie może zatem grzeszyć, bo jest wszechmocny".

Powyższa analiza przypomina pierwsze z dwóch rozwiązań zaproponowanych przez Anzelma z Canterbury[74]: „Ale w jaki też sposób jesteś

---

[70] Por. Swinburne, [1995], s. 247.

[71] Tomasz, *Traktat o Bogu, Kwestia 25, Artykuł 3*, punkt 2, s. 371.

[72] W przekładzie J. Wujka „zaprzeć sam siebie".

[73] Tomasz, *Traktat o Bogu, Kwestia 25, Artykuł 3*, s. 373–374.

[74] Anzelm, *Proslogion, Rozdział 7*, s. 149–150.

wszechmocny, jeżeli nie możesz wszystkiego? Albo: jeżeli nie możesz ulec zniszczeniu ani kłamać, ani sprawiać, żeby prawda była fałszem, aby na przykład to, co zostało uczynione, nie było uczynione i podobnie wielu innych rzeczy, to w jaki sposób możesz wszystko? A może móc te rzeczy nie jest mocą, ale właśnie niemocą? Albowiem ten, kto może je [czynić], może czynić to, co nie jest dla niego pożyteczne i czego czynić nie powinien? I im bardziej może je czynić, tym bardziej nieszczęście i przewrotność mogą oddziaływać na niego, a on coraz mniej może się im przeciwstawiać. Kto zatem w ten sposób może [czynić], może nie dzięki mocy, ale właśnie dzięki niemocy". Jak widać, Anzelm dostrzega iż rzekoma sprzeczność wynika z niewłaściwego rozumienia wyrażeń „moc czynienia czegoś" oraz „niemoc czynienia czegoś". Oznacza to, że cały problem sprowadza on do rozumienia słowa „może". Można zaryzykować stwierdzenie, że argumentacja Anzelma tłumacząca kwestię wszechmocy Boga posiada ludzki wymiar. Każdy kto grzeszy, czyni to z powodu swojej słabości. Jego grzeszne uczynki wynikają więc z jego niemocy trwania w dobrym. Lecz niemoc cechuje człowieka, nie Boga. Bóg, jako istota wszechmocna, jest pozbawiony niemocy. Zatem Bóg nie może zgrzeszyć właśnie dlatego, że jest wszechmocny. Jednakże, z formalnego punktu widzenia, analiza Anzelma jest zgrabnym przykładem rozumowania zwanego *retorsio argumenti* i przypomina mowę Sokratesa dowodzącego, iż człowiek mądry nie chce niczego złego[75]. Niestety, wydaje się, że cała siła dowodu Anzelma tkwi w interesującym zdefiniowaniu pojęcia „niemoc". Już samo słowo „niemoc" sugeruje, iż oznacza ono wszystko to co jest zaprzeczeniem mocy. Tymczasem, zdaniem Anzelma niemoc jest mocą, tyle że w czynieniu tego co nie jest pożyteczne, czyli tego czego czynić nie należy. Wygląda na to, że niemoc jest utożsamiona z mocą czynienia zła. Mogłoby się więc wydawać, że dowód Anzelma niczego nie wyjaśnia. Wynika z niego bowiem, że Bóg ma moc czynienia dobra i nie ma mocy czynienia zła, bo będąc wolnym od niemocy, nie ma mocy czynienia zła. To uzasadnienie jest jednak głównym problemem analizowanego paradoksu. W dowodzie Anzelma widzimy więc erystyczny zabieg nadania nowej nazwy kluczowemu dla dyskutowanego problemu pojęciu: nazwa „moc czynienia zła" została zastąpiona nazwą „niemoc", której znaczenie sugeruje iż dotyczy wszystkiego co nie jest mocą. Dzięki temu powiodło się rozumowanie znane jako *retorsio argumenti*, polegające na wykorzystaniu argumentu strony przeciwnej dla uzasadnienia swojego stanowiska: „Zarzucasz Bogu niemoc twierdząc, że nie może uczynić niczego złego? Ależ czynienie złych rzeczy, to przecież nic innego jak właśnie niemoc!" Gdyby Anzelm na tym poprzestał bez wahania można by powiedzieć, że niczego nie dowiódł. Jednak,

[75] Chodzi tu o tzw. *racjonalizm i intelektualizm etyczny Sokratesa*, przedstawiony przez Platona w dialogu zatytułowanym *Hippiasz Mniejszy*, Platon, Dialogi, tom I, 369 B – 376 C, s. 139–154.

dalej czytamy, że brak mocy w czynieniu zła, czyli brak niemocy wynika u Boga z Jego mądrości. Bóg wie, że czyniąc zło zrobiłby sobie krzywdę. Oznacza to, że podstawą niemożności czynienia zła jest u Boga zapobiegliwość. Nawet jeśli, być może nietrafne, słowo „zapobiegliwość" zastąpimy „mądrością", to okazuje się, że Anzelm nie tyle rozwiązał paradoks wszechmocnego Boga, ile zastąpił go innym w pełni analogicznym:

Bóg jest istotą wszechmocną. Zatem Bóg może uczynić wszystko co tylko jest logicznie możliwe, a więc w szczególności może uczynić coś złego. Bóg jest istotą mądrą, więc nie może uczynić niczego złego, bo byłoby to dla Niego szkodliwe. Mamy zatem sprzeczność. Jest bowiem coś, co zarazem Bóg może uczynić i czego nie może uczynić. Tym czymś jest grzech.

Widać więc wyraźnie, że Anzelm nie rozwiązał paradoksu, zastępując jedną jego wersję inną, będącą kopią pierwszej. Zamienił konflikt jaki miałby zachodzić między wszechmocą a dobrocią Boga, na inny, rzekomy konflikt między wszechmocą a mądrością Boga.

Olszewski przypomina jednak, że tekst ten nie jest ostatnim, jaki wyszedł spod pióra Anzelma, w którym Anzelm analizuje paradoks wszechmocnego Boga[76]: „w późniejszym dziele *Cur Deus Homo* Anzelm weryfikuje swoje pierwotne rozwiązanie, kładąc nacisk właśnie na antynomiczność tego zagadnienia". Jak podaje Olszewski, Anzelm rozważa tam problem, czy Chrystus mógł kłamać. Z jednej strony jasne jest, że jako Bóg, Chrystus nie mógł kłamać. Jednak w Ewangelii św. Jana Chrystus przyznaje, iż gdyby powiedział, że nie zna Ojca, byłby kłamcą, co oznacza, że nie jest logicznie wykluczone, aby nim mógł być. W ten sposób Anzelm dochodzi do wniosku, że Chrystus mógł kłamać, gdyby chciał, ale wiadomo, że nie chciał. Oznacza to, że moc Boga jest podporządkowana Jego woli. „Ostatecznie Anzelm stwierdza, że w ten sposób Chrystus mógł i nie mógł kłamać"[77]. Tak oto drugie podejście Anzelma do paradoksu wykazuje podobieństwo do tezy jaka wynika z zaproponowanego niżej rozwiązania. Co więcej, jak podaje Olszewski, w swym drugim rozwiązaniu paradoksu Anzelm wyróżnił dwa rodzaje konieczności: *necessitas praecedens* i *necessitas sequens*. Pierwsza konieczność, zgodnie z którą przyczyna powoduje z koniecznością skutek nie dotyczy Boga, jako że Bóg jest wszechmocny. Z koniecznością drugiego rodzaju mamy do czynienia wówczas, gdy sami coś postanowimy i będąc wiernymi własnym postanowieniom dotrzymujemy słowa. To właśnie ta konieczność jest odpowiedzialna za wszelkie ograniczenia wszechmocy Boga. Jak pisze Olszewski: „Koncepcja ta stanowiła punkt wyjścia do sformułowania odróżnienia *potentia*

---

[76] Olszewski, *Komentarz do Kwestii 25 „O mocy Boga"*, [w:] Tomasz, *Traktat o Bogu*, s. 839.

[77] Olszewski, *Komentarz do Kwestii 25 „O mocy Boga"*, [w:] Tomasz, *Traktat o Bogu*, s. 839.

dei absoluta od *potentia dei ordinata*, które zrobiło wielką karierę w późniejszych dyskusjach nad mocą Bożą". Dalej Olszewski stwierdza, że początkowo *potentia absoluta*, pojęcie które pojawiło się u Godfryda z Poitiers około 1210 roku, określało wszystko to, co Bóg może zrobić, jej antonimem była zaś *potentia conditionalis*. Później, zgodnie z powszechnie akceptowanym rozumieniem *potentia absoluta* obejmowała całość możliwości Boga, najczęściej z wyłączeniem działań wewnętrznie sprzecznych. *Potentia ordinata* tłumaczyła natomiast dwa rodzaje ograniczenia wszechmocy Boga. Pierwsze wyrażało się np. tym, że Bóg nie może biegać, nie może zmieniać przeszłości. Drugie ograniczenie było określone przez powszechność i konieczność prawa natury i nakazów moralnych[78]. Inaczej rozróżnienie na obie możności rozumie Jan Duns Szkot. Dla niego *potentia absoluta* jest odpowiednikiem mocy prawodawcy, suwerena, którego nie obowiązuje prawo przez siebie ustanowione, który może swoje dzieło zmienić lub uchylić. Ta możność obejmowała wszystko to, co Bóg może zrobić, ale nie chce i dlatego właśnie nie robi. *Potentia ordinata* jest wówczas mocą ujętą w karby prawa, jest jedną z możliwych decyzji Boga[79].

Przedstawiona wyżej analiza jest przykładem rozwiązania bazującego na idei rozróżnienia dwóch rodzajów mocy. Rozwiązanie tego paradoksu pokazuje więc, że jest on szczególnie doniosłym przypadkiem ekwiwokacji.

Dokładną prezentację rozwiązania paradoksu wszechmocnego Boga poprzedźmy analizą sensu następującego zdania:

Bóg nie może zgrzeszyć.

W zdaniu tym najgorsze jest to, że nie wiadomo o czym ono mówi. Przeszkodą w zrozumieniu tej tezy jest problemem typowo logicznej natury, a mianowicie wieloznaczności słowa „może". Przecież, niewiele jest słów o takiej mnogości znaczeń jak chociażby „jest", czy właśnie kluczowe, w tym przypadku, słowo „może". Odwołajmy się jeszcze raz do całkiem przyziemnego przykładu i zastanówmy się, czy człowiek, którego uważamy za dobrego może zabić swoich rodziców, których bardzo kocha. Owszem, ma ku temu sposobność, ponieważ ma dostęp do odpowiednich przedmiotów mogących być narzędziami zbrodni, bo rodzice ufając mu nie chronią się przed nim itd. Zatem może zabić. Jednocześnie bez wątpienia powiemy, że ten sam człowiek nie potrafiłby tego uczynić, bo po prostu ich kocha. Zatem nie może zabić. Trudno nie zgodzić się z tym, że oba zdania zarówno „człowiek ten może zabić swoich

[78] Olszewski, *Komentarz do Kwestii 25 „O mocy Boga"*, [w:] Tomasz, *Traktat o Bogu*, s. 843.

[79] Olszewski, *Komentarz do Kwestii 25 „O mocy Boga"*, [w:] Tomasz, *Traktat o Bogu*, s. 842, 851.

rodziców" jak i „człowiek ten nie może zabić swoich rodziców" są prawdziwe, pod jednym wszakże warunkiem, że słowo „może" w każdym ze zdań ma inne, a do tego odpowiednie znaczenie. Zatem, pod tym samym warunkiem, prawdziwe może być następujące zdanie:

Bóg może zgrzeszyć i nie może zgrzeszyć zarazem.

Oczywiście, zdanie to będzie prawdziwe tylko wówczas, gdy w każdym z dwóch wystąpień słowo „może" ma inne znaczenie. Przecież w innym sensie Bóg może zgrzeszyć, w innym zaś nie może tego uczynić.

Jasno więc widać, że przyczyną tego paradoksu jest wieloznaczność słowa „może". W zdaniu „Bóg może uczynić wszystko" słowo to występuje w innym znaczeniu aniżeli w zdaniu „Bóg nie może uczynić niczego złego". W pierwszym przypadku „może" odpowiada możności, której źródłem jest brak jakichkolwiek obiektywnych przeszkód. W drugim zaś przypadku wyrażenie „nie może" oznacza niemożność, której źródłem jest istnienie przeszkód o innym charakterze, wynikających z faktu, że Bóg jest absolutnie dobry, a więc nie chce uczynić niczego złego. Analogicznie, wspomniany przez nas człowiek obiektywnie może zabić swoich rodziców, lecz z powodów subiektywnych nigdy tego nie uczyni. Zatem, ani w przypadku rozważanego tu człowieka, ani w przypadku Boga żadnej sprzeczności nie ma. Podobny pogląd wyraża Arystoteles[80]: „Uważać też trzeba i na to, ażeby oponent nie włączył czegoś oszczerczego albo niepożądanego do zakresu „zdolności" określając na przykład »sofistę« albo »oszczercę«, albo »złodzieja« jako człowieka zdolnego do podstępnej kradzieży obcego dobra. Żaden bowiem z wymienionych ludzi nie jest tak nazwany dlatego, że jest »zdolny« pod jednym z tych względów; bo nawet bóg i człowiek uczciwy są zdolni do popełnienia złego czynu, ale przecież nie są takimi [tzn. nie są złymi]. Wszyscy bowiem ludzie źli bywają tak nazywani ze względu na swobodny wybór. A przy tym wszelka zdolność jest rzeczą pożądaną, bo nawet zdolność do czynienia źle jest pożądana, i dlatego twierdzimy, że nawet bóg i człowiek uczciwy ją posiadają; są bowiem zdolni – twierdzimy – do czynienia źle". W zacytowanym fragmencie Arystoteles zwrócił uwagę na jeszcze jeden ważny aspekt w rozważanej sprawie. Jest nim to, iż zarówno człowiek uczciwy jak i Bóg powinni pragnąć posiadania zdolności do czynienia zła. Nawet z punktu widzenia tradycji filozofii chrześcijańskiej pomysł ten wydaje się nie tylko nie absurdalny lecz głęboko uzasadniony. Zadajmy sobie następujące pytanie:

Czy ktoś kto nie posiada zdolności czynienia zła, może być dobry?

---

[80] Arystoteles, *Topiki*, IV, 126a, s. 399.

Czy faktycznie człowiek, który mimo swoich wielkich chęci czynienia zła nie uczynił niczego złego, ponieważ mu to uniemożliwiono, jest kimś dobrym? Chyba raczej nie. Podobnie, czyn popełniony poza świadomością działającego nie może być nazwany ani dobrym ani złym. Czy zatem Bóg który nie byłby w stanie zgrzeszyć zasługiwałby na miano dobrego? Chcąc być w zgodzie z założeniem, że Bóg jest doskonale dobry powinniśmy, tak jak Arystoteles, przyjąć, że

Bóg posiada zdolność czynienia zła lecz nie chce z niej skorzystać.

Powyższa teza, do której doprowadziło nas ostatnie z przedstawionych rozwiązanie paradoksu, nie jest niczym nowym w historii pojęcia „wszechmocy"[81]: „Akwinata dowodzi, że »ponieważ Bóg działa przez wolę, nie może uczynić tych rzeczy, których nie może chcieć« że »przedmiotem woli jest dobro poznane«; że »wola może skłaniać się do zła, tylko o ile jest ono jej jako dobro przedstawione. To zaś może się zdarzyć tylko przez pomyłkę. A przecież w poznaniu bożym nie może być pomyłki [...] Nie może więc wola Boża skłaniać się do zła«. Na podstawie tego wszystkiego Tomasz dochodzi do wniosku, że Bóg nie może grzeszyć. [...] Ale uważa on, że jest to całkowicie zgodne z tym, iż Bóg jest wszechmocny".

Tak więc, różne na pozór rozwiązania Tomasza z Akwinu oraz Anzelma z Canterbury pozostają w zgodzie z wyżej zaproponowanym przedstawieniem paradoksu wszechmocnego Boga jako problemu związanego z wieloznacznością takich słów jak „może", czy też „możność". Zatem argumentację tego paradoksu należy zaliczyć do prostej ekwiwokacji. Jednak wyjątkowa waga tego paradoksu, mająca swoje odzwierciedlenie w literaturze filozoficznej, sprawiła, że został on omówiony w odrębnym paragrafie.

2.7. PARADOKS KAMIENIA, czyli próba dowodu na nieistnienie Boga

Paradoks kamienia zajmuje absolutnie wyjątkową pozycję wśród paradoksów logicznych. Jest on bowiem próbą dowodu na nieistnienie istoty wszechmocnej, a więc tym samym na nieistnienie Boga. Paradoks ten należy więc do tych dylematów logicznych, które potrafią wzbudzić szczególne emocje, jako że dotykają zagadnień ściśle związanych z tym, co określamy mianem światopoglądu. Wiadomo, że poza jednym wyjątkiem, dowodów na nieistnienie jakiegoś obiektu nie przeprowadza się. Tym wyjątkiem jest dowód nie wprost pokazujący nieistnienie obiektów sprzecznych, czyli takich,

---

[81] Swinburne, [1995], s. 221. Swinburne cytuje *Summa contra Gentiles*, II.25.20.

których założenie istnienia prowadzi do sprzeczności, czyli do jednoczesnej akceptacji jakiegoś zdania i jego zaprzeczenia. Za pojęcie sprzeczne uważa się na przykład wyrażenie „żonaty kawaler", czy „kwadratowe koło". Przeprowadźmy teraz prosty dowód nie wprost na nieistnienie żonatego kawalera.

1. Istnieje żonaty kawaler (założenie dowodu nie wprost)
2. *A* jest żonatym kawalerem (z 1)
3. *A* jest żonaty i *A* jest kawalerem (z 2)
4. *A* jest żonaty (z 3)
5. *A* jest kawalerem (z 3)
6. *A* ma żonę (z 4)
7. *A* nie ma żony (z 5)
8. Nieprawda, że *A* ma żonę (z 7)
9. *A* ma żonę i nieprawda, że *A* ma żonę (z 6 i 8)
10. Nieprawda, że (*A* ma żonę i nieprawda, że *A* ma żonę) (prawda logiczna)
11. Nieprawda, że istnieje żonaty kawaler (1 → 10)

Jeśli przesłanka 1 jest prawdziwa, to prawdziwe jest każde zdanie dowodu, a więc w szczególności prawdziwe jest zdanie 9. Lecz zdanie 9, jako że jest sprzecznością, w oczywisty sposób jest fałszywe. Zatem przesłanka 1 również jest fałszywa co oznacza, że żonaci kawalerowie nie istnieją.

Argumentacja paradoksu kamienia również ma postać dowodu nie wprost, chociaż w przeciwieństwie do wyżej przedstawionego, dowód ten jest rozgałęziony. Przypomnijmy więc argumentację tego paradoksu:

Paradoks kamienia

1 Istnieje wszechmocny Bóg (założenie dowodu nie wprost)

2. Albo Bóg może stworzyć kamień, którego nie może udźwignąć, albo Bóg nie może stworzyć kamienia, którego nie może udźwignąć (prawda logiczna)

3.1. Bóg może stworzyć kamień, którego nie może udźwignąć	4.1. Bóg nie może stworzyć kamienia, którego nie może udźwinąć
3.2. Istnieje coś czego Bóg nie może uczynić (z 3.1)[82]	4.2. Istnieje coś czego Bóg nie może uczynić (z 4.1)
3.3. Bóg nie jest wszechmocny (z 3.2)	4.3. Bóg nie jest wszechmocny (z 4.2)

5. Bóg nie jest wszechmocny (z 2, 3.1 → 3.3, 4.1 → 4.3)

6. Nieprawda, że istnieje wszechmocny Bóg (1 → 5)

[82] Prezentacja tego paradoksu powtarza błąd dość powszechnie występujący w literaturze poświęconej temu zagadnieniu. Błąd ten zostanie omówiony w dalszej części tego paragrafu, gdyż jego usunięcie jest zarazem rozwiązaniem paradoksu.

Ponieważ jednym z atrybutów Boga jest wszechmoc, każdy dowód na nieistnienie istoty wszechmocnej jest dowodem na nieistnienie Boga. Czy jednak przedstawione wyżej rozumowanie można faktycznie nazwać dowodem? Czy każdy krok w powyższej argumentacji jest poprawny?

Niezwykle proste, a zarazem wyjątkowo logiczne rozwiązanie tego jak i każdego innego, możliwego do pomyślenia dylematu związanego z pojęciem „wszechmocy bożej" wynika z poglądów takich filozofów jak, wspomniani już wcześniej, Piotr Damiani, Jan Duns Szkot[83], czy Kartezjusz[84]. Wszechmoc Boga nie jest ograniczona jedynie do działań niesprzecznych, czyli takich których skutki opisywane są sprzecznym zbiorem zdań. To my, ludzie nie jesteśmy w stanie wyobrazić sobie sytuacji sprzecznych, a więc takich jak dla przykładu istnienie góry bez doliny. Fakt ten nie świadczy jednak o tym, że i Bóg jest w podobny sposób ograniczony. W szczególności więc Bóg może sprawić, aby dwa zdarzenia opisane wzajemnie sprzecznymi zdaniami zaistniały w sposób jednoczesny. Co więcej, skoro Bóg stworzył świat wraz z jego prawami, to może te prawa zmienić. Przy takim podejściu, nie ma właściwie potrzeby analizować przedstawionego wyżej argumentu przeciwko istnieniu istoty wszechmocnej, bo w przypadku gdy wnioskujemy na temat Boga każda trudność musi okazać się problemem jedynie dla naszego, ludzkiego pojmowania, nie jest zaś jakimkolwiek problemem dla Boga.

Innego zdania jest Bertrand Russell[85]: „Roszczenie jednak, by Bóg przekraczał zasadę sprzeczności, wywołuje pewien kłopot z jego wszechmocą. Jeżeli jest On wszechmocny, to czy nie mógłby na przykład stworzyć kamienia tak ciężkiego, że sam nie byłby w stanie go podnieść? Musi móc tego dokonać, w przeciwnym razie nie byłby wszechmocny, skąd wynika, że zarazem mógłby i nie mógłby uporać się z kamieniem. Albo więc wszechmoc boska jest pojęciem wewnętrznie sprzecznym, albo odrzucimy zasadę sprzeczności. Wybierając jednak drugi człon alternatywy odrzucamy wszelkie myślenie dyskursywne. Toteż teorię Piotra Damiani uznano w końcu za absurdalną". Ten dość zwięzły tekst wymaga jednak kilku sprostowań. Po pierwsze, jeśli faktycznie założymy, że Bóg może przekraczać zasadę sprzeczności, to musimy uznać, że żadna sprzeczność Boga nie krępuje. Przy takim założeniu, nie można zatem stosować zasady sprzeczności w analizowaniu tego co Bóg może, a czego nie może uczynić. To, że my nie jesteśmy w stanie tego pojąć stanowi zupełnie inną kwestię. Nie potrafimy przecież wyobrazić sobie jakiejkolwiek sprzecznej

---

[83] Przypadek Dunsa Szkota nie jest w kwestii wszechmocy bożej tak jednoznaczny jak Piotra Damianiego. Odróżnienie przez Szkota *potentia ordinata* od *potentia absoluta* sprawia, że jego poglądy w swej części przypominają te, zgodnie z którymi wszechmoc podlega zasadzie sprzeczności.

[84] Poglądy tych filozofów na wszechmoc Boga zostały omówione w paragrafie 4.6.

[85] Russell, [1995], s. 149.

sytuacji, nie możemy też racjonalnie myśleć bez poszanowania zasady sprzeczności. Czy zatem byt podlegający zasadzie sprzeczności może orzekać coś sensownego o bycie, który tej zasadzie nie podlega? Jest więc w orzeczeniu Russella istotna niekonsekwencja. Przyjmuje on bowiem, że Bóg jest wszechmocny w sposób nieskrępowany logiką. Opierając się na tej przesłance wnioskuje, że Bóg może w takim razie stworzyć kamień, którego nie będzie mógł podnieść, to zaś jest dla Russella podstawą do stwierdzenia, że jest coś czego Bóg nie może uczynić. Niestety, wyraźnie widać, że w ostatnim kroku rozumowania Russell stosuje wobec Boga zasadę sprzeczności, którą przecież wcześniej uznał za niekrępującą Boga, zwłaszcza że sam wyraźnie stwierdza[86]: „skąd wynika, że zarazem mógłby i nie mógłby uporać się z kamieniem". Na koniec nie sposób zauważyć, że Russell sam sobie zaprzeczył twierdząc jednocześnie, że: „Roszczenie jednak, by Bóg przekraczał zasadę sprzeczności, wywołuje pewien kłopot z jego wszechmocą" oraz „Albo więc wszechmoc boska jest pojęciem wewnętrznie sprzecznym, albo odrzucimy zasadę sprzeczności". Z drugiego zdania wynika, że albo musimy uznać, że „wszechmoc" jest pojęciem sprzecznym, albo Bóg nie jest skrępowany zasadą sprzeczności, czyli odrzucając zasadę sprzeczności możemy uznać, że „wszechmoc" nie jest pojęciem sprzecznym. Jednak z pierwszego zdania wynika, że to właśnie założenie iż Bóg nie jest skrępowany zasadą sprzeczności implikuje kłopoty z Jego wszechmocą. Czy te kłopoty miałoby sprawiać stwierdzenie niesprzeczności pojęcia „wszechmocy"[87]?

Można więc wbrew Russellowi[88] przyjąć, że założenie iż Bóg jest ponad zasadą sprzeczności nie tylko nie stanowi problemu logicznego, lecz w sposób banalny rozwiązuje każdy logiczny dylemat dotyczący pojęcia „wszechmocy" łącznie z paradoksem kamienia. Nie sposób jednak nie przyznać Russellowi racji w tym względzie, że odrzucając zasadę sprzeczności odrzucamy wszelkie myślenie dyskursywne. Przy takim założeniu pozostaje więc zastąpić mówienie o Bogu, milczeniem. Nie byłby to przypadek odosobniony w historii filozofii, kiedy postawą racjonalną okazałoby się powstrzymanie się od omawiania jakiejś kwestii.

Ze względu na zależność wszechmocy od zasady sprzeczności można wyróżnić dwa przypadki:

---

[86] Pozostaje jeszcze wątpliwa kwestia, którą Russell potraktował jednym wydawać by się mogło rozstrzygającym stwierdzeniem. Chodzi o problem następujący: czy faktycznie możność stworzenia przez Boga kamienia, którego sam nie będzie mógł podnieść, świadczy o tym, że Bóg nie jest wszechmocny? Ta wcale nieoczywista teza zostanie przedyskutowana w dalszej części tego paragrafu.

[87] Warto dodać, że jeśli Bóg jest ponad zasadą sprzeczności, to zarówno stwierdzenie, że pojęcie „wszechmocy bożej" jest sprzeczne, jak i stwierdzenie, że jest niesprzeczne nie ma sensu.

[88] A może i w zgodzie z Russellem, wszystko zależy od tego, które z jego zdań weźmiemy pod uwagę.

1. Wszechmoc Boga nie jest ograniczona zasadą sprzeczności;
2. Wszechmoc Boga jest ograniczona przez zasadę sprzeczności.

Ad 1. Omówiony wcześniej przypadek pierwszy oznacza, że Bóg może uczynić absolutnie wszystko, łącznie z działaniem sprzecznym, czyli takim, którego skutki opisywane są przez sprzeczny zbiór zdań. W tej sytuacji nie ma sensu jakikolwiek, logicznej natury zarzut przeciw wszechmocy Boga.

Analiza paradoksów wymierzonych w pojęcie „wszechmocy" ma więc sens jedynie w drugim przypadku:

Ad 2. Bóg będąc absolutną przyczyną wszystkiego nie może być z konieczności ograniczony czymkolwiek, co nie jest Nim samym – nic nie może być wobec Boga „wcześniejsze" w jakimkolwiek sensie. Niesprzeczność nie będąc więc atrybutem Boga nie może być „wcześniejsza" od Boga, a zatem musi istnieć przyczyna ograniczenia Boga przez zasadę sprzeczności. Co więcej, przyczyną tą może być tylko sam Bóg. Wszechmoc Boga jest więc tu ściśle związana z odróżnieniem *potentia dei absoluta* od *potentia dei ordinata*. Zatem, Bóg stworzył zasadę sprzeczności i jej przestrzega, ale równie dobrze mógł w miejsce tej zasady stworzyć inną.

Ponieważ w pierwszym przypadku wszelki logiczny dyskurs na temat paradoksu kamienia traci sens, w pełni szanując postawę powstrzymania się od głosu w niektórych kwestiach i w obliczu niektórych problemów, przyjmijmy jednak takie rozumienie wszechmocy Boga, które umożliwiłoby analizę problemu wywołanego przez paradoks kamienia. Załóżmy zatem, że wszechmoc boża podlega zasadzie sprzeczności. Tak więc z takich, czy innych względów Bóg postępuje wyłącznie niesprzecznie.

Mimo iż prawdopodobnie Tomasz z Akwinu[89] nie pozostawił tekstu omawiającego ten paradoks, spróbujmy przeanalizować takie rozwiązanie tego dylematu, które byłoby zgodne z poglądami Tomasza. W *Artykule 3, Kwestii 25, Summy teologii*, czytamy[90]: „[..] mówimy, że to, co leży w mocy człowieka, jest możliwe dla człowieka. Nie można zatem twierdzić, że nazywa się Boga wszechmocnym dlatego, że może zrobić to wszystko, co jest możliwe dla natury stworzonej [...]". Zdaniem Tomasza, to co może uczynić człowiek może nie być wykonalne przez Boga, chociaż fakt ten wcale nie świadczy o tym, że Bóg nie jest wszechmocny. Tak więc, Bóg nie może doznawać, poruszać się w przestrzeni itp. Ponadto, Bóg nie może czynić niczego, co powodowałoby sprzeczność wewnętrzną w obrębie Jego natury[91]. Biorąc to wszystko pod uwagę,

[89] Olszewski błędnie przytacza opinię MacInerny'ego jakoby autorem paradoksu kamienia był R. Swinburne (*Komentarz do Kwestii 25 „O mocy Boga"*, [w:] Tomasz, *Traktat o Bogu*, s. 846).

[90] Tomasz, *Traktat o Bogu*, s. 372.

[91] Olszewski, *Komentarz do Kwestii 25 „O mocy Boga"*, [w:] Tomasz, *Traktat o Bogu*, s. 845.

zainspirowany przez Ralpha MacInerny'ego[92] Olszewski stwierdza[93]: „Sam Tomasz prawdopodobnie, gdyby spotkał się z takim twierdzeniem [paradoksem kamienia, przyp. autora], uznałby, że możliwość takiego działania jest wykluczona ze względu na boską niecielesność, natomiast zastosowanie twierdzenia ogólniejszego, że Bóg nie może tego, czego uczynienie powodowałoby sprzeczność w Jego naturze, eliminuje cały typ paradoksów podobnych do tego z kamieniem". Oznacza to, że wszelkie kopie paradoksu kamienia, łącznie z tą rozważaną dalej, a dotyczącą rozwiązywalnego chociaż bardzo trudnego zadania matematycznego, przestają w świetle nauki Tomasza przedstawiać jakąkolwiek trudność. Według Tomasza, Bóg nie może stworzyć kamienia, którego nie będzie mógł udźwignąć, bo byłoby to sprzeczne z Jego naturą[94].

Interesującą analizę pewnej, raczej zniekształconej wersji paradoksu kamienia znajdujemy u średniowiecznego myśliciela Richarda Kilvingtona. Uważany za jednego z twórców szkoły *oksfordzkich kalkulatorów*[95], dużo uwagi poświęcił pojęciu „nieskończoności". Wychodząc od tezy głoszącej istnienie różnych nieskończoności, z których jedne są większe inne zaś mniejsze, dokonał ich podziału na nieskończoność „po prostu" (*infinitum simpliciter*) oraz trzy nieskończoności „pod pewnym względem" (*infinitum secundum quid*), czyli pod względem wielkości, jakości i liczby. Naturalnie, nieskończoność *simpliciter* przysługuje wyłącznie Bogu. Jednak w przeciwieństwie do Arystotelesa wszystkie nieskończoności są u Kilvingtona aktualne. Wychodząc od takich założeń, Kilvington zanalizował paradoks kamienia traktując go jako jeden z możliwych przykładów argumentacji przeciw istnieniu nieskończoności „pod względem jakości". Robert Podkoński relacjonuje tę analizę tłumacząc tekst Kilvingtona[96]: „Przywołana jest w nim paradoksalna sytuacja z nieskończenie ciężkim ciałem, które nie może zostać poruszone ani przez anioła, ani nawet przez Boga, chociaż każdy z nich posiada moc nieskończoną, ponieważ – zakłada Kilvington – ciało może zostać poruszone tylko wtedy, gdy siła przekracza opór. W tym wypadku zaś siła napędzająca (*potentia motiva*) jest

---

[92] MacInerny, [1986] s. 440–444.

[93] Olszewski, *Komentarz do Kwestii 25 „O mocy Boga"*, [w:] Tomasz, *Traktat o Bogu*, s. 846.

[94] Według Olszewskiego, każdy dylemat wzorowany na paradoksie kamienia, albo mylnie zakładałby, że Bóg musi mieć moc właściwą swoim stworzeniom, albo wiązałby się z wykonaniem zadania sprzecznego z naturą Boga. Ponieważ niecielesność Boga nie musi mieć związku z mocą podnoszenia kamieni, inaczej niż Olszewski i MacInerny zakładamy, że paradoks kamienia stawia przed Bogiem wykonanie zadania sprzecznego z naturą Boga, co sprowadza nas do problemu uczynienia przez Boga czegoś złego, patrz paragraf 4.6.

[95] Kalkulatorami nazywano działających w pierwszej połowie czternastego wieku filozofów przyrody, którzy jako pierwsi w średniowieczu w swoich pracach wykorzystywali zależności matematyczne, w postaci rachunku proporcji, Podkoński, [2000a], s. 160.

[96] Podkoński, [2000a], s. 161–162.

równa sile oporu (*potentia resistiva*) tego ciała – obie są nieskończone. Bóg zatem mógłby stworzyć coś, czego nie byłby w stanie przesunąć. [...] Wykorzystując wypowiedzianą na samym początku swych rozważań tezę, iż jedna nieskończoność może być większa od drugiej, stwierdził, że nieskończona moc wspomnianego anioła, czy też Boga może być większa od siły oporu nieskończenie ciężkiego ciała".

Niestety, łatwo zauważyć, że rozważany przez Kilvingtona problem jak również jego rozwiązanie chociaż wprost kojarzą się z paradoksem kamienia, różnią się od niego w istotny sposób. Po pierwsze paradoks kamienia nie jest związany z pojęciem nieskończoności, zwłaszcza gdy chodzi o nieskończoność wagi jakiegoś ciała. Sednem tego dylematu jest przecież to czy Bóg może sprawić, że jakiś kamień będzie dla niego niemożliwy do podniesienia. Nie ma przy tym najmniejszego znaczenia, czy waga tego kamienia jest ogromna, czy też może zupełnie niewielka. Po drugie, zaproponowane przez Kilvingtona rozwiązanie problemu nie jest rozwiązaniem paradoksu. Pokazuje on bowiem jedynie to, że nieskończenie silny Bóg stwarzając nieskończenie ciężkie ciała, może je podnieść. Tymczasem, pytanie o wewnętrzną niesprzeczność pojęcia „wszechmocy", będące sednem paradoksu pozostaje nadal bez odpowiedzi.

Wydaje się, że do istoty paradoksu kamienia dotarł John L. Mackie w opublikowanej przez siebie w roku 1955 pracy *Evil and Omnipotence*. Próbuje w niej dowieść, iż połączenie wszechmocy bożej z boską nieskończoną dobrocią nie można pogodzić z istniejącym na świecie złem. W wyniku swoich rozważań Mackie dochodzi do wniosku, że istotną rolę w analizie poruszanego przez niego zagadnienia odgrywa kwestia wolnej woli człowieka, co doprowadza go do konieczności zmierzenia się z paradoksem kamienia[97]: „Nasuwa się tutaj problem, który nazywam Paradoksem Wszechmocy: czy wszechmocny byt może tworzyć rzeczy, które nie jest później w stanie kontrolować? Albo, co jest praktycznie równoważne, czy wszechmocny byt może ustanawiać prawa, których musi następnie przestrzegać? (Są to sformułowania praktycznie równoważne, ponieważ każde takie prawo można traktować jako wyłączenie pewnych rzeczy spod kontroli Boga i *vice versa*). Sformułowanie drugie ma pewien związek z sugestiami, o których już wspominałem, iż wszechmocny Bóg tworzy zasady logiki lub prawa przyczynowe, które nakładają nań pewne ograniczenia". W dalszym ciągu Mackie stwierdza, iż „nie ulega wątpliwości, że mamy tu do czynienia z paradoksem: ani twierdząca, ani przecząca odpowiedź na te pytania nie może być zadowalająca. Jeżeli odpowiemy »tak«, implikuje to, że jeśli Bóg istotnie tworzy rzeczy, których nie może kontrolować, bądź ustanawia prawa, które narzucają mu ograniczenia, z chwilą, gdy je tworzy, przestaje być wszechmocny: istnieją bowiem odtąd rzeczy, których nie może kontrolować, bądź ustanawia prawa,

---

[97] Fragment w tłumaczeniu T. Baszniaka, Mackie, [1955], s. 229.

które narzucają mu ograniczenia, z chwilą, gdy je tworzy, przestaje być wszechmocny: istnieją bowiem odtąd rzeczy, których nie może zrobić. Jeśli jednak odpowiemy »nie«, to stwierdzamy wprost, że są rzeczy, których Bóg w ogóle nie może uczynić, a to znaczy, że nigdy nie jest wszechmocny"[98]. Paradoks ten Mackie próbuje rozwiązać na wzór innego paradoksu, zwanego przez siebie *Paradoksem władzy najwyższej*[99]: „czy prawowita władza najwyższa może stanowić prawa ograniczające jej przyszłe uprawnienia legislacyjne?" Posługując się przykładem parlamentu brytyjskiego rozważa możliwość ustanowienia przez ten parlament w 1899 roku, w którym był władzą najwyższą w Australii, ustawy pozbawiającej go tej władzy w 1933 roku. Mackie uważa, iż tak jak w przypadku poprzedniego paradoksu i tutaj, zarówno twierdząca jak i przecząca odpowiedź nie może być zadowalająca. Odpowiedź twierdząca oznaczałaby bowiem to, iż dopuszczamy możliwość ustanowienia przez parlament prawa, zgodnie z którym przestaje on być władzą najwyższą. Odpowiedź negatywna byłaby stwierdzeniem, iż istnieje prawo, które mimo iż nie jest logicznie niedorzeczne nie może zostać przez władzę najwyższą uchwalone, a zatem władza ta nie jest najwyższa. Rozwiązanie paradoksu władzy najwyższej jest, zdaniem Mackiego, możliwe jeśli tylko dostrzeżemy wieloznaczność, a właściwie w tym konkretnym przypadku dwuznaczność, terminu „prawo". Odróżnijmy bowiem prawo pierwszego rzędu, które reguluje działania jednostek i wszystkich ciał z wyjątkiem legislatury, od prawa drugiego rzędu, regulującego działania legislatury. Wówczas „władza najwyższa" staje się także pojęciem dwuznacznym. Władza najwyższa pierwszego rzędu, oznaczona przez Mackiego symbolem (1), jest nieograniczonym uprawnieniem do stanowienia praw pierwszego rzędu, podczas gdy władza najwyższa drugiego rzędu (2), jest nieograniczonym uprawnieniem do stanowienia praw drugiego rzędu. Twierdząc więc, że parlament ma władzę najwyższą możemy mieć na myśli to, że ma on władzę (1), lub władzę (2). Nie można jednak, zdaniem Mackiego, bez popadania w sprzeczność zakładać, że obecny parlament ma władzę (2) oraz że każdy parlament ma władzę (1). Skoro bowiem obecny parlament ma władzę (2), to korzystając z niej może pozbawić przyszłe parlamenty władzy (1). Sprzeczność pojawia się więc w pewnym punkcie czasowym, w którym dany przyszły parlament będąc władzą najwyższą w sensie (1) zarazem nie jest tą władzą, a to na mocy decyzji wcześniejszego parlamentu, który właśnie skorzystał ze swej władzy typu (2). Wniosek Mackiego jest więc następujący[100]: „Paradoks ten dowodzi, że nie możemy przypisywać władzy najwyższej w obu sensach żadnej ciągłej instytucji".

---

[98] Fragment w tłumaczeniu T. Baszniaka, Mackie, [1955], s. 229.
[99] Fragment w tłumaczeniu T. Baszniaka, Mackie, [1955], s. 229.
[100] Fragment w tłumaczeniu T. Baszniaka, Mackie, [1955], s. 231.

Trudno jednak zgodzić się z takim rozumowaniem. Przyjmijmy bowiem, że dany parlament korzystając ze swojej władzy typu (2) przyjął uchwałę na mocy której przyszły parlament będzie miał władzę najwyższą tylko do chwili t_0, ale już nie w chwili t_0. Oznacza to, że posługując się matematycznym pojęciem przedziału prawostronnie otwartego możemy bez popadania w sprzeczność stwierdzić, że przyszły parlament ma władzę najwyższą w przedziale czasowym $[t_1, t_0)$, nie ma natomiast tej władzy w jakimkolwiek przedziale czasowym $[t_0, t_2]$. Oczywiście, t_1 jest chwilą zaprzysiężenia nowego parlamentu, zaś t_2 jest jakąkolwiek chwilą późniejszą wobec chwili t_0. Jak widać, zarówno rozumowanie Mackiego jak i powyższe zakłada, że każdy parlament ustanawia prawo niesprzeczne z obecnie istniejącym. Dlatego też w obu rozważaniach, wykluczona jest możliwość skorzystania przez nowy parlament z władzy typu (2) w celu przedłużenia swojego istnienia.

Widząc podobieństwo paradoksu kamienia do paradoksu władzy najwyższej Mackie proponuje, analogiczne do wcześniej przez siebie przedstawionego, „rozwiązanie" pierwszego z dwóch wspomnianych paradoksów[101]. Należy więc dokonać rozróżnienia wszechmocy pierwszego rzędu (1') od wszechmocy rzędu drugiego (2'). Istota wszechmocna dysponując wszechmocą (1') ma nieograniczoną moc działania, dysponując natomiast wszechmocą (2') istota ta ma nieograniczoną moc rozstrzygania, jakie zdolności do działania miałyby przysługiwać rzeczom. Jeśli więc przyjmiemy, że Bogu zawsze przysługuje wszechmoc (1'), nie możemy bez popadnięcia w sprzeczność stwierdzić, że istnieje jakikolwiek byt, który może podejmować niezależne od Boga działania. Twierdząc natomiast, że Bogu przysługuje w danej chwili wszechmoc typu (2'), i że Bóg wykorzystuje ją w celu udzielenia niektórym rzeczom zdolności do niezależnego działania, musimy dojść do wniosku że od wspomnianej chwili Bogu nie przysługuje wszechmoc typu (1'). Mackie uważa, że sednem tego dylematu jest ciągłość istnienia Boga. Można by się więc uporać z tym problemem odrzucając tezę głoszącą, że Bóg jest bytem ciągłym i że Jego działaniom można przypisywać jakiekolwiek określenia czasowe. Takie podejście skazuje nas jednak na inną trudność[102]: „nie można jednak [wówczas, przyp. autora] nadać żadnego sensu twierdzeniu, że Bóg stworzył ludzi, których wola jest tak dalece wolna, że nie może ich kontrolować. Sytuując Boga poza czasem można uchylić paradoks wszechmocy, ale nie da się w ten sposób uratować rozwiązania problemu zła, które odwołuje się do wolnej woli; nie można wówczas również twierdzić, że wszechmocny Bóg sam narzuca sobie ograniczenia stanowiąc prawa przyczynowe bądź zasady logiki".

---

[101] W zdaniu tym, słowo „rozwiązanie" jest wzięte w cudzysłów, ponieważ propozycja Mackiego nie jest *de facto* rozwiązaniem paradoksu kamienia. Jego analiza kończy się bowiem dokładnie tym samym wnioskiem, co argumentacja samego paradoksu, czyli stwierdzeniem sprzeczności, do której dochodzimy zakładając istnienie istoty wszechmocnej.

[102] Fragment w tłumaczeniu T. Baszniaka, Mackie, [1955], s. 231.

W taki sposób Mackie dochodzi do wniosku w pełni zgodnego z argumentacją paradoksu kamienia, a stwierdzającą sprzeczność pojęcia „wszechmocy”[103]: „Abstrahując od problemu zła, paradoks wszechmocy dowodzi, że wszechmoc Boga musi być, w każdym razie, wszechmocą pod jakimś względem ograniczoną; że wszechmocy nie obwarowanej zastrzeżeniami nie można przypisywać żadnemu bytowi, który trwa w czasie. Jeśli jednak Bóg i jego działania nie istnieją w czasie, czy można przypisywać mu sensownie wszechmoc lub jakieś inne moce?”

Zreferowane wyżej podejście Mackiego trudno byłoby nazwać rozwiązaniem paradoksu, ponieważ jest niejako jego bardzo precyzyjnym powtórzeniem. Krótka i bardzo prosta argumentacja tego paradoksu jest tu zastąpiona dość szczegółowym rozumowaniem prowadzącym do tej samej tezy, która stwierdza, że pojęcie istoty wszechmocnej nie jest zgodne z zasadą niesprzeczności. Mimo swych trafnych uściśleń analizowanego przez siebie problemu, Mackie nie dostrzegł pewnych wątków, których uwzględnienie może rzucić nowe światło na ten ważny, światopoglądowy dylemat. Rozwiązanie jakie zostanie zaproponowane w dalszej części rozdziału, uwzględnia dokonane już przez Mackiego ustalenia, idzie jednak trochę dalej dostrzegając potrzebę uwzględnienia jeszcze jednej, ważnej wieloznaczności wiążącej się, nie tyle, z samym pojęciem wszechmocy, co z argumentacją paradoksu kamienia. Aby jednak analiza paradoksu była pełna, przypomnijmy najpierw istniejące już w literaturze propozycje.

Współcześni autorzy niżej prezentowanych poglądów jednomyślnie wskazywali na to, iż kluczowe dla rozwiązania paradoksu jest jego sformułowanie. Dlatego też, omawiając istniejące podejścia do paradoksu będziemy przytaczać paradoksalną argumentację w wersji analizowanej przez poszczególnych autorów. Niestety, zaskakującym jest fakt, iż pewne logiczne uściślenia jakich dokonał Mackie analizując paradoks kamienia pozostały bez wpływu na pojawiające się kolejno propozycje. Można więc przyjąć, że pod niektórymi względami poniższe podejścia nie tylko, że nie posuwają rozważań naprzód, lecz są wręcz krokiem wstecz w analizie paradoksu kamienia. Dla przykładu można zauważyć, że dość powszechnie autorzy poniższych propozycji nie dostrzegają tego, co u Mackiego jest oczywiste, a mianowicie, że możność stworzenia rzeczy, której Bóg nie może kontrolować oznacza tylko tyle, że jeśli Bóg taką rzecz stworzy, to dopiero wtedy nie będzie mógł jej kontrolować. Niestety, wbrew temu oczywistemu, wydawać by się mogło, rozumieniu zdania „Bóg może stworzyć kamień, którego nie może [w sensie, nie będzie mógł] udźwignąć”, już sama prawdziwość tego właśnie zdania ma oznaczać to, że Bóg już nie jest wszechmocny. Staje się więc widoczne to, że autorzy pojawiających się w odpowiedzi na artykuł Mackiego prac nie trafiają w sedno paradoksu kamienia.

---

[103] Fragment w tłumaczeniu T. Baszniaka, Mackie, [1955], s. 232.

Od samego początku lat sześćdziesiątych publikowane były artykuły, których autorzy próbowali zmierzyć się z paradoksem kamienia tak, aby pokazać niesprzeczność pojęcia „wszechmocy bożej". W odpowiedzi na, przypomniany wyżej, artykuł Mackiego, w roku 1960, G. B. Keene opublikował własne rozwiązanie paradoksu kamienia, który wysłowił następująco[104]:

A

Albo wszechmocna istota może stwarzać rzeczy nad którymi nie może panować, albo istota ta nie może stwarzać takich rzeczy nad którymi nie może panować. Jeśli wspomniana istota może stwarzać takie rzeczy, to istnieje coś nad czym istota ta nie panuje. W takim przypadku istota wszechmocna nie jest wszechmocna, co jest niemożliwe. Zatem, wszechmocna istota nie może stwarzać rzeczy nad którymi nie może panować. Zatem, istota ta nie jest wszechmocna. Zatem, ponownie doszliśmy do wniosku, że istota wszechmocna nie jest wszechmocna.

Już samo powyższe sformułowanie paradoksu kamienia jest paradoksalne, zawiera bowiem dość niezwykły jak na pracę z dziedziny logiki błąd, będący zresztą raczej stałym elementem publikacji, także innych, autorów piszących o paradoksie kamienia[105]. Tak jak pozostali, dalej cytowani autorzy, Keene wyraźnie nie dostrzega tego błędu. Co więcej, stwierdza, iż nie zamierza krytykować tej części argumentacji, którą wyraża niefortunne zdanie „Jeśli wspomniana istota może stwarzać takie rzeczy, to istnieje coś nad czym istota ta nie panuje". Najwyraźniej, zdanie to nie budzi jego wątpliwości. Keene kwestionuje natomiast to, że ze zdania Z_1 = „*X* nie może stwarzać rzeczy nad którymi *X* nie może panować" wynika jakieś ograniczenie możliwości stwarzania rzeczy przez *X*. Zauważając, że zdanie Z_1 może zostać zastąpione innymi zdaniami, np. Z_2 = „Cokolwiek *X* może stworzyć, *X* może nad tym panować", czy Z_3 = „Nie istnieje rzecz, o której można by prawdziwie orzec, że *X* ją może stworzyć oraz że *X* nie może nad nią panować" zachowującymi sens Z_1, dochodzi do wniosku, że ze zdania Z_1 (czyli również ze zdań Z_2 i Z_3) nie wynika nic, co dotyczyłoby wszechmocy *X*–a. Uważa, że ta właśnie obserwacja, przeczy wyżej przytoczonej tezie Mackiego.

---

[104] Keene, [1960], s. 74.

[105] „Either an omnipotent being can make things which he cannot control, or an omnipotent being cannot make things which he cannot control. If he can make such things *then there is* something which he cannot control; in which case an omnipotent being is not omnipotent", Keene, [1960]. To, że Bóg może stworzyć jakąś rzecz wcale nie oznacza, że ta rzecz istnieje. Rzadko w którym systemie modalnym przyjmuje się, że formuła $\Diamond\alpha \rightarrow \alpha$ jest tezą. Przyjęcie tej formuły za tezę najczęściej wiąże się z tak zwaną trywializacją operatora możliwości. Jeśli bowiem tezą systemu jest ponadto $\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$, to tezą tego systemu jest równoważność $\alpha \leftrightarrow \Diamond\alpha$, co oznacza, że możliwość prawdziwości zdania została utożsamiona z prawdziwością tego zdania.

Pogląd Keene'go spotkał się w roku 1961 ze stanowczym sprzeciwem Bernarda Mayo, który powtórzył rozumowanie Keene'go dla innego zdania: „Ja nie mogę zrobić papierowego samolotu". Chociaż, zdanie to ma swoje dwa odpowiedniki zachowujące jego sens: „Cokolwiek mogę zrobić, nie jest papierowym samolotem", czy „Nie istnieje rzecz, o której można by prawdziwie orzec, że ja ją mogę zrobić oraz że jest to papierowy samolot", byłoby absurdem twierdzić, że którekolwiek z tych trzech zdań implikuje, że moje możliwości tworzenia rzeczy są nieograniczone[106]. Dalej Mayo zastanawia się, czy istnieje jakiś powód, aby analogia między podanymi przez niego zdaniami a zdaniami rozważanymi przez Keene'a nie zachodziła. Okazuje się, że Mayo dostrzega taki warunek, którego spełnienie sprawia, że rozważane dwa przypadki przestają być analogiczne. Warunkiem tym jest podstawienie w przykładzie Keene'a za zmienną X wyrażenia „istota wszechmocna". Wówczas, w opinii Mayo, pytanie o to, czy X może stworzyć rzecz, nad którą sam nie może panować jest pytaniem o to, czy Bóg może sprawić, że zdanie wewnętrznie sprzeczne może stać się prawdziwym. Podana wyżej argumentacja A nie jest więc żadnym kontrargumentem wymierzonym w prawdziwość zdania stwierdzającego istnienie istoty wszechmocnej. Na wzór argumentacji A można, zdaniem Mayo, sformułować inne, również pozostające bez znaczenia dla analizy pojęcia wszechmocy[107]: „Albo istota wszechmocna może stworzyć kwadratowe koło, albo nie może. Jeśli może, to pewne kwadraty są okrągłe, a jeśli nie może, to nie jest wszechmocna". I znów, mamy ten sam wciąż niezauważony problem: czy faktycznie, jeśli istota wszechmocna może stworzyć kwadratowe koło, to jakieś kwadratowe koła już istnieją, czyli już zostały stworzone tylko dlatego, że istota wszechmocna mogła je stworzyć?

W roku 1967 pojawił się artykuł *The Paradox of the Stone*, w którym C. Wade Savage przedstawia dwie wersje paradoksu kamienia, pierwszą G. I. Mavrodesa z 1963 roku, oraz drugą swoją[108]. Zacznijmy od prezentacji wersji Mavrodesa przytoczonej przez Savage'a[109]:

B

(1) Albo Bóg może stworzyć kamień, którego nie może udźwignąć, albo Bóg nie może stworzyć kamienia, którego nie może udźwignąć.

(2) Jeśli Bóg może stworzyć kamień, którego nie może udźwignąć, to nie jest wszechmocny (skoro nie może udźwignąć kamienia)[110].

---

[106] Mayo, [1961].

[107] Mayo, [1961], s. 250.

[108] Savage, [1967].

[109] Savage, [1967], s. 74.

[110] Błąd popełniony przez Keene'a a dotyczący wyrażenia „może" jest tu wyraźnie powtórzony. Bóg nie jest rzekomo wszechmocny, bo nie może udźwignąć kamienia. Tymczasem, faktem jest to, że tego kamienia naprawdę nie można udźwignąć, bo go po prostu nie ma. Ale czy

(3) Jeśli Bóg nie może stworzyć kamienia, którego nie może udźwignąć, to nie jest wszechmocny (skoro nie może stworzyć kamienia).
(4) Zatem Bóg nie jest wszechmocny.

Savage referuje[111] propozycję Mavrodesa[112] wychodzącą z założenia, że Bóg istnieje. Naturalnie, istniejący Bóg jest wszechmocny lub nie jest wszechmocny. Następnie, Mavrodes stwierdza, że jeśli Bóg nie jest wszechmocny, to zadanie stworzenia kamienia, którego nie mógłby podnieść nie jest wewnętrznie sprzeczne. Jeśli natomiast Bóg jest wszechmocny, to wspomniane zadanie jest wewnętrznie sprzeczne. Uwaga ta jest dla rozumowania Mavrodesa kluczowa. Wyżej przedstawiona argumentacja *B* paradoksu kamienia „dowodzi" bowiem, iż Bóg nie jest wszechmocny w obu możliwych przypadkach opisanych w punktach *B*(2) i *B*(3). Mavrodes uważa jednak, że dowód ten jest błędny, a więc *de facto* nie jest żadnym dowodem na to iż Bóg nie jest wszechmocny, a to z tego powodu, iż założenie przyjęte w punkcie *B*(3) nie implikuje braku wszechmocy Boga. Skoro bowiem zadanie stworzenia kamienia, którego istota *X* nie może udźwignąć jest wewnętrznie sprzeczne wtedy i tylko wtedy, gdy *X* jest istotą wszechmocną, to punkt *B*(3) nie implikuje punktu *B*(4). Jak widać, istotną rolę odgrywa tu założenie, że wszechmoc Boga jest ograniczona wyłącznie do działań niesprzecznych. Tym samym, rozgałęziona argumentacja *B* nie zamyka się wspólną dla obu przypadków tezą *B*(4) stwierdzającą, że Bóg nie jest wszechmocny. Jak widać, w swej propozycji Mavrodes wyraźnie nawiązuje do pomysłu Mayo destrukcji argumentacji wymierzonej w niesprzeczność pojęcia „wszechmocy".

Savage zdecydowanie krytykuje propozycję Mavrodesa wprost, określając ją jako błędną, wskazując przy tym na cztery wątpliwe kwestie. Po pierwsze, Savage zauważa, że w wersji *B* argumentacja ma postać dylematu, czyli wnioskowania z trzech przesłanek, z których jedna ma postać alternatywy, a dwie są implikacjami. Natomiast Mavrodes błędnie utożsamia rozumowanie przedstawione w *B* z *reductio ad absurdum* i w związku z tym uważa, że musi przyjąć założenie, że albo Bóg jest wszechmocny, albo nie jest. Po drugie, Savage podkreśla, że założenie wykonalności zadania polegającego na stworzeniu kamienia, którego nie można podnieść jest wewnętrznie sprzeczne, tylko wówczas, gdy zdanie „Bóg jest wszechmocny" jest zdaniem prawdziwym w sposób konieczny. Po trzecie, Savage kwestionuje przyjęcie przez Mavrodesa założenia, że Bóg istnieje chociaż cała argumentacja *B* paradoksu kamienia ma przecież pokazać, że tak właśnie nie jest. Na koniec Savage poddaje w wątpli-

ten oczywisty skądinąd fakt istotnie może świadczyć o braku wszechmocy? Czy nie jest to prosty przykład źle postawionego problemu?

[111] Savage, [1967], s.74–75.

[112] Mavrodes, [1963].

wość tezę głoszącą, że niezdolność wykonania wewnętrznie sprzecznego zadania nie stanowi żadnego ograniczenia działającego, powołuje się przy tym na wspomnianego przez nas wcześniej Kartezjusza.

Argumentacja *B* daje się rozbudować tak, aby można było odeprzeć przynajmniej część zarzutów Savage'a, zwłaszcza tych o formalno-logicznej naturze. Rozważmy więc argumentację *B'* będącą taką wersją argumentacji *B*, która uwzględnia rozumowanie Mavrodesa:

B'

1. Wszechmocny Bóg może wykonywać zadania wtedy i tylko wtedy, gdy zadania te nie są wewnętrznie sprzeczne (założenie dotyczące wszechmocy Boga)
2. Bóg jest wszechmocny wtedy i tylko wtedy, gdy zadanie stworzenia kamienia, którego Bóg nie mógłby podnieść jest wewnętrznie sprzeczne (założenie Mavrodesa)
3. Albo Bóg może stworzyć kamień, którego nie może podnieść, albo Bóg nie może stworzyć kamienia, którego nie może podnieść (prawda logiczna)

4.1.	Bóg może stworzyć kamień, którego nie może podnieść	5.1.	Bóg nie może stworzyć kamienia, którego nie może podnieść
4.2.	Zadanie stworzenia kamienia, którego Bóg nie może podnieść nie jest wewnętrznie sprzeczne (z 1, 4.1)	5.2.	Zadanie stworzenia kamienia, którego Bóg nie może podnieść jest wewnętrznie sprzeczne (z 1, 5.1)
4.3.	Bóg nie jest wszechmocny (z 2, 4.2)	5.3.	Bóg jest wszechmocny (z 2, 5.2)
4.4.	Bóg jest wszechmocny lub nie jest wszechmocny (z 4.3)	5.4.	Bóg jest wszechmocny lub nie jest wszechmocny (z 5.3)

6. Bóg jest wszechmocny lub nie jest wszechmocny (z 3, 4.1 → 4.4, 5.1 → 5.4)

Jasnym jest, że podobnie do zdania *B'*(3) wniosek *B'*(6) jest prawdą logiczną w sensie logiki klasycznej. Jak widać, argumentacja paradoksu kamienia w wersji *B'* niczego istotnego nie dowodzi, w szczególności nie jest dowodem na to, że Bóg nie jest wszechmocny. Ma więc wobec paradoksu kamienia destrukcyjny charakter, pokazując bezzasadność jego argumentacji. Ta zrekonstruowana wersja pokazuje ponadto, które założenia stanowią sedno podejścia Mavrodesa. Naturalnie założeniami tymi są *B'*(1) oraz *B'*(2). Savage kwestionuje zasadność użycia obu. Z naszych wcześniejszych rozważań wynika jednak, iż przesłanka pierwsza może zostać obroniona na podstawie założenia, że Bóg ustanowił zasadę sprzeczności i jej konsekwentnie przestrzega (*potentia absoluta*, *potentia ordinata*). Wydaje się jednak, że znacznie bardziej wątpliwy jest status przesłanki *B'*(2), a mówiąc precyzyjniej jednej z dwóch implikacji, które ją stanowią. Skoro bowiem założymy, że Bóg jest wszechmocny, to czy faktycznie jesteśmy zmuszeni do przyjęcia tezy zgodnie z którą stworzenie przez Boga kamienia, którego nie mógłby podnieść, jest zadaniem wewnętrznie sprzecznym? Wydaje się, że założenie samej wszechmocy Boga nie wystarcza, aby zaakceptować to wnioskowanie.

Uzasadnienie tej wątpliwości odłóżmy jednak do czasu omówienia proponowanego przez nas rozwiązania.

Savage nie ogranicza się jedynie do krytyki rozwiązania dylematu przez Mavrodesa. Podaje własną propozycję wykorzystującą inną wersję argumentacji paradoksu kamienia, która jego zdaniem trafniej oddaje kluczowy dla tego paradoksu problem[113]:

C

(1) Albo *x* może stworzyć kamień, którego *x* nie może udźwignąć, albo *x* nie może stworzyć kamienia, którego *x* nie może udźwignąć.
(2) Jeśli *x* może stworzyć kamień, którego *x* nie może podnieść, to z konieczności, istnieje co najmniej jedno zadanie, którego *x* nie może wykonać (jest nim właśnie podniesienie owego kamienia)[114].
(3) Jeśli *x* nie może stworzyć kamienia, którego *x* nie może podnieść, to z konieczności, istnieje co najmniej jedno zadanie, którego *x* nie może wykonać (jest nim właśnie stworzenie owego kamienia).
(4) Zatem, istnieje co najmniej jedno zadanie, którego *x* nie może wykonać.
(5) Jeśli *x* jest bytem wszechmocnym, to *x* może wykonać każde zadanie.
(6) Zatem, *x* nie jest bytem wszechmocnym.

Ponieważ *x* jest dowolnym bytem, więc żaden wszechmocny byt nie może istnieć. W szczególności nie może istnieć Bóg.

Savage zauważa, że to, co zasadniczo różni wersję *B* od wersji *C* jest fakt użycia zmiennej *x* w miejsce nazwy „Bóg". Nie można więc zarzucić argumentacji *C* błędu polegającego na tym, że operuje ona wewnętrznie sprzecznym wyrażeniem „kamień, którego Bóg nie może podnieść", gdyż dzięki temu, że słowo „Bóg" w rozumowaniu nie występuje, nie jest przez to założona wszechmoc

[113] Savage, [1967], s. 76.

[114] Dobrze znany z argumentacji Keene'a i Mavrodesa błąd jest tu powtórzony przez Savage'a. Zadanie, którego *x* nie może wykonać, to podniesienie kamienia, którego przecież nie ma. To, że *x* może stworzyć kamień, wcale nie oznacza tego, że *x* go stwarza. Zatem to, że *x* może stworzyć kamień wcale nie oznacza tego, że kamień ten jest dla *x*–a zbyt ciężki, aby *x* mógł go podnieść. Pikanterii dodaje tu zastosowany przez Savage'a zwrot „z konieczności".

tego, kto ma stworzyć kamień, którego nie może podnieść. Ponadto, zdaniem Savage'a, wersja *C* jest neutralna wobec pytania, czy niemożność wykonania wewnętrznie sprzecznego zadania jest ograniczeniem mocy działającego bytu. Wymienione tu własności wersji *C* nie mają jednak żadnego wpływu na zaproponowane przez Savage'a rozwiązanie, które nie zależy od przyjęcia czy odrzucenia tezy głoszącej, że zadanie stworzenia kamienia, którego sam stwórca nie może podnieść jest wewnętrznie sprzeczne. Mimo iż stanowisko Savage'a różni się od tego zajmowanego przez Mavrodesa, jednak oba rozwiązania kwestionują tę samą przesłankę, z tą różnicą, że nieco inaczej ją formułują. Savage uważa bowiem, że fałszywym elementem argumentacji jest zdanie *C*(3). Z pełnym przekonaniem stwierdza on, że ze zdania „*x* może stworzyć kamień, którego *x* nie może podnieść" wynika zdanie „istnieje co najmniej jedno zadanie, którego *x* nie może wykonać". Uważa natomiast, że ze zdania „*x* nie może stworzyć kamienia, którego *x* nie może podnieść" nie wynika zdanie „istnieje co najmniej jedno zadanie, którego *x* nie może wykonać". Twierdzi bowiem, że zwrot „*x* nie może stworzyć kamienia" mylnie sugeruje, iż jest coś czego *x* nie może uczynić. Powtarzając pomysł Keene'a, argumentuje to w następujący sposób[115]: „*x* nie może stworzyć kamienia, którego nie może udźwignąć może oznaczać jedynie to, że jeśli *x* może stworzyć kamień, to może go udźwignąć". Dalszą analizę przeprowadza przy użyciu symboli: Sy = „*y* jest kamieniem", Cxy = „*x* może stworzyć *y*" oraz Lxy = „*x* może podnieść *y*". Wówczas, wersja *C* przybiera sformalizowaną postać:

D

(1) $(\exists y)(Sy \wedge Cxy \wedge -Lxy) \vee -(\exists y)(Sy \wedge Cxy \wedge -Lxy)$.
(2) $(\exists y)(Sy \wedge Cxy \wedge -Lxy) \supset (\exists y)(Sy \wedge -Lxy)$[116].
(3) $-(\exists y)(Sy \wedge Cxy \wedge -Lxy) \supset (\exists y)(Sy \wedge -Cxy)$.

Zgodnie z wcześniejszą uwagą, formuła $-(\exists y)(Sy \wedge Cxy \wedge -Lxy)$ jest równoważna na mocy logiki klasycznej formule $(y)[(Sy \wedge Cxy) \supset Lxy]$. Ponadto, klasyczną tautologią jest *D*(2), nie jest natomiast *D*(3). Zatem, w opinii Savage'a ze zdania „*x* nie może stworzyć kamienia, którego *x* nie

[115] Savage, [1967], s. 77.

[116] Interpretacja tej formuły nie jest prosta, mimo iż formuła ta jest tautologią klasycznego rachunku kwantyfikatorów. To że coś może być stworzone, nie oznacza, że już istnieje. Dość dziwaczny sens ma poprzednik implikacji będącej formułą *D*(2), a zwłaszcza jej fragment $(\exists y)Cxy$: „istnieje coś co może dopiero być stworzone". Problem ten można rozwiązać rezygnując z egzystencjalnego znaczenia kwantyfikatora. Jeśli jednak przyjmiemy, że wspomniany fragment formuły należy czytać „może być stworzony pewien kamień, którego *x* nie może podnieść", to wówczas mamy inny problem tym razem z następnikiem formuły *D*(2), który należy czytać podobnie: „może być pewien kamień, którego *x* nie może podnieść". Problem polega oczywiście na tym, że fakt iż taki kamień może istnieć nie oznacza, że kamień ten istnieje.

może udźwignąć" nie wynika zdanie „Istnieje zadanie, którego *x* nie może wykonać". Autor tego rozwiązania zastanawia się jeszcze nad jedną kwestią. Otóż, odnosi on wrażenie, że mimo powyższej analizy istnieje w nas jakaś skłonność, która z faktu iż *x* nie może stworzyć kamienia, którego sam nie może udźwignąć każe nam wnioskować, że *x* nie może wykonywać dowolnych zadań, bo wspomniany fakt świadczy o ograniczeniu mocy *x*–a. Aby tę dość intuicyjną wątpliwość rozwiać, Savage proponuje rozdzielić stwórcę kamienia od tego, kto będzie go podnosić. Mamy więc do rozważenia następujący problem: *czy fakt, iż x nie może stworzyć kamienia, którego y nie może podnieść oznacza ograniczenie mocy x–a*? Jeśli *y* jest wszechmocny, to podniesie każdy kamień. Wówczas, jeśli *x* nie jest w stanie stworzyć kamienia, którego *y* nie będzie mógł podnieść niekoniecznie oznacza, że moc *x*–a jest ograniczona: *x* może stworzyć kamień o dowolnym ciężarze, zaś *y* może podnieść kamień o dowolnym ciężarze. Analogiczny wniosek płynie z tej analizy, gdy powtórzymy ją dla przypadku, gdy *x* i *y* są jedną i tą samą osobą. Ostateczną konkluzją Savage'a niezależną od tego, czy $x = y$, czy $x \neq y$ jest następujący wniosek[117]: „niemożność *x*–a w stwarzaniu kamieni, których *y* nie może podnieść oznacza ograniczenie mocy *x*–a tylko wówczas, gdy (*i*) *x* nie może stwarzać kamieni o dowolnym ciężarze lub (*ii*) *y* nie może podnosić kamieni o dowolnym ciężarze".

Ponieważ wszechmocny Bóg może zarówno stwarzać kamienie o dowolnym ciężarze jak i może podnosić kamienie o dowolnym ciężarze, fakt iż Bóg nie może stworzyć kamienia, którego sam nie może podnieść jest zdaniem Savage'a konieczną konsekwencją obu wspomnianych przejawów wszechmocy. Swój artykuł Savage kończy więc słowami: z założenia, że „Bóg może stwarzać kamienie o dowolnym ciężarze i Bóg może podnosić kamienie o dowolnym ciężarze" wynika wniosek „Bóg nie może stworzyć kamienia, którego nie może podnieść". W przypisie Savage przyznaje, że w końcowej części swojego artykułu Mavrodes sam zauważa ten fakt, lecz wcześniejsze błędy jakich się dopuścił wypaczyły jego intuicje dotyczące tego właśnie faktu.

Rozwiązanie zaproponowane przez Savage'a wydaje się być zgodne z tym, sprzed wieków, autorstwa Kilvingtona. Bóg może stwarzać kamienie o dowolnym ciężarze i może podnosić kamienie o dowolnym ciężarze, co ma świadczyć o Jego wszechmocy. Czy jednak paradoks kamienia kwestionuje możność stwarzania lub podnoszenia przez Boga kamieni o dowolnym ciężarze? Oczywiście, nie. Oznacza to, że sednem tego paradoksu jest problem, którego Savage nie poruszył.

Podobnie jak w przypadku propozycji Mavrodesa, precyzyjne ustalenie tego problemu odłóżmy do czasu prezentacji naszego rozwiązania.

---

[117] Savage, [1967], s. 78.

Odmienną wobec obu wyżej przypomnianych propozycji przedstawił w pracy *A solution to the stone paradox* z 1979 roku David E. Schrader. Paradoks kamienia formułuje on w nowy sposób[118]:

E

(1) Albo Bóg może spowodować, że istnieje kamień taki, że nie jest tak, że Bóg może spowodować, że ten kamień jest podniesiony, albo nie jest tak, że może spowodować, że istnieje kamień taki, że nie jest tak, że Bóg może spowodować, że ten kamień jest podniesiony.
(2) Jeśli Bóg może spowodować, że istnieje kamień taki, że nie jest tak, że Bóg może spowodować, że ten kamień jest podniesiony, to nie jest tak, że Bóg jest wszechmocny[119].
(3) Jeśli nie jest tak, że Bóg może spowodować, że istnieje kamień taki, że nie jest tak, że Bóg może spowodować, że ten kamień jest podniesiony, to nie jest tak, że Bóg jest wszechmocny.
(4) Zatem, nie jest tak, że Bóg jest wszechmocny.

Dalej, proponuje on rozważyć dwie możliwości, albo (I) jest logicznie konieczne, że Bóg jest wszechmocny, albo (II) tak nie jest. Wykorzystując semantykę możliwych światów dochodzi do wniosku, że w pierwszym przypadku nie jest logicznie możliwe, aby w którymś z możliwych światów istniał kamień, którego Bóg nie mógłby podnieść. Tym samym, nie jest logicznie możliwe, aby Bóg sprawił, że taki kamień zaistnieje. Co nie świadczy o tym, że Bóg nie jest wszechmocny. Schrader przyjął bowiem następującą definicję bytu, który nie jest wszechmocny:

x nie jest wszechmocny	$=^{df}$	istnieje zdanie *p* takie, że jest logicznie możliwe, aby *x* sprawił, że *p* jest prawdziwe i *x* nie może sprawić, że *p* jest prawdziwe.

Dowodzi to, zdaniem Schradera, fałszywości zdania *E*(3). Powyższa definicja jest konsekwencją wcześniej przez niego przyjętej, która określa byt wszechmocny:

x jest wszechmocny	$=^{df}$	istnieje zdanie *p* takie, że jest logicznie możliwe, aby *x* sprawił, że *p* jest prawdziwe i *x* może sprawić, że *p* jest prawdziwe.

---

[118] Schrader, [1979], s. 260–261.

[119] Schrader powtarza tu analizowany już kilkakrotnie błąd Keene'a, Mavrodesa i Savage'a z tą jednak bardzo istotną różnicą, że go dostrzega i dlatego krytykuje punkt drugi argumentacji *E*.

W przypadku (II), gdy nie jest logicznie konieczne, że Bóg jest wszechmocny istnieje taki świat, w którym istnieje kamień, którego Bóg nie może podnieść. Zatem, istnieje logicznie możliwy świat, w którym Bóg może stworzyć taki kamień. Istnieje więc logicznie możliwy świat, w którym Bóg nie jest wszechmocny, co oznacza tylko tyle, że nie jest logicznie konieczne, aby Bóg był wszechmocny. Wniosek ten, w opinii Schradera, nie mówi jednak nic o wszechmocy Boga w świecie rzeczywistym. Bóg będzie wszechmocny tak długo, jak długo nie podejmie decyzji o stworzeniu kamienia, którego nie będzie mógł podnieść. W ten sposób Schrader uniknął błędu związanego z niewłaściwym rozumieniem zwrotu „może stworzyć" – to, że Bóg może coś stworzyć, nie oznacza przecież tego, że to coś już zostało przez Boga stworzone.

Na koniec Schrader stwierdza nieadekwatność argumentacji *E*, zarówno wobec założenia (I) jak i (II). Ponieważ, zawsze tak jest, że albo (I), albo (II) jest prawdą, więc argumentacja *E* paradoksu kamienia niczego nie dowodzi. Podejście Schradera przypomina więc propozycję Mavrodesa, który również wskazywał na bezzasadność argumentacji paradoksu kamienia.

Przytoczone wyżej rozwiązania wydają się interesujące nie tylko z logicznego punktu widzenia. Pokazują one bowiem, jak głębokie znaczenie ma pojęcie „wszechmocy". Szczególnie trafną wydaje się być propozycja Savage'a, który wskazuje na właściwy sens zdania „Bóg nie może stworzyć kamienia, którego nie może podnieść". Prawdziwość tego zdania nie musi przecież implikować prawdziwości zdania orzekającego o istnieniu zadania, którego Bóg nie może wykonać. Ponadto, wszystkie rozwiązania mogą niewątpliwie być przyczynkiem do ciekawych analiz przeprowadzanych w kontekście bytu zwanego albo Bogiem, albo Absolutem, a dotyczących takich pojęć jak „wszechmoc", „wszechmoc logicznie konieczna", „działanie ograniczające moc", czy „wewnętrzna sprzeczność".

Niestety, każde z tych rozwiązań wydaje się powielać jeden i ten sam błąd, chociaż wniosek wynikający z analizy przeprowadzonej przez Schradera może sugerować, że ostatnie z rozważanych rozwiązań jest od tego błędu wolne. Jak już wcześniej parokrotnie zauważyliśmy, błędem tym jest niedostrzeżenie tego, że istotną rolę w całej argumentacji odgrywa czas. Swinburne, autor książki *The Coherence of Theism*, reprezentując stanowisko Tomasza uważa, że istota wszechmocna nie może zmienić przeszłości[120]. Dzięki temu Swinburne wprowadza parametr czasu do rozważań nad wszechmocą definiując istotę wszechmocną w następujący sposób[121]:

[*def. D*] Osoba *P* jest wszechmocna w czasie *t* wtedy i tylko wtedy, gdy jest w stanie sprawić każdy logicznie przygodny stan rzeczy po czasie *t*, którego opis nie pociąga, że *P* nie sprawiła go w *t*.

---

[120] Patrz paragraf 2.6.

[121] Swinburne, [1977], 212.

Definicja ta ma zdaniem Swinburne'a wykluczyć z rozważań nad wszechmocą te zadania, które wiążą się ze stanami rzeczy niewykonalnymi z powodów logicznych. Tak więc, jeśli jakiś stan rzeczy już zaistniał, nawet istota wszechmocna nie może sprawić aby to się dopiero stało, skoro już jest. Tak więc Swinburne zastępuje wyrażenie „logicznie możliwy stan rzeczy" wyrażeniem „logicznie przygodny stan rzeczy". Po drugie, Swinbure obawia się, że niezamężny lub nieżonaty duch *P* nie może się rozwieść. Dlatego też wzmacnia definicję *C* wszechmocy dodatkowym warunkiem „którego opis nie pociąga, że *P* nie sprawiła go w *t*"[122].

Wygląda na to, iż dzięki uwzględnieniu czasu w rozważaniach nad wszechmocą Swinburne jako pierwszy unika błędu popełnionego przez swoich poprzedników chociaż wydaje się, iż błędu tego nie dostrzega w ich propozycjach. Krytykując ich propozycje nie zwraca bowiem najmniejszej uwagi na to, iż trudno zarzucać brak wszechmocy Bogu twierdząc, że nie może On podnieść kamienia, który przecież z założenia wciąż jeszcze nie istnieje. Na ten kluczowy naszym zdaniem aspekt w paradoksalnej argumentacji, zwrócimy uwagę w dalszej części pracy prezentując propozycję rozwiązania paradoksu kamienia.

Swinbure wzorem poprzedników na nowo formułuje argumentację paradoksu kamienia[123]:

F

(1) Albo *P* może w [chwili] *t* sprawić istnienie kamienia, którego uniesienia *P* nie może następnie sprawić, albo *P* nie może sprawić istnienia kamienia, którego uniesienia *P* nie może następnie sprawić.

(2) Jeśli w *t* *P* może sprawić istnienie kamienia, którego uniesienia *P* nie może następnie sprawić, to z konieczności istnieje przynajmniej jeden logicznie przygodny stan rzeczy po *t*, którego opis nie pociąga, że *P* nie sprawił go w *t*, i którego *P* nie jest w stanie w *t* sprawić (mianowicie, podniesienie owego kamienia).

(3) Jeśli w *t* *P* nie może sprawić istnienia kamienia, którego uniesienia *P* nie może następnie spowodować, to z konieczności istnieje przynajmniej jeden logicznie przygodny stan rzeczy po *t*, którego opis nie pociąga, że *P* nie sprawił go w *t*, i którego *P* nie jest w stanie w *t* sprawić (mianowicie, istnienia takiego kamienia).

(4) Zatem istnieje przynajmniej jeden logicznie przygodny stan rzeczy po *t*, którego opis nie pociąga, że *P* nie sprawił go w *t*, i którego *P* nie jest w stanie w *t* sprawić.

---

[122] Swinburne, [1977], s. 211–212.

[123] Swinburne, [1977], s. 216–217.

(5) Jeśli *P* jest wszechmocnym bytem, to *P* jest w stanie sprawić każdy logicznie przygodny stan rzeczy po *t*, którego opis nie pociąga, że *P* nie sprawił go w *t*.
(6) Zatem *P* nie jest wszechmocny.

Przy obecnej wersji paradoksu Swinburne stwierdza, że zdanie *F*(2) nie musi być prawdziwe dla każdego *P*[124]: „Zakładamy, że *P* jest w stanie sprawić istnienie kamienia obdarzonego takimi własnościami, że nie może on następnie spowodować jego podniesienia. Jaki jest więc stan rzeczy, którego *P* nie jest w stanie sprawić? Podniesienie wchodzącego w grę kamienia. [...] Podniesienia którego kamienia *P* nie jest w stanie sprawić? Następnego kamienia stworzonego przez *P*? Nie ma powodu, by zakładać, że *P* stworzy więcej kamieni, a jeśli nawet stworzy, to nie ma powodu, by przypuszczać, że *P* nie będzie w stanie spowodować ich podniesienia. [...] Nie ma powodu, by przypuszczać, że *P* sprawi istnienie takiego kamienia; z tego, że może on to uczynić, nie wynika, że to uczyni. To prawda, że jeśli wszechmocny byt faktycznie wykorzystuje swą zdolność (w przeciwieństwie do samego jej posiadania), by sprawić istnienie kamienia zbyt ciężkiego, aby następnie sprawić jego podniesienie, to przestanie być wszechmocny. [...] Osoba może pozostać wszechmocna na zawsze, ponieważ nigdy nie wykorzysta swej mocy stworzenia kamieni zbyt ciężkich do podniesienia, sił zbyt silnych, aby dało się im oprzeć, lub wszechświatów zbyt kapryśnych, aby dało się je kontrolować”. Można powiedzieć, że ta właśnie analiza Swinburne'a jest bardzo bliska zaproponowanemu niżej przez nas rozwiązaniu.

Jeśli idzie o zdanie *F*(3) opinia Swinburne'a, według której zdanie to może być prawdziwe przy pewnym rozumieniu bytu *P* przeczy tezie Savage'a. Najpierw Swinburne pokazuje fałszywość stanowiska Savage'a, przyznając co prawda, iż zdanie „*P* nie może stworzyć kamienia, którego *P* nie może następnie podnieść” jest logicznie równoważne zdaniu „Jeśli *P* może stworzyć kamień, to *P* może następnie go podnieść”, dodaje jednak, że z faktu tego wcale nie wynika, że istota *P* jest wszechmocna. Słusznie bowiem zauważa, że[125]: „Sądy te stwierdzają, że jeśli *P* stworzy kamień, to musi być tak, że jest on następnie zdolny go podnieść. Oznacza to, że *P* nie może obdarzyć żadnego stwarzanego przez siebie kamienia mocą, która powstrzyma to, że *P* następnie go podniesie”. Opinię Swinburne'a można wesprzeć następującym, niebudzącym chyba żadnych wątpliwości przykładem: prawdą jest, że „Nie mogę napisać listu, którego nie mogę następnie przeczytać”. Oczywiście, zdanie to jest logicznie równoważne zdaniu „Jeśli mogę napisać list, to mogę go następnie przeczytać”. Czy jednak z prawdziwości obu zdań wynika, że jestem wszechmocny w zakresie pisania listów? Czy mogę napisać dowolny list? Czy nie istnieje język

[124] Swinburne, [1977], s. 217–218.
[125] Swinburne, [1977], s. 215.

obcy, w którym nie jestem w stanie napisać chociażby najkrótszego listu? Owszem, są listy których nie mogę napisać. Niestety, dyskusja ta jako żywo przypomina dawny spór dzielący Keene'a i Mayo.

Swinburne nie ogranicza się jedynie do krytyki podejścia Savage'a. Proponuje on także swoją analizę pokazującą kiedy zdanie *F*(3) jest prawdziwe, a kiedy fałszywe[126]: „*F*(3) będzie prawdziwe, jeśli założymy, że jedynymi rodzajami bytów, które mogą sprawiać stany rzeczy, są byty, które są takimi a nie innymi indywiduami w danym czasie, zupełnie niezależnie od tego, czy uzyskają lub utracą moc, wiedzę lub inne własności, oraz niezależnie od tego, czy następnie przestaną istnieć. Nasze potoczne rozumienie »osoby« jest takie, że pewna osoba *P* pozostaje tą samą osobą, jeśli uzyska lub utraci moc, wiedzę lub cokolwiek innego; to, że następnie przestanie istnieć, nie wpływa na to, kim była we wcześniejszym czasie. [...] Jeśli byty tego rodzaju są jedynymi rodzajami bytów, które mogą sprawiać stany mocy, to *F*(3) będzie prawdziwe dla każdego *P*. Albowiem wówczas istnienie kamienia w czasie późniejszym od *t*, którego podniesienia *P* nie może następnie sprawić, będzie logicznie przygodnym stanem rzeczy po *t*, którego opis nie pociąga, że *P* nie sprawił go w *t*. Ale przypuszczalnie mogą istnieć byty, które nie byłyby takimi a nie innymi indywiduami, jeśliby następnie utraciły nieco ze swej mocy lub przestały istnieć, i takie byty mogą sprawiać stany rzeczy. Jeśli mogą istnieć takie byty i *P* jest jednym z nich, to *F*(3) będzie fałszywe o *P*. Wówczas istnienie kamienia w czasie po *t*, którego podniesienia *P* nie może następnie sprawić, nie jest z konieczności logicznie przygodnym stanem rzeczy po *t*, którego opis nie pociąga, że *P* nie sprawił tego w *t*. Albowiem jeśli *P* jest wszechmocny w *t*, to nie byłby on tym samym a nie innym indywiduum w *t*, gdyby następnie utracił tę wszechmoc (lub przestał istnieć). Istnienie tego kamienia nie byłoby logicznie zgodne z tym, jak świat rozwijał się do czasu *t*, gdyż zawierał on istnienie *P*". Naturalnie osobą, która nie może pozostać sobą zmieniając się jest, zdaniem Swinburne'a, Bóg. Swoją, przytoczoną wyżej argumentację Swinburne streszcza w następujący sposób[127]: „Bóg nie może sprawić takiego kamienia opisanego rodzaju, ponieważ istnienie takiego kamienia pociąga, że Bóg go nie sprawił".

Podsumowując analizę Swinburne'a wynika z niej, że oba zdania tak *F*(2) jak i *F*(3) są fałszywe. *F*(2) bez względu na to kim jest osoba *P*, *F*(3) jest fałszywe, gdy *P* jest Bogiem. O ile z argumentacją dowodzącą fałszywości *F*(2) można się zgodzić, o tyle trudno oprzeć się wrażeniu, że druga argumentacja wzbudza pewne wątpliwości, zwłaszcza że jej autorem jest Swinburne. Używając innych słów powtarza bowiem skrytykowaną wcześniej przez siebie tezę Savage'a: jeśli Bóg stworzy jakiś kamień, to go podniesie, bo jeśli by go nie mógł podnieść, to znaczy że Bóg nie mógł go stworzyć, a zatem Bóg jest wszechmocny.

---

126 Swinburne, [1977], s. 218–219.

127 Swinburne, [1977], s. 219.

Tak więc Swinburne ograniczając wszechmoc Boga udowodnił, że Bóg jest wszechmocny, chociaż nie może stworzyć kamienia, którego nie będzie mógł potem udźwignąć. Jasne jest, że w takim podejściu nie ma nic zaskakującego. Jeśli bowiem ograniczymy wszechmoc odpowiednio ją definiując, to niewątpliwie możemy potem pokazać, że nawet wtedy, gdy istota obdarzona taką niedoskonałą wszechmocą czegoś nie może uczynić, nadal pozostanie istotą wszechmocną. Formalnie paradoks znika. Warto jednak postawić pytanie, czy wraz z paradoksem znikają wątpliwości co do słuszności rozwiązania. Czy czasem rozwiązanie nie jest równie paradoksalne, jak sam paradoks? Dla przykładu wyobraźmy sobie, że według nowej definicji wszechmocy, istota wszechmocna to taka, która może uczynić wszystko poza stwarzaniem kamieni – wszelkich kamieni, a więc zarówno tych ciężkich, jak i tych lekkich. Wówczas, argumentacja paradoksu kamienia przestaje by paradoksalna. Skoro Bóg nie może stworzyć jakiegokolwiek kamienia pozostając wszechmocny, to w szczególności nie może stworzyć kamienia którego potem nie będzie mógł udźwignąć wciąż będąc wszechmocnym. Paradoks znika, lecz problem pozostaje. Problemem tym jest bowiem co najmniej nieintuicyjne pojęcie „wszechmocy". Naturalnie, Swinburne nie przyjął tak mocno ograniczającej wszechmoc definicji. Wydaje się jednak, że jego analiza podpada pod wskazany wyżej schemat.

Przeanalizujmy więc kolejny raz argumentację paradoksu kamienia stosując tak szerokie pojęcie wszechmocy, jak to jest tylko z logicznego punktu widzenia możliwe. Oczywiście, wszechmoc zawieszająca zasadę niesprzeczności byłaby pojęciem najszerszym z możliwych. Rozważanie jej przypadku prowadziłoby jednak do trywializacji problemu jakim jest dyskutowany w tym rozdziale paradoks. Dlatego też, załóżmy że istota wszechmocna jest ograniczona jedynie zasadą niesprzeczności. Przyjmijmy, że na tym założeniu kończy się podobieństwo do stanowiska zajmowanego przez Swinburne'a. Mając na uwadze rozważania, przeprowadzone w poprzednim paragrafie, które dotyczyły wszechmocy, dopuszczamy możliwość zmiany przez istotę wszechmocną zdarzeń, które już się dokonały. Trudno przecież zakładać, że wszechmocny Bóg może unicestwić świat, a nie może go zmienić, czyli unicestwić pod jakimś względem, czy też w jakiejś jego części. Nie wiadomo, dlaczego istota wszechmocna miałaby być ograniczona czasem – nie mogłaby na przykład w roku 1973 sprawić czegoś co miałoby się stać w roku 1935. Skoro jakaś istota może wszystko co jest niesprzeczne, to w szczególności może w świadomości całych pokoleń zmienić wiedzę o pewnych faktach, tak, aby ta wiedza była spójna z jakąś korektą uczynioną obecnie, a dotyczącą przeszłości. Nadal przywracając wszechmoc istocie wszechmocnej przyjmijmy, że Bóg może zgrzeszyć, chociaż słowo „może" nie dotyczy Jego pragnień, a nawet gotowości psychicznej. Słowo to wyraża jedynie fakt istnienia obiektywnych warunków umożliwiających popełnienie grzechu. Chcąc zatem uniknąć jakichkolwiek wątpliwości interpretacyjnych, zgodnie zresztą z zarysowanymi wyżej zamierzeniami, wszechmoc Boga oznaczać będzie dla nas to, że może On uczynić wszystko, bez najmniejszych pozalogicznych ograniczeń, będąc skrępowanym jedynie wymogiem niesprzeczności.

Drugim istotnym dla naszego rozwiązania problemem jest odnalezienie faktycznego sensu zdania „Bóg może stworzyć kamień, którego nie może udźwignąć". I tu dochodzimy do wspomnianego błędu popełnionego we wszystkich przytoczonych wyżej prezentacjach paradoksu, poza argumentacją *F* zaproponowaną przez Swinburne'a i rzecz jasna rozwiązaniem zgodnym z poglądami Piotra Damianiego i Kartezjusza. Błąd ten można wyrazić przytoczonymi wcześniej słowami Savage'a, który bez cienia wątpliwości stwierdza, że ze zdania „*x* może stworzyć kamień, którego *x* nie może podnieść" wynika zdanie „istnieje co najmniej jedno zadanie, którego *x* nie może wykonać"[128]. Zastanówmy się czy jest możliwe, aby Savage miał rację, a jeśli tak, to w jakiej sytuacji. Kiedy zdanie stwierdzające, że Bóg może stworzyć kamień, którego nie może podnieść świadczy o istnieniu zadania niewykonalnego przez Boga? Załóżmy, że Bóg może wszystko, co jest logicznie możliwe. Przyjmijmy też, że Bóg może stworzyć kamień, którego nie może udźwignąć. Jakiego zadania Bóg nie może zdaniem Savage'a przy tym założeniu uczynić? Czyżby zadaniem tym było podniesienie kamienia? Ale którego kamienia? Czy tego, którego jeszcze nie ma, bo go wciąż jeszcze Bóg nie stworzył, chociaż może go stworzyć? Istotnie, nie jest możliwe podnieść coś, czego nie ma. Jeśli więc Savage ma na myśli to, że Bóg nie może podnieść kamienia, którego wciąż jeszcze nie stworzył, to ma rację. Ale czy tak rozumiane zadanie jest logicznie możliwe? Skoro dopóty, dopóki Bóg nie stworzy kamienia, kamienia nie ma, zadanie podniesienia go jest logicznie niemożliwe. Przecież jeśli nie ma obiektu *K*, to zdanie „*X* może udźwignąć *K*" wyraża sytuację, która nie może zajść. Każdy podzielający w tej sprawie pogląd Savage'a powinien zaakceptować nieprawdziwe zdanie: „każdy człowiek zna smak każdej potrawy"[129]. Jeśli bowiem z faktu, że Bóg może stworzyć kamień, którego nie może podnieść, wynika, że Bóg nie może podnieść jakiegoś kamienia, to podobnie z faktu, że mogę spróbować jakąś potrawę wynika, że znam jej smak. Skoro Bóg nie musi stwarzać kamienia, aby pokazać ograniczenie swej mocy, tak samo dowolny człowiek chcąc znać smak jakieś potrawy nie musi jej próbować. W obu przypadkach stosując analogiczne rozumowanie, dochodzimy do niemożliwych do zaakceptowania wniosków.

---

[128] Savage, [1967], s. 77.

[129] Już Arystoteles w *Topikach*, księga IV, 126a, s. 399, przestrzegał przed popełnieniem błędu polegającego na tym, że zdolność do uczynienia czegoś utożsamimy z uczynieniem tego czegoś.

Należy zatem przyjąć, że zdanie

Bóg może stworzyć kamień, którego nie może udźwignąć

winno być, zgodnie zresztą z przytoczonym już wcześniej stwierdzeniem Mackiego, zastąpione przez

Bóg może stworzyć kamień, którego nie będzie mógł udźwignąć, o ile go stworzy.

Uwzględniając obie przeanalizowane kwestie jeszcze raz sformułujmy, tym razem już prawidłowo, paradoks kamienia w wersji najbardziej zbliżonej do pierwszej podanej w tym paragrafie.

G

1. Albo Bóg może stworzyć kamień, którego, jeśli go stworzy, to nie będzie go mógł udźwignąć, albo Bóg nie może stworzyć kamienia, którego, jeśli go stworzy, to nie będzie go mógł udźwignąć.

2.1. Bóg może stworzyć kamień, którego, jeśli go stworzy, to nie będzie go mógł udźwignąć.	3.1. Bóg nie może stworzyć kamienia, którego, jeśli go stworzy, to nie będzie go mógł udźwignąć.
2.2. Istnieje coś czego Bóg nie może uczynić. (z 2.1)	3.2. Istnieje coś czego Bóg nie może uczynić. (z 3.1)
2.3. Bóg nie jest wszechmocny. (z 2.2)	3.3. Bóg nie jest wszechmocny. (z 3.2)

4. Bóg nie jest wszechmocny. (z 1, 2.1 $\rightarrow$ 2.3, 3.1 $\rightarrow$ 3.3)

Już samo prawidłowe sformułowanie paradoksu sprawia, że jasne się staje to, iż jego argumentacja się załamuje. Bez trudu można zauważyć, że to właśnie zdanie *G*(2.2) nie wynika ze zdania *G*(2.1). Podobnie, we wszystkich pozostałych wersjach paradoksu kamienia to miejsce argumentacji jest błędne. I tak, począwszy od wersji *A* autorstwa Keene'a, a skończywszy na wyżej przedstawionej postaci *G*, fałszywe jest zdanie „Jeśli wspomniana istota może stwarzać takie rzeczy, to istnieje coś nad czym istota ta nie panuje". W wersji Mavrodesa *B*, fałszywe jest drugie zdanie podobnie jak w wersjach Savage'a *C* i Schradera *E*. Interesujący przypadek stanowi natomiast drugie zdanie w sformalizowanej argumentacji *D* Savage'a. Wydawać by się mogło, że zdanie *D*(2), $(\exists y)(Sy \wedge Cxy \wedge -Lxy) \supset (\exists y)(Sy \wedge -Lxy)$, jest prawdziwe, jako że jego schemat jest tautologią klasycznej logiki predykatów. Jednak i tu popełniony jest ten sam błąd, który sprawia, że nie musi być prawdą poprzednik tej implikacji: $(\exists y)(Sy \wedge Cxy \wedge -Lxy)$. x może stworzyć kamień y ($Sy \wedge Cxy$), co wcale nie znaczy, że istnieje coś, co x może lub nie może podnieść. Można by było uwolnić warunek *D*(2) od wspomnianego błędu, gdyby przyjąć inne rozumienie predykatu *L*, np.: $L(x,y)$ = „x nie mógłby (w przyszłości) podnieść y-ka". Jednak bez względu na znaczenie *L*, zachodzi tu inna trudność. W formule *D*(2) inne jest bowiem znaczenie pierwszego kwantyfikatora szczegółowego, inne zaś drugiego. W pierwszym wystąpieniu, kwantyfikator jest rozumiany potencjalnie – istnieje coś co *x* może stworzyć. W drugim wystąpieniu mamy już „twarde" stwierdzenie istnienia odpowiedniego kamienia. Widać więc, że wszystkie, przytoczone wyżej, wysłowienia paradoksu kamienia nie są wolne od błędu, przed którym, dawno temu, przestrzegał Arystoteles[130].

Prezentację propozycji rozwiązania paradoksu warto poprzedzić uwagą, że zadanie stworzenia przez Boga kamienia tak ciężkiego, aby sam Bóg nie mógł go udźwignąć może zostać zastąpione na przykład zadaniem stworzenia przez Boga kwiatu, którego zapach jest tak delikatny, że sam Bóg nie może tego zapachu wyczuć. Naturalnie, możliwe jest sformułowanie wielu innych zadań wzorowanych na tym, z paradoksu kamienia[131]. Najciekawsze jest jednak to, co łączy wszystkie możliwe do wymyślenia zadania, będące kopiami analizowanego w tym paragrafie problemu. Wszystkie one, chociaż w różny sposób, wyrażają przecież jedną i tę samą kwestię. Jest nią mianowicie to, czy możliwe jest, aby Bóg w jakiś konkretny sposób, czyli pod jakimś konkretnym względem, ograniczył swoją wszechmoc.

Zatem, we wszystkich, możliwych do rozważenia pytaniach, a więc w szczególności w pytaniu o stworzenie wiadomego kamienia, chodzi o jedno i to samo, czyli:

Czy Bóg może w jakimś konkretnym zakresie ograniczyć swoją wszechmoc?

Jak widać, i w tej kwestii ustalenia Mackiego wydają się być jak najbardziej trafne. Naturalnie, stwarzając kamień Bóg ograniczy swoją wszechmoc w zakresie podnoszenia tego jednego, jedynego kamienia. Inne kamienie, nawet cięższe od tego jednego, szczególnego, Bóg będzie mógł bez trudu podnosić zgodnie z Jego nieograniczoną, w zakresie podnoszenia pozostałych kamieni, mocą[132]. Podobnie stwarzając wspomniany wyżej kwiat, Bóg ograniczy swoją moc w zakresie rozpoznawania zapachu tego jednego, jedynego kwiatu. Zapachy wszystkich innych kwiatów, nawet bardziej delikatne, będą przez Boga rozpoznawalne, bo w zakresie rozpoznawania wszystkich pozostałych kwiatów Bóg zachowuje swoją, niczym nie ograniczoną, moc.

Z takiego punktu widzenia staje się jasnym wyrażony wcześniej pogląd, iż propozycja zarówno Kilvingtona, jak i Savage'a nie może uchodzić za

[130] Arystoteles, *Topiki*, IV, 126a, s. 399. Patrz także poprzedni paragraf.

[131] Swinburne w [1995], s. 213, podaje dwie inne możliwe wersje tego paradoksu nie zakładające jakiejkolwiek cielesności Boga: 1. Czy Bóg może uczynić planetę zbyt wielką, aby ją podzielić?; 2. Czy Bóg może uczynić wszechświat zbyt od siebie zależnym, aby mógł go unicestwić?

[132] Z tego punktu widzenia, nietrafnym jest twierdzenie, że kamień, którego Bóg nie mógłby podnieść musi być najcięższy na świecie lub nieskończenie ciężki.

rozwiązanie paradoksu kamienia. Sednem paradoksu nie jest przecież kwestionowanie tezy głoszącej, że Bóg może podnosić nieskończenie ciężkie kamienie, czy też kamienie o dowolnie wielkim ciężarze. Paradoks ten stawia natomiast pytanie o to, czy możliwe jest, aby Bóg w jakimś zakresie ograniczył swoją wszechmoc.

Takie rozpoznanie istoty paradoksu jest przyczyną i tego, że przestaje być oczywista teza, leżąca u podstaw propozycji Mayo i Mavrodesa, zgodnie z którą założenie wszechmocy Boga implikuje wewnętrzną sprzeczność zadania stworzenia przez Boga kamienia, którego sam Bóg nie mógłby podnieść. Nie jest bowiem jasne dlaczego istota, o której zakładamy tylko tyle, że jest wszechmocna nie może ze swojej wszechmocy zrezygnować, ani nawet ograniczyć tej wszechmocy w pewnym ściśle określonym zakresie. Ta zasygnalizowana wcześniej i sprecyzowana tutaj wątpliwość wymaga rozstrzygnięcia, które stanie się możliwe dzięki przedstawionej niżej propozycji rozwiązania paradoksu kamienia.

Wstępna propozycja rozwiązania paradoksu[133]

Odpowiedź przecząca na pytanie, czy Bóg może stworzyć kamień, którego nie będzie mógł podnieść w przypadku, gdy go stworzy, oznaczałaby, że jest coś czego Bóg nie może uczynić. Tym niewykonalnym zadaniem byłoby właśnie stworzenie kamienia wraz z ograniczeniem swojej mocy w zakresie podniesienia go[134]. Zatem, skoro Bóg może wszystko, w szczególności wykonanie przez Boga tego zadania również powinno być możliwe. To, że Bóg może stworzyć kamień, którego nie będzie mógł podnieść, czy też ograniczyć swoją moc w zakresie podnoszenia jakiegoś już istniejącego kamienia, wcale nie dowodzi tego, że Bóg już to uczynił. Zatem, tak długo, jak Bóg tego nie uczyni, nie można odmawiać mu wszechmocy. Wciąż nie doszło bowiem do jakiegokolwiek ograniczenia wszechmocy bożej. Załóżmy teraz, że Bóg stworzył kamień, którego nie może podnieść. Ponieważ teraz kamień ten istnieje, jest sens mówić o niemożności jego podniesienia. Istnieje więc zadanie, którego Bóg nie może wykonać. Czy mamy jednak jakąkolwiek sprzeczność z wszechmocą Boga? Otóż takiej sprzeczności nie ma. Przecież ustaliliśmy, że stworzenie kamienia jest jedną z form pozbawienia się wszechmocy, nawiasem mówiąc dość precyzyjną formą. Wszechmoc jest ograniczona w zakresie podnoszenia tego jednego, jedynego kamienia. Możliwości działania Boga we wszystkich pozostałych dziedzinach są takie jak przed ograniczeniem wszechmocy. Jednak wydaje się, że wszechmoc ma tę własność, że jakiekolwiek jej ograniczenie jest

[133] Łukowski, [2001].

[134] Mówiąc ściślej, można nawet przyjąć, że ograniczenie mocy bożej dotyczy już istniejącego kamienia.

de facto jej unicestwieniem. Tak więc, Bóg stwarzając kamień, którego nie może już podnieść ograniczył swoją wszechmoc, czyli się jej pozbawił. Bóg nie jest już istotą wszechmocną. Nie jest, chociaż był. Zatem stwierdzenie, że istnienie kamienia, którego Bóg nie może podnieść świadczy o tym, że Bóg nie jest wszechmocny, jest prawdą. Nie jest jednak prawdą, że istnienie tego kamienia stoi w sprzeczności z uprzednią wszechmocą Boga. Stworzenie tego wyjątkowego kamienia jest przecież jednoznaczne z faktem, iż nastąpiła istotna z punktu widzenia argumentacji paradoksu kamienia zmiana jakościowa Boga. Istnieje bowiem cecha, którą Bóg posiadał, a teraz jej nie posiada. Tą cechą jest, a raczej była wszechmoc. Przecież, Bóg ulegając zmianie przestaje być Bogiem. Fakt ten wyjaśnia ewentualna wątpliwość, czy mówiąc o Bogu istniejącym poza czasem jest sens używać takich wyrażeń jak „przedtem", „potem", „przed zmianą", „po zmianie"? Zauważmy jednak, że Bóg przestając być Bogiem, ulega zmianie, a skoro tak, staje się istotą uwikłaną w czas – w fizyce przyjmuje się bowiem założenie, że o czasie można mówić, gdy dają się rozróżnić przynajmniej dwa różne stany lub dwa różne miejsca. Tracąc atrybut wszechmocy, Bóg zmienia się i tym samym przestaje istnieć poza czasem. Co więcej, stworzenie kamienia, którego istnienie ogranicza wszechmoc wydaje się być nieodwracalną procedurą pozbawienia wszechmocy. Skoro bowiem stworzony kamień ma być niemożliwy do udźwignięcia, to znaczy że wraz z jego stworzeniem powstała sytuacja polegająca na tym, że nie istnieje żadna metoda na podniesienie tego kamienia. A przecież jedną z takich metod byłby właśnie powrót do wszechmocy. Oznacza to, że Bóg ograniczając swoją moc podnoszenia tego kamienia zrobiłby to bezpowrotnie – raz na zawsze.

Przeprowadzona analiza pokazuje, że sednem paradoksu kamienia jest pytanie o to jak rozumiemy pojęcie „Boga". Odpowiedź na pytanie,

Czy Bóg może stworzyć taki kamień, którego nie będzie mógł udźwignąć?

zależy od odpowiedzi na inne pytanie:

Czy Bóg może się zmienić, czyli pod jakimś względem unicestwić?

Zatem, twierdząca odpowiedź na pierwsze pytanie jest zarazem twierdzącą odpowiedzią na drugie. Oczywiście, nasza odpowiedź może brzmieć „Nie", lecz także i w tym przypadku będzie to jednoczesna odpowiedź na oba pytania.

W miejscu tym należy wrócić do wątpliwości związanej z propozycjami Mayo i Mavrodesa, a dotyczącej tezy, iż wszechmoc istoty *X* implikuje wewnętrzną sprzeczność zadania polegającego na stworzeniu kamienia, którego istota *X* nie mogłaby podnieść. Widać, że zadanie to jest wewnętrznie sprzeczne, gdy poza wszechmocą założymy dodatkowo niezmienność istoty *X*. Ponieważ, zarówno wszechmoc jak i niezmienność są dość powszechnie uważane, i to nie tylko w filozofii średniowiecznej, za atrybuty Boga, wydaje się, że istotnie analizowane zadanie jest wewnętrznie sprzeczne. Bóg pozostaje wszechmocny, mimo iż nie może stworzyć kamienia, którego nie mógłby potem podnieść, tak jak pozostaje wszechmocny, mimo iż nie może stworzyć kwadratowego koła.

Przedstawione wyżej rozwiązanie paradoksu kamienia można wyrazić w następujących punktach:

H

1. Wszechmocny Bóg może stworzyć kamień, którego nie będzie mógł podnieść;
2. Wszechmocny Bóg pozostaje wszechmocnym dopóty, dopóki nie stworzy tego kamienia;
3. Stworzenie tego kamienia ogranicza moc Boga, a właściwie istnienie tego kamienia ogranicza moc Boga;
4. Ograniczenie mocy Boga sprawia, że Bóg przestaje być wszechmocny;

Istotnie, przy takiej argumentacji paradoks kamienia znika. Bóg był wszechmocny i przestał być wszechmocny – żadnej sprzeczności w tym nie ma, chyba że Bóg nie może się zmieniać, lecz wówczas analizowane zadanie jest wewnętrznie sprzeczne.

Mimo to, zaproponowane przez nas rozwiązanie nie kończy dyskusji nad wszechmocą Boga. Załóżmy bowiem, że Bóg stworzył kamień *K*, którego nie może podnieść. Czy faktycznie istnienie kamienia *K* ogranicza wszechmoc Boga? Zgodnie z wyżej przedstawionym rozwiązaniem, tak. Rozumując ściśle, należy jednak podkreślić, że podniesienie kamienia jest jedyną czynnością, której Bóg nie może dokonać. Wszystkie inne czynności mogą być przez Boga podjęte. Tak więc Bóg może zmienić kolor kamienia, może zmienić jego skład chemiczny, może zmienić jego kształt, może go obrócić, wreszcie... może unicestwić kamień *K*. Przyjmijmy zatem kolejne założenie, że Bóg unicestwia kamień *K*. Czy w nowej sytuacji jest coś co ogranicza wszechmoc Boga? Oczywiście, niczego podobnego nie ma. Czy to znaczy, że Bóg ponownie się zmienił, tym razem wracając do wszechmocy? A może zdanie czwarte argumentacji *H* jest po prostu fałszywe?

Problem wywołany paradoksem kamienia można porównać do znanego w filozofii problemu wolnej woli człowieka. Czy Bóg obdarzając człowieka wolną wolą ograniczył swoją wszechmoc? Jeśli człowiek ma wolną wolę, to może się Bogu przeciwstawić, może więc podejmować działania sprzeczne z bożymi przykazaniami. W taki sposób człowiek działa na przekór woli samego Boga. Jednak Bóg nie powstrzymuje człowieka, bo w przeciwnym wypadku pozbawiłby go wolnej woli. Co więcej, Bóg obdarowuje człowieka wolną wolą na zawsze, tak jak na zawsze została ograniczona moc w podnoszeniu kamienia *K*. Zatem, moc Boga zostaje ograniczona. Czy takie ograniczenie mocy Boga oznacza, że Bóg pozbawia się wszechmocy, czy chociażby jej części? Raczej nie. W końcu Bóg, jeśli zechce może człowieka unicestwić, podobnie jak to uczynił w naszym przykładzie z kamieniem *K*, chociaż człowieka nie pozbawi wolnej woli, a kamienia *K* nie podniesie. To ścisłe podobieństwo, jakie zachodzi między problemem kamienia a kwestią wolnej woli człowieka sprawia, że paradoks kamienia ma inną, równie znaczącą, a może nawet ważniejszą postać:

Paradoks wolnej woli człowieka[135]

1. Albo Bóg może obdarzyć człowieka wolną wolą, albo Bóg nie może obdarzyć człowieka wolną wolą. (prawda logiczna)

2.1. Bóg może obdarzyć człowieka wolną wolą.	3.1. Bóg nie może obdarzyć człowieka wolną wolą.
2.2. Jeśli Bóg obdarzy człowieka wolną wolą, to będzie musiał uszanować decyzje człowieka, czyli nie będzie mógł ich nie uszanować.	3.2. Istnieje coś czego Bóg nie może uczynić. (z 3.1)
2.3. Człowiek ma wolną wolę. (dodatkowe założenie)	3.3. Bóg nie jest wszechmocny. (z 3.2)
2.4. Istnieje coś czego Bóg nie może uczynić. (z 2.2 i 2.3)	
2.4. Bóg nie jest wszechmocny. (z 2.4)	

4. Bóg nie jest wszechmocny. (z 1, 2.1 → 2.4, 3.1 → 3.3)

Ostateczna postać proponowanego rozwiązania paradoksu

Bóg może stworzyć kamień, którego w przypadku stworzenia nie będzie mógł podnieść. Jeśli Bóg stworzy taki kamień, to ograniczy swoją moc w zakresie podnoszenia go i tylko w tym zakresie. Nie ma to jednak związku z wszechmocą, bo ta pozostaje niezmieniona. Dowodzi tego fakt, iż Bóg może kamień unicestwić. Wówczas sytuacja jest dokładnie taka, jak przed stworzeniem kamienia, czyli nie ma niczego, co ograniczałoby moc Boga. Oznacza to, że stworzenie przez Boga kamienia, którego nie mógłby podnieść jest analogiczne do stworzenia świata wraz z ustanowieniem zasady sprzeczności. Bóg może świat unicestwić z jednoczesnym odwołaniem zasady sprzeczności, może też stworzyć nowy świat zastępując zasadę sprzeczności, inną, niemożliwą do wyobrażenia przez człowieka, fundamentalną zasadą logiczną. Tak więc, problem stworzenia przez Boga kamienia, którego sam Bóg

[135] Ze względu na ścisłe podobieństwo tego paradoksu do paradoksu kamienia, paradoks wolnej woli człowieka nie będzie oddzielnie omawiany. Zaproponowane przez nas rozwiązanie paradoksu kamienia stosuje się bowiem do paradoksu wolnej woli.

nie mógłby podnieść rozwiązuje się poprzez odwołanie się do odróżnienia mocy Boga od wszechmocy, na wzór odróżnienia *potentia dei absoluta* od *potentia dei ordinata*. Paradoks kamienia może więc stanowić istotny argument wskazujący na trafność dokonanego w średniowieczu rozróżnienia obu mocy.

Oznacza to, że paradoks kamienia jest kolejnym problemem wynikającym z błędu wieloznaczności: ograniczenie mocy Boga nie jest ograniczeniem jego wszechmocy. Bóg może w różny sposób ograniczyć swoją moc, nie naruszając przy tym swojej wszechmocy.

2.8. PODSUMOWANIE

Błędy wieloznaczności powinny należeć do jednych z najprostszych do rozwiązania problemów jakie sobie sami nieopatrznie stwarzamy. Co więcej, powinniśmy być do nich przyzwyczajeni, gdyż z wieloznacznością mamy do czynienia zawsze i wszędzie. Praktycznie każde wypowiadane przez nas zdanie jest wieloznaczne, chociażby z powodu zamierzonego i niemożliwego do uniknięcia, niedookreślenia. Nie sposób przecież posługiwać się zdaniami w pełni dookreślonymi. Najczęściej stosujemy dookreślenie częściowe, które w danym kontekście jest w pełni wystarczające. Dla przykładu, mówimy więc: „Czy wiesz, że to Jan przekazał informację o Marku?". Wypowiadając zdanie „Jan przekazał informację o Marku" mamy nadzieję, że nasz słuchacz wie którego Jana i którego Marka mamy na myśli, a ponadto wie o jaką informację nam chodzi. Tak więc, z wieloznacznością powinniśmy sobie nieźle radzić, a jednak niekiedy przyjmuje ona taką postać, że trudno jest w danej wypowiedzi doszukać się tego prostego przecież, w swej istocie, błędu.

Liczba paradoksów, wynikających z wieloznaczności jest ogromna i przytoczona przez nas grupa stanowi zaledwie niewielki odsetek całości. Paradoksy wieloznaczności stanowią treść dwóch rozdziałów, jednego poświęconego sofizmatom i paralogizmom oraz drugiego zawierającego poważniejsze argumentacje dotyczące donioślejszych kwestii. Oczywiście, i w przypadku drugiego z wymienionych rozdziałów można wskazać paradoksy niepoważne, ich wystąpienie tłumaczy się jednak tym, iż w pewien jaskrawy sposób ujawniają one to, iż u podstaw danego paradoksu leży błąd wieloznaczności. Tak więc, rozdzielenie paradoksów wieloznaczności na dwa rozdziały jest wyraźnie kwestią arbitralnej decyzji oraz wyczucia.

Wydaje się, iż najważniejszym paradoksem wieloznaczności jest paradoks Protagorasa, który przez wieki nie był kojarzony z tym tak bardzo przecież powszechnym błędem. Jest to chyba najlepszy przykład na to, jak bardzo trudna do rozpoznania potrafi być wieloznaczność. Jej niedostrzeżenie było przyczyną zmiany sensu paradoksu i analizowania innego dylematu dotyczącego sposobu odzyskania pieniędzy. Ponadto, ponieważ w paradoksie tym analizowany jest problem czy uczeń powinien zapłacić nauczycielowi za naukę, czy też nie, powstała pokusa uznania dylematu za przykład kwestii, która powinna być rozważana na gruncie logik deontycznych. Swoją monografię poświęconą tym właśnie systemom logicznym Åqvist rozpoczyna od prezentacji paradoksu Protagorasa[136]. Zabieg taki może sugerować, iż systemy te mają *de facto* starożytny rodowód. Co prawda, dalej Åqvist przyznaje, że w swej monografii nie przedstawi żadnego rozwiązania paradoksu Protagorasa, wymienia jednak publikacje zawierające propozycje rzekomych rozwiązań: Lenzen [1977], Smullyan [1978], Åqvist [1981]. Jak widać sprowadzenie tego paradoksu do problemu deontycznego sprawia, iż zmienia się perspektywa postrzegania sedna całej sprawy. Właściwie, sedno to staje się nieuchwytne. Nie jest to jedyny przypadek, w którym zostaje podjęta próba rozwiązania danego paradoksu przy pomocy jakiejś specjalnej nieklasycznej logiki. Praktyka taka wydaje się być nieuzasadniona. Jeśli bowiem rozwiązanie każdego ważniejszego paradoksu wymaga stworzenia specjalnej nieklasycznej logiki, to wniosek jest prosty: paradoksy ujawniają wyjątkową słabość logiki klasycznej, którą trzeba zastępować za każdym razem inną i do tego odpowiednią logiką nieklasyczną. Åqvist we wspomnianej monografii cytuje Russella, który w swej pracy *O denotowaniu* stwierdza, iż logiczna teoria może być testowana dzięki dylematom, które potrafi lub których nie potrafi rozwiązać. Przyjmując podejście Lenzena, Smullyana, Åqvista należałoby zatem stwierdzić, iż z punktu widzenia paradoksu Protagorasa, logika klasyczna winna ustępować deontycznej. Nasza analiza pozornych przecież rozwiązań Lenzena, Smullyana i Åqvista jest więc obroną logiki klasycznej i, niestety, w świetle uwagi Russella, może być rozumiana jako wykazanie, iż starożytny problem Protagorasa w żaden sposób nie uzasadnia istnienia systemów deontycznych. Co więcej, przedstawiona przez nas propozycja spojrzenia na ten dylemat nie tylko wykazuje zbędność, lecz również szkodliwość analizy problemu w kategoriach powinności. Nasze proste rozwiązanie nie wychodzi poza ramy logiki klasycznej[137].

Zaproponowane przez nas rozwiązanie paradoksu Protagorasa można rozumieć jako próbę obrony tezy, iż paradoks odkryty i sformułowany w logice klasycznej winien dawać się w tej logice rozwiązać. Innym zagadnieniem jest

[136] Åqvist, [1984], s. 606–607.

[137] W publikacji poświęconej paradoksom należy wspomnieć, że powstanie logik deontycznych powołało do istnienia wiele nowych paradoksów takich jak chociażby paradoks *Good Samaritan*, *contrary-to-duty obligation*, Rossa, *derived obligation*, *the Secretary*, *the second-best plan* i innych (patrz Hilpinen [1971], [1981]). Pominiemy jednak jakąkolwiek analizę tych paradoksów, ponieważ ich omawianie wykraczałoby znacznie poza ramy niniejszej książki. Paradoksy te są bowiem problemami typowymi dla konkretnych formalnych systemów deontycznych i raczej nie mają związku z naszym codziennym myśleniem.

prawdziwość tej tezy. W wielu przypadkach wydaje się ona uzasadniona[138]. Niestety, istnieje pewna grupa paradoksów ontologicznych, których rozwiązanie wydaje się wymagać uznania fałszywości tej zdroworozsądkowej tezy.

Wieloznaczność jest także jedną z dwóch przyczyn zaistnienia, równie sławnego jak paradoks Protagorasa, paradoksu Elektry, interesującego o tyle, że problem będący jego istotą jest skutkiem nałożenia się dwóch niezależnych od siebie błędów myślenia. Co więcej, każdy z tych błędów z osobna wystarczyłby do zaistnienia tego paradoksu. To właśnie ta złożoność jest powodem, dla którego prosty do rozwiązania dylemat nie został włączony do rozdziału poświęconego sofizmatom i paralogizmom. Bez wspomnianej złożoności problemu Elektry, paradoks ten jest zwykłym, budzącym uśmiech paralogizmem. Paralogizmem zaś wywołującym już, nie tylko uśmiech, jest bez wątpienia paradoks rogacza. Jego proste rozwiązanie nie wiąże się nawet z jakąkolwiek złożonością. Jednak w przypadku tego problemu, wieloznaczność w oryginalny sposób dotyczy rozumowania jako całości. Cała argumentacja jest dwuznaczna, gdyż jej entymematyczna przesłanka może przybrać jedną z dwóch, do tego stopnia różnych, że aż wykluczających się wzajemnie, postaci. Ten fakt, jak również starożytny rodowód paradoksu rogacza uzasadnia włączenie tego ewidentnego paralogizmu do rozdziału omawiającego poważniejsze paradoksy wieloznaczności. O powadze paradoksu świadczy bowiem nie to, jak poważne słowa są używane w argumentacji, lecz w jak poważny, oryginalny i interesujący sposób paradoks ten jest rozwiązywany. Gdyby bowiem kierować się powierzchowną oceną inspirowaną słowami użytymi w narracji opisującej paradoksalną argumentację, to do „śmiesznych" dylematów powinniśmy zaliczyć nie tylko paradoks rogacza, lecz również niezwykle poważne paradoksy kamienia, krokodyla, kłamcy, ale przede wszystkim, najpoważniejszego z wszelkich możliwych, paradoksu łysego.

Potężną liczebnie grupę stanowią ekwiwokacje, tutaj reprezentowane przez kilka zaledwie wybranych przykładów. Schemat rozumowania obarczonego tego rodzaju błędem jest dość prosty. Mimo to, nie zawsze prostym zadaniem jest odkrycie istoty popełnionego błędu. Wśród licznych ekwiwokacji na uwagę zasługują te, które wynikają z nieodróżnienia języka od metajęzyka. Problem rozróżnienia poziomów języka jest szczególnie istotnym i bardzo podstawowym zagadnieniem logicznym ujawnionym przez paradoks klubu bez nazwy. Jedną z przyczyn niemożności rozpoznania tego problemu może być właśnie ekwiwokacja. Okazuje się, że precyzyjne przestrzeganie odpowiedniego użycia cudzysłowu jest prostą metodą na uniknięcie ekwiwokacji o metajęzykowym pochodzeniu. Cudzysłów zabezpiecza nas wówczas przed jednakowym traktowaniem wyrażeń języka przedmiotowego i wyrażeń metajęzyka. Jedyny

---

[138] Patrz dowolny rozdział, poza ostatnim.

kłopot jaki może pozostać i który jest trudniejszy do uniknięcia, wiąże się z użyciem języka w postaci wypowiedzi słownej.

Przedstawiona w rozdziale lista prostych ekwiwokacji jest złożona z paralogizmów, które dzisiaj nie mogą pretendować nawet do roli sofizmatów. Są banalnymi, przypomnianymi z dwóch powodów pseudo-problemami. Pierwszym powodem jest ich niezwykła swego czasu popularność. Drugim powodem jest ich historyczność – mają one przecież, albo starożytny, albo średniowieczny rodowód.

Okazuje się jednak, że ekwiwokacje mogą mieć również całkiem poważną postać, a odkrycie błędu wieloznaczności, będącego ich sednem wcale nie jest sprawą prostą. Właśnie z tego powodu paradoks wszechmocnego Boga został omówiony w oddzielnym paragrafie, podobnie jak paradoks kamienia. Oba te dylematy stanowią interesujące przypadki logicznego problemu, który robi wrażenie wyłącznie filozoficznej, a nawet teologicznej kwestii. Każdy z tych problemów wywołał niemałe poruszenie wśród filozofów zwłaszcza średniowiecznych, stając się impulsem do głębokich filozoficzno-teologicznych analiz. Tymczasem okazuje się, iż na każdy z tych problemów można spojrzeć wyłącznie z perspektywy teorii logicznych błędów wypowiedzi, czyniąc je stosunkowo prostymi do rozwiązania.

Analizowane w tym rozdziale paradoksalne argumentacje pokazują, że chociaż wieloznaczność sama w sobie nie jest zjawiskiem ani niezwykłym ani tajemniczym, to jednak może być przyczyną zupełnie niezwykłych i, wydawać by się mogło, tajemniczych paradoksów.

3

PARADOKSY SAMOZWROTNOŚCI

Samoodniesienie się lub wzajemne odniesienie się jest związkiem charakteryzującym nie tylko wypowiedzi i pojedyncze zdania, nie tylko serie zdań układające się w pewne rozumowania, lecz także obiekty matematyczne, czy wreszcie obiekty świata materialnego. Samoodniesienie się, zwane też samozwrotnością lub cyrkularnością nie stanowi problemu tak długo jak długo zachowuje pewien porządek. Jeśli więc, zdanie A odnosi się do siebie stwierdzając swoją własną prawdziwość (zdanie takie nazywane jest *zdaniem prawdomówcy*), to fakt ten nie prowadzi do żadnych paradoksalnych konsekwencji. Podobnie, niczego niezwykłego nie obserwujemy wówczas, gdy pasek papieru połączymy w jedną opaskę, tak aby każda ze stron paska była przedłużeniem siebie samej. Okazuje się jednak, że samoodniesienie się wraz z pewnego rodzaju odwróceniem daje efekt zaskakujący. Tak więc, zdanie A, stwierdzające swoją nieprawdziwość (tzw. *zdanie kłamcy*), staje się wielkim, ważnym problemem logicznym. Podobnie, pasek połączony w ten sposób, że jedna jego strona jest przedłużeniem drugiej, jest obiektem o niewiarygodnej własności (tak połączony pasek jest nazywany *wstęgą Möbiusa*). Wciąż będąc zwykłym paskiem papieru, nie ma już dwóch powierzchni, lecz jedną powierzchnię – jest to obiekt, który jedynie pozornie posiada dwie strony, w rzeczywistości ma on jedynie jedną stronę. A jednak realne istnienie wstęgi Möbiusa wskazuje na to, iż nie ma w niej żadnej sprzeczności. Zaproponowane w tej pracy podejście do paradoksu kłamcy ma na celu w podobny sposób wykazać pewnego rodzaju zwykłość zdania kłamcy, które istnieje jako zdaniew sensie logicznym, nie ma więc w nim niczego sprzecznego. Zdanie to istnieje tak, jak istnieje wstęga Möbiusa. Wstęga Möbiusa ma niezwykłą własność, będąc zwykłym paskiem papieru. Podobnie, zdanie kłamcy ma pewną niezwykłą własność, lecz samo jest zwykłym zdaniem. Zaproponowane, w tym celu, przez nas podejście, wykorzystujące prosty rachunek zdaniowy, będący nieskomplikowanym rozszerzeniem klasycznego rachunku zdaniowego, okazuje się być narzędziem rozbrajającym również pozostałe trudności wynikłe ze wzajemnego odnoszenia się zdań. Tak więc, z zaproponowanej przez nas perspektywy, paradoksy wzorowane na antynomii Buridana przestają być już przykładami paradoksalnych argumentacji.

Czymś zupełnie zrozumiałym jest jednak to, że dysponując językiem naturalnym jesteśmy w stanie stworzyć konstrukcje, które bez względu na stosowane przez nas narzędzia muszą generować sprzeczność, gdyż tak właśnie konstrukcje te są pomyślane. Należy więc uznać istnienie takich paradoksów, które nie powinny mieć rozwiązania, ponieważ dowodzą wspomnianej możliwości, jaką daje odpowiednio bogaty język. Trudno jest więc na siłę rozwiązywać niektóre z problemów. Co więcej, niektóre dylematy nie powinny mieć rozwiązania, tak jak nie powinno się dać wytłumaczyć utożsamienie kwadratu z kołem, chociaż, jak widać, istnieje w języku możliwość mówienia o kwadratowym kole. Brak rozwiązania jest więc, w przypadku pewnej grupy paradoksów, czymś pożądanym i z tego punktu widzenia wszelkie próby poszukiwania rozwiązań tych dylematów powinny uchodzić za dziwaczne, niedorzeczne i niepożądane. Za pozbawione sensu muszą przecież uchodzić wszelkie konstrukcje, które „na siłę" pokazywałyby, że pojęcie kwadratowego koła jest niesprzeczne.

W poprzednim rozdziale, zebrane zostały paradoksy reprezentujące co prawda różne kwestie, ale charakteryzujące się tym, że rozwiązanie tych paradoksów wymagało usunięcia tkwiących w nich błędów wieloznaczności – sednem wszystkich tych paradoksów jest bowiem wieloznaczność. W tym rozdziale są omówione te dylematy, których istotą jest jakaś forma samozwrotności[1]. Nie jest przy tym ważne, czy samozwrotność ta ma charakter językowy, logiczny, czy nawet materialny. Odczucie paradoksalności jest bowiem, w przypadku każdego rozważanego tu paradoksu źródłem tego samego zabiegu zapętlenia. To właśnie jest przyczyną tego, że obok „materialnego", czy matematycznego zapętlenia się wstęgi Möbiusa, znajdziemy tu samozapętlające się zdania, wzajemnie zapętlające się zdania, czy wreszcie zapętlające się rozumowania. W rozdziale tym jest więc pokazane, iż samoodniesienie się może mieć przeróżne realizacje.

3.1. WSTĘGA MÖBIUSA I BUTELKA KLEINA, czyli samozwrotność w matematyce

Zgodnie z zapowiedzią, paragraf ten jest wstępem do zaproponowanego w następnym paragrafie rozwiązania antynomii kłamcy. Dlatego też omówienie wstęgi Möbiusa ma dość istotne znaczenie dla naszych dalszych analiz samozwrotności.

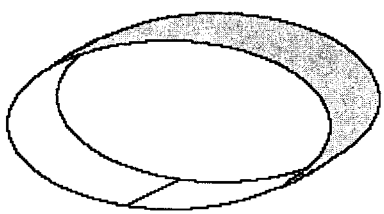
---

[1] Wyjątek stanowi tu antynomia Russella, która mimo swojego niewątpliwie samozwrotnego charakteru, z oczywistych i wyjaśnionych już wcześniej powodów, została omówiona w paragrafie poświęconym paradoksom teorii mnogości Georga Cantora. Naturalnie, antynomia Russella nie jest jedynym paradoksem teorii mnogości, którego istota ma związek z samozwrotnością. Wszystkie te problemy znalazły swoje miejsce w paragrafie 1.5.3.

Niewątpliwie, najsławniejszą samozwrotną konstrukcją w matematyce jest zbiór Russella $\{x: x \notin x\}$. Omówienie tego wielkiego teoriomnogościowego problemu zawiera paragraf 1.5.3 *Paradoksy teorii mnogości Georga Cantora.* Czymś zupełnie naturalnym jest to, że nie wszystkie struktury samozwrotne muszą generować sprzeczność, lecz i w takich przypadkach możemy odnieść wrażenie czegoś paradoksalnego. Odczucie paradoksalności jest jednak dowodem na to, iż nasza intuicja nie jest niezawodna, gdyż np. odmawia możliwości istnienia strukturom, które najwyraźniej mogą istnieć[2]. Przykładem takich właśnie istniejących w matematyce struktur są wstęga Möbiusa i butelka Kleina[3]. Ponadto, wstęga Möbiusa istnieje nie tylko jako przedmiot matematyczny. Daje się ona wykonać ze zwykłego paska papieru, może więc być pojmowana jako obiekt materialny.

Rozważmy pasek papieru, którego jedna strona jest biała, druga zaś szara. Białą stronę nazwijmy „stroną *a*", szarą „stroną *b*". Ponieważ pasek nie ma trzeciej strony, stronę szarą będziemy również nazywali „stroną *nie-a*":

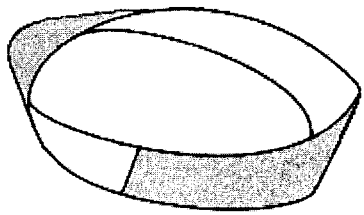
Krańce paska możemy połączyć tak, aby zachodziła zgodność obu stron paska, czyli tak, aby strona *a* jednego krańca przechodziła w stronę *a* drugiego krańca. Oczywiście, wówczas strona *b* jednego krańca będzie przechodzić w stronę *b* drugiego krańca. Połączenie paska jest więc po jednej stronie granicą biało-białą, po drugiej zaś, szaro-szarą:



[2] Tradycyjnie przyjmujemy, że istnieć może wszystko to, czego istnienie nie implikuje sprzeczności.

[3] Jasne jest, że ten paragraf mógłby być częścią rozdziału poświęconego paradoksom wynikającym z niedoskonałości naszej intuicji. Jednak istota wstęgi Möbiusa jest na tyle bliska paradoksowi kłamcy, że przedstawienie tej, samozwrotnej przecież, konstrukcji w rozdziale poświęconym paradoksom samozwrotności wydaje się być bardziej uzasadnione.

Krańce paska mogą jednak być połączone w inny sposób: strona *b* (*nie-a*) jednego krańca paska przechodzi w stronę *a* drugiego krańca. Zatem, strona *a* jednego krańca paska przechodzi w stronę *b* (*nie-a*) drugiego krańca. Połączenie paska jest więc po obu stronach granicą biało-szarą. Powstała w ten sposób konstrukcja, będąca przykładem powierzchni jednostronnej, nosi nazwę wstęgi Möbiusa[4]. Istotnie, strona *a* jest w niej stroną *b* (*nie-a*), a więc i strona *b* (*nie-a*) jest stroną *a*:



W przypadku wstęgi Möbiusa, nazwy „strona *a* paska" oraz „strona *b* paska" przestają oznaczać dwa różne obiekty. Istotnie, właściwy tej wstędze sposób połączenia paska papieru utożsamił stronę *a* ze stroną *b* (*nie-a*). Zatem:

$$a = b$$

czyli

$$a = nie\text{-}a$$

Nie oznacza to jednak wcale, że strona *a* nie jest już stroną *a*, zaś strona *b* nie jest stroną *b*. To, że strona *a* nadal jest stroną *a*, najlepiej udowadnia fakt, iż na stronie tej widnieje kolor biały. Podobnie, strona *b* (*nia-a*) nadal jest stroną *b* (*nie-a*). Natomiast to, że na jednej stronie widnieje, zarówno kolor biały, jak i szary, świadczy jedynie o tym, że te dwie, początkowo odseparowane od siebie, strony stały się jedną i tą samą stroną. Nie jest więc prawdą, że zachodzi którakolwiek z trzech następujących nierówności:

$$a \neq a,\ b \neq b,\ nie\text{-}a \neq nie\text{-}a$$

O ile bowiem, do pomyślenia, i jak widać nie tylko do pomyślenia, jest równość „a = *nie-a*", o tyle nie sposób, ani pomyśleć, ani tym bardziej zrealizować to, aby coś nie było sobą, skoro nadal jest czymś, czyli aby *a* było różne od *a*, czy *b*

---

[4] August Ferdynand Möbius (1790–1868), niemiecki matematyk i astronom, profesor Uniwersytetu w Lipsku, twórca podstaw geometrii rzutowej i topologii. Największą sławę zyskał jednak jako odkrywca wstęgi posiadającej jedną zaledwie stronę, zwanej później wstęgą Möbiusa. Odkrycia tego dokonał w 1858 r.

(*nie-a*) było różne od *b* (*nie-a*)[5]. Czymkolwiek *a* jest, skoro jest, bez wątpienia jest *a*. Zatem, $a = a$, $b = b$, *nie-a* = *nie-a*. Pomysł, aby połączenie paska we wstęgę Möbiusa traktować jako konstrukcję, w której jednocześnie $a = b$ i $a \neq a$ świadczy o niezrozumieniu powstałej konstrukcji. Jeśli bowiem przyjmiemy, że jakieś *a* jest od teraz jakimś *b* (*nie-a*), to najwyraźniej wychodzimy od założenia, że *a* jest *a*, zaś *b* (*nie-a*) jest *b* (*nie-a*). W przeciwnym razie, straciłaby swój sens równość $a = b$. Jak bowiem można mówić, że jakieś *a* jest jakimś *b*, skoro *a* nie jest *a* lub *b* nie jest *b*? Jeśli $a \neq a$, czyli jeżeli *a* nie jest *a*, to nie *a* jest *b*, lecz coś zgoła różnego od *a* jest obiektem *b*, nie może więc być prawdą, że $a = b$. Podobnie, jeśli $b \neq b$, czyli jeśli *b* nie jest *b*, to *a* nie jest *b* lecz obiekt *a* jest czymś zupełnie różnym od *b*, nie może więc być prawdą, że $a = b$. Zatem, w przypadku wstęgi Möbiusa mamy przypadek wyrażony przez następującą koniunkcję: $a = a$ i $b = b$ (*nie-a* = *nie-a*) oraz $a = b$ (a = *nie-a*).

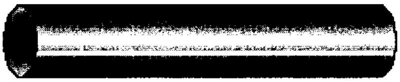
W przeciwieństwie do równości $a = b$, pewną wątpliwość może jednak budzić równość a = *nie-a*. Sugeruje ona bowiem, że jakieś *a* nie jest sobą, gdyż jest *nie-a*. Istotnie, jeśli jakieś *a* jest *nie-a*, najwidoczniej nie jest *a*. Ta prosta uwaga pokazuje nietrafność nazwania przez nas strony *b* stroną *nie-a*. O ile, niebudzącą wątpliwości prawdą jest, że na niepołączonym pasku strona *b* nie jest stroną *a*, o tyle, po odpowiednim połączeniu, strona *b* jest niewątpliwie stroną *a*. Widać więc wyraźnie, że w sytuacji, w której dwa różne obiekty *a* i *b* mogą zostać w niesprzeczny sposób utożsamione, nazwanie obiektu *b* obiektem *nie-a*, mimo iż bez wątpienia *b* nie jest *a*, musi prowadzić do sprzeczności, która wynika wyłącznie z takiego, a nie innego doboru nazw.

Ten nietrafny dobór nazw dla odpowiednich zdań samozwrotnych jest odpowiedzialny za istnienie, sławnego od wieków, paradoksu kłamcy. Jak się więc później okaże, przedstawiona wyżej analiza wstęgi Möbiusa jest kluczem do proponowanego przez nas w następnym paragrafie tego rozdziału rozwiązania paradoksu kłamcy.

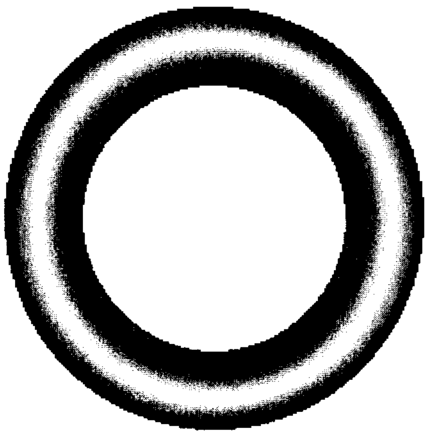
Istotą wstęgi Möbiusa jest to, że obiekt przestrzeni dwuwymiarowej jakim jest prostokąt, może posłużyć do konstrukcji obiektu przestrzeni trójwymiarowej, jakim jest ta właśnie wstęga. Wystarczy, aby dokonać odpowiedniego „skrętu" dwuwymiarowej przestrzeni, czyli płaszczyzny, wchodząc w ten sposób w przestrzeń trzech wymiarów. Wspomniany „skręt" przestrzeni dwuwymiarowej jest możliwy jedynie wówczas, gdy wykorzystamy dodatkowy, w tym przypadku, trzeci wymiar przestrzeni. Ten sam zabieg można jednak przeprowadzić na obiekcie z przestrzeni trójwymiarowej, jakim jest walec:

---

[5] Mogłoby się wydawać, że jest jeden sposób, aby sensownie zinterpretować sytuację, w której $a \neq a$ i $b \neq b$ i $a = b$. Można by mianowicie przyjąć, że sytuacja dana tymi trzema warunkami polega na tym, że zmieniamy nazwę strony *a* na *b* i strony *b* na *a*. Wówczas, strona *a* przestaje być *a* i staje się stroną *b*, zaś strona *b* przestaje być *b* i staje się stroną *a*. Jest to jednak interpretacja mocno naciągana, gdyż jak to dalej pokażemy, równość $a = b$ traci sens, gdy $a \neq a$ i $b \neq b$.



Należy dokonać „skrętu” przestrzeni trójwymiarowej, posługując się dodatkowym, czwartym wymiarem. Powstaje wówczas obiekt przestrzeni czterowymiarowej, zwany butelką Kleina[6]. Cechą tego obiektu jest to, że wnętrze butelki jest zarazem jej zewnętrzem. Własność ta wynika z faktu, iż w wyniku „skręconego” połączenia walca, jego wnętrze przechodzi w zewnętrze tegoż walca. Ponieważ proste połączenie walca, w którym wnętrze walca przechodzi we wnętrze, zaś zewnętrze walca w zewnętrze, nie wymaga dodatkowego wymiaru, cała konstrukcja daje obiekt przestrzeni trójwymiarowej, zwany torusem, który bez trudu daje się zilustrować:



Z oczywistych powodów, przedstawienie graficzne butelki Kleina nie jest możliwe – nasza wyobraźnia nie operuje przecież czterema przestrzennymi wymiarami[7].

[6] Felix Klein (1849–1925), niemiecki matematyk, profesor Uniwersytetu w Lipsku, członek berlińskiej Akademii Nauk. Specjalizował się w geometriach nieeuklidesowych, teorii grup, teorii równań algebraicznych oraz w teorii funkcji eliptycznych i automorficznych.

[7] Ściślejszy, wyrażony w kategoriach topologicznych, opis, zarówno wstęgi Möbiusa, jak i butelki Kleina można znaleźć w monografiach matematycznych poświęconych topologii, np. Engelking i Sieklucki, [1986], s. 49, 155–156, 237–239, 246–250.

3.2. ANTYNOMIA KŁAMCY, BURIDANA, UOGÓLNIONA POSTAĆ ANTYNOMII KŁAMCY

Znany od wieków paradoks kłamcy jest uważany za najpotężniejszy i najważniejszy spośród wszystkich możliwych paradoksów naszego myślenia. Już sama jego postać wskazuje na to, iż jest to dylemat wywołany samozwrotnością, która bywa też nazywana samoodniesieniem się wypowiedzi. To zapętlenie się wypowiedzi może mieć kształt jednego zdania, wówczas mamy do czynienia z błędnym kołem bezpośrednim. Może też przyjąć postać dwóch lub więcej zdań, mamy wtedy przypadek błędnego koła pośredniego. Tradycyjnie, mianem paradoksu kłamcy określa się bezpośrednią cyrkularność jednego zdania. Ta wersja paradoksu kłamcy, którą tworzą dwa wzajemnie odnoszące się do siebie zdania znana jest od średniowiecza, zaś od nazwiska swojego odkrywcy nosi nazwę *paradoksu Buridana*. Uogólniona postać paradoksu kłamcy wykorzystuje wzajemne odnoszenie się dowolnej, skończonej ilości zdań. Ponieważ, paradoks kłamcy prowadzi do sytuacji, w której dwa sprzeczne zdania wzajemnie się implikują, problem ten jest nazywany antynomią.

3.2.1. ANTYNOMIA KŁAMCY

Teoriomnogościowa antynomia Russella, omówiona w paragrafie 1.5.3 *Paradoksy teorii mnogości Georga Cantora*, wywołała szczególne zainteresowanie tzw. antynomiami semantycznymi, reprezentowanymi w tym rozdziale przez antynomię kłamcy, paradoks golibrody oraz antynomie Richarda, Berry'ego i Grellinga. Wszystkie te dylematy wskazują na pewną ważną własność każdego systemu, który zawiera terminy semantyczne, dotyczące wyrażeń tego systemu (lub też terminy pozwalające na zdefiniowanie takich terminów) i w którym obowiązują prawa i reguły klasycznego rachunku logicznego. Okazuje się mianowicie, że, jak to wykazał Tarski, w cytowanej już wcześniej pracy z 1933 roku *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*[8], system taki jest sprzeczny. Jedną z metod rozwiązującą ten problem jest propozycja Leśniewskiego, rozwinięta przez Tarskiego, a zakładająca odróżnienie języka od metajęzyka, czyli języka, w którym mówi się o wyrażeniach danego języka[9]. Podobną opinię w kwestii tych właśnie paradoksów wyrażał Ramsey, który zasłynął między innymi tym, że w książce *The foundations of mathematics and other logical essays* z 1931 roku, zaproponował podział paradoksów na dwie grupy, zwane dziś pierwszą i drugą grupą Ramseya[10].

---

[8] Tarski, [1933].
[9] Borkowski, [1991], s. 356.
[10] Patrz paragraf 1.5.3 *Paradoksy teorii mnogości Georga Cantora.*

Do pierwszej należą tak zwane paradoksy logiczne, czyli paradoksy teorii mnogości. Do drugiej grupy Ramsey zaliczył paradoksy, w których istotną rolę odgrywają pojęcia oznaczania i odnoszenia się. Zazwyczaj dylematy te zwane są semantycznymi, rzadziej syntaktycznymi, czy epistemicznymi. Największym z paradoksów semantycznych, a dla wielu, w ogóle największym paradoksem wszech czasów jest antynomia kłamcy[11].

W starożytności, reputacja mieszkańców Krety pozostawiała wiele do życzenia. Przyczyną tego była ich rzekomo powszechna kłamliwość. Interesującą historię, wyjaśniającą zjawisko permanentnego mijania się Kreteńczyków z prawdą znajdujemy w micie o Medei. Idomeneusz, tragiczny król Krety, został poproszony przez córkę króla Kolchidy, Medeę oraz nereidę Tetydę, obiekt westchnień samego Zeusa i Posejdona, o rozstrzygnięcie, która z nich jest piękniejsza. Idomeneusz uznał, iż uroda Tetydy przewyższa urodę Medei. Wywołało to zrozumiały gniew przegranej kobiety. Wówczas, Medea w wielkim wzburzeniu wypowiedziała pamiętne słowa „Kreteńczycy zawsze kłamią", po czym rzuciła na wszystkich mieszkańców Krety klątwę, aby nigdy żaden Kreteńczyk nie był w stanie powiedzieć prawdy. Jednak, to wypowiedziane przez Medeę zdanie stało się powszechniej znane, gdy powtórzył je Epimenides, sławny Kreteńczyk z Knossos, żyjący na początku szóstego wieku p.n.e., postać na poły legendarna, teolog, jasnowidz i cudotwórca. Diogenes Laertios podaje, iż Epimenides z Knossos bywa zaliczany, obok Talesa z Miletu, Solona z Aten, Chilona ze Sparty i Pittakosa z Mytileny, do pierwszych mędrców[12]. Epimenides pozostawił po sobie poematy i utwory prozą[13]. Jednak największą sławę przyniosło mu, wyżej przypomniane, zdanie Medei. O ile bowiem wypowiedź mieszkanki odległej od Krety, bo leżącej aż na wschodnim wybrzeżu Morza Czarnego, Kolchidy nie musiała budzić szczególnych wątpliwości natury logicznej, o tyle stwierdzenie samego Kreteńczyka, iż Kreteńczycy zawsze kłamią wydaje się być zdaniem w oczywisty sposób fałszywym. Skoro bowiem Kreteńczycy zawsze kłamią, kłamać musi również i Epimenides mówiący, że Kreteńczycy zawsze kłamią. Zatem, zdanie „Kreteńczycy zawsze kłamią" nie może być prawdą, jeśli tylko wypowiada je Kreteńczyk. Warto jednak pamiętać, że chociaż zdanie Medei stało się problemem logicznym dopiero wówczas, gdy wypowiedział je Kreteńczyk, to, jak zauważa Bocheński, najprawdopodobniej sam Epimenides nie zdawał sobie sprawy z tej trudności i nie rozważał żadnych logicznych paradoksów.

---

[11] Nasze stanowisko jest zgoła inne. Antynomia kłamcy choć jest niewątpliwie wielkim paradoksem musi, ze względu na doniosłość, ustąpić pierwszeństwa paradoksom stosu, omówionym w następnym, ostatnim rozdziale poświęconym paradoksom ontologicznym.

[12] Diogenes Laertios, *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, I, 13, s. 13–14; I, 41–42, s. 31.

[13] Diogenes Laertios, *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, I, 111–112, s. 69.

Prawdopodobnie, antynomii kłamcy nie znał Platon, który jednak analizował podobny problem, samozwrotności wypowiedzi, w dialogu zatytułowanym *Eutydem*[14]. Również Arystoteles zastanawiał się nad tym, czy można kłamiąc mówić prawdę, najwyraźniej nie dostrzegając jednak wagi tego problemu[15]: „Podobnie ma się rzecz z twierdzeniem, że ten sam człowiek może równocześnie kłamać i mówić prawdę; ale twierdzenie to nie jest łatwe do zbadania, kiedy mianowicie głosi się prawdę w ogóle, a kiedy kłamstwo, i w tym, jak się zdaje leży trudność"[16]. Mimo iż, jak widać, zagadnienie bliskie antynomii kłamcy istniało w świadomości filozofów żyjących przed Arystotelesem, to jednak problem ten został rozpoznany jako dylemat natury logicznej dopiero przez współczesnego Arystotelesowi, choć najprawdopodobniej starszego od niego, Eubulidesa (IV w. p.n.e.), który obecnie jest powszechnie uznawany za odkrywcę tego niezwykłego paradoksu. Eubulides, znany jako zaciekły przeciwnik Arystotelesa, był autorem nie tylko antynomii kłamcy, lecz również niezwykle ważnych, a może nawet najważniejszych spośród znanych, paradoksów nieostrości oraz innych, mniejszej wagi, problemów logicznych, takich jak *Ukryty*, *Elektra*, *Rogacz*[17]. Niestety, najwyraźniej Arystoteles nie docenił wielkich, logicznych odkryć Eubulidesa, nie tylko bagatelizując antynomię kłamcy, lecz przede wszystkim pomijając milczeniem paradoksy nieostrości. Bocheński odnotowuje, iż później problemem kłamcy zajmowali się Teofrast z Eresos (ok. 370–287 p.n.e.) oraz Chryzyp z Soloi (ok. 277–208 p.n.e.). Pierwszy poświęcił temu problemowi trzy księgi, drugi prawdopodobnie dwadzieścia osiem. Próbując zrekonstruować propozycję Chryzypa rozwiązania antynomii kłamcy, Bocheński podkreśla fragmentaryczność zachowanych papirusów oraz trudny język tekstów Chryzypa. Jednak przeprowadzona przez Bocheńskiego analiza wskazuje na to, iż prawdopodobnie, Chryzyp uważał zdanie kłamcy za pozbawione sensu[18]. Jeśli analiza ta jest trafna, Chryzyp zaproponował coś, co obecnie jest uważane za jedno z bardziej liczących się rozwiązań antynomii kłamcy. Na naszą pamięć zasługuje również Filetas z Kos (ok. 340–285 p.n.e.), który, nie mogąc rozwiązać dylematu kłamcy, umarł z rozpaczy[19].

Jak powszechna i trwała musiała być wspomniana wyżej niechlubna reputacja Kreteńczyków, skoro jej ślad pozostał nawet w późniejszym o kilka stuleci Nowym Testamencie. Św. Paweł w *Liście do Tytusa* tak oto powtarza,

---

[14] Platon, *Dialogi*, tom II, *Eutydem*, 283E-286E, s. 209–214. Także, Bocheński, [1961], s. 131.

[15] Arystoteles, *O Dowodach Sofistycznych*, 180b, s. 510. Także, Bocheński, [1961], s. 132.

[16] Jak widać, nie ma tu wyraźnego nawiązania do paradoksu kłamcy. Co więcej, jak słusznie zauważa Bocheński, trudno uznać, aby w tekście tym Arystoteles przedstawił jakąś propozycję rozwiązania tego paradoksu, Bocheński, [1961], s. 132.

[17] Diogenes Laertios, *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, II, 108, s. 137.

[18] Bocheński, [1961], s. 132–133.

[19] Bocheński, [1961], s. 131.

najwyraźniej, powszechną wówczas opinię[20]: „Jeden z nich, ich własny wieszcz, sam zresztą tak powiedział: »Kreteńczycy – to niepoprawni kłamcy, złe bestie i leniuchy, myślące tylko o jedzeniu«. Jest to świadectwo zgodne z prawdą". Naturalnie, wieszczem, którego miał na myśli św. Paweł jest Epimenides z Knossos.

Niestety, do naszych czasów nie dotrwała postać antynomii kłamcy w sformułowaniu Eubulidesa. Należy zauważyć, że, chcąc pokazać antynomialność zdania kłamcy, Eubulides nie mógł ograniczyć się jedynie do tej postaci, którą wiążemy z osobą Epimenidesa. Łatwo bowiem zauważyć, że nie jest żadnym dylematem, jeśli Kreteńczyk mówi, że wszyscy Kreteńczycy kłamią. Ściślej rzecz ujmując, zdanie Epimenidesa powinno mieć postać „Wszyscy Kreteńczycy zawsze kłamią". Tak też zdanie to jest powszechnie rozumiane. Mamy więc w nim nie jeden, lecz dwa kwantyfikatory ogólne. Pierwszy wskazuje na wszystkich Kreteńczyków, drugi zaś na każdą chwilę czasową, w której jakiś Kreteńczyk wypowiada jakieś zdanie, czyli wskazuje na każde, wypowiedziane przez któregokolwiek Kreteńczyka, zdanie. Oznacza to, że zdanie Epimenidesa orzeka o każdym zdaniu jakie wypowiada każdy Kreteńczyk. Zakładając prawdziwość zdania Epimenidesa, dochodzimy do wniosku, że musi ono być fałszywe. Zatem, prawdziwość tego zdania implikuje jego fałszywość, co zgodnie z prawem logiki klasycznej $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$, oznacza, że zdanie to jest fałszywe. Kluczowy jest tu jednak fakt, iż założenie fałszywości tego zdania nie implikuje jego prawdziwości. Istotnie, jeśli wypowiedziane przez Epimenidesa zdanie „Wszyscy Kreteńczycy kłamią" jest fałszywe, to nie znaczy, że prawdziwym jest to właśnie zdanie. Z fałszywości tego zdania wynika bowiem jedynie to, że jakieś zdanie wypowiedziane przez jakiegoś Kreteńczyka jest prawdziwe. Z przeprowadzonej analizy wynika więc, że zdanie Epimenidesa jest zdaniem fałszywym i wobec tego nie mamy tu do czynienia z jakimkolwiek dylematem. Nie można więc twierdzić, że sławne, antynomialne zdanie kłamcy ma postać, nadaną mu przez Epimenidesa.

Sformułowanie antynomii kłamcy jest możliwe na różne sposoby. Każdy jednak sposób służy temu samemu, aby zdanie orzekało o swojej fałszywości, a mówiąc ściślej, o swojej nieprawdziwości. Często uważa się, że fałszywość w zdaniu kłamcy wiąże się bowiem z założeniem dwuwartościowości logicznej: każde zdanie posiadające wartość logiczną jest, albo prawdziwe, albo fałszywe; zatem, fałszywość zdania jest tożsama z jego nieprawdziwością[21]. Prawdę

---

[20] *Pismo Święte Starego i Nowego Testamentu, Nowy Testament, List do Tytusa,* 1, 5–12, s. 2294.

[21] Martin dowodzi, iż zarówno zdanie stwierdzające swoją fałszywość, jak i zdanie stwierdzające swoją nieprawdziwość zasługują na miano zdania kłamcy, gdyż prowadzą do sprzeczności z, niżej przypomnianą, tzw. konwencją Tarskiego. Co więcej, dowodzi również i tego, że zdanie orzekające o swojej fałszywości jest zdaniem kłamcy bez względu na to czy założymy dwuwartościowość logiczną, czy nie. Zdanie to bywa nazywane *słabą postacią*

mówiąc, jeśli jakieś zdanie jest fałszywe, to trudno sobie wyobrazić, aby nie było ono nieprawdziwe. Mając bowiem jakąś wartość logiczną, tym samym, zdanie to nie ma innej wartości logicznej. Jednak, wolną od wszelkich wątpliwości powinna być ta wersja zdania kłamcy, w której orzeka ono o swojej nieprawdziwości: jeśli jakieś zdanie jest nieprawdziwe, to oczywiście, nie jest ono prawdziwe. Naturalnie, jeszcze lepiej jest, gdy zdanie to orzeka o tym, że nie jest prawdziwe.

Jednym z prostszych a zarazem dość precyzyjnym sposobem wyrażenia antynomialnej samozwrotności jest ten, w którym wykorzystuje się nadaną zdaniu nazwę, w naszym przypadku nazwą tą jest „*L*", od angielskiego słowa „liar":

Antynomia kłamcy

L. Zdanie oznaczone literą L nie jest prawdziwe.

Załóżmy, że zdanie *L* jest prawdziwe. Znaczy to, że jest tak jak ono orzeka, a zatem nie jest prawdziwe. Zatem, zdanie to nie jest prawdziwe. Jednak, jest to ten właśnie stan rzeczy, o którym zdanie to orzeka. Zatem, zdanie to jest prawdziwe, gdyż jest dokładnie tak jak ono mówi. Tym samym, otrzymaliśmy sławny dylemat: zdanie to jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest prawdziwe. Kształt tego paradoksu jest taki, że dwie wzajemnie wykluczające się możliwości wzajemnie się implikują. Z tego powodu, paradoks kłamcy jest zwany antynomią. Formalnie, skoro $L \rightarrow \neg L$ oraz $\neg L \rightarrow L$, więc:

$$L \leftrightarrow \neg L.$$

Antynomia kłamcy jest nierozerwalnie związana z definicją prawdy Tarskiego, zwaną również *konwencją Tarskiego*. W głośnej, jednej z najważniejszych prac w historii logiki, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* z 1933 roku[22], Tarski zaproponował swoją definicję prawdy. Przypomnijmy, że zgodnie z tą definicją[23]: „»Śnieg pada« jest zdaniem prawdziwym, wtedy i tylko wtedy, gdy śnieg pada". W ogólności, dane zdanie *p* jest prawdziwe, gdy jest tak jako ono mówi[24]:

---

paradoksu kłamcy, podczas gdy zdanie orzekające o swojej nieprawdziwości, *postacią mocną*, Martin, [1984a], s. 1–2.

[22] Tarski, [1933].

[23] Tarski, [1933], s. 19.

[24] Tarski, [1933], s. 17–19. Tarski ograniczył stosowalność tej definicji do tych języków, w których poziom przedmiotowy jest odseparowany od poziomu wyższego, Tarski, [1933], s. 165–166. Patrz również, omówione dalej, stanowisko czwarte.

$\underline{T}$. $v(p) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy p[25].

Oryginalna postać tej definicji jest następująca:

x jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy *p*.

W schemacie tym, symbol „*p*" zastępujemy dowolnym zdaniem, zaś „*x*" jednostkową nazwą tegoż zdania[26].

Związek jaki zachodzi między antynomią kłamcy a definicją Tarskiego $\underline{T}$ jest do tego stopnia istotny, że niektóre propozycje rozwiązania tej antynomii polegają na zastąpieniu definicji $\underline{T}$ przez jakąś inną definicję prawdy. Solomon Feferman wyróżnia trzy klasy możliwych rozwiązań antynomii kłamcy. Pierwsza polega na ograniczeniu języka. Do tej klasy należy zaliczyć pomysł Tarskiego wyróżniający w języku odseparowane od siebie rzędy. Drugą klasę stanowią rozwiązania ograniczające logikę, a więc głównie te podejścia, w których logika klasyczna jest zastąpiona przez jakąś inną logikę, np. parakonsystentną lub logikę trzech wartości, realizującą ideę luk prawdziwościowych. Wreszcie, do trzeciej klasy rozwiązań należą te, ograniczające definicję prawdy Tarskiego[27]. W inny sposób, możliwe rozwiązania antynomii kłamcy, grupuje Robert L. Martin. Wyróżnia on cztery następujące stanowiska[28]:

Stanowisko 1. Zarówno *L*, jak i $\underline{T}$ są poprawne, gdyż są prostą konsekwencją naszych intuicyjnych semantycznych pojęć. Poprawne jest również wyprowadzenie sprzeczności ze zbioru $\{L, \underline{T}\}$. Sprzeczność ta dowodzi jedynie tego, że nie jest możliwe połączenie w niesprzeczny pogląd obu tych zdań. Rozwiązanie antynomii kłamcy powinno więc polegać na tym, aby, albo *L* zastąpić przez *L'*, albo $\underline{T}$ przez $\underline{T}'$. Przy czym, ewentualne *L'* czy $\underline{T}'$ powinno być efektem „racjonalnej rekonstrukcji", odpowiednio *L* lub $\underline{T}$. Ponadto, nowa koniunkcja, czyli, albo *L* i $\underline{T}'$, albo *L'* i $\underline{T}$, albo *L'* i $\underline{T}'$, musiałaby być niesprzeczna.

Stanowisko 2. Błędne jest stwierdzenie sprzeczności *L* i $\underline{T}$, a to ze względu na wieloznaczność pojęcia „prawdziwe". Aby pokazać, że *s* nie jest prawdziwe, nie możemy stosować definicji $\underline{T}$, gdyż znaczenie słowa „prawdziwe" w zdaniu stwierdzającym, że *s* nie jest prawdziwe jest różne od tego, z którym mamy do czynienia w $\underline{T}$. Pewną odmianą tego podejścia jest przyjęcie indeksowania predykatu prawdziwości, przy jednoczesnym założeniu, że, mimo zmiany

---

[25] Naturalnie, zdanie $\underline{T}$ jest rozumiane jako skwantyfikowane ogólnie ze względu na *p*. Zatem, $\underline{T}$ ma faktycznie postać: $\forall p\ (v(p) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p)$.

[26] Tarski, [1933], s. 18. Ta postać definicji jest w literaturze anglojęzycznej znana jako *Tarski biconditionals*.

[27] Feferman, [1982], s. 240–241.

[28] Martin, [1984a], s. 3–4.

ekstensji tego predykatu w zależności od wskazanego przez dany indeks poziomu, nie następuje zmiana znaczenia tego predykatu[29].

Stanowisko 3. Niepoprawna jest konwencja *T*, gdyż predykat „być prawdziwym" jest zdefiniowany częściowo[30]. Istnieją bowiem zdania, którym nie można przypisać żadnej wartości logicznej. W przypadku tych zdań, mamy więc do czynienia z tzw. *lukami prawdziwościowymi* (*truth-value gaps*). Z założenia, *T* dotyczy wszystkich zdań. Tymczasem, niektóre z nich nie mają wartości logicznej. Oznacza to, że samo *T* jest przykładem zdania, które nie ma wartości logicznej, gdyż nie można przypisać mu wartości logicznej, wówczas gdy za występujące w nim *p* podstawimy zdanie nie posiadające wartości logicznej. Naturalnie, innym zdaniem nie posiadającym wartości logicznej jest zdanie kłamcy, gdyż w przeciwnym razie *T* mogłoby być zastosowane wobec zdania kłamcy, a to doprowadziłoby do sprzeczności. Ze stanowiskiem tym wiąże się jednak pewna pułapka zwana *problemem zemsty* (*revenge problem*). Wynika z niego bowiem, że *L* nie jest prawdziwe, gdyż byłoby prawdziwe jedynie na mocy *T*. Zatem, jest dokładnie tak, jak orzeka zdanie *L*, czyli *L* jest prawdziwe na mocy *T* – sprzeczność. Zdaniem Martina, każda koncepcja luk prawdziwościowych wiąże się z problemem zemsty.

Stanowisko 4. Niepoprawne jest zdanie *L*, gdyż jest ono zdaniem języka naturalnego, zaś w językach naturalnych nie ma pojęcia prawdy. Jedynymi językami posiadającymi pojęcia prawdy, fałszu, nieprawdy, niefałszu są te języki, w których obowiązuje następujące ograniczenie: zdania zawierające wymienione, prawdziwościowe pojęcia nie należą do tego języka. Ma tu więc miejsce oddzielenie języka przedmiotowego od języka, umożliwiającego mówienie o języku przedmiotowym.

Propozycja Tarskiego. Zwolennikiem czwartego typu rozwiązań był sam Tarski. Swoją propozycję zamieścił w tej samej pracy, w której przedstawił, przytoczoną wyżej, definicję prawdy. Testem dla poprawności tejże definicji była antynomia kłamcy, której analiza doprowadziła Tarskiego do wprowadzenia wspomnianego już ograniczenia[31]: „Dla każdego sformalizowanego języka umiemy skonstruować w metajęzyku formalnie poprawną i merytorycznie trafną definicję zdania prawdziwego, posługując się wyłącznie

---

[29] Do *ekstensji* predykatu należy każdy obiekt, o którym orzeczenie tego predykatu jest zdaniem prawdziwym. Do *anty-ekstensji* predykatu należy każdy obiekt, o którym orzeczenie tego predykatu jest zdaniem fałszywym. Jeśli predykat jest *n*-argumentowy, do jego ekstensji należą *n*-tki uporządkowane, o których orzeczenie tego predykatu jest zdaniem prawdziwym, zaś do jego anty-ekstensji należą te *n*-tki uporządkowane, o których orzeczenie tego predykatu jest zdaniem fałszywym. W rozdziale *Paradoksy ontologiczne*, ekstensja jest nazywana ekstensją pozytywną, zaś anty-ekstensja, ekstensją negatywną.

[30] Definicja częściowa, zwana też warunkową, jest przypomniana w rozdziale poświęconym paradoksom ontologicznym.

[31] Tarski, [1933], s. 165.

wyrażeniami o charakterze ogólnologicznym, wyrażeniami samego języka oraz terminami z zakresu morfologii języka – lecz pod warunkiem, że metajęzyk posiada rząd wyższy, niż język będący przedmiotem badań. Jeśli rząd metajęzyka jest co najwyżej równy rzędowi samego języka, to definicji takiej skonstruować niepodobna". Alonzo Church (ur. 1903), w swojej pracy *Comparison of Russell's Resolution of the Semantical Antinomies with That of Tarski* z 1976 roku, pokazuje, że zaproponowana przez Russella w 1908 roku[32] pierwotna postać rozgałęzionej teorii typów, uwalniającej teorię mnogości od antynomii Russella[33], jest szczególnym przypadkiem propozycji Tarskiego podziału języka na rzędy[34].

Z rozważań Tarskiego wynika więc, że w języku naturalnym, jako uniwersalnym, czyli zawierającym poza językiem przedmiotowym języki wszystkich możliwych rzędów, pojęcie prawdy jest niewyrażalne. Zatem, mówienie w języku naturalnym o prawdzie wydaje się być pozbawione sensu[35]. Nie może więc, w danym języku istnieć predykat, który umożliwia zdaniu, dla którego jest on głównym funktorem, wyrażenie swojej własnej prawdziwości. Pogląd ten podzielają np. Arthur N. Prior w *Correspondence Theory of Truth* z 1967 roku oraz John Wallace w *On the Frame of Reference* z 1972 roku[36].

Wniosek ten jest jednak mocno nieintuicyjny. Aby móc w języku naturalnym operować pojęciem prawdy należy więc, zgodnie z poglądem Tarskiego, dokonać podziału języka naturalnego na odseparowane stosowalnością definicji *T* kolejne rzędy języków. Inne propozycje zakładają osłabienie konwencji *T*. Należą do nich, również i te, które zakładają istnienie luk prawdziwościowych.

Propozycja Parsonsa. Pomysł Tarskiego, polegający na uwzględnieniu istnienia języków o różnych poziomach, zainspirował Charlesa Parsonsa, który swoją propozycję rozwiązania antynomii kłamcy przedstawił w artykule *The Liar Paradox* z 1974 roku[37]. Martin słusznie zauważa, iż podejście Parsonsa reprezentuje drugie stanowisko. Istotnie, uniknięcie sprzeczności między *L* i *T* jest tu bowiem osiągnięte za cenę przyjęcia zhierarchizowanej postaci zdania *L*. Ta nowa, bardziej złożona postać *L* umożliwia odróżnienie zdania od sądu, wyrażonego tym zdaniem. Definicja *T* pozostaje w niezmienionej postaci, która jednak uwzględnia wspomnianą „dwupoziomowość" zdania. Dodanie do tak zrekonstruowanego zdania kłamcy definicji *T* nie prowadzi do sprzeczności,

---

[32] Russell, [1908]. Patrz także, paragraf *Paradoksy teorii mnogości Georga Cantora* w rozdziale poświęconym paradoksom wynikającym z niedoskonałości naszej intuicji.

[33] Antynomia Russella jest uważana za teoriomnogościowy odpowiednik antynomii kłamcy.

[34] Church, [1976], s. 301–302.

[35] Field, [1972], s. 374.

[36] Prior, [1967] oraz Wallace, [1972].

[37] Parsons, [1974].

gdyż okazuje się, że, w swej nowej postaci, zdanie kłamcy nie wyraża żadnego sądu. Nie jest więc możliwe zastosowanie definicji $\underline{T}$.

Parsons rozpoczyna prezentację swojego podejścia od analizy prawdziwości dwóch zdań, będących wersjami zdania kłamcy:

(1P) Zdanie napisane w lewym górnym rogu tablicy w pokoju 913-D Południowego Laboratorium, Uniwersytetu Rockefellera, o godz. 15.15, 16-go grudnia 1971 roku wyraża fałszywy sąd.
(2P) Zdanie napisane w prawym górnym rogu tablicy w pokoju 913-D Południowego Laboratorium, Uniwersytetu Rockefellera, o godz. 15.15, 16-go grudnia 1971 roku nie wyraża prawdziwego sądu.

Załóżmy, że na wspomnianej tablicy o wspomnianym czasie zostały napisane dokładnie dwa zdania: (1P) w lewym górnym rogu oraz (2P) w prawym górnym rogu. Niech ponadto, „*A*" będzie skrótem dla napisu (1P), zaś „*B*" skrótem dla (2P). Wówczas:

(3P) *A* = zdanie napisane w lewym górnym rogu tablicy w pokoju 913-D Południowego Laboratorium, Uniwersytetu Rockefellera, o godz. 15.15, 16-go grudnia 1971.
(4P) B = zdanie napisane w prawym górnym rogu tablicy w pokoju 913-D Południowego Laboratorium, Uniwersytetu Rockefellera, o godz. 15.15, 16-go grudnia 1971 roku.

Zastanawiając się nad tym, jakimi warunkami określić prawdę, Parsons rozważa pierwszą możliwość przyjmując, że '"*p*" wyraża prawdziwy sąd $\leftrightarrow$ *p*' oraz '"*p*" wyraża fałszywy sąd $\leftrightarrow$ $\neg p$'. Wówczas jednak, na mocy zwykłej logiki zdaniowej, z założeń tych wyprowadzimy zdanie: '*p*' wyraża prawdziwy sąd $\vee$ '*p*' wyraża fałszywy sąd. Tym samym, mamy: '*p*' wyraża sąd. Oznacza to, że każde zdanie wyraża sąd, co jest sprzeczne z ideą Parsonsa. Dlatego też, proponuje on zastąpienie przyjętych wcześniej założeń innymi, określającymi prawdę w taki sposób, aby nie każde zdanie musiało wyrażać jakiś sąd:

(5P) $\forall x$ ((x jest sądem $\wedge$ '*p*' wyraża x) $\rightarrow$ x jest prawdziwe $\leftrightarrow$ *p*); oraz
(6P) $\forall x$ ((x jest sądem $\wedge$ '*p*' wyraża x) $\rightarrow$ x jest fałszywe $\leftrightarrow$ $\neg p$).

Załóżmy teraz, że x jest sądem i że *A* wyraża x. Wprost z (5P) mamy wówczas:

x jest prawdziwe $\leftrightarrow$ zdanie napisane w lewym górnym rogu tablicy w pokoju 913-D Południowego Laboratorium, Uniwersytetu Rockefellera, o godz. 15.15, 16-go grudnia 1971 roku wyraża fałszywy sąd.

Wobec (3P) mamy więc:

(7P) x jest prawdziwe $\leftrightarrow$ A wyraża fałszywy sąd.

Załóżmy, że x nie jest prawdziwe. Wówczas,

$\exists x$ (x jest sądem $\wedge$ $\neg$(x jest prawdziwe) $\wedge$ 'A' wyraża x),

czyli A wyraża fałszywy sąd. Zatem, na mocy (7P), x jest prawdziwe. Wobec ogólności x otrzymujemy:

(8P) $\forall x$ (x jest sądem $\wedge$ 'A' wyraża x) $\rightarrow$ x jest prawdziwe); czyli
(9P) $\neg\exists x$ (x jest sądem $\wedge$ 'A' wyraża x) $\wedge$ $\neg$(x jest prawdziwe)).

Załóżmy teraz, że y jest sądem, a ponadto, że A wyraża y. Na mocy (8P), y jest prawdziwy. Jednak z (7P) mamy, że A wyraża fałszywy sąd, co jest sprzeczne z (9P). Oznacza to, że zostało dowiedzione, iż żaden sąd nie jest wyrażony przez A. Zatem, (1P) nie wyraża żadnego sądu. Podobnie, żadnego sądu nie wyraża (2P). Konsekwencją tego jest fałszywość poprzedników głównych implikacji w warunkach (5P) i (6P). Tym samym, nie jest możliwe wyprowadzenie jakiejkolwiek sprzeczności. Antynomia kłamcy znika[38].

Propozycja Burge'a. Podejście zaproponowane przez Tylera Burge'a, w jego artykule *Semantical Paradox* z 1979 roku[39], przypomina wyżej omówioną propozycję Parsonsa i jest kolejną próbą dającą się zaklasyfikować do stanowiska drugiego. Tu również kluczową rolę odgrywa pomysł Tarskiego, który wyraża się w hierarchizacji, oddzielającej poziomy prawdziwości w języku ze względu na rząd języka. Jednak Burge nie stosuje jej do zdania kłamcy, lecz do definicji prawdy $\underline{T}$. Prawda jest wyrażalna przez klasę indeksowanych predykatów prawdziwości T_i. Oczywiście, przyjęcie takich założeń uniemożliwia wyprowadzenie sprzeczności ze zdania kłamcy oraz konwencji Tarskiego. Istotnie, zdanie kłamcy odrzuca swoją prawdziwość, lecz prawdziwość ta musi mieć jakiś konkretny stopień k. Zatem, zdanie to nie jest *prawdziwe*$_k$. Tymczasem, zastosowanie definicji $\underline{T}$ wobec tego właśnie zdania kłamcy umożliwia stwierdzenie, że jest ono prawdziwe, ale w stopniu $k+1$, czyli zdanie kłamcy jest *prawdziwe*$_{k+1}$[40]. Ponadto, Burge wskazuje na różnice, jakie zachodzą między jego propozycją a podejściem wykorzystującym luki prawdziwościowe. Otóż, w jego przypadku żadne poprawnie zbudowane zdanie nie może nie mieć wartości logicznej w absolutnym sensie. Owszem, jakieś

[38] Parsons, [1974], s. 15–16.
[39] Burge, [1979].
[40] Burge, [1979], s. 93–95.

zdanie może nie być, ani prawdziwe$_i$, ani fałszywe$_i$, lecz musi istnieć takie k, że zdanie to jest albo prawdziwe$_k$, albo fałszywe$_k$[41]. Jak zauważa Martin, zależność ta uniemożliwia pojawienie się problemu zemsty[42]. Burge operuje pojęciem *patologiczności* zdania – zdanie jest patologiczne, jeśli jest intuicyjnie puste lub prowadzi do paradoksu[43]. Naturalnie, patologiczność zdania jest zrelatywizowana do danego poziomu k, co prowadzi do zaistnienia *patologiczności*$_k$ lub *niepatologiczności*$_k$. Dane zdanie może być patologiczne$_k$ i wówczas jest nieprawdziwe$_k$, będąc przy tym *niepatologicznym*$_n$, dla jakiegoś $n > k$, a więc w szczególności prawdziwym$_n$. Burge wprowadza patologiczność$_k$ na trzy różne sposoby, proponując bardziej lub mniej formalne definicje tego pojęcia, i w ten sposób rozwija trzy konstrukcje realizujące jego, opisany wyżej, sposób na antynomię kłamcy[44]. Na uwagę zasługuje to, iż zaproponowane przez Burge'a rozumienie patologiczności zdania sprawia, że w każdej konstrukcji, dla każdego poziomu i, zachowane jest prawo wyłączonego środka – dla dowolnego i, każde zdanie jest albo prawdziwe$_i$, albo nieprawdziwe$_i$. Jednak szczególnie interesująca jest końcowa uwaga Burge'a, który zwraca uwagę na to, iż jego rozważania zakładają pewną idealizację. Jest nią ignorowanie zjawiska nieostrości wówczas, gdy oceniana jest wartość logiczna zdań[45]. Otóż, jasne jest, że w wielu niematematycznych przypadkach, wartościowanie zdania napotyka na niemożliwy do przezwyciężenia problem wiążący się z nieostrością. Ta trafna uwaga Burge'a staje się oczywista w świetle, przeprowadzonych w ostatnim rozdziale, analiz zjawiska nieostrości. Tej, wydaje się, że znacznie poważniejszej niż antynomia kłamcy, kwestii poświęcony jest najważniejszy w książce rozdział *Paradoksy ontologiczne*.

Propozycja Martina i Woodruffa. Stanowisko trzecie znalazło swoją realizację w postaci propozycji Roberta L. Martina i Petera W. Woodruffa. Ich próba zreferowana w artykule *„True-in-L" in L*, z 1975 roku[46], wykorzystuje trójwartościową logikę Kleene'go[47]. Ta trzecia, tradycyjnie oznaczana przez *u* (*unknown*), wartość logiczna jest, w zasadzie, albo prawdą, albo fałszem, lecz czym konkretnie, jest dla nas niewiadomym, dlatego też nie może być

[41] Burge, [1979], s. 96–97.
[42] Martin, [1984a], s. 7.
[43] Burge, [1979], s. 102.
[44] Burge, [1979], s. 101–105.
[45] Burge, [1979], s. 114–115.
[46] Martin i Woodruff, [1975].
[47] Jak wiadomo, w logice tej, poza prawdą (1) i fałszem (0) występuje trzecia wartość logiczna (u), która intuicyjnie odpowiada nieznajomości wartości logicznej. Jeśli więc, $v(p) = 1$ i $v(q) = u$, to nieznana jest wartość logiczna koniunkcji $p \wedge q$ (czyli, $v(p \wedge q) = u$), gdyż wszystko zależy od tego jaką, ukrytą dla nas, wartość ma zdanie q: jeśli q jest prawdziwe, to koniunkcja jest prawdziwa, jeśli zaś q jest fałszywe, to koniunkcja jest fałszywa. Dokładniej logika ta jest omówiona w paragrafie 4.1.4.5 ostatniego rozdziału.

zastąpiona, ani przez prawdę, ani przez fałsz. Widać więc, że wykorzystanie wartości *u* umożliwia formalne wyrażenie luki prawdziwościowej. Językiem formalnym *S* jest tradycyjny język logiki predykatów, z tą różnicą, że zmienne indywiduowe są w nim zrelatywizowane do skończonej liczby rodzajów (*sorts*), wyrażanych przy pomocy indeksów 1, ..., *k*. Dziedzina interpretacji jest więc sumą dziedzin, z których każda odpowiada kolejnemu rodzajowi zmiennych: $U = U_1 \cup ... \cup U_k$; dla dowolnego $i \in \{1, ..., k\}$, $U_1 \neq \emptyset$. Ponadto, w języku *S* występuje predykat prawdziwości *T*, który odgrywa kluczową rolę w określeniu częściowego porządku na klasie wartościowań interpretujących język *S*. Wartościowania przypisujące jedną z trzech wartości logicznych zdaniom $P(a_1, ..., a_n)$, gdzie *P* jest predykatem *n*-argumentowym, są częściowo uporządkowane w ten sposób, że $v_1 < v_2$, jeśli tylko spełniony jest następujący warunek: jeśli v_1 przypisało jakiemuś zdaniu $T(a_1, ..., a_n)$ wartość prawdy (fałszu), to v_2 przypisało temu samemu zdaniu $T(a_1, ..., a_n)$ również wartość prawdy (fałszu). Załóżmy teraz, że dla pewnego wartościowania *v* dziedziny *D* i dla pewnego $j \in \{1, ..., k\}$, $S = U_j$. Wówczas, *v częściowo reprezentuje prawdę dla języka S* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zdania $A \in S$, spełnione są dwa warunki: 1. jeśli $vT(A) = 1$, to $v(A) = 1$, oraz 2. jeśli $vT(A) = 0$, to $v(A) = 0$. W konstrukcji Martina i Woodruffa, istnieje więc możliwość, że na pewnym poziomie, zdania zawierające predykat prawdziwości *T* nie mają wartości logicznej, ani prawdy, ani fałszu, czyli posiadają wartość *u*. Natomiast, zdania, które nie zawierają tego predykatu mogą być wartościowane zgodnie z intuicjami – jedne mogą być uznane za prawdziwe, inne za fałszywe tak, aby zachować jedynie warunki tabelki Kleene'go wartości logicznych. Jednocześnie, im wyższy poziom, tym większa jest liczba zdań z wartością logiczną różną od *u*. Dzięki wspomnianemu częściowemu porządkowi określonemu na zbiorze wartościowań, Martin i Woodruff mogą wykorzystać Lemat Kuratowskiego-Zorna o istnieniu elementu maksymalnego w zbiorze częściowo uporządkowanym, w którym każdy łańcuch ma ograniczenie górne. Ten maksymalny poziom jest celem całej konstrukcji, gdyż nie wyznacza już częściowej zaledwie reprezentacji prawdy, lecz reprezentację pełną, zwaną *reprezentacją*, która polega na jednoczesnym spełnieniu dwóch warunków: 1. $vT(A) = 1$ wtw $v(A) = 1$, oraz 2. $vT(A) = 0$ wtw $v(A) = 0$.

Naturalnie, wnioskowanie prowadzące do sprzeczności, które jest typowe dla antynomii kłamcy nie daje się przeprowadzić dla poziomu języka *S*, czyli dla *j*-tego poziomu przyjętego przez Martina i Woodruffa modelu interpretującego prawdę. Na *j*-tym poziomie zdania zawierające predykat *T* są przecież wartościowane w *u*, czyli nie są, ani prawdziwe, ani fałszywe[48].

---

[48] Martin, [1984a], s. 7.

Propozycja Kripkego. W 1975 roku została opublikowana również praca Saula Kripkego *Outline of a Theory of Truth*[49], która reprezentuje to samo podejście do zdania kłamcy i definicji $\underline{T}$, co wyżej przypomniana propozycja Martina i Woodruffa, mimo iż obie publikacje powstały niezależnie od siebie. Można więc przyjąć, iż propozycja Kripkego, jak również inne, wzorowane na niej konstrukcje Skyrmsa, Herzbergera, czy Gupty, daje się zaliczyć do stanowiska trzeciego.

Przy danej dziedzinie D, Kripke interpretuje jednoargumentowy predykat $P(x)$ za pomocą pary rozłącznych zbiorów (E_1, E_2), będących odpowiednio ekstensją i anty-ekstensją predykatu P[50]. Orzeczenie predykatu P o obiekcie z E_1 jest zdaniem prawdziwym, orzeczenie tego predykatu o obiekcie z E_2 jest zdaniem fałszywym, zaś orzeczenie tego predykatu o obiekcie spoza $E_1 \cup E_2$ jest zdaniem nieokreślonym[51]. Rozkład wartości logicznych jest dokładnie taki, jak w trójwartościowej logice Kleene'go. Dalej, Kripke proponuje rozszerzyć język S o nowy jednoargumentowy predykat T, którego interpretacją jest oczywiście jakaś para (R_1, R_2) jego ekstensji i antyekstensji. Naturalnie, poza zbiorem $R_1 \cup R_2$ predykat T jest nieokreślony. Niech S będzie interpretacją języka S, zaś $S(R_1, R_2)$, interpretacją języka S rozszerzonego o T. Nowa interpretacja jest rozszerzeniem starej, w tym sensie, że interpretacją T jest (R_1, R_2), zaś pozostałe predykaty mają interpretacje takie jak w S. Niech R_1' jest zbiorem zdań prawdziwych, zaś R_2' zbiorem zdań fałszywych w $S(R_1, R_2)$. Jeśli T jest rozumiany jako wyrażający prawdziwość zdań języka S, który to język zawiera już predykat T, wówczas $R_1 = R_1$' oraz $R_2 = R_2$'. Znaczy to, że dla dowolnego zdania A języka S: 1. A spełnia T wtw A jest prawdziwe oraz 2. A falsyfikuje T wtw A jest fałszywe. Parę (R_1, R_2) spełniającą ten warunek Kripke nazywa *punktem stałym*. W następnym kroku, Kripke dowodzi istnienia punktów stałych przeprowadzając konstrukcję jednego z nich. Korzystając zaś z lematu Kuratowskiego-Zorna, udowadnia, że każdy punkt stały może być rozszerzony do maksymalnego punktu stałego.

Podobnie jak u Martina i Woodruffa, na początkowym etapie konstrukcji Kripkego, czyli przy pierwszej interpretacji, predykat T jest zupełnie nieokreślony – jego ekstensja i antyekstensja jest zbiorem pustym. Każde kolejne rozszerzenie interpretacji dookreśla w jakiś sposób ten predykat. Przy każdej kolejnej interpretacji powiększeniu ulega zarówno zbiór zdań

---

[49] Kripke, [1975].

[50] Jeśli P jest predykatem nieostrym, ani jego ekstensja, ani anty-ekstensja nie jest zbiorem – patrz paragraf *Definicja nieostrości* rozdziału *Paradoksy ontologiczne*. Jak widać, Kripke w niemy sposób zakłada tę idealizację, o której wspominał Parsons, a zgodnie z którą ekstensja i anty-ekstensja jest w przypadku każdego predykatu, także tego nieostrego, wyznaczona w sposób wyraźny – patrz wyżej *Propozycja Parsonsa*.

[51] Kripke, [1975], s. 64.

prawdziwych, jak i zbiór zdań fałszywych. Kres tych rozszerzeń jest wyznaczony przez maksymalny punkt stały. Oczywiście, rozwiązanie antynomii kłamcy jest takie, jak w przypadku konstrukcji Martina i Woodruffa.

Kripke pokazuje również wzajemną odpowiedniość jaka zachodzi między hierarchią Tarskiego języków a skonstruowanym przez siebie modelem.

Pomysł Kripkego wykorzystania częściowych wartościowań zastosował Brian Skyrms w swoim artykule z 1982 roku *Intensional Aspects of Semantical Self-Reference*, opublikowanym w 1984 roku[52]. Inną odmianą wyżej przypomnianego modelu Kripkego jest konstrukcja Hansa G. Herzbergera. Swoją próbę uporania się ze zdaniem kłamcy przedstawił on w artykule *Notes on Naive Semantics* z 1982 roku[53]. Jeszcze inną wersją podejścia Kripkego jest niżej omówiona propozycja Anila Gupty. Konstrukcję tę przypomnimy ze względu na jej klasyczny charakter – bazuje ona bowiem na tradycyjnych modelach dla logiki pierwszego rzędu.

Propozycja Gupty. Rezygnując z indukcyjnego sposobu określenia predykatu wyrażającego prawdziwość zdań, reprezentowanego przez dwie ostatnio przedstawione konstrukcje, Anil Gupta, w swoim artykule *Truth and Paradox* z 1982 roku[54], zaproponował zastosowanie pewnej odmiany reguły ustalającej prawdziwość zdań, mieszcząc się tym samym w standardzie wyznaczonym przez Tarskiego, wiążącym prawdę z kolejnymi poziomami języka. Swoje stanowisko Gupta oparł na czterech założeniach:

1. Z językiem, poza pojęciem prawdy, nie wiążą się żadne inne kłopotliwe kwestie, takie jak nieostrość, wieloznaczność, konstrukcje intensjonalne, luki prawdziwościowe. Gupta przyjmuje, iż rozważany przez niego język jest językiem klasycznego rachunku kwantyfikatorów.

2. Teoria znaczenia danej klasy zdań określa warunki akceptowalności zdań należących do tej klasy. Oznacza to, że dla dowolnego zdania należącego do danej klasy, jest ściśle określone, kiedy akceptacja tego zdania jest poprawna, a kiedy niepoprawna. Innymi słowy, teoria znaczenia dostarcza warunków prawdziwościowych dla zdań. Przy czym, jak podkreśla Gupta, założenie to nie ma żadnego związku ze sporem realistów z antyrealistami w kwestii statusu semantyki.

3. Prawda jest wyrażona predykatem.

4. Jedynymi obiektami, o których można orzec prawdę są zdania.

Przyjęte założenia wyznaczają przestrzeń, w której Gupta zamierza sprecyzować warunki określające prawdziwość zdań języka S. Zauważa, że w przypadku zdań, w których funktor prawdziwościowy T nie występuje, warunki te są

---

[52] Martin, [1982], s. 119–131.

[53] Herzberger, [1982].

[54] Gupta, [1982].

określone przez zwykłe, klasyczne modele. Oczywiście, istotny, dla rozważań Gupty, problem dotyczy jednak tych zdań, w których występuje predykat T. Gupta dostrzega jednak, iż nie wszystkie zdania zawierające predykat T są problematyczne, czyli paradoksalne. Przykładem zdania, które nie wywołuje trudności interpretacyjnych jest np. zdanie Kreteńczyka, który mówi, że wszyscy Kreteńczycy kłamią[55]. Zdanie to, jak już wcześniej pokazaliśmy, jest fałszywe. Podobnie, zdaniem nie budzącym raczej wątpliwości jest to, stwierdzające swoją prawdziwość. Poszukiwania właściwego sposobu interpretowania zdań, Gupta ogranicza więc do tych zdań, które, jak to sam określa, są paradoksalne. Przyjmuje, że język S jest wyposażony w narzędzie umożliwiające tworzenie nazw dla wszystkich zdań. Jeśli więc „b" jest nazwą zdania „b nie jest prawdziwe", to, na mocy konwencji Tarskiego, otrzymujemy:

„b nie jest prawdziwe" jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy b nie jest prawdziwe,

co właśnie prowadzi do sprzeczności, jeśli tylko zastosujemy klasyczną interpretację języka S. Z tego właśnie punktu widzenia, uzasadnione wydaje się więc podejście Tarskiego, które najwyraźniej jest inspiracją dla poniższej konstrukcji[56].

Przypomniane wyżej rozpoznanie problemu samozwrotności, Gupta wykorzystuje jako wprowadzenie do zaproponowanego przez siebie rozwiązania antynomii kłamcy. Jego język S, poza predykatem T, zawiera dwa cudzysłowy ' oraz ', których zastosowanie jest jednak ograniczone jedynie do formuł zamkniętych (czyli zdań). Tak więc, jeśli $(\forall x)(Fx \rightarrow Tx)$ jest zdaniem języka S, to '$(\forall x)(Fx \rightarrow Tx)$' jest nazwą tego zdania[57]. Niech $M = \langle D, I\rangle$ będzie dowolnym modelem języka S. Naturalnie, D jest dziedziną modelu M, zaś I jego funkcją interpretacyjną. Ponadto, zbiór Zd zdań języka S zawiera się w D oraz[58]:

(i) I przyporządkowuje cudzysłowowej nazwie 'A' zdanie A.

(ii) Jeśli a nie jest nazwą cudzysłowową, to $I(a) \notin Zd$.

(iii) Jeśli F jest n-argumentowym predykatem oraz $d_i \in Zd$, dla $1 \leq i \leq n$, to $\langle d_1,\ldots,d_i,\ldots,d_n\rangle \in I(F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $d_i' \in Zd$, $\langle d_1,\ldots,d_i',\ldots,d_n\rangle \in I(F)$.

(iv) Jeśli f jest n-argumentową funkcją, to zakres $I(f)$ nie zawiera żadnego zdania. Ponadto, jeśli d_i, $d_i' \in Zd$, dla $1 \leq i \leq n$, to $I(f)(d_1,\ldots,d_i,\ldots,d_n) = I(f)(d_1,\ldots,d_i',\ldots,d_n)$.

---

[55] Gupta, [1982], s. 181.

[56] Gupta, [1982], s. 181–183.

[57] Sam Gupta przyznaje, że w ten sposób wykorzystuje symbolikę, typową dla sposobów odróżniania wyrażeń języka od wyrażeń metajęzyka, Gupta, [1982], s. 184f.

[58] Gupta, [1982], s. 180, 181.

Gupta pokazuje, że model spełniający powyższe warunki może być rozszerzony do tzw. *modelu standardowego*, w którym definicja Tarskiego nie prowadzi już do paradoksalnych konsekwencji. $M' = \langle D', I' \rangle$ jest *standardowym rozszerzeniem* modelu M wtedy i tylko wtedy, gdy $D = D'$ oraz I' jest funkcją I, z tą jedyną różnicą, że I' przyporządkowuje predykatowi T podzbiór zbioru D. Powiemy, wówczas, że M' jest modelem generowanym przez M oraz $I'(T)$, symbolicznie $M' = M + I'(T)$. Dalej, Gupta proponuje, aby nazwa „model standardowy" oznaczała standardowe rozszerzenie jakiegoś modelu języka S[59].

W swojej konstrukcji standardowego modelu dla danego, spełniającego warunki (i)-(iv), modelu języka S, Gupta wykorzystuje pojęcie „zbiór zdań prawdziwych języka S na poziomie liczby porządkowej α dla zbioru U", w skrócie $Tr(\alpha,U)$. Do jego zdefiniowania wykorzystuje indukcję pozaskończoną:

Niech M będzie modelem języka S, spełniającym warunki (i)-(iv). *Ponadto, niech* $U \subseteq D$. *Wówczas,*

(*Tr* i) *Jeśli* $\alpha = 0$, *to* $Tr(\alpha,U) = U$.

(*Tr* ii) *Jeśli* $\alpha = \beta+1$, *to* $Tr(\alpha,U)$ *jest zbiorem zdań prawdziwych w modelu standardowym* $M + Tr(\beta,U)$.

(*Tr* iii) *Jeśli* α *jest ograniczoną liczbą porządkową, to* $Tr(\alpha,U) = \{d\colon \exists\beta<\alpha\,(d \in \bigcap_{\beta\leq\gamma<\alpha} Tr(\gamma,U))\}$.

Wyraźnie widać, iż sposobem na antynomię kłamcy jest tu wprowadzenie kolejnych poziomów zdań prawdziwych – zdanie stwierdzające prawdziwość zdania poziomu α należy do zbioru zdań prawdziwych poziomów wyższych niż α. Tak więc, dopiero model standardowy likwiduje luki prawdziwościowe danego modelu języka S. Nic więc dziwnego, że dla modelu M języka S oraz dla $U \subseteq D$, $M + Tr(\omega, U)$ jest tym standardowym modelem języka S, w którym wszystkie podstawienia definicji Tarskiego są prawdziwe, a zatem nie prowadzą już do paradoksalnych konsekwencji[60]. Jeśli b jest nazwą zdania $Tb \vee \neg Tb$, to zgodnie z zaproponowaną przez Guptę koncepcją prawdziwości zdań, podstawienie definicji Tarskiego $T(\text{‘}Tb \vee \neg Tb\text{’}) \leftrightarrow Tb \vee \neg Tb$ jest zdaniem prawdziwym, wobec czego prawdziwe jest również zdanie $Tb \vee \neg Tb$[61]. Paradoksu nie ma, gdyż zdanie $Tb \vee \neg Tb$ jest prawdziwe, nie będąc fałszywym.

Propozycja Fefermana. Solomon Feferman, w opublikowanym w 1982 roku artykule *Towards Useful Type-Free Theories, I*[62], przedstawił podejście

---

[59] Gupta zauważa, że możliwość rozszerzenia modelu M do standardowego modelu gwarantują również warunki słabsze niż (i)–(iv).

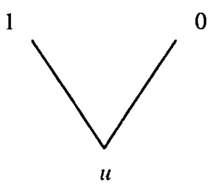
[60] Gupta, [1982], s. 186.

[61] Gupta, [1982], s. 191.

[62] Feferman, [1982].

bazujące na idei luk prawdziwościowych, które jednak w żaden sposób nie realizuje idei Tarskiego hierarchii poziomów języka. W tym też sensie, podejście Fefermana jest oryginalne wobec dotychczas przedstawionych. Powszechnie znanym faktem jest odpowiedniość jaka zachodzi między paradoksami semantycznymi, w tym głównie antynomią kłamcy, a paradoksami naiwnej teorii mnogości, w tym głównie antynomią Russella[63]. Feferman słusznie zauważa, iż Russellowska teoria typów ma, na gruncie badań semantycznych, swój odpowiednik w postaci postulatu Tarskiego podziału języka na kolejne rzędy. Postulat ten jest realizowany na wiele sposobów – ważniejsze z nich zostały przytoczone wyżej. Zamiarem Fefermana jest więc uzyskanie takiego rozwiązania, które byłoby semantycznym odpowiednikiem tych podejść do teorii mnogości, które polegają na jej niesprzecznej aksjomatyzacji. Kluczowym pojęciem tego nowego rozwiązania jest tzw. *predykat częściowy*.

Niech M będzie dowolnym zbiorem. $R^{\sim}$ jest częściowym k-argumentowym predykatem na M, dla $1 \leq k \leq \omega$, jeśli jest częściową funkcją odwzorowującą M^k



w zbiór $\{1, 0\}$, dwóch wartości logicznych, prawdy i fałszu. Wprowadzenie u, trzeciej wartości logicznej nieokreślenia, umożliwia utożsamienie tej częściowej funkcji z funkcją zupełną, odwzorowującą M^k w zbiór $\{1, u, 0\}$. W obu przypadkach Feferman używa tego samego symbolu „$R^{\sim}$". Częściowe uporządkowanie trzech wartości logicznych umożliwia wykorzystanie tego porządku dla określenia uporządkowania predykatów: $R_1^{\sim} \leq R_2^{\sim}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $m_1, ..., m_k \in M$, $R_1^{\sim}(m_1, ..., m_k) \leq R_2^{\sim}(m_1, ..., m_k)$. Wówczas, $R_1^{\sim}$ jest podfunkcją funkcji $R_2^{\sim}$. Oczywiście, jeśli $R_1^{\sim} \leq R_2^{\sim}$ i $R_2^{\sim} \leq R_1^{\sim}$, to $R_1^{\sim} = R_2^{\sim}$. Niech teraz, $\mathcal{M}_0 = (M, ...)$ będzie zwykłą strukturą, interpretującą język S_0, której zwykłość polega na tym, że funkcja tejże struktury nie jest częściowa. $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_0, R_1^{\sim}, ..., R_n^{\sim}, ...)$ jest więc strukturą częściową, ze względu na częściowość predykatów $R_1^{\sim}, ..., R_n^{\sim}, ...$ Swoje dalsze rozważania Feferman ogranicza do prostych struktur $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_0, R^{\sim})$ z jednym predykatem częściowym $R^{\sim}$. $(\mathcal{M}_0, R_1^{\sim}) = \mathcal{M}_1 \leq \mathcal{M}_2 = (\mathcal{M}_0, R_2^{\sim})$, jeśli $R_1^{\sim} \leq R_2^{\sim}$.

Niech dla ustalonej struktury $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{K}$ będzie klasą struktur $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_0, R^{\sim})$ uporządkowaną przez relację $\leq$. Operator Γ stowarzysza z każdą strukturą $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_0, R^{\sim})$ nową strukturę $\Gamma(\mathcal{M}) = (\mathcal{M}_0, \Gamma(R^{\sim}))$. Γ jest operatorem monotonicznym: $\mathcal{M}_1 \leq \mathcal{M}_2$ implikuje $\Gamma(\mathcal{M}_1) \leq \Gamma(\mathcal{M}_2)$. Dalej, Feferman dowodzi twierdzenie, zgodnie z którym: dla dowolnego monotonicznego operatora Γ i dla

[63] Patrz paragraf zatytułowany *Paradoksy teorii mnogości Georga Cantora*, będący częścią rozdziału poświęconego paradoksom wynikającym z niedoskonałości naszej intuicji.

dowolnej struktury $M \leq \Gamma(M)$, istnieje najmniejsza struktura M^* taka, że $M \leq M^*$ oraz $\Gamma(M^*) = M^*$[64].

Intencje Fefermana są jasne. Przyjęte uporządkowanie trzech wartości logicznych sprawia, że każdy predykat częściowy $R^{\sim}$, będzie „pod" predykatem, być może również częściowym, który powstaje z $R^{\sim}$ przez zastąpienie choćby jednego z wystąpień wartości u przez wartość 1 lub 0. To stopniowe dookreślanie predykatu częściowego zapewnia monotoniczny operator Γ. Powstały w ten sposób ciąg częściowych struktur zamyka struktura, której operator Γ nie może już dookreślić, gdyż jest ona w pełni dookreślona – jej predykat nie jest już predykatem częściowym. Naturalnie, ta ogólniejsza teoria ma zastosowanie do struktur, w których predykatem częściowym, stopniowo dookreślanym jest predykat prawdziwości. Widać więc, że mimo swej oryginalności, pomysł ten sytuuje propozycję Fefermana w rzędzie całej serii rozwiązań zapoczątkowanej przez Martina i Woodruffa oraz Kripkego.

W większości przedstawionych wyżej konstrukcji przyjmuje się założenie, iż zdanie kłamcy nie ma wartości logicznej, ani prawdy, ani fałszu, przypisując temu zdaniu jakąś trzecią wartość logiczną, traktując tym samym zdanie kłamcy L za zdanie w sensie logicznym. Istnieje jednak pogląd, który odmawiając zdaniu L wartości logicznej prawdy i fałszu, odmawia temu zdaniu jakiejkolwiek innej wartości logicznej przyjmując, że L nie jest zdaniem w sensie logicznym. Stanowisko to reprezentuje np. Leon Gumański w swojej pracy *Logical and semantical antinomies*, z 1992 roku[65]. Niestety, stanowisko to w praktyce oznacza zamknięcie lub przynajmniej ograniczenie pewnego rodzaju badań nad paradoksem kłamcy, zwłaszcza tych dotyczących sposobu pojmowania prawdy oraz inferencji.

Poza klasyfikacją Martina znajdujemy propozycję Grahama Priesta, która jednak wydaje się dać zaklasyfikować do drugiej grupy Fefermana, rozwiązań ograniczających logikę. Osłabienie logiki tak, aby umożliwiała ona akceptację sprzeczności, przy jednoczesnym uniknięciu trywializacji konsekwencji zaakceptowanych zdań jest podstawową ideą logik tolerujących sprzeczność, a zwanych logikami parakonsystentnymi.

Propozycja Priesta. Istotnie, w klasyfikacji Martina, czterech grup rozwiązań antynomii kłamcy, nie mieści się *dialeteizm*, pogląd przyjmujący istnienie zdań, które są jednocześnie prawdziwe i fałszywe[66]. Istotnie, jak już wcześniej pokazaliśmy, dla zdania kłamcy L, prawdziwa jest równoważność: $L \leftrightarrow \neg L$. Jednak, wobec prawa tożsamości zastosowanego do zdania kłamcy, $L \leftrightarrow L$, otrzymujemy, $L \leftrightarrow L \wedge \neg L$. Zatem, zdanie kłamcy jest fałszywe, ponieważ jest równoważne zdaniu sprzecznemu. Jednak, prawo tożsamości

---

[64] Feferman, [1982], s. 250–252.

[65] Gumański, [1992].

[66] Priest, np. [1993], [SEPh], [2004].

można zastosować również wobec negacji zdania kłamcy: $\neg L \leftrightarrow \neg L$. Oznacza to, że wobec pierwszej równoważności mamy kolejną: $\neg L \leftrightarrow L \wedge \neg L$, która dowodzi fałszywości negacji zdania kłamcy. Zatem, zdanie kłamcy L jest zarazem prawdziwe i fałszywe, dokładnie tak samo jak jego negacja. Twórcą i propagatorem dialeteizmu jest Graham Priest[67].

Naturalnie, mimo iż wyprowadzenie powyższego wniosku dokonało się za sprawą praw logiki klasycznej, nie jest możliwe pogodzenie stanowiska akceptującego ten wniosek z jakąkolwiek logiką, która by jednocześnie zachowywała zasadę niesprzeczności i prawo Dunsa Szkota. Dlatego też, dialeteizm znajduje swój formalny wyraz w logikach parakonsystentnych, które zawieszając zasadę niesprzeczności i osłabiając prawo Dunsa Szkota tolerują sprzeczność – teorie parakonsystentne nie są przepełnione nawet wówczas, gdy zawierają jakieś zdanie wraz z jego negacją. Antynomia kłamcy ma dla dialeteistów znaczenie wyjątkowe, gdyż zdanie kłamcy jest bodaj jedynym przykładem zdania, które miałoby być jednocześnie prawdziwe i fałszywe. Oczywiście, pogląd ten znacznie wykracza poza wnioski wynikające ze zdania kłamcy. Przecież jedyne co można wywnioskować na temat zdania kłamcy jest to, że jeśli zdanie to jest prawdziwe to jest nieprawdziwe i jeśli jest nieprawdziwe to jest prawdziwe. Z tego punktu widzenia, wydaje się, że dialeteizm jako propozycja rozwiązania antynomii kłamcy idzie zbyt daleko. Gorsze jednak jest to, że, poza zdaniem kłamcy, trudno jest znaleźć inne, nie operujące pojęciem przekonania, faktyczne filozoficzne uzasadnienie dla dialeteizmu[68].

Przedstawione wyżej propozycje, choć zaawansowane technicznie, nie wydają się być szczególnie przekonywające. Główną tego przyczyną jest ich sztuczność i wynikająca z niej nieintuicyjność. Czy faktycznie, wprowadzenie w bardziej lub mniej jawny sposób hierarchii języków, czy hierarchii prawdziwości zdań może tłumaczyć ten, co prawda potężny, a mimo to niezwykle prosty w swej strukturze, problem? Czyż prawda nie jest jedna? Czy wprowadzenie trzeciej wartości logicznej, bez względu na jej rozumienie, może być jakimkolwiek rozwiązaniem, skoro paradoksalne jest analogiczne do zdania kłamcy, kolejne zdanie: „To zdanie jest fałszywe lub ma trzecią wartość

---

[67] Rozumowanie to wcale nie musi być zaakceptowane. $L \leftrightarrow \neg L$ jest bowiem koniunkcją dwóch implikacji: $L \rightarrow \neg L$ oraz $\neg L \rightarrow L$. Z pierwszej implikacji wynika odrzucenie prawdziwości L, z drugiej zaś, odrzucenie prawdziwości $\neg L$. Taka interpretacja prowadzi do uzasadnienia tezy, iż zdanie kłamcy L jest przykładem zdania nie posiadającego wartości logicznej, ilustruje więc lukę prawdziwościową. Jednak, w świetle pierwszego rozumowania, dowodzącego, iż L jest zdaniem zarazem prawdziwym i fałszywym, jasnym jest, że argumentacja prowadząca do wniosku, iż L nie posiada wartości logicznej nie bazuje na logice klasycznej.

[68] Niekiedy wskazuje się, że uzasadnienia tego dostarczają zdania z terminami nieostrymi. Pogląd ten wydaje się jednak trudny do zaakceptowania. Patrz paragraf 4.1.4.2 rozdziału *Paradoksy ontologiczne*.

logiczną”[69]? Czy wreszcie uznanie, iż istnieją takie zdania w sensie logicznym, jak np. zdanie kłamcy, które jednocześnie posiadają wartość logiczną prawdy i fałszu, nie jest rozwiązaniem zbyt odważnym? Czy faktycznie, sensowność niezwykłej przecież i zupełnie wyjątkowej logiki klasycznej można podważyć w tak prosty sposób?

Kolejna, analizowana tu propozycja Jona Barwise'a i Johna Etchemendy'ego, przedstawiona w ich głośnej książce *The Liar. An Essay on Truth and Circularity* z roku 1987[70], reprezentuje nowe, nieprzypominające żadnego z dotychczasowych podejść rozwiązanie antynomii kłamcy.

Propozycja Barwise'a i Etchemendy'ego. Podejście to mieści się w ramach tak zwanej teorii sytuacji, uwzględniającej kontekst wypowiedzi. Zdaniem Barwise'a i Etchemendy'ego, źródłem antynomii kłamcy nie jest ani samoodniesienie się wypowiedzi, ani nieodpowiednie rozumienie prawdy, lecz właśnie nieuwzględnienie kontekstu.

W swej analizie zdania kłamcy Barwise i Etchemendy wychodzą od tradycyjnego już odróżnienia zdania od sądu[71]. Zdanie jako ciąg symboli, czy to w postaci napisów, czy w postaci dźwięków, nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe. Zdania nie podpadają pod kryterium prawdy i fałszu, tak jak nie podpadają pod nie obiekty materialne: stół, ołówek itd. Jeśli więc, osoba *a* mówi: *L* = „To, co tu stwierdzam, nie jest prawdą”; to w wypowiedzi tej, zwrot „to, co tu stwierdzam” odnosi się do sądu (*proposition*) wygłoszonego przez zdanie (*sentence*). Tak więc, wypowiedziane przez *a* zdanie *L* odnosi się do sądu *p*. Oznacza to, że wypowiadając zdanie *L*, osoba *a* wygłasza sąd „*p* nie jest prawdziwe”. Ponieważ jednak, sąd wygłoszony przez *a* jest oznaczony symbolem „*p*”, więc *p* i „*p* nie jest prawdziwe” są tym samym:

(1) $$p = [p \text{ nie jest prawdziwe}]$$

Ocena prawdziwości sądu, w teorii sytuacji jest uzależniona od kontekstu wypowiedzi. Często, osoba wygłaszająca dany sąd nie ma świadomości tego, iż w swej wypowiedzi odwołuje się do kontekstu sytuacji, od którego zależy prawdziwość tego sądu. Jednak, bez względu na stan świadomości wypowiadającej się osoby kontekst jest kluczem do prawdziwości głoszonego sądu. Kontekst wypowiedzenia przez osobę *a* zdania *L* oznaczmy symbolem „*c*”.

[69] Jeśli to zdanie jest prawdziwe, to jest fałszywe lub ma trzecią wartość logiczną, więc jest nieprawdziwe. Jeśli jest fałszywe, to jest tak jak ono orzeka, a więc jest prawdziwe, czyli nie jest fałszywe. Jeśli ma trzecią wartość logiczną, to jest tak jak ono orzeka, a więc jest prawdziwe, czyli nie ma trzeciej wartości logicznej. Naturalnie, rozumowanie to jest jeszcze jedną wersją, wspomnianego już wcześniej, paradoksu zemsty.

[70] Barwise i Etchemendy, [1987].

[71] Referując propozycję Barwise'a i Etchemendy'ego opieramy się na jej eleganckiej i przejrzystej prezentacji autorstwa Keitha Devlina, Devlin, [1997], s. 338–343.

Wypowiedzenie zwrotu „to, co tu stwierdzam" odnosi się więc do sądu, że p jest prawdziwe w kontekście c. W formalnym zapisie, właściwym notacji teorii sytuacji mamy więc, że $c \models p$. Ponieważ, jak już wcześniej zostało to zauważone, zwrot „to, co tu stwierdzam" odnosi się również do sądu p, więc p musi być tym samym, co $c \models p$. Otrzymujemy więc kolejną równość:

(2) $$p = [c \models p]$$

Rozważmy teraz dwa przypadki: jeden, gdy sąd p jest prawdziwy oraz drugi, gdy sąd p nie jest prawdziwy.

1. Załóżmy, że sąd p jest prawdziwy. Wówczas, p jest tym właśnie prawdziwym kontekstem, stwierdzającym prawdziwość sądu p, mamy więc:

(3) $$c = p.$$

Jednak, w świetle (1), sąd p jest zarazem nieprawdziwością sądu p. Oznacza to, że

(4) $$c \models [p \text{ nie jest prawdziwe}],$$

co daje nam sprzeczność. Istotnie, na mocy (3), p jest prawdziwym sądem w kontekście c, podczas gdy z (4) wynika, że p nie jest prawdziwe w tym samym kontekście c. Chcąc wyjaśnić powstały problem, Devlin posługuje się przykładem różnych pór roku w różnych miejscach kuli ziemskiej: owszem, jednocześnie mamy lato i nie mamy lata, z tym że lato mamy w USA, zaś nie mamy lata w Australii. Tak więc, różnica kontekstu, którym w tym wypadku jest albo USA albo Australia, sprawia, że dany sąd może być zaakceptowany w jednym kontekście, zaś odrzucony w innym. Tak jednak nie jest, w przypadku gdy analizowany wyżej sąd p, dokładnie w tym samym kontekście, okazał się prawdziwy i nieprawdziwy. Pozostaje więc, przeanalizować drugi przypadek nieprawdziwości sądu p.

2. Załóżmy, że sąd p nie jest prawdziwy. Zgodnie z wcześniejszym założeniem, kontekstem wypowiedzi osoby a jest c. Otrzymujemy więc warunek (4), który wobec równości (1) daje sprzeczność. Wniosek jest więc prosty, kontekstem wyrażenia przez osobę a nieprawdziwego sądu p nie może być c. Uznanie tego wniosku Devlin popiera następującym przykładem: jeśli ktoś w kraju X mówi, że czerwiec jest miesiącem zimowym, to znaczy, że krajem X nie mogą być USA. Przestrzega nas jednak przed pochopnym uznaniem, że krajem X jest Australia – pewne jest bowiem jedynie to, że krajem X nie są USA.

Kończąc prezentację propozycji Barwise'a i Etchemendy'ego rozwiązania antynomii kłamcy, Devlin dokonuje następującego podsumowania[72]: „Kiedy więc poświęcimy należytą uwagę kwestii kontekstu, antynomia kłamcy zniknie. Mówiąc: »To, co tu stwierdzam, jest fałszywe«, osoba *a* wygaszał sąd odwołujący się (*implicite*) do określonego kontekstu *c*, tj. do kontekstu, w którym zdanie to zostało wypowiedziane. Jeśli sąd ten jest prawdziwy, to jest on prawdziwy w kontekście *c*, co – jak się okazuje – prowadzi do sprzeczności. Zatem sąd ten musi być fałszywy. Jednakże kontekstem, w którym stwierdza się, że sąd ten jest fałszywy, nie może być *c*, skoro przypuszczenie, że *c* nim jest, również prowadzi do sprzeczności. [...] Osoba *a*, która mówi (w kontekście *c*): »To, co tu stwierdzam, jest fałszywe«, wygłasza stwierdzenie fałszywe. Jednakże fakt, że jest ono fałszywe, nie może zostać stwierdzone w tym samym kontekście *c*. Jest to konkluzja dość osobliwa. Bo też wypowiedzenie przez kogokolwiek oryginalnego zdania, na którym opiera się »paradoks« kłamcy, jest rzeczą całkiem niezwykłą". Ta, dostrzeżona przez Devlina, osobliwość konkluzji nie musi dać się wyjaśnić przez stwierdzenie niezwykłości zdania kłamcy. Zdanie to w istocie jest niezwykłe. Jednak, prezentowane tu podejście, prawie do samego końca, było ilustrowane trafnymi i przekonywającymi przykładami. Ta analogia między analizowanym problemem zdania kłamcy a przykładami kończy się jednak na ostatecznym wniosku. Niezwykłe jest właśnie to, że nieprawdziwość sądu *p* nie może być stwierdzona w kontekście *c*, gdy tymczasem, to, że czerwiec nie jest miesiącem zimowym można właśnie stwierdzić w USA, czyli w kontekście, w którym sąd, że czerwiec jest miesiącem zimowym jest nieprawdziwy.

Oznacza to, że, o ile postulat uwzględniania kontekstu wypowiedzi w celu właściwej oceny prawdziwości wypowiedzianego w niej sądu jest jak najbardziej uzasadniony, o tyle jego realizacja zaproponowana przez Barwise'a i Etchemendy'ego jest, w tym konkretnym przypadku zdania kłamcy, raczej zawodna.

Teza o wpływie kontekstu wypowiedzi na ocenę wartości logicznej sądu w niej zawartego wydaje się być mocno uzasadniona. Co więcej, można podejrzewać, iż brak uwzględnienia tego kontekstu powinien wręcz uniemożliwiać rozpoznanie wartości logicznej sądu. Zaproponowana przez nas propozycja rozwiązania antynomii kłamcy wydaje się uzasadniać obie tezy. Ponieważ nasze podejście wiąże się z dość prostą analizą przeprowadzoną na poziomie rachunku zdań, odróżnienie zdania od sądu nim wyrażonego nie jest konieczne.

---

[72] Devlin, [1997], s. 342.

Propozycja rozwiązania antynomii[73]

Podejście nasze opiera się na trzech podstawowych założeniach:

1) antynomia kłamcy daje się analizować na gruncie języka zdaniowego;

2) kluczowym elementem kontekstu wpływającego na wartość logiczną zdania jest logika, którą się posługujemy w trakcie myślenia i mówienia;

3) każde zdanie przekazuje nam więcej informacji, niż ta, wyrażona słowami, z których to zdanie jest zbudowane.

Założenie pierwsze ma nas zabezpieczyć przed wpadnięciem w pułapkę analiz, których niepotrzebna złożoność zaciemnia właściwy problem prostego w swej istocie zdania kłamcy.

Założenie drugie ma nam uświadomić coś oczywistego, a co niestety, zwykle, umyka naszej uwadze. Chodzi tu o problem logiki, którą w niemy sposób zakładamy, ilekroć wypowiadamy jakiś sąd. Rozpoznanie praw tej logiki jest jednym z większych problemów współczesnych badań logicznych i filozoficznych. My jednak ograniczymy się jedynie do czegoś, co nie powinno budzić jakichkolwiek wątpliwości – logika, którą posługujemy się w formułowaniu myśli jest logiką prawdy. Nie jest nią więc, logika fałszu. Najprościej mówiąc, logika prawdy (fałszu) jest to logika, dla której wartością wyróżnioną jest prawda (fałsz). Oznacza to, że każda nasza wypowiedź jest traktowana jako wyrażająca prawdziwy sąd. Nie ma przy tym znaczenia, czy chcemy być w danej chwili prawdomówni, czy może zamierzamy wprowadzić kogoś w błąd. W obu przypadkach, intencją naszą jest to, aby wypowiedziane przez nas zdania, nasi odbiorcy traktowali jako zdania prawdziwe. Jest to o tyle istotne, że zdanie bez wartości logicznej nie niesie żadnej informacji. Jaką informację kryje w sobie np. zdanie „Mleko jest zdrowe dla dzieci", jeśli nie założymy konkretnej wartości logicznej tego zdania? Oczywiście, żadną. Bez uwzględnienia wartości logicznej, nie wiemy przecież, czy ze zdania tego wynika, że dzieci powinny pić mleko, czy nie. Problem ten staje się jeszcze bardziej oczywisty, zwłaszcza wówczas, gdy w przykładowym zdaniu, wyraz „mleko" zastąpimy słowem „narkotyki". Uwzględnienie wartości logicznej zdania odgrywa kluczowe znaczenie w przypadku zdania kłamcy. Jak bowiem zauważył Jan Woleński, na gruncie logiki fałszu, paradoksalnym zdaniem nie byłoby „To zdanie jest fałszywe", lecz „To zdanie jest prawdziwe"[74].

Trzecie, przyjęte przez nas, założenie uświadamia nam, iż z każdego zdania można uzyskać informacje, które nie są literalnie wyrażone tym ciągiem słów, który tworzy dane zdanie. Dla przykładu rozważmy zdanie inspirowane popularną, swego czasu, polską komedią: Z = „Warsztat na Okopowej jest własnością braci". Sąd wyrażony tym zdaniem jest jasny i wiąże się ściśle

---

[73] Proponowane tu rozwiązanie jest szczegółowiej przedstawione w Łukowski, [2003b].

[74] Woleński, [1993], s. 91–97.

z ciągiem słów tworzących to właśnie zdanie. Tymczasem, jeśli zaakceptujemy zdanie *Z*, powinniśmy zaakceptować wiele innych zdań, np.: Z_1 = „W mieście istnieje ulica o nazwie »Okopowa«", Z_2 = „Jacyś bracia są właścicielami warsztatu", Z_3 = „Warsztat na Okopowej ma co najmniej dwóch właścicieli", Z_4 = „Właścicielami warsztatu na Okopowej są mężczyźni", Z_5 = „Na ulicy Okopowej można coś naprawić" itd. Widać więc wyraźnie, że zdanie *Z* orzeka znacznie więcej, aniżeli sąd wyrażony przez ten jeden konkretny ciąg słów tworzących zdanie *Z*. Zdanie to orzeka bowiem także o tym wszystkim, o czym orzekają te zdania, które już wymieniliśmy, jak również i te, których nie przytoczyliśmy, a z którymi musielibyśmy się również zgodzić, jeśli zaakceptowaliśmy zdanie *Z*. Jeśli więc zdanie *Z* jest prawdziwe, prawdziwe muszą być również wszystkie wspomniane zdania. Jeśli natomiast zdanie *Z* jest fałszywe, wiadomo jedynie to, że przynajmniej jedno z tych zdań musi być fałszywe. Wiele z nich nadal może być uważane za zdania prawdziwe. Dla przykładu załóżmy, że zdanie *Z* jest uznane za fałszywe, gdyż jedyny warsztat na Okopowej jest własnością kobiety i mężczyzny, którzy są rodzeństwem i którzy poza sobą nie posiadają, ani brata, ani siostry. Wówczas, zdania Z_2 oraz Z_4 muszą zostać uznane za fałszywe, lecz zdania Z_1, Z_3, Z_5 nadal mogą być uważane za zdania prawdziwe.

Podsumowując, powiemy, że zgodnie z trzecim założeniem każde zdanie „mówi" więcej, niż to literalnie wynika z ciągu słów tworzących to zdanie. Co więcej, dane zdanie fałszywe, mimo swej fałszywości, może mówić coś, co jest prawdą.

Z założenia pierwszego wynika, że język zdaniowy powinien być wystarczający dla symbolicznego wyrażenia zdania kłamcy. Nie jest jednak powiedziane, że językiem tym musi być język klasycznego rachunku zdań. Co więcej, proste wnioskowanie ilustrujące propozycję Priesta pokazuje, że język klasycznego rachunku zdań jest zbyt mało subtelny dla wyrażenia zdania kłamcy *L*. Oczywiście, chodzi tu o spójnik implikacji, którego użycie upraszcza cały problem do tego stopnia, że sprzeczność wydaje się być jedyną możliwą konsekwencją akceptacji zdania kłamcy, jako zdania w sensie logicznym.

Rozważmy więc rachunek zdaniowy z dodatkowym spójnikiem implikacji, który byłby jednak na tyle subtelny, aby móc wyrazić wyżej przedstawione kwestie. Rozszerzmy zatem język klasycznego rachunku zdań o nowy dwuargumentowy spójnik : (dwukropek), którego symbol ma się kojarzyć z funkcją przytaczania czyjejś wypowiedzi. Naszym zamiarem jest więc to, aby nowy spójnik umożliwiał wyrażenie faktu, iż analizując treść danego zdania można z niego wywnioskować inne zdania o określonej treści. W związku z tym, spójnik : nie powinien być dobrze znaną klasyczną implikacją. Zamierzonym sensem zdania postaci $p : q$ jest bowiem to, aby stan rzeczy wyrażony zdaniem q musiał zaistnieć, jeśli tylko zaistniał stan rzeczy wyrażony zdaniem p. Treść zdania q jest wówczas w pewien sposób zawarta w treści zdania p. Możemy też powiedzieć, że treść zdania q jest, w jakimś sensie, treścią zdania p, co oczywiście nie oznacza, że treść zdania p jest treścią zdania q. Dla prostoty powiemy wówczas, że „zdanie p mówi, że q".

W podanym wyżej przykładzie, zdaniami, które powinny być przez nas zaakceptowane są $(Z : Z_1)$, $(Z : Z_2)$, $(Z : Z_3)$, $(Z : Z_4)$, $(Z : Z_5)$, i to bez względu na to, czy samo zdanie Z jest zaakceptowane, czy nie. Jeśli nawet, uznamy fałszywość zdania Z, to i tak musimy uznać prawdziwość wszystkich pięciu ostatnio wymienionych zdań. Jeśli bowiem zdanie Z jest w naszym przekonaniu fałszywe, z powodu wcześniej wymienionego, to i tak nie sposób zaprzeczyć, że zdanie to mówi np., że dwaj bracia są właścicielami warsztatu na Okopowej.

Określając nowy spójnik, należy uwzględnić fakt, iż dane zdanie Z „mówi" o wielu innych zdaniach, np. o: Z_1 i Z_2 i Z_3 i Z_4 i Z_5. Najwyraźniej więc, kluczowym dla określenia nowego spójnika powinien być spójnik koniunkcji. Przyjmijmy zatem następujący zbiór aksjomatów:

Ax1. $\alpha : \alpha$
Ax2. $((\alpha : \beta) \wedge (\beta : \delta)) \rightarrow (\alpha : \delta)$
Ax3. $(\alpha \wedge \beta) : \alpha$
Ax4. $(\alpha \wedge \beta) : (\beta \wedge \alpha)$
Ax5. $\alpha : (\alpha \wedge \alpha)$
Ax6. $((\alpha : \beta) \wedge (\beta : \alpha)) \rightarrow ((\neg\alpha : \neg\beta) \wedge (\neg\beta : \neg\alpha))$
Ax7. $((\alpha : \beta) \wedge (\beta : \alpha) \wedge (\delta : \gamma) \wedge (\gamma : \delta)) \rightarrow (((\alpha \mathbin{\S} \delta) : (\beta \mathbin{\S} \gamma)) \wedge ((\beta \mathbin{\S} \gamma) : (\alpha \mathbin{\S} \delta)))$, dla $\S \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, :\}$
Ax8. $((\alpha : \beta) \wedge (\delta : \gamma)) \rightarrow ((\alpha \mathbin{\S} \delta) : (\beta \mathbin{\S} \gamma))$, dla $\S \in \{\wedge, \vee\}$
Ax9. $(\alpha : \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

Powiemy, że α jest konsekwencją zbioru przesłanek X, co zapiszemy

$$X \vdash \alpha$$

jeśli formuła α jest wyprowadzalna przy pomocy reguły *Modus Ponens* ze zbioru będącego sumą zbiorów X i $\{$Ax1, ... Ax9$\}$ oraz zbioru aksjomatów klasycznej logiki zdaniowej.

Oczywiście łatwo zauważyć, że zaproponowana logika nie umożliwia przeprowadzenia treściowej analizy zdań. Stwarza ona jednak możliwość arbitralnego formułowania zdań stwierdzających związek treściowy zachodzący między zdaniami, co z punktu widzenia celu jaki sobie postawiliśmy, jest w pełni wystarczające. Tautologie, których głównym spójnikiem jest : są raczej trywialne. Sens nowego spójnika jest taki, aby tautologiami zaproponowanej logiki były formuły postaci $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_k) : \alpha_i$, dla $i \in \{1, ..., k\}$. Jest to o tyle uzasadnione, że, w istocie, zaistnienie stanu rzeczy wyrażonego zdaniem $p_1 \wedge ... \wedge p_k$ implikuje zaistnienie wszystkich stanów rzeczy wyrażonych zdaniami $p_1, ..., p_k$.

Różnica między tym spójnikiem a klasyczną implikacją polega między innymi na tym, że tautologią nie jest żadna formuła postaci $\alpha_i : (\alpha_1 \vee ... \vee \alpha_k)$, gdzie $i \in \{1, ..., k\}$. Różnica ta jest jednak głębsza. Jeśli bowiem mamy do czynienia z klasyczną implikacją $p \rightarrow q$, to z prawdziwości zdania p, wnioskujemy o prawdziwości zdania q, jeśli natomiast p jest fałszywe, trudno nam jest cokolwiek powiedzieć o wartości logicznej q. Oczywiście, prawdziwość klasycznej implikacji $p \rightarrow q$ zależy wyłącznie od prawdziwości zdań p i q. W przypadku zdania $p : q$, również prawdziwość zdania p pociąga za sobą prawdziwość zdania q, a fałszywość zdania p nie może być żadną podstawą oceny prawdziwości zdania q. Jednak prawdziwość zdania $p : q$ nie zależy od prawdziwości zdań p i q. Ściślej mówiąc, to co różni implikację klasyczną od zdania $p : q$, to warunek fałszywości. Przypadki, które mogą zaistnieć są następujące:

$p : q$ – prawdziwe	p – prawdziwe	q – prawdziwe
$p : q$ – prawdziwe	p – fałszywe	q – prawdziwe
$p : q$ – prawdziwe	p – fałszywe	q – fałszywe
$p : q$ – fałszywe	p – prawdziwe	q – prawdziwe
$p : q$ – fałszywe	P – prawdziwe	q – fałszywe
$p : q$ – fałszywe	P – fałszywe	q – prawdziwe
$p : q$ – fałszywe	P – fałszywe	q – fałszywe

W przypadku klasycznej implikacji, spośród czterech ostatnich zachodzi jedynie drugi. Widać więc, że nowy spójnik nie jest spójnikiem prawdziwościowym.

Sens aksjomatów definiujących nowy spójnik jest prosty do odczytania. Ax1 – treść danego zdania jest zawarta w treści tego zdania, czyli każde zdanie mówi to, co mówi. Ax2 – jeśli zaistnienie stanu rzeczy wyrażonego zdaniem p oznacza konieczność zaistnienia stanu rzeczy wyrażonego zdaniem q oraz jeśli zaistnienie stanu rzeczy wyrażonego zdaniem q oznacza konieczność zaistnienia stanu rzeczy wyrażonego zdaniem r, to zaistnienie stanu rzeczy wyrażonego zdaniem p oznacza konieczność zaistnienia stanu rzeczy wyrażonego zdaniem r. Aksjomaty Ax3 oraz Ax4 dotykają sedna znaczenia nowego spójnika. Jak to zostało już wcześniej zauważone, między nim a koniunkcją zachodzi szczególnie bliski związek, który znajdzie swoje odzwierciedlenie w semantyce adekwatnej dla nowej logiki. Ax5 – powtórzenie tego samego zdania, nie mówi nic ponad to, co mówi jednokrotne wypowiedzenie tego zdania. Ax6 jest prawem inwariancji ze względu na negację dla spójnika równoważności określonego przez koniunkcję $(\alpha : \beta) \wedge (\beta : \alpha)$. Trzy aksjomaty Ax7 są prawami inwariancji ze względu na $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ oraz $:$ dla spójnika równoważności określonego przez koniunkcję $(\alpha : \beta) \wedge (\beta : \alpha)$. Ax8 jest prawem inwariancji dla nowego spójnika ze względu na koniunkcję i alternatywę. Ostatni aksjomat wiąże nowy spójnik z implikacją tak, aby wyeliminować możliwość sytuacji, w której zdania $p : q$ i p są prawdziwe, zaś zdanie q jest fałszywe. Istotnie, skoro zaistnienie stanu rzeczy wyrażonego zdaniem p pociąga za sobą zaistnienie stanu rzeczy wyrażonego zdaniem q, to skoro zdanie p jest prawdziwe, zdanie q również musi być prawdziwe.

Naturalność zaproponowanej formalizacji polega na tym, iż uwzględnia ona oczywisty fakt wysnuwania niepodważalnych wniosków ze zdań, których treść, niekiedy nawet, w pozornie luźny sposób łączy się z treścią wniosków. Okazuje się, że fakt ten może mieć istotny wpływ na ocenę zdań samozwrotnych, do których należy rozważane przez nas zdanie kłamcy L.

Semantyką adekwatną dla nowego rachunku zdaniowego będzie klasa wszystkich matryc $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, D)$, w których $\mathcal{A} = (A, -, \cap, \cup, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \supset)$ jest algebrą podobną do S: języka klasycznej logiki zdaniowej poszerzonego o dwuargumentowy spójnik :, D jest niepustym podzbiorem A, zaś dla dowolnych $a, b \in A$,

*W*1.	$a = a \cap a$		
*W*2.	$a \cap b = b \cap a$		
*W*3.	$-a \in D$	wtw	$a \notin D$
*W*4.	$a \cap b \in D$	wtw	$a \in D$ i $b \in D$
*W*5.	$a \cup b \in D$	wtw	$a \in D$ lub $b \in D$
*W*6.	$a \Rightarrow b \in D$	wtw	$a \notin D$ lub $b \in D$
*W*7.	$a \supset b \in D$	wtw	$a = b \cap c$, dla pewnego $c \in A$

Każdą matrycę $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, D)$ spełniającą powyższe warunki nazwiemy :-modelem. Niech $Hom(S{:}\ \mathcal{A})$ będzie zbiorem wszystkich homomorfizmów odwzorowujących S: w $\mathcal{A}$. Wówczas,

$X \vdash \alpha$ wtw dla dowolnego :–modelu $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, D)$ oraz dla dowolnego homomorfizmu $v \in Hom(S{:}\ \mathcal{A})$ (jeśli dla dowolnej $\beta \in X$, $v(\beta) \in D$, to $v(\alpha) \in D$)[75].

Łatwo dostrzec, iż interpretacja spójnika: wyrażona siódmym warunkiem :–modelu jest zgodna z wcześniejszymi komentarzami, wyjaśniającymi pożądany sens nowego spójnika.

Istnienie w rachunku zdaniowym spójnika : umożliwia wyrażenie zdania kłamcy w nowy sposób:

$$L : \neg L.$$

---

[75] Skrót dowodu tego twierdzenia jest przedstawiony w Łukowski, [1997], s. 72.

Zdanie kłamcy L mówi bowiem, „nieprawda, że L”. Powiemy więc, że zdanie L wyraża stan rzeczy polegający na tym, że L nie jest prawdą.

Wykorzystując semantykę adekwatną dla nowej logiki zdaniowej spróbujmy ocenić prawdziwość zdania L wiedząc, że zdanie to mówi o swojej fałszywości, czyli przy założeniu, że prawdą jest $L : \neg L$. Zauważmy, że prawdziwość zdania L i prawdziwość zdania $L : \neg L$ to dwie odrębne kwestie, mimo iż niewątpliwie zachodzi między nimi pewna zależność. W ogólności, prawdziwość zdania $p : q$ zależy bowiem od związku jaki zachodzi między treścią zdania p i treścią zdania q, nie zaś od tego, czy zdania te są prawdziwe czy może fałszywe. Jeśli p jest zdaniem „Krasnal Koszałek Opałek wraz ze swoją rodziną zamieszkał w Puszczy Kampinoskiej”, zaś q zdaniem „Krasnal Koszałek Opałek ma rodzinę” to, mimo iż oba zdania p i q uważamy za fałszywe, zdanie $p : q$ niewątpliwie powinno zostać uznane za prawdziwe. Naturalnie, w przypadku paradoksalnego zdania kłamcy L nie mamy pełnej niezależności prawdziwości zdań L, $\neg L$ i $(L : \neg L)$, a to z tego powodu, że treścią tych zdań jest właśnie prawdziwość zdania L.

Niech $M = (A, D)$ będzie dowolnym modelem zaś $v \in Hom(S{:}\ A)$ dowolnym homomorfizmem, takim że $v(L) = a_0 \in A$. Aby dysponować paradoksalnym zdaniem kłamcy musimy założyć, że zdanie $L : \neg L$ jest spełnione w modelu M i przy wartościowaniu v, czyli że faktycznie zdanie L mówi o swojej nieprawdziwości. Tym samym, przyjmujemy, że

$$a_0 \supset -a_0 \in D$$

co wobec warunku ($w7$) :-modelu oznacza, że $a_0 = -a_0 \cap c$, dla pewnego $c \in A$.

Przypuśćmy, że $a_0 \in D$. Wówczas, $-a_0 \cap c \in D$. Z ($w4$) mamy więc, że $-a_0 \in D$ i $c \in D$. Jednak, wobec ($w3$), $a_0 \notin D$. Zatem, $a_0 \notin D$. Zatem, w modelu M i przy wartościowaniu v zdanie L nie może być spełnione.

Należy więc sprawdzić, czy niespełnienie zdania L w modelu M i przy wartościowaniu v nie prowadzi do jakiejś sprzeczności. Załóżmy więc, że $a_0 \notin D$. Z ($w3$), $-a_0 \in D$. Z założenia, $a_0 = (-a_0 \cap c) \notin D$, dla pewnego $c \in A$. Zatem $-a_0 \notin D$ lub $c \notin D$. Ponieważ jednak $-a_0 \in D$, więc $c \notin D$. Jak widać, w tym przypadku do sprzeczności nie doszliśmy.

Oznacza to, że zdanie L będziemy mogli uznać za fałszywe, jeśli znajdziemy takie fałszywe zdanie z, dla którego prawdziwe jest zdanie

$$L : z.$$

Wniosek ten jest zgodny z tym co ustaliliśmy wcześniej: zdanie wyrażające stan rzeczy, którego zajście pociąga za sobą zajście kilku innych stanów rzeczy jest fałszywe, jeśli przynajmniej jeden z tych stanów nie zachodzi w rzeczywistości. Pozostaje więc znaleźć to zdanie, które byłoby fałszywe, a które wyrażałoby taki stan rzeczy, który musiałby zajść skoro zaszedłby stan rzeczy wyrażony zdaniem L.

Z założenia $L : \neg L$. Tymczasem, z aksjomatu Ax1 wynika, że $L : L$. Zatem, wobec aksjomatu Ax8, $(L \wedge L) : (L \wedge \neg L)$. Z Ax5 mamy, $L : (L \wedge L)$. Na mocy Ax2 otrzymujemy,

$$L : (L \wedge \neg L).$$

Jak widać, propozycja nasza pokazuje podobieństwo jakie najwyraźniej zachodzi między antynomią kłamcy a wstęgą Möbiusa. Tak jak we wstędze Möbiusa, strona a jest utożsamiona ze stroną b, czyli *nie-a*, nadal pozostając stroną a, tak w antynomii kłamcy, zdanie L jest utożsamione ze zdaniem $\neg L$, nadal pozostając zdaniem L. Stwierdzenie, że L jest $\neg L$, nie będąc już L jest niezgodne z założeniem – przecież to L, które z natury rzeczy zawsze będzie L, jest utożsamione z $\neg L$. Gdyby L nie było już L, to nie można byłoby powiedzieć, że L jest utożsamione z $\neg L$, bo L nie byłoby już sobą. Zatem, ze zdaniem $\neg L$ byłoby utożsamione jakieś inne zdanie, ale na pewno zdaniem tym nie byłoby L. Nasza propozycja bazuje na tej właśnie oczywistości. Nie można więc przyjąć, że $L = \neg L$ i $L \neq L$. Można natomiast zgodzić się z równością $L = L \wedge \neg L$. Zdanie L jest zdaniem $\neg L$ tylko jako zdanie L.

Niewątpliwie, zdanie $L \wedge \neg L$ jest, na gruncie naszego rozszerzenia logiki klasycznej, zdaniem fałszywym. Co więcej, zdanie to wyraża sprzeczny stan rzeczy, który musiałby zajść jeśli tylko zaszedłby stan rzeczy wyrażony zdaniem L. Zatem, zdanie kłamcy L musi być zdaniem fałszywym, a ponadto, w żadnym razie, nie może być zdaniem prawdziwym.

Kluczowym dla całej konstrukcji aksjomatem jest, jak widać, oczywisty w swej wymowie, aksjomat pierwszy. To on jest odpowiedzialny za uszanowanie oczywistości stwierdzającej, że bez względu na to, z czym coś zostanie utożsamione, to zawsze to coś pozostanie sobą. Istotnie, każde zdanie p mówi to, co mówi, a więc p. Ten trywialny wręcz aksjomat jest jednak gwarancją tego, że nie zapomnimy, iż logika, którą się posługujemy myśląc i mówiąc jest logiką prawdy. Każde więc wypowiadane przez nas zdanie ma być, zgodnie z naszymi intencjami, rozumiane, jako mówiące prawdę, a więc jeśli wypowiadamy jakieś zdanie p, to chcemy, aby odbiorca naszej wypowiedzi uznał właśnie p, bo tylko pod tym warunkiem zaakceptuje treść zdania p. Podobny stan rzeczy jest w przypadku wypowiedzenia, czy też napisania zdania kłamcy L. Jeśli mamy brać pod uwagę fakt, iż zdanie to orzeka $\neg L$, przede wszystkim, musimy potraktować to zdanie jako prawdziwe, a więc musimy przyjąć L. Dopiero pod tym warunkiem możemy zrozumieć i przyjąć, iż zdanie L mówi $\neg L$. Sens zdania L jest dla nas jasny w konkretnym kontekście np. prawdziwości tego zdania. Tym samym, zdanie kłamcy L nie tylko orzeka o swojej nieprawdziwości, lecz również orzeka o swojej prawdziwości, jak zresztą każde zdanie wypowiedziane w logice prawdy.

Wskazana przez Barwise'a i Etchemendy'ego konieczność uwzględnienia kontekstu wypowiedzi ma u nas konkretną realizację. Kontekst ten jest, mianowicie, określony przez logikę prawdy. Co więcej, w przeciwieństwie do teorii Barwise'a i Etchemendy'ego, a zgodnie z naszymi intuicjami, można określić nieprawdziwość zdania L rozpoznając kontekst, w którym zdanie L nie jest prawdziwe. W naszym przypadku, kontekst ten nie jest żadną tajemnicą.

PODSUMOWANIE PROPONOWANEGO ROZWIĄZANIA. Te proste rozważania pokazały, że zdanie kłamcy L musi być fałszywe. Jeśli jednak wniosek ten skonfrontujemy z treścią zdania L, możemy czuć się zaskoczeni. Przecież zdanie to mówi, że jest fałszywe, a skoro tak, to znaczy że L jest jednak prawdziwe. Czyżby cała praca związana z powyższą formalizacją okazała się bezowocną? Chyba jednak nie. Na chwilę wróćmy do przykładu, w którym zdanie Z = „Warsztat na Okopowej jest własnością braci" jest fałszywe, gdyż z założenia, wspomniany warsztat należy do kobiety i mężczyzny będących rodzeństwem, które nie posiada innego poza sobą rodzeństwa. Przywołajmy też drugie zdanie Z_3 = „Warsztat na Okopowej ma co najmniej dwóch właścicieli". Niewątpliwie, prawdą jest, że zdanie $(Z : Z_3)$ jest zdaniem prawdziwym. Co więcej, zdanie Z jest fałszywe, zaś Z_3 prawdziwe. Zatem, przykład ten dobitnie pokazuje, że zdanie fałszywe może orzekać o czymś, co jest prawdą. Przecież dane zdanie jest fałszywe nie tylko wówczas, gdy wszystkie zdania o których ono mówi są fałszywe. Zupełnie naturalną sytuacją jest więc ta, w której zdanie fałszywe mówi również i to, co wiele innych zdań będących przecież zdaniami prawdziwymi. Zdanie Z jest fałszywe jedynie z tego powodu, iż stwierdza, że właścicielami warsztatu są bracia. Pozostałe, wynikające z tego zdania fakty są prawdziwe. Można więc stwierdzić, że, w świetle zaproponowanej tu interpretacji, jakieś zdanie może być fałszywe, mimo że mówi coś prawdziwego, pod jednym wszakże warunkiem, a mianowicie tym, że zdanie to dodatkowo mówi o czymś co nie jest zgodne z prawdą.

Zauważmy, że z formalnego punktu widzenia, wszystko w naszej analizie jest jednoznaczne: zdanie L jest fałszywe, więc jawna część tego, o czym ono orzeka jest prawdą. Jednocześnie, zdanie to stwierdza, że L i to jest mniej jawna część tego, o czym zdanie L mówi. Dlatego też L jest fałszem, zaś $\neg L$ prawdą. Gdybyśmy utożsamili jedno zdanie z drugim, $L = \neg L$, otrzymalibyśmy sprzeczność. Jednak przy naszym podejściu, zdanie L nie jest zdaniem $\neg L$. Przecież, zdanie L mówi, że $\neg L$, mówiąc ponadto, że L. W szczególności więc, zdanie L orzeka o tym, że $L \wedge \neg L$. Zatem, jeśli mielibyśmy, wykorzystując równość pokazać czym jest zdanie kłamcy L, powinniśmy raczej napisać

$$L = (L) \wedge (\neg L) \wedge (L \wedge \neg L) \wedge \ldots$$

Oczywiście, kropki są o tyle uzasadnione, że tak naprawdę trudno być pewnym, czy treść zdania L została wykorzystana w pełni. Skoro więc zdanie L jest zdaniem $(L) \wedge (\neg L') \wedge (L \wedge \neg L) \wedge \ldots$, to L okaże się zdaniem prawdziwym tylko wtedy, gdy każdy człon koniunkcji, którą przecież L jest, będzie zdaniem prawdziwym. Tymczasem tak być nie może, bo jednym z członów koniunkcji jest koniunkcja zdań sprzecznych $L \wedge \neg L$. Zatem L musi być zdaniem fałszywym. Skoro jednak L jest fałszem, w oczywisty sposób $\neg L$ jest prawdą. Istotnie, $\neg L = (\neg L) \vee (\neg\neg L) \vee \neg(L \wedge \neg L) \vee \ldots$ Nie wystarcza to jednak do stwierdzenia, że L jest prawdziwe, ponieważ mówi że $\neg L$. Przecież L nie mówi tylko o tym. To właśnie ten fakt pozwala nam w świetle przyjętej formalizacji, rachunku zdaniowegoi semantyki adekwatnej dla niego stwierdzić, że

<u>zdanie kłamcy ma wartość logiczną fałszu, chociaż właśnie o tym mówi.</u>

3.2.2. PARADOKS BURIDANA

Zauważyliśmy wcześniej, że na antynomię kłamcy można spojrzeć jak na błędne koło bezpośrednie: jeśli zdanie L jest prawdziwe to jest fałszywe i jeśli to samo zdanie jest fałszywe to jest prawdziwe. Perspektywa ta uświadamia nam, że trik będący podstawą antynomii kłamcy może być powtórzony w błędnym kole pośrednim. Średniowieczny francuski logik i filozof Jean Buridan (przed 1300 – przed 1361) w swoim sławnym podręczniku do logiki *Summulae de dialectica* przedstawił szereg pomysłowych problemów i zadań logicznych, a wśród nich paradoks kłamcy w postaci pośredniego błędnego koła[76]:

Paradoks Buridana
Załóżmy, że Platon w chwili t mówi: „To co Arystoteles mówi w chwili t nie jest prawdą". Załóżmy ponadto, że Arystoteles w chwili t mówi: „To co Platon mówi w chwili t nie jest prawdą". Ponieważ oba zdania odnoszą się wzajemnie do siebie w dokładnie ten sam sposób, nie ma żadnego powodu, aby jedno było prawdziwe, a drugie nie było prawdziwe. Tymczasem, jeśli jedno zdanie jest prawdziwe, to drugie nie jest prawdziwe.

Istotnie, załóżmy, że zdanie wypowiedziane przez Platona P = „To co Arystoteles mówi w chwili t nie jest prawdą" jest prawdziwe. Wówczas, jest tak, jak ono mówi, a więc zdanie wypowiedziane przez Arystotelesa A = „To co Platon mówi w chwili t nie jest prawdą" nie jest prawdą. Zatem, z nieprawdziwości zdania A wynika, prawdziwość zdania P – brak sprzeczności. Podobny brak sprzeczności mamy wówczas, gdy przyjmiemy prawdziwość zdania A. Wówczas, nieprawdziwym jest zdanie P. Trudno więc, problem Buridana

[76] Buridan, [1966], s. 200.

nazwać jakimkolwiek paradoksem. Problem pojawia się dopiero wówczas, gdy uznamy, że oba zdania winniśmy traktować jednakowo. Wtedy, nie można założyć prawdziwości któregoś ze zdań, odmawiając prawdziwości drugiemu z nich. Jest to jednak trudność natury pozalogicznej, gdyż z logicznego punktu widzenia nie ma tu żadnego paradoksu. Aby to łatwiej dostrzec załóżmy, że Platona zastępujemy Karolem, zaś Arystotelesa Adamem. Ponadto przyjmijmy, że Karol jest osobą prawą, której nikt nigdy nie przyłapał, ani na kłamstwie, ani na innym krętactwie, zaś Adam słynie z tego, że jest notorycznym kłamcą i manipulatorem, wielokrotnie przyłapanym na różnego rodzaju krętactwach. Wówczas, z łatwością uznamy prawdziwość zdania wypowiedzianego przez Karola, wobec czego będziemy musieli uznać nieprawdziwość zdania wypowiedzianego przez Adama. Co więcej, sytuacja ta w żadnym sensie nie będzie paradoksalna – przecież nie można jednakowo traktować wypowiedzi człowieka uczciwego i notorycznego kłamcy. Niestety, nie zawsze mamy do czynienia z tak przejrzystą sytuacją. Niekiedy problem Buridana jest kwestią trudną do rozstrzygnięcia, gdyż wiarygodność obu informatorów może być podobna.

Przykład z Karolem i Adamem dość dobrze pokazuje, iż paradoks Buridana nie jest dylematem logicznym, lecz problemem psychologicznej natury, dodajmy problemem, z którym niestety mamy do czynienia częściej niż byśmy sobie tego życzyli. Nie jest jednak niczym trudnym tak przekształcić paradoks Buridana, aby faktycznie stał się logicznym dylematem samozwrotności.

Poprawiona wersja paradoksu Buridana

Załóżmy, że Platon w chwili t_1 mówi: „To co Arystoteles mówi w chwili t_1 nie jest prawdą". Załóżmy ponadto, że Arystoteles w chwili t_1 mówi: „To co Platon mówi w chwili t_1 jest prawdą".

Jeśli prawdziwe jest, wypowiedziane przez Platona, zdanie P = „To co Arystoteles mówi w chwili t_1 nie jest prawdą", to znaczy, że jest tak, jak ono orzeka, a więc wypowiedziane przez Arystotelesa zdanie A' = „To co Platon mówi w chwili t_1 jest prawdą" nie jest prawdą. Z tego wynika, że zdanie P nie jest prawdziwe – sprzeczność z założeniem. Przyjmijmy teraz, że zdanie P nie jest prawdziwe. Zatem nie jest tak, jak ono orzeka, czyli zdanie A' jest prawdziwe. Lecz wówczas, prawdziwe jest także zdanie P – sprzeczność z założeniem.

Inna, równie prosta, analiza wykorzystująca klasyczny rachunek zdań pokazuje, że oba zdania są jednocześnie prawdziwe i nieprawdziwe. Ponieważ, $P \leftrightarrow \neg A'$ i $A' \leftrightarrow P$, więc $A' \leftrightarrow \neg A'$, co oznacza, że $A' \leftrightarrow A' \wedge \neg A'$ oraz $\neg A' \leftrightarrow A' \wedge \neg A'$[77]. Zatem, zdanie A' jest zarazem prawdziwe i nieprawdziwe. Jednak wobec równoważności $A' \leftrightarrow P$, także zdanie P jest zarazem prawdziwe i nieprawdziwe.

[77] Patrz, *Propozycja Priesta* w poprzednim paragrafie.

Propozycja rozwiązania paradoksu

Zaproponowane przez nas rozwiązanie antynomii kłamcy daje się bez trudu powtórzyć w przypadku nowej postaci paradoksu Buridana[78]. Załóżmy prawdziwość dwóch zdań, $P : \neg A'$ oraz $A' : P$. Zatem, dla pewnego modelu $M = (\underline{A}, D)$ oraz pewnego homomorfizmu $v \in Hom(\underline{S}, \underline{A})$ takiego, że $v(P) = p$, $v(A') = a$ mamy: $p \supset -a \in D$ oraz $a \supset p \in D$. Zatem, $p = -a \cap c$ oraz $a = p \cap d$, dla pewnych c i d.

Załóżmy teraz, że $p \in D$, czyli że $-p \notin D$, $-a \in D$ i $c \in D$. Wówczas, ponieważ $-a = -p \cup -d$, więc $-d \in D$. Niech $d = a$ oraz $c = p$. Przy tym nowym założeniu: $p = -a \cap p$ oraz $a = p \cap a$. Jest to zgodne z naszym, przyjętym w poprzednim paragrafie, założeniem: zdanie P stwierdza nieprawdziwość zdania A', lecz jednocześnie w sposób niemy, lecz oczywisty, stwierdza własną prawdziwość. Gdybyśmy nie założyli, że zdanie P stwierdza własną prawdziwość, nie moglibyśmy twierdzić, że stwierdza nieprawdziwość zdania A'. Podobnie, zdanie A' stwierdza prawdziwość zdania P, jak również swoją własną. Z przeprowadzonej wcześniej analizy semantycznej wynika, że prawdziwe są zdania P oraz $\neg A'$, przy czym zdania $\neg P$ oraz A' są nieprawdziwe. Jak widać, nie ma tu żadnego paradoksu[79].

Szereg, niezbyt kłopotliwych w ocenie wartości logicznych, zbiorów wypowiedzi rozważa Skyrms[80]. Zastosowanie, zaproponowanego przez nas, klasycznego rachunku zdaniowego z dodatkowym spójnikiem : znacznie ułatwia takie nadanie tym zdaniom wartości logicznej, które jest wolne od sprzeczności.

3.2.3. UOGÓLNIONA POSTAĆ ANTYNOMII KŁAMCY

Błędne koło pośrednie może mieć więcej niż dwa ogniwa. Podobnie, antynomia kłamcy może zostać przełożona na dylemat, w którym paradoksalność samozwrotności wynika z n zdań o odpowiedniej postaci. Nie jest niczym trudnym uogólnić paradoks Buridana w poprawionej postaci do przypadku n odpowiednio zapętlających się zdań.

---

[78] Naturalnie, rachunek zdaniowy ze spójnikiem : może być zastosowany także do oryginalnej postaci paradoksu Buridana, tyle tylko, że nie miałoby to większego sensu, gdyż w pierwotnej postaci, problem Buridana nie jest żadnym logicznym paradoksem.

[79] Warto dodać, że nie ma tu drugiego rozwiązania, w którym A' byłoby zdaniem prawdziwym. Wówczas bowiem, prawdziwym byłoby zdanie P, a to implikuje nieprawdziwość zdania A'.

[80] Skyrms, [1984], 119–131.

Uogólniona postać antynomii kłamcy[81]

L_1. L_2[82]
L_2. L_3
.
.
.
L_{n-2}. L_{n-1}
L_{n-1}. L_n
L_n. $\neg L_1$

Powyższy zestaw zdań prowadzi do paradoksu analogicznego do antynomii kłamcy. Przyjmując prawdziwość zdania L_1, musimy kolejno przyjąć prawdziwość wszystkich zdań od L_2 do L_n włącznie. Zatem, musimy również uznać za prawdziwe zdanie $\neg L_1$ – jest to jednak sprzeczne z założeniem prawdziwości L_1. Podobnie, wychodząc od nieprawdziwości zdania L_1, musimy zgodzić się na nieprawdziwość wszystkich zdań od L_2 do L_n włącznie, a więc nieprawdziwe musi być także zdanie $\neg L_1$ – co jest przecież sprzeczne z założeniem nieprawdziwości zdania L_1.

Propozycja rozwiązania antynomii

Wystarczy jednak zastosować klasyczny rachunek zdań z dodatkowym spójnikiem :, aby paradoksalność rozważanego wyżej zbioru zdań znikła. Załóżmy więc prawdziwość następujących zdań:

$$(L_1 : L_2), (L_2 : L_3), ..., (L_{n-2} : L_{n-1}), (L_{n-1} : L_n), (L_n : \neg L_1).$$

Zgodnie z naszą wcześniejszą propozycją, pomijając już pewne kroki w rozumowaniu, znajdujemy następującą interpretację:

$$(L_1 = L_2 \cap L_1), (L_2 = L_3 \cap L_2), ..., (L_{n-2} = L_{n-1} \cap L_{n-2}), (L_{n-1} = L_n \cap L_{n-1}),$$
$$(L_n = \neg L_1 \cap L_n).$$

Wystarczy teraz przyjąć nieprawdziwość zdania L_1, czyli prawdziwość $\neg L_1$ oraz prawdziwość wszystkich zdań od L_2 do L_n włącznie, aby okazało się, iż jest to niesprzeczna interpretacja zbioru $\{L_1, ..., L_n\}$.

---

[81] Nietrudno jest dostrzec, że istnieje wiele innych, możliwych postaci tego paradoksu.
[82] Wyrażenie „L_1. L_2" oznacza to, że jakieś zdanie L_2 jest nazwane L_1.

3.3. INNE PARADOKSY SEMANTYCZNE

Omówiona, w rozdziale poświęconym paradoksom wynikającym z niedoskonałości naszej intuicji, antynomia Russella wskazuje na istnienie pewnej logicznej zasady, której nieprzestrzeganie musi doprowadzić do sprzeczności[83]: „Żaden przedmiot *danego rodzaju* nie może pozostawać w relacji do wszystkich i tylko tych rzeczy *tego rodzaju*, które nie pozostają w tej relacji do samych siebie". Pamiętając jednak o wspomnianym wyżej definiowaniu elementów największego i najmniejszego w zbiorze uporządkowanym, należy zauważyć, że może się zdarzyć, że istnieje przedmiot danego rodzaju, który pozostaje w danej relacji do wszystkich tych i tylko tych rzeczy tego rodzaju, które po pierwsze, nie są tym przedmiotem i po drugie, nie pozostają w tej relacji do samych siebie[84].

3.3.1. PARADOKS GOLIBRODY

W rozdziale poświęconym paradoksom wynikającym z niedoskonałości naszej intuicji przypomnieliśmy argumentację przekładającą teoriomnogościową antynomię Russella na język logiki formalnej. Wówczas, problem będący sednem tej antynomii daje się wyrazić następująco:

$$\exists y\ \forall x\ (P(x, y) \leftrightarrow \neg P(x, x)).$$

Sprzeczność jest nieunikniona, gdy spośród wszystkich możliwych, dopuszczalnych podstawień za zmienną x wybierzemy y:

$$\exists y\ (P(y, y) \leftrightarrow \neg P(y, y)).$$

Idealnym wręcz przykładem dylematu, dla którego powyższy schemat wyraża istotę problemu jest powszechnie znana antynomia golibrody:

---

[83] Quine, [1987], s. 131.

[84] Na podkreślenie zasługuje fakt, iż w zdaniu tym, wyrażenie może się zdarzyć, że „istnieje przedmiot" nie może zostać zastąpione przez „istnieje przedmiot". Dowodzi tego fakt, iż w podobny sposób nie można zdefiniować na przykład zbioru Russella. Zgodnie ze wskazaną ideą zbiór Russella $Z = \{x: x \notin x\}$ winien zostać zastąpiony przez $Z' = \{x: x \notin x \wedge x \neq Z'\}$. Oznacza to jednak błąd definiowania zbioru Z' przy pomocy Z': będziemy wiedzieli kiedy x należy do zbioru Z', gdy będziemy wiedzieli, czy jest od niego różny, czyli w szczególności, gdy będziemy wiedzieli czy x należy do zbioru Z'. Inna, wolna od błędu *idem per idem* definicja zbioru $Z'' = \{x: x \notin x \wedge x \neq \{y: y \notin y\}\}$ nie uwalnia od antynomii Russella: jeśli bowiem $Z'' \in Z''$, to w szczególności $Z'' \notin Z''$; jeśli natomiast $Z'' \notin Z''$, to $Z'' = Z$, a więc $Z'' \in Z''$. Zatem, $Z'' \in Z''$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Z'' \notin Z''$.

Antynomia golibrody
Załóżmy, że w miasteczku Barberville mieszkał jeden jedyny golibroda. Zastanawiając się nad tym, których mężczyzn golibroda golił, dochodzimy do wydawać by się mogło oczywistego i jedynie możliwego wniosku: golibroda golił wszystkich tych mężczyzn miasteczka, którzy nie golili się sami. Problem stanowi jednak sam golibroda. Jeśli bowiem golibroda sam się goli, to należy do tej grupy mężczyzn, którzy się golą sami, a tych właśnie on nie goli. Jeśli natomiast golibroda sam się nie goli, to jest jednym z tych mężczyzn, którzy nie golą się sami, a tych właśnie on goli. Mamy więc sprzeczność: golibroda sam się goli wtedy i tylko wtedy, gdy sam się nie goli.

Jeśli przyjmiemy oznaczenia: M – zbiór wszystkich mężczyzn miasteczka Barberville, a – golibroda z Barberville, $G(x,y)$ – „x goli y-ka"; to zdanie prowadzące do paradoksalnego wniosku możemy zapisać następująco:

$$(G) \qquad \forall x \in M\, (G(a, x) \leftrightarrow \neg G(x, x)).$$

Ponieważ $a \in M$, wystarczy za zmienną x podstawić stałą a, aby otrzymać sprzeczność:

$$G(a, a) \leftrightarrow \neg G(a, a).$$

Ta formalna struktura antynomii golibrody wskazuje na to, iż wyraża ona ten sam problem, który został zdiagnozowany przez Quine'a w przytoczonym już wcześniej cytacie. Okazuje się jednak, że antynomia golibrody daje się rozwiązać, w pewien całkiem naturalny sposób, przez ograniczenie zasięgu kwantyfikatora ogólnego. W tym też sensie może ona przypominać inne problemy jakie mamy ze stwierdzeniem, iż jakaś konkretna osoba jest kimś, pod jakimś względem, najlepszym, czy też najgorszym. Dla przykładu rozważmy stwierdzenie orzekające, że Albert Einstein jest pod względem wiedzy i osiągnięć, fizykiem lepszym od każdego człowieka, czyli najlepszym w historii fizykiem, zaś Edwin Stetson jest wyższym od każdego człowieka na świecie, czyli jest najwyższym na świecie człowiekiem. W obu przypadkach sprzeczność jest natychmiastowa. Skoro bowiem Einstein jest fizykiem lepszym od każdego z ludzi, to w szczególności Einstein jest fizykiem lepszym od samego siebie. Podobnie dowiedziemy, że Stetson jest wyższym od samego siebie, skoro jest wyższym od każdego z ludzi. Jednak wnioski te wydają się być sprzecznymi z oczywistym wręcz i raczej nie budzącym wątpliwości codziennym użyciem takich nazw jak „najlepszy fizyk", czy „najwyższy człowiek". Pewne problemy z użyciem tych wyrażeń mogą się wiązać raczej z trafną oceną, czy ten a ten człowiek faktycznie spełnia warunki bycia desygnatem którejś z wymienionych nazw. Innymi słowy, kwestią być może nawet praktycznie nierozwiązywalną jest to jak technicznie przeprowadzić sprawdzenie, który obiekt jest desygnatem danej nazwy. Trudno jednak zgodzić się z istnieniem jakiejś zasadniczej przeszkody natury logicznej, uzasadniającej konieczność usunięcia z języka wszelkich nazw formułowanych przy pomocy przedrostka „naj-", zwłaszcza że nawet matematyka dopuszcza pojęcia elementów najmniejszego i największego w zbiorze uporządkowanym: „Element największy zbioru uporządkowanego jest to taki element tego zbioru, który jest późniejszy od każdego elementu tego zbioru"[85]; „Element najmniejszy zbioru uporządkowanego jest to taki element tego zbioru, który jest wcześniejszy od każdego elementu tego zbioru"[86]. Jednak, relacja porządkująca jest zwrotna, co oznacza, że każdy element jest względem siebie późniejszy i wcześniejszy zarazem. Takie, zwrotne określenie relacji porządkującej zabezpiecza nas przed paradoksalnością mówienia o elementach najmniejszych i największych. Istotnie, jeśliby bycie lepszym fizykiem rozumieć jako relację zwrotną, to Einstein byłby lepszym od siebie i nie mielibyśmy już żadnego paradoksu. Podobnie, z paradoksem nie mielibyśmy do czynienia w przypadku zwrotnego określenia bycia wyższym człowiekiem. Niestety, potoczne rozumienie przedrostka „naj-" wydaje się wykluczać zwrotność relacji, dla której określenia przedrostek ten jest niezbędny. Dlatego też, istnieje inna możliwość uwolnienia od sprzeczności wszelkich rozważań na temat najlepszego fizyka, czy najwyższego człowieka. Rozwiązanie to polega na ograniczeniu zasięgu kwantyfikatora ogólnego i wydaje się być zgodnym z potocznym użyciem analizowanych nazw. Einstein będzie więc uznanym za najlepszego fizyka wśród wszystkich ludzi, jeśli okaże się, że jest lepszym fizykiem niż ktokolwiek kto nie jest nim samym. Podobnie Stetson będzie uznanym za najwyższego z ludzi, jeśli okaże się być wyższym od każdego człowieka nie będącego nim samym.

Nie popadniemy zatem w sprzeczność wówczas, gdy mówiąc „golibroda goli wszystkich mężczyzn w miasteczku, którzy nie golą się sami", będziemy mieli na myśli to, że golibroda goli każdego mężczyznę, który nie jest nim samym i który sam się nie goli. Zastępując więc formułę (G) przez:

$$(G') \qquad \forall x \in M - \{a\}\ (G(a, x) \leftrightarrow \neg G(x, x))$$

uniemożliwiamy wyprowadzenie sprzeczności. Należy tu dodać, że trudno nie ulec wrażeniu, że zdanie „golibroda goli wszystkich mężczyzn w miasteczku, którzy nie golą się sami" tak właśnie jest przez nas rozumiane. Podobnie, czyli

---

[85] Borkowski, [1991], s. 274. Naturalnie, to czy dany element w zbiorze uporządkowanym $\langle A, R\rangle$ jest wcześniejszy, czy późniejszy określa relacja R. Jeśli xRy (ew. $\langle x, y\rangle \in R$), dla $x, y \in A$, to powiemy, że x jest elementem wcześniejszym względem y-ka, zaś y późniejszym względem x-a.

[86] Borkowski, [1991], s. 275.

z ograniczonym zasięgiem kwantyfikatora ogólnego, są przez nas rozumiane wszystkie inne zdania z przedrostkiem „naj-". Z tego punktu widzenia dopuszczalne są inne, równie oczywiste stwierdzenia. Jeśli np. jakiś człowiek pomaga wszystkim tym (nie będącym nim samym), którzy sami nie mogą sobie pomóc, to równie dobrze może się okazać, że człowiek ten może być kimś kto sam sobie radzi z własnymi problemami, jak również kimś, kto wobec własnych problemów jest bezradny – jak to czasami w życiu bywa.

Należy jednak wyraźnie stwierdzić, że bez dodatkowego a wyraźnie pominiętego w narracji antynomii golibrody założenia ograniczającego zakres dużego kwantyfikatora, antynomia ta wskazuje na nieusuwalną sprzeczność, czyli na nieistnienie opisanego w nim golibrody. Jeśli bowiem przyjmiemy, że założone jest wyłącznie to, co zostało w narracji paradoksu powiedziane, zgodnie z regułami logiki klasycznej, nie istnieje golibroda, który goli wszystkich mężczyzn w miasteczku, którzy nie golą się sami. Ta nierozwiązywalność antynomii golibrody w ściśle rozumianej wersji podstawowej przybliża ten paradoks do innych antynomii semantycznych, które są tematem dwóch następnych paragrafów.

3.3.2. ANTYNOMIE RICHARDA I BERRY'EGO

Ze względu na brak rozwiązania, omówione niżej paradoksy Richarda, Berry'ego i Grellinga wydają się być bliższe antynomii Russella, niż antynomia golibrody. Ujawniają one bowiem pewne możliwości języka, którym się posługujemy. Możliwości te dotyczą formułowania takich wyrażeń, które nieuchronnie prowadzą do paradoksów.

Pierwszą, omówioną tu antynomię, odkrytą przez Julesa Antoine'a Richarda (1862–1956) i opublikowaną przez niego w 1905 roku, przedstawimy w formie jak najbardziej zbliżonej do oryginału[87].

Antynomia Richarda

Określmy pewien podzbiór E zbioru liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$ w sposób następujący. Utwórzmy listę wszystkich n-elementowych ($n \in N$ i $n \geq 2$) permutacji zbioru F, złożonego z dwudziestu sześciu liter alfabetu francuskiego. Listę otwierają wszystkie dwuelementowe permutacje z powtórzeniami zbioru F, uporządkowane w jakiś konkretny sposób. Następne na liście są wszystkie trójelementowe permutacje z powtórzeniami, również uporządkowane w pewien konkretny sposób. Kolejnymi są permutacje czteroelementowe, pięcioelementowe itd. Powstała w ten sposób lista jest nieskończona. Co więcej, jasnym jest,

---

[87] Richard, [1905], s. 143.

że pewne permutacje cechują się tym, że litery je tworzące układają się w słowa, te zaś w jedno lub więcej zdań. Mówiąc ściślej, każde zdanie języka francuskiego jest którymś elementem tak utworzonej listy. Zatem, niektóre zdania są definicjami pewnych liczb rzeczywistych. Niech u_1 będzie pierwszą na liście liczbą rzeczywistą zdefiniowaną przez jakąś permutację liter zbioru F. Niech u_2, u_3, ... będą, odpowiednio, drugą, trzecią, ... liczbą zdefiniowaną przez kolejne na liście permutacje. W ten właśnie sposób jest określony zbiór $E = \{u_i: i \in N\} \subset \boldsymbol{R}$, tych wszystkich liczb rzeczywistych, które są definiowalne przez skończoną liczbę słów.

Rozważmy teraz liczbę N zdefiniowaną w sposób następujący: „Niech p będzie cyfrą stojącą na n-tej pozycji dziesiętnej liczby u_n zbioru E. Liczba N jest utworzona w ten sposób, że: 1. jej część całkowita jest równa 0, oraz 2. cyfrą jej n-tej pozycji dziesiętnej jest $p+1$, jeśli tylko p jest różna od 8 i 9, w pozostałych zaś przypadkach cyfrą tą jest 1". Niech G będzie zbiorem liter tworzących zdania ujęte w powyższy cudzysłów[88]. Oczywiście, G jest którąś permutacją z listy Richarda. Zatem, liczba N należy do zbioru E: dla pewnego $i \in N$, $N = u_i$. Jednak, wprost z określenia liczby N wynika, że jest ona różna od każdej liczby zbioru E: dla dowolnego $i \in N$, $N \neq u_i$. Mamy więc sprzeczność[89].

W tym samym artykule, w którym Richard prezentuje konstrukcję zbioru E i liczby N, zamieszcza on także własne rozwiązanie tego problemu[90]. Otóż, zauważa on, że definicja liczby N bazuje na zdefiniowaniu zbioru E. Tymczasem, cały, nieskończony przecież zbiór E jest określony przez nieskończoną liczbę słów, a więc również liczba N jest zdefiniowana przez nieskończoną liczbę słów. Oznacza to, że liczba N nie może należeć do zbioru N, gdyż do tego zbioru należą wszystkie liczby zdefiniowane przez skończoną liczbę słów, chociaż, naturalnie, liczb tych jest nieskończona ilość. Dlatego też, zdaniem Richarda, nie ma tu żadnej sprzeczności. Rozwiązanie to, jak można się było tego spodziewać, zostało zaakceptowane przez konstruktywistę Julesa-Henri'ego Poincaré[91].

Wciąż w tym samym artykule, Richard modyfikuje swoją konstrukcję następująco. Proponuje on rozszerzyć zbiór E o liczbę N wstawiając ją na odpowiednią dla G, n-tą, a więc skończoną pozycję na liście, zwiększając w ten

[88] Naturalnie, zdanie odpowiadające zbiorowi G powinno być rozumiane jako zdanie języka francuskiego, a ponadto, takie wyrażenia jak „+", „1", „8", „9", „1.", „2." są w zbiorze G zastąpione odpowiednio przez francuskie odpowiedniki wyrażeń: „dodać", „jeden", „osiem", „dziewięć", „po pierwsze", „po drugie".

[89] Konstrukcja liczby N ma charakter przekątniowy i przypomina dowód, przeprowadzony przez Cantora, pokazujący, że zbiór liczb rzeczywistych jest liczniejszy od zbioru liczb wymiernych.

[90] Richard, [1905], s. 143.

[91] Poincaré, [1908], s. 145.

sposób o jeden pozycję każdej następnej liczby zbioru *E*. Otrzymany w ten sposób zbiór *E*' zawiera liczbę *N*, która jest jednak różna od liczby *N*' zdefiniowanej przez *G*: liczba *N* ma pozycję *k*-tą na liście, a więc cyfra znajdująca się na *k*-tej pozycji dziesiętnej liczby *N*' jest różna od cyfry znajdującej się na *k*-tej pozycji dziesiętnej liczby *N*[92]. Sprzeczność jest uratowana.

Richard był przekonany, iż problem który ujawnił w swojej konstrukcji ma teoriomnogościowy charakter. Aby lepiej pokazać analogiczność antynomii Richarda wobec antynomii Russella przedstawmy pierwszą z nich cytując fragment teksu *Antynomie w logice* autorstwa Witolda Marciszewskiego[93].

Inna postać antynomii Richarda

„[...] Tworzy się listę definicji, określających różne własności arytmetyczne, np.: Własność bycia liczbą pierwszą [...]. Listę tę porządkuje się w pewien sposób, np. w kolejności od najkrótszej (w sensie ilości liter) do najdłuższej definicji. Każdą pozycję z tak uporządkowanej listy opatrujemy kolejnym numerem. W ten sposób każdej definicji przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba naturalna. Może się teraz zdarzyć, że liczba przyporządkowana danej definicji posiada tę akurat własność, którą owa definicja określa; niech np. definicja bycia liczbą pierwszą, podana wyżej, ma numer 17. Jest to liczba posiadająca tę własność, do której się odnosi definicja siedemnasta. Poza tym są, oczywiście, przypadki, gdy liczba przyporządkowana definicji nie ma własności określonej przez definicję; takie liczby nazwijmy Richardowskimi, a o pozostałych (takich jak 17 w powyższym przykładzie) będzie się mówić, że nie są Richardowskie. Określenie liczby Richardowskiej określa pewną własność liczb, znajdzie się więc również na owej liście definicji wraz z jakimś przyporządkowanym mu numerem. Czy ów numer będzie wtedy liczbą Richardowską? – Oto pytanie prowadzące do antynomii. Jeśli jest to liczba Richardowska, to nie ma własności określonej przez daną definicję, a więc nie jest Richardowska. Ale jeśli nie jest Richardowska, to ma własność określoną przez definicję, jest zatem Richardowska".

Jak bardzo antynomia Richarda przypomina swą strukturą antynomię Russella można dostrzec, gdy zauważymy, że każda definicja występująca na wspomnianej liście pod pewną liczbą *k* wyznacza N_k – podzbiór zbioru liczb naturalnych, spełniających własność oznaczoną numerem *k*. Dla precyzji rozumowania, przyjmijmy założenie, które nie ma wpływu na paradoksalność argumentacji antynomii Richarda, a zgodnie z którym, jeśli dwie własności generują ten sam zbiór liczb, to są uznane za jedną własność. Własność taka

---

[92] Richard, [1905], s. 143–144.

[93] Marciszewski, *Antynomie w logice* [w:] Marciszewski, [1988], s. 20–21.

może wówczas wystąpić na liście tylko jeden raz. Możemy więc przyjąć, że każda liczba naturalna k jest jednoznacznie zdefiniowana przez zbiór N_k, co prowadzi do faktycznego utożsamienia liczby k ze zbiorem N_k: $k := N_k$. Liczba naturalna k jest Richardowska jeśli nie należy do zbioru N_k czyli, gdy $k \notin k$. Tymczasem, zbiór wszystkich liczb Richardowskich, jako że odpowiada własności bycia liczbą Richardowską również definiuje pewną liczbę naturalną k_0. Zatem, zbiór wszystkich liczb Richardowskich ma postać:

$$N_{k0} = \{k\colon k \notin N_k\},$$

czyli

$$k_0 = \{k\colon k \notin k\}.$$

W szczególności,

$$k_0 \in N_{k0} \quad \text{wtw} \quad k_0 \notin N_{k0},$$

czyli

$$k_0 \in k_0 \quad \text{wtw} \quad k_0 \notin k_0.$$

Każda liczba Richardowska jest więc zbiorem liczb do których ona sama nie należy, podczas gdy liczba Richardowska wszystkich liczb Richardowskich, będąc liczbą Richardowską musi i zarazem nie może do siebie należeć. Jak widać, podobieństwo do antynomii Russella jest uderzające. Nie istnieje, ani zbiór wszystkich zbiorów nie będących swoimi elementami, ani liczba Richardowska wszystkich liczb Richardowskich.

Nic więc dziwnego, że na gruncie teorii mnogości rozwiązanie antynomii Richarda jest takie jak rozwiązanie antynomii Russella. W rozgałęzionej teorii typów mamy do czynienia z podziałem na formuły predykatywne i niepredykatywne[94]. Postulat ograniczający definicje jedynie do formuł predykatywnych ma na celu realizację idei Poincarégo, uniknięcia błędnego koła w definiowaniu, w szczególności więc zabezpiecza on teorię mnogości przed paradoksem Richarda. Warto podkreślić, że problem definiowalności liczby N nie zależy od nieskończoności zbioru E, lecz może być rozumiany jako kwestia wyłącznie samoodniesienia się formuły definicyjnej. Aby to pokazać, wystarczy nieco zmodyfikować konstrukcję Richarda. Załóżmy więc, że definicja liczby N dana francuskim odpowiednikiem permutacji G jest permutacją z powtórzeniami złożoną z dokładnie 281 elementów. Niech teraz lista wszystkich n-elementowych permutacji zbioru F, złożonego z dwudziestu sześciu liter alfąbetu francuskiego zostanie ograniczona do tych n-elementowych permutacji, dla których liczba naturalna n spełnia warunek: $2 \le n \le 300$. Wówczas, permutacja będąca definicją liczby N należy do nowej, tym razem skończonej listy, a mimo to liczba N, z samej swojej definicji, nie może należeć do zbioru E.

[94] Patrz paragraf 1.5.3.1. *Rozwiązania wykorzystujące teorię typów* w rozdziale poświęconym paradoksom wynikającym z niedoskonałości naszej intuicji.

Antynomia Richarda pozostaje więc aktualna. Innym dowodem na to, iż antynomia Richarda jest niezależna od nieskończoności zbioru *E* jest istnienie antynomii Berry'ego, słusznie uważanej za pewną odmianę antynomii Richarda.

Na gruncie aksjomatycznych teorii mnogości sposób uniknięcia antynomii Richarda jest taki jak w przypadku antynomii Russella. Systemy Leśniewskiego dotyczą zaś innych, niedystrybutywnych zbiorów, w których problem Richarda, tak jak antynomia Russella, po prostu nie istnieje. Jednak dalsze rozważania nad matematycznymi rozwiązaniami antynomii Richarda zakończyła interwencja włoskiego matematyka i logika Giuseppe Peano (1858–1932), który w 1906 roku autorytatywnie stwierdził[95]: „Przykład Richarda nie należy do matematyki lecz do lingwistyki; fundamentalny dla definicji przekątniowej liczby *N* element nie może być zdefiniowany w precyzyjny sposób, czyli zgodnie z regułami matematyki".

Jednak, bez względu na nasze poglądy w sprawie matematycznego lub niematematycznego charakteru antynomii Richarda należy przyjąć, że jak długo będą akceptowane uznane dziś sposoby uniknięcia antynomii Russella, tak długo można uważać antynomię Richarda za rozbrojoną na gruncie matematyki. Pozostaje jednak kwestia językowego charakteru tejże antynomii. Niezależnie od przyjętych matematycznych teorii istnieje przecież problem wyrażalności w języku naturalnym problematycznych kwestii, na które wskazał np. Richard. Może się wydawać, że podział języka naturalnego na odseparowane od siebie rzędy rozwiązuje ten problem. Istotnie, definicja liczby należącej do *E* jest zdaniem rzędu o jeden wyższego, niż rząd definicji tworzących listę Richarda – definicja wykorzystująca zbiór definicji liczb tworzących zbiór *E*, powinna być zdaniem z języka o jeden rząd wyższego, niż ten do którego należą definicje liczb ze zbioru *E*. Niestety, rozwiązanie to może być nieprzekonywające, a to z tego powodu, że każda definicja jeśli definiuje wyrażenie z języka przedmiotowego, powinna należeć do jego metajęzyka. Wszystkie definicje listy Richarda powinny więc mieć ten sam status, co definicja liczby *N* – należą one bowiem do tego samego rzędu języka naturalnego. Wydaje się więc, że paradoks Richarda powinien być niezależny od wyróżnienia w języku naturalnym ściśle odseparowanych rzędów[96].

Językowa strona antynomii Richarda każe się zastanowić nad tym, czy należy za wszelką cenę rozwiązywać wszelkie paradoksy semantyczne. Przecież, zupełnie naturalnym i raczej oczywistym naszym przekonaniem jest to, iż w języku naturalnym powinniśmy móc wyrazić wszelkie sądy, nawet te niedorzeczne, sprzeczne, czy antynomialne. Rozwiązywanie „na siłę" paradoksów semantycznych musi więc bazować na przekonaniu przeciwnym, zgodnie

---

[95] Patrz wstęp van Heijenoorta do Richard, [1905], s. 142.

[96] Oczywiście, ścisłe, formalne trzymanie się zasady Tarskiego odseparowania od siebie rzędów języków skutecznie zabezpiecza nas przez antynomią Richarda.

z którym nasz język naturalny jest tak logiczny i tak doskonały, że precyzyjne jego stosowanie powinno uniemożliwiać wysławianie antynomialnych konstrukcji. Oczywiście, nasze stanowisko, iż język naturalny nie tylko powinien móc, ale, że może służyć wysławianiu wszelkiego rodzaju niezwykłych, w szczególności więc antynomialnych konstrukcji myślowych, nie oznacza, że powinny zostać odrzucone wszelkie próby ich logicznego rozwiązania. Niektóre jednak dylematy wydają się w tak oczywisty sposób paradoksalnymi i spodziewanymi trudnościami, że ich istnienie jest dowodem na niezwykłe, wykraczające poza wszelkie logiczne ramy, możliwości języka naturalnego. Wydaje się, że antynomia Richarda należy do tych właśnie problemów.

Za uproszczoną wersję antynomii Richarda uchodzi, opublikowana przez Russella[97] w 1906 roku, antynomia Berry'ego. Prawdopodobnie, paradoksalna samozwrotność w tej antynomii jest uproszczona do granic możliwości. Antynomię Berry'ego przypomnimy w sformułowaniu Stanisława Krajewskiego[98].

Antynomia Berry'ego
„[...] niech liczba Berry'ego będzie najmniejszą liczbą naturalną, która nie może być zdefiniowana za pomocą zdania złożonego z co najwyżej trzydziestu polskich słów. Definicja jest poprawna, bo tylko skończenie wiele liczb można zdefiniować za pomocą takich zdań. Tak więc liczba Berry'ego jest i nie jest definiowalna za pomocą zdania liczącego mniej niż trzydzieści słów".

Komentując antynomię Richarda stwierdziliśmy jej niezależność od nieskończoności zbioru *E*. Antynomia Berry'ego jest najlepszym dowodem tej tezy. Lista tworząca zbiór *E* została tu zredukowana do zbioru jednoelementowego. Oczywiście, wszystkie uwagi, zarówno te matematycznej, jak i językowej natury należałoby powtórzyć w przypadku analizy antynomii Berry'ego. Dlatego też, przejdziemy obecnie do ostatniej, rozważanej przez nas, antynomii semantycznej.

3.3.3. ANTYNOMIA GRELLINGA

We wspólnym artykule Kurta Grellinga (1886–1942) i Leonarda Nelsona (1882–1927) z roku 1908 znajdujemy prezentację kolejnego paradoksu, inspirowanego antynomią Russella[99]. Dylemat ten jest dzisiaj znany jako antynomia Grellinga. Tymczasem, jak zauważa Borkowski, antynomia ta jest w istocie

---

[97] Russell, [1906].
[98] Krajewski, *Antynomie*, [w:] Marciszewski, [1987], s. 177–178.
[99] Grelling i Nelson, [1908].

starym, bo odkrytym już w średniowieczu dylematem wyrazu, który siebie nie nazywa. Łacińską, oryginalną nazwą tej antynomii jest *vox non appellans se*[100]:

Antynomia Grellinga (*vox non appellans se*)
Orzeczniki podzielmy na dwie grupy. Pierwszą stanowić będą, wszystkie te, które wyrażają własność, którą same posiadają. Do grupy tej należeć więc będą takie jak „polski", „English", „wielosylabowy". Nazwijmy je autosemantycznymi. Drugą grupę stanowić będą wszystkie te orzeczniki, które wyrażają własność, której same nie posiadają. Przykładem takich orzeczników może być: „niemiecki", „Polish", „jednosylabowy". Orzeczniki tworzące drugą grupę nazwijmy heterosemantycznymi. Powstaje problem, do której grupy zaliczyć orzecznik „heterosemantyczny". Jeśli bowiem jest on heterosemantyczny, to znaczy, że wyraża cechę, której sam nie posiada, lecz właśnie orzecznik ten wyraża cechę polegającą na tym, że nie posiada się cechy, którą się wyraża. Wynika z tego, że orzecznik „heterosemantyczny" jest autosemantyczny. Załóżmy więc, że „heterosemantyczny" jest autosemantyczny. Oznacza to, że posiada cechę, o której sam orzeka. Lecz cechą tą jest nieposiadanie cechy, o której się orzeka. Zatem orzecznik „heterosemantyczny" jest heterosemantyczny. Oba wnioskowania implikują zatem antynomialną równoważność: orzecznik „heterosemantyczny" jest heterosemantyczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest autosemantyczny.

Quine w swojej książce *Quiddities. An Intermittenly Philosophical Dictionary* podaje takie sformułowanie antynomii Grellinga, które wydaje się bliższe średniowiecznemu oryginałowi, a ponadto ujawnia jej bliski związek z para doksem golibrody[101]:

„Żaden przymiotnik nie denotuje wszystkich i tylko tych przymiotników, które nie denotują siebie samych."

Tak jak w przypadku antynomii kłamcy, Richarda i Berry'ego można próbować rozwiązać antynomię Grellinga w jakiś raczej sztuczny sposób, nakładając na język naturalny pewne obce temu językowi ograniczenia. Dotyczy to zwłaszcza antynomii omówionych w paragrafie 3.3, gdyż, jak to pokazaliśmy w paragrafie 3.2.1, antynomię kłamcy można rozwiązać w całkiem naturalny sposób, uwzględniając to, co jest do tego stopnia naturalne (jak np. oddychanie), że często bywa nie uświadamiane. Tym oczywistym wręcz czynnikiem jest uważanie zdań, które wypowiadamy za zdania prawdziwe, co w przypadku zdania kłamcy wyraża się w prostej i równie oczywistej zasadzie tożsamości: zdanie p mówi, że p; w naszym zapisie formalnym, $p : p$. Niestety, trzy pozostałe, omówione przez nas, antynomie semantyczne wykazują pewną

[100] Borkowski, [1991], s. 355.
[101] Quine, [1987], s. 133.

odporność na tego typu rozwiązania i wydaje się, że istota tych dylematów wynika z prostego faktu polegającego na tym, że w języku naturalnym możemy tworzyć przeróżne konstrukcje znaczeniowe, które w szczególnie ciekawych przypadkach prowadzą do absurdu, czy wręcz antynomii. Możliwości języka naturalnego są pod tym względem nieograniczone i naprawdę trudno jest być szczerze zdziwionym faktem, że na pozór logiczne konstrukcje języka prowadzą do jawnie nielogicznych wniosków. Dla przykładu, można przecież tak „udoskonalić" antynomię kłamcy, aby nawet zaproponowane przez nas rozwiązanie było bezsilne wobec nowej wersji problemu. Można przyjąć, że zdaniem L jest „To zdanie jest nieprawdziwe", zaś zdaniem $\neg L$, zdanie „To zdanie jest prawdziwe". Mamy wówczas, $L : \neg L$ oraz $\neg L : L$. Łatwo zauważyć, że przedstawiony przez nas rachunek zdaniowy nie jest w stanie rozwiązać dylematu stworzonego przez obie te formuły. Widać więc, że w języku możemy tworzyć przedziwne konstrukcje, co więcej, prawda ta nie jest niczym zaskakującym. Z tego punktu widzenia, wszelkie sztuczne próby rozwiązania antynomii Richarda, Berry'ego i Grellinga wydają się bezzasadne, gdyż w języku, którym się posługujemy powinniśmy być w stanie stwarzać różne problemy, również te, typowe dla trzech wspomnianych antynomii.

Istnienie antynomii semantycznych jest więc zjawiskiem zupełnie naturalnym, które powinno cechować każdy odpowiednio bogaty język, czyli taki, który zawiera terminy semantyczne dotyczące wyrażeń tego systemu lub też terminy pozwalające na zdefiniowanie takich terminów i w którym obowiązują prawa i reguły klasycznego rachunku logicznego. Natomiast zdziwienie, wywoływane przez tego typu antynomie powinno być spowodowane nie tym, że w ogóle one istnieją, lecz raczej niezwykłością ich konstrukcji. Z takiego punktu widzenia, celem analizy logicznej wielu paradoksów semantycznych powinno być nie ich rozwiązanie, lecz poznanie faktycznych możliwości języka. To właśnie chęć zgłębienia, najczęściej ukrytych przed nami, własności naszego języka powinna być impulsem do przeprowadzania badań nad paradoksami semantycznymi. Osiągnięcie tego właśnie celu wydaje się daleko bardziej ważne i cenne, niż jakieś kompletnie sztuczne i wydumane pseudo-rozwiązanie któregoś z konkretnych paradoksów semantycznych.

3.4. PARADOKS NIEOCZEKIWANEGO SPRAWDZIANU (KATA, PRZEWIDYWANIA), czyli samoodnoszące się rozumowanie

Dość dobrze znany paradoks nieoczekiwanego sprawdzianu przypomnijmy w wersji jak najbliższej tej, którą przedstawił Sainsbury[102].

---

[102] Sainsbury, [1991], s. 93.

Paradoks nieoczekiwanego sprawdzianu
Pewna nauczycielka zapowiedziała klasie, że w ciągu następnego tygodnia (od poniedziałku do piątku) przeprowadzi jeden sprawdzian. Jednak dzień sprawdzianu zostanie przez nią wybrany tak, aby klasa do ostatniej chwili nie mogła domyślić się kiedy sprawdzian będzie miał miejsce.

Jak się tego należało spodziewać, problem z przewidzeniem dnia sprawdzianu nie jest prosty. Można założyć, że klasa dojdzie do wniosku, iż sprawdzian nie może się odbyć w piątek. Jeśli bowiem nauczycielka chciałaby przeprowadzić ten jeden jedyny w danym tygodniu sprawdzian właśnie w piątek, to już w czwartek po jej lekcji klasa wiedziałaby, że sprawdzian musi odbyć się w piątek. Nie byłby on wówczas żadną niespodzianką. Zatem ostatnim dniem na przeprowadzenie sprawdzianu jest czwartek. Lecz skoro klasa już wie, że najpóźniej sprawdzian odbędzie się w czwartek, to po ostatniej lekcji w środę klasa będzie wiedziała, że sprawdzian musi odbyć się w czwartek. Zatem, gdyby sprawdzian miał się odbyć w czwartek, to fakt ten nie byłby żadną niespodzianką dla klasy. Zatem ostatnim dniem na przeprowadzenie sprawdzianu musi być środa. Oczywiście, rozumując analogicznie do przypadku wykluczającego piątek i czwartek, można wykluczyć także środę oraz pozostały już tylko wtorek i poniedziałek. Wniosek jaki wynika z tego rozumowania jest zaskakujący: nauczycielka nie może przeprowadzić sprawdzianu żadnego dnia począwszy od poniedziałku, a skończywszy na piątku. W jawny sposób wniosek ten kłóci się z naszymi, wydawać by się mogło najbardziej podstawowymi intuicjami, że nauczycielka może zaskoczyć klasę przeprowadzając sprawdzian na przykład we wtorek.

Sainsbury proponuje odrzucić założenie, że klasa może zachowywać się nieracjonalnie, czyli oczekiwać czegoś czego nie powinna się spodziewać oraz nie oczekiwać czegoś czego powinna się spodziewać. Jednak Sainsbury wskazuje na to, iż klasa po przeprowadzeniu powyższego rozumowania może dojść do wniosku, że nauczycielka złożyła obietnicę której nie zamierza dotrzymać, chociażby dlatego, że nie sposób jej dotrzymać. Sainsbury podkreśla, iż prawdziwość obietnicy złożonej przez nauczycielkę prowadzi natychmiast do sprzeczności. W tym celu proponuje wprowadzić prostą symbolikę ułatwiającą zapis rozumowania wychodzącego od obietnicy nauczycielki jako założenia. Sainsbury proponuje także zmniejszyć liczbę dni w które może zostać przeprowadzony sprawdzian z pięciu do dwóch, słusznie zauważając, że rozumowanie to nie zależy od ilości dni. Rozważmy więc następujące skróty:

M – „sprawdzian ma miejsce w poniedziałek";
T – „sprawdzian ma miejsce we wtorek";
$K_M(...)$ – „klasa w poniedziałek rano wie, że ...";
$K_T(...)$ – „klasa we wtorek rano wie, że ...".

Wówczas, symboliczny zapis obietnicy złożonej przez nauczycielkę ma postać:

*A*1. albo [*M* & *nie–*$K_M(M)$] albo [*T* & *nie–*$K_T(T)$].

Zrekonstruowane przez Sainsbury'ego paradoksalne rozumowanie składa się wówczas z następujących kroków[103]:

Formalizacja Sainsbury'ego paradoksalnego rozumowania

1. Załóżmy, że *A*1	
2. Załóżmy, że *nie–M*	
3. K_T(*nie–M*)	2, pamięć klasy
4. jeśli *nie–M*, to *T*	*A*1
5. $K_T(T)$	3, 4
6. jeśli $K_T(T)$ & *nie–M*, to *nie–A*1	*A*1
7. *Nie–A*1	2, 5, 6
8. *M*	1, 2, 3–7
9. $K_M(M)$	8, *A*1
10. jeśli $K_M(M)$ & *nie-T*, to *nie–A*1	*A*1
11. *Nie–A*1	8, 9, 10
12. *Nie–A*1	1, 2–11

i prowadzi do odrzucenia złożonej przez nauczycielkę obietnicy, czyli zdania *A*1. Procedura odrzucenia ma postać *reductio ad absurdum,* pokazując, że założenie obietnicy prowadzi do sprzeczności. W tym przypadku mamy do czynienia z paradoksem, gdyż mimo iż wywnioskowaliśmy „*nie-A*1", intuicyjnie czujemy że *A*1 jest zdaniem prawdziwym.

Zdaniem Sainsbury'ego, powyższa konstrukcja dowodziłaby fałszywości obietnicy jaką nauczycielka dała klasie, gdyby nie to, że uzasadnienie kroku piątego jest wątpliwe. Aby inferencja była poprawna, rozumowanie „Jeśli *A*1 jest prawdziwe, to sprawdzian musi się odbyć we wtorek, skoro nie odbył się w poniedziałek; zatem jeśli wiemy, że sprawdzian nie odbył się w poniedziałek, to powinniśmy wiedzieć, że powinien odbyć się we wtorek" musi zostać wzmocnione założeniem, że „my wiemy, że sprawdzian musi się odbyć we wtorek, jeśli nie odbędzie się w poniedziałek"[104]. W ten oto sposób Sainsbury zbliżył się do pierwszego z dwóch zaproponowanych przez siebie rozwiązań paradoksu[105].

103 Sainsbury, [1991], s. 97–98.
104 Sainsbury, [1991], s. 99.
105 Sainsbury, [1991], s. 99.

Pierwsze rozwiązanie Sainsbury'ego

1. Załóżmy, że *K*(*A*1)	
2. Załóżmy, że *nie–M*	
3. K_T(*nie–M*)	2, pamięć klasy
4. jeśli *nie–M*, to *T*	*A*1
5. *K*(jeśli *nie–M*, to *T*)	1
6. K_T(*T*)	3, 5
7. jeśli K_T(*T*), to *nie–A*1	*A*1
8. jeśli *nie–A*1, to *nie–K*(*A*1)	wiemy tylko to co jest prawdą
9. jeśli K_T(*T*), to *nie–K*(*A*1)	7, 8
10. *M*	1, 2, 3–9
11. K_M(*M*)	10
12. jeśli K_M(*M*) & *M*, to *nie–A*1	*A*1
13. *Nie–A*1	10, 11, 12
14. jeśli *nie–A*1, to *nie–K*(*A*1)	wiemy tylko to co jest prawdą
15. *Nie–K*(*A*1)	13, 14
16. *Nie–K*(*A*1)	1, 15

Sam autor powyższej konstrukcji ma duże wątpliwości co do wartości tego rozwiązania.

Po pierwsze zauważa, że, aby rozumowanie było ścisłe, zdanie 11 winno być rozumiane nie jako wynikające ze zdania „jeśli *K*(*A*1), to *M*", lecz właśnie ze zdania „*K*[jeśli *K*(*A*1), to *M*]". Lecz wówczas, potrzebna jest przesłanka „*K*[*K*(*A*1)]", zamiast „*K*(*A*1)". Tak więc, powyższe rozumowanie wykorzystuje entymematyczną przesłankę: „jeśli *K*(φ), to *K*[*K*(φ)]", która zdaniem Sainsbury'ego ma niepewną wartość[106].

Drugim problemem jaki dostrzega Sainsbury jest to, iż konkluzja do jakiej prowadzi zaproponowane rozwiązanie paradoksu wydaje się być również paradoksalna. Przecież jeśli nauczycielka jest osobą godną zaufania, a tak należy przypuszczać, aby w ogóle paradoks miał sens, to klasa powinna wierzyć w jej słowa i w związku z tym, zdanie „*K*(*A*1)" winno być oczywistą przesłanką rozumowania. Trudno jest kwestionować to zdanie, chociaż dysponując jego zaprzeczeniem „*nie–K*(*A*1)" bez trudu rozwiązujemy paradoks nieoczekiwanego sprawdzianu. Skoro nie jest prawdą, że uczniowie wiedzą, że *A*1, nauczycielka ma wiele możliwości, aby klasę zaskoczyć.

Wydawać by się więc mogło, że przedstawiona konstrukcja jest rozwiązaniem paradoksu. Jednak sam Sainsbury dostrzega trzeci problem: skoro *A*1 nie może być znane, łatwo jest uznać, że *A*1 jest prawdziwe. Wystarczy bowiem przyjąć, że

---

[106] Sainsbury, [1991], s. 99.

nauczycielka jest osobą wiarygodną i zdecydowaną, aby mieć podstawę do uznania prawdziwości $A1$. A skoro tak, paradoks powraca.

Oznacza to, że sam Sainsbury słusznie odrzucił pierwszą konstrukcję i jako rozwiązanie paradoksu i przedstawił drugą, bazującą na innej formalizacji obietnicy jaką nauczycielka dała klasie. Tak więc zdanie $A1$ zostało zastąpione przez $A2$:

$A2$. albo [M & *nie*–K_M(jeśli $A2$, to M)] albo [T & *nie*–K_T(jeśli $A2$, to T)].

Jak widać, definicja obietnicy odwołuje się do niej samej, a zatem $A2$ jest oświadczeniem samozwrotnym. Rozumowanie wykorzystujące tę definicję jest następujące[107]:

Drugie rozwiązanie Sainsbury'ego

1. Załóżmy, że $A2$	
2. Załóżmy, że *nie*–M	
3. K_T(*nie*–M)	2, pamięć klasy
4. K_T(jeśli *nie*–M, to jeśli $A2$, to T)	klasa rozumie $A2$
5. K_T(jeśli $A2$, to T)	3, 4
6. *Nie*–$A2$	$A2$, 2, 5
7. M	1, 2–6
8. jeśli $A2$, to M	1–7
9. K_M(jeśli $A2$, to M)	wiemy to co jest dowiedzione
10. jeśli K_M(jeśli $A2$, to M), to jeśli $A2$, to *nie*–M	$A2$
11. jeśli $A2$, to *nie*–M	9, 10
12. *Nie*–$A2$	8, 11

Wartość tego rozwiązania polega zdaniem Sainsbury'ego na tym, iż tym razem intuicja podpowiadająca nam, że zdanie $A2$ jest prawdziwe nie jest tak mocna jak w przypadku $A1$. Ze stwierdzeniem tym można by się nawet zgodzić. Znacznie trudniej jest zaakceptować zdanie $A2$, jako formalizację obietnicy złożonej przez nauczycielkę swoim uczniom. Po pierwsze, w samej obietnicy nie słychać odwołania się do niej samej. Trudno jest więc się zgodzić z tym, że obietnica w swej oryginalnej postaci jest zdaniem samozwrotnym. Po drugie, jak sam Sainsbury to zauważył, istotą tego paradoksu jest to, iż wyprowadzony racjonalnie wniosek jest sprzeczny z naszymi oczekiwaniami bazującymi na naszej intuicji dotyczącej złożonej

[107] Sainsbury, [1991], s. 100–101.

przez nauczycielkę obietnicy. Łatwo więc dostrzec, że w drugim rozwiązaniu Sainsbury'ego jest błąd, albo wręcz celowo zastosowany trik metodologicznej natury. Polega on na tym, że zdecydowanie intuicyjne zdanie formalizuje się tak, aby pozbawić to właśnie zdanie jego intuicyjności. Trudno jest więc uznać podobną konstrukcję za faktyczne rozwiązanie paradoksu nieoczekiwanego sprawdzianu.

Dalej przedstawimy propozycję niezwykle prostego rozwiązania tego paradoksu, które ani nie kwestionuje ścisłości i poprawności rozumowania prowadzącego do wniosku, że sprawdzian nie może się odbyć z poszanowaniem obietnicy danej przez nauczycielkę, ani nie przeczy intuicyjności przekonania, że przeprowadzenie sprawdzianu na przykład w środę byłoby dla uczniów kompletnym zaskoczeniem. Rozwiązanie to zaprezentujemy dla innej, równie dobrze znanej wersji tego samego problemu.

Przedstawmy więc paradoks kata w postaci zbliżonej do anegdoty przedstawionej przez Szymanka[108].

Paradoks kata

„Sąd skazał oskarżonego na karę śmierci i nakazał, aby karę tę wykonano w przyszłym tygodniu między poniedziałkiem a sobotą włącznie. Sąd postawił jednak warunek, aby wyrok wykonano w takim dniu, aby skazaniec w dniu poprzednim nie mógł się domyślić, iż w dniu następnym zostanie stracony. Warunek wykonania wyroku został podany do wiadomości skazańca. Skazaniec analizując swoją sytuację doszedł do wniosku, że nie może zostać stracony w sobotę, ponieważ wówczas musiałby żyć w piątek. Lecz wiedząc, że musi zostać stracony w ciągu tygodnia, czyli najpóźniej do soboty w piątek wiedziałby, że nazajutrz zginie. Zatem skazaniec doszedł do wniosku, że nie może zostać stracony w sobotę, a zatem ostatnim dniem egzekucji może być tylko piątek. Wiedząc jednak, że piątek jest ostatnim dniem na wykonanie wyroku, skazaniec zrozumiał, że nie może zostać stracony również w piątek. Musiałby bowiem żyć w czwartek, lecz wtedy wiedziałby że zginie nazajutrz skoro piątek jest ostatnim dniem na wykonanie wyroku. Tak więc ostatnim dniem na wykonanie wyroku nie jest ani sobota ani piątek lecz czwartek. Powtarzając to rozumowanie czterokrotnie w podobny sposób odrzucił możliwość egzekucji w czwartek, w środę, we wtorek i w poniedziałek. Z prawdziwą radością skazaniec stwierdził, że wyrok orzeczony przez sąd jest niewykonalny. Tym co mąciło jego radość była świadomość tego, iż gdyby kat przyszedł po niego np. we wtorek skazaniec nie mógłby stwierdzić, że w poniedziałek o tym wiedział".

Tak, jak w przypadku paradoksu niespodziewanego sprawdzianu, paradoksalność zaprezentowanego rozumowania polega na tym, iż z jednej strony

[108] Szymanek [2001].

w naszym najgłębszym przekonaniu można wykonać wyrok tak, aby skazaniec nie wiedział poprzedniego dnia, że nazajutrz zginie, z drugiej zaś, rozumowanie to wydaje się nie tylko poprawne ale wręcz oczywiste. Wydaje się jednak, iż w każdej wersji anegdoty o kacie i skazańcu popełniany jest jeden i ten sam błąd niedostatecznie ścisłego rozumowania.

Zastanówmy się bowiem, co naprawdę stoi na przeszkodzie wykonania wyroku w sobotę. Wcześniej powiedzieliśmy, że aby skazaniec został stracony w sobotę w piątek musiałby żyć, a to oznacza że wiedziałby, iż do wykonania wyroku pozostała już tylko sobota. To jednak jest nieprawdą. Przecież zwrot „musiałby żyć w piątek" jest wyjątkowo nieprecyzyjny i w związku z tym wcale nie musi implikować tego, że skazaniec będzie już wiedział, że do wykonania wyroku pozostała tylko sobota. Innymi słowy, to że skazaniec będzie żył w piątek nie oznacza, że wie, iż zostanie stracony w sobotę. Więzień będzie wiedział w piątek że egzekucja odbędzie się w sobotę tylko wówczas, gdy będzie miał pewność, że nie zostanie stracony w piątek. Zatem, istotnym elementem w tej łamigłówce są godziny wykonywalności egzekucji.

Przyjmijmy, że egzekucje mogą być wykonywane wyłącznie do godziny 17. każdego dnia od poniedziałku do soboty włącznie. Dopiero przy tak precyzyjnym założeniu widać, że na pewno w piątek po godzinie 17. skazaniec będzie wiedział, że zostanie stracony w sobotę. Mimo, iż będzie żył w piątek, aż do samej godziny 17. nie może mieć pewności, że nie zostanie stracony w piątek. Tym samym, do godziny 17. w piątek skazaniec nie może powiedzieć, że wie iż na egzekucję pozostała już tylko sobota. Oznacza to, że aby skazaniec nie wiedział, że zginie nazajutrz czyli w sobotę, nie może on dożyć do godziny 17. w piątek. Ostatnimi godzinami wykonania wyroku są więc wszystkie te piątkowe, począwszy od pierwszej dopuszczalnej, aż do godziny 17. Skoro tak, skazaniec nie może dożyć również do godziny 17. w czwartek. Jeśli bowiem dożyłby do tej godziny wiedziałby, że musi zginąć nazajutrz, bo przecież piątkowe godziny do 17. są ostatnimi na wykonanie wyroku. To oznacza, że nie piątek a czwartek do 17. jest ostatnim czasem, w którym można wykonać wyrok. Z tego faktu wynika, że skazaniec nie może dożyć także środy. Jak widać, kilkakrotne powtórzenie tego samego wnioskowania prowadzi do stwierdzenia, że wyrok nie jest wykonalny.

Jasno widać, że ta precyzyjniejsza wersja rozumowania nie uwalnia od paradoksu. Umożliwia ona jednak dalszą ściślejszą jego analizę.

Rozważmy ponownie cały problem zakładając tym razem, że wyrok może zostać wykonany w dowolnym czasie każdego dnia od poniedziałku do soboty włącznie. Tym samym, godzinę 17. zastępujemy godziną 24. Przyjmijmy, że skazaniec dożył piątku. Wówczas, przez cały piątek aż do północy będzie wiedział, że może zostać stracony w piątek lub w sobotę. Pewność, że zginie w sobotę będzie miał dopiero po godzinie 24., a więc ... w sobotę. Nie istnieje zatem taka piątkowa godzina, w której wiedziałby, że na wykonanie wyroku pozostała już tylko sobota. Oznacza to, że przez cały piątek będzie wiedział, że zostanie stracony w piątek lub w sobotę. To że na pewno zginie w sobotę będzie wiedział dopiero w sobotę. Przypomnijmy, że warunek wykonania wyroku wykluczał jedynie taką sytuację, w której skazaniec na dzień przed egzekucją będzie wiedział kiedy zginie. Nie jest jednak zabronione, aby skazaniec danego dnia dowiedział się, że tego właśnie dnia zostanie stracony. Oznacza to, że wyrok może zostać wykonany w sobotę, a skoro tak, to również w każdy wcześniejszy dzień od poniedziałku włącznie.

Łatwo zauważyć, że począwszy od poniedziałku wraz z upływem czasu jego wiedza będzie coraz bardziej ścisła. W poniedziałek będzie wiedział tylko tyle, że zostanie stracony w poniedziałek lub we wtorek lub w środę lub w czwartek lub w piątek lub w sobotę. Natomiast w piątek będzie wiedział więcej a mianowicie, że zginie w piątek lub w sobotę. Jednak pewność kiedy umrze będzie miał dopiero w sobotę, o ile do tego czasu nadal będzie żył. Jednak to że musi umrzeć w sobotę będzie wiedział dopiero w sobotę. Tak więc, między poniedziałkiem a sobotą nie ma ani jednego dnia, w którym egzekucja nie mogłaby być wykonana.

Jak się okazuje, można pokusić się o jeszcze większą precyzję w powyższej analizie. Załóżmy bowiem, że każdego dnia od poniedziałku do czwartku włącznie oraz w sobotę egzekucje mogą być wykonywane w dowolnym przedziale czasu (niekoniecznie do 24.), za to w piątek egzekucje mogą być wykonywane aż do godziny 24. Tak więc na przykład, w poniedziałek, we wtorek i w sobotę wyrok może być wykonany w godzinach 11.00–17.30, w środę w godzinach 12.00–13.30, w czwartek w godzinach 15.00–19.00, a i tak wszystko rozstrzyga się dzięki piątkowi, bowiem tego dnia egzekucje mogą być wykonywane aż do północy. Oczywiście dolna granica czasu przeznaczonego na egzekucje w piątek jest teoretycznie dowolna, wszystko zależy bowiem od górnej granicy. Wystarczy zatem, aby w piątek wyroki mogły być wykonywane między 23.55 a 24.00 a sobota może być ostatnim dniem na wykonanie wyroku przy jednoczesnym spełnieniu warunku postawionego przez sąd. Ponieważ sobota może być dniem wykonania egzekucji, wyrok może zostać wykonany także w każdy dzień między poniedziałkiem a sobotą włącznie. Istotnie, skoro już w poniedziałek skazaniec wie, że może zginąć nawet w sobotę, żadnego dnia poza sobotą nie może mieć on pewności kiedy zostanie stracony. Jednak sobota nigdy nie będzie dniem poprzedzającym egzekucję. Ona może być jedynie dniem egzekucji, a zatem warunek postawiony przez sąd jest spełniony.

Rozważmy teraz przypadek polegający na tym, że czwartek jest dniem, w którym egzekucja może być wykonana aż do godziny 24.00, zaś w piątek wykonanie wyroku może mieć miejsce jedynie do godziny *A* wcześniejszej niż 24.00. Znane już rozumowanie dowodzi, że aby spełnić warunek sądu należy skazańca stracić przed sobotą. Ostatnim dniem na wykonanie wyroku jest więc piątek. Istotnie, sobota jest wykluczona, ponieważ skazaniec musiałby pozostać przy życiu w piątek po godzinie A. Lecz od tej właśnie chwili wiedziałby, że musi zginąć nazajutrz, a to przeczyłoby warunkowi postawionemu przez sąd. Załóżmy teraz, że skazaniec dożył czwartku. Zastanawiając się w czwartek nad swoim losem wie on, że może zostać stracony w czwartek lub w piątek. Pewność, że zginie w piątek będzie mógł mieć dopiero po 24. nocy z czwartku na piątek, czyli w piątek. Oznacza to, że piątek jest dniem, w którym wyrok może zostać wykonany. Tym samym, egzekucja może mieć miejsce także każdego dnia poprzedzającego piątek. Dla ścisłości podkreślmy, że czas wykonania wyroku w sobotę nie ma najmniejszego znaczenia.

Rozumując analogicznie widzimy, że jeśli X jest ostatnim dniem tygodnia (nie licząc soboty), w którym wyrok może być wykonany do godziny 24.00, wyrok z zachowaniem warunku postawionego przez sąd może być wykonany w dniu następnym po X, a więc i w każdym dniu do X włącznie. Jeśli ostatnim dniem (nie licząc soboty), w którym wyrok może być wykonany do godziny 24.00 jest wtorek, wyrok może być wykonany do środy włącznie. Wreszcie na wykonanie egzekucji pozostają poniedziałek i wtorek, jeśli poniedziałek jest ostatnim dniem (nie licząc soboty), w którym wyrok może być wykonany do godziny 24.00.

Można więc sformułować warunek wykonalności wyroku wydanego przez sąd: *Jeśli między poniedziałkiem a piątkiem włącznie istnieje dzień, w którym egzekucja może być wykonana do godziny 24.00, wyrok wydany przez sąd może zostać wykonany wraz ze spełnieniem warunku, aby skazaniec w przeddzień nie wiedział, że nazajutrz zginie.*

Jak widać możliwość wykonania egzekucji do godziny 24.00 choćby jednego dnia między poniedziałkiem a piątkiem włącznie sprawia, że istnieją co najmniej dwa dni, w które orzeczony przez sąd wyrok może zostać wykonany.

Formalna analiza problemu

Przedstawiona poniżej formalizacja problemu wywołanego przez paradoks kata pokazuje jak bardzo nieścisłe jest tradycyjne rozumowanie przedstawiające ten paradoks.

Zaproponowane wyżej rozwiązanie sugeruje, iż paradoks kata stanowi przykład problemu, który pojawia się wówczas, gdy zaskakujący nas wniosek nie wynika z danego założenia, lecz z koniunkcji tego założenia i pewnego, nie uświadamianego sobie przez nas warunku. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

– zdanie p wyraża warunek wykonalności wyroku postawiony przez sąd;

– zdanie q wyraża warunek zakładający, że każdy dzień (od poniedziałku do soboty) kończy się pewnym niepustym przedziałem czasu, w którym wyrok nie może być wykonany;

– zdanie s wyraża wniosek stwierdzający niemożność wykonania wyroku.

Przeprowadzona wyżej analiza pokazuje, że wniosek s nie wynika z założenia p, lecz z koniunkcji warunków p i q. Prawdą jest więc implikacja:

$$(p \wedge q) \rightarrow s.$$

Ponieważ jednak tautologią klasycznego rachunku zdań nie jest formuła $((p \wedge q) \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s)$, lecz

$$(p \rightarrow s) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow s),$$

prawdziwość zdania o strukturze $(p \wedge q) \rightarrow s$ nie gwarantuje prawdziwości zdania, którego schematem jest $p \rightarrow s$. Jest więc możliwe, aby zdarzenie określone zdaniem o schemacie $(p \wedge q) \rightarrow s$ zaszło w rzeczywistości, podczas gdy zdarzenie określone zdaniem o schemacie $p \rightarrow s$ nie miało miejsca. Co więcej, fakt iż całe paradoksalne rozumowanie sprowadza się do schematu $p \rightarrow s$ sprawia, że chcąc je uściślić możemy zbiór przesłanek rozszerzyć zarówno o q, jak i o $\neg q$. W pierwszym przypadku wnioskiem jest s, w drugim zaś, jak to pokazała wcześniejsza analiza, $\neg s$. Za prawdziwą bowiem jesteśmy w stanie uznać nie tylko rozważaną już implikację $(p \wedge q) \rightarrow s$, lecz również:

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg s.$$

Naturalnie, tak jak w poprzednim przypadku, z prawdziwości zdania $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg s$ nie wynika prawdziwość zdania $p \rightarrow \neg s$.

Jak widać uwzględnienie czynników kluczowych dla rozwiązania problemu jest istotne do tego stopnia, że może prowadzić do sprzecznych wniosków. W pierwszym przypadku, zakładając prawdziwość zdania q wyrażającego warunek zakładający, że każdy dzień od poniedziałku do soboty kończy się pewnym niepustym przedziałem czasu, w którym wyrok nie może być wykonany dochodzimy do wniosku s, iż wyrok ten jest niewykonalny. Jeśli natomiast założymy prawdziwość zdania $\neg q$ dojdziemy do wniosku $\neg s$, który stwierdza wykonalność wyroku.

Co więcej samo stwierdzenie wykonalności wyroku nie jest jednoznaczne. Przy pewnych złożeniach może oznaczać, iż egzekucja jest wykonalna jedynie w poniedziałek i wtorek, przy innych, że w poniedziałek, wtorek i środę itd. aż do przypadku wykonalności wyroku każdego dnia od poniedziałku do soboty włącznie. Chcąc formalnie wyrazić ten fakt przyjmijmy następującą równoważność:

$$\neg q \leftrightarrow (r_1 \vee r_2 \vee r_3 \vee r_4 \vee r_5 \vee r_6),$$

gdzie zdanie r_i, dla $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ wyraża warunek zakładający, że i-ty dzień nie kończy się pewnym niepustym przedziałem czasu, w którym wyrok nie może być wykonany. Innymi słowy i-tego dnia wyrok może być wykonany do godziny 24. Oczywiście, pierwszy dzień to poniedziałek, drugi to wtorek itd. aż do soboty. Prawdziwość zdania $\neg q$ jest więc zagwarantowana prawdziwością przynajmniej jednego ze zdań r_i, dla $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jeśli więc nie chcemy za dodatkową przesłankę przyjąć zdania $\neg q$, to winniśmy założyć któreś ze zdań r_i, lub dowolną koniunkcję zdań r_i. Ta znacznie precyzyjniejsza formalizacja tłumaczy niejednoznaczność przypadku wykonalności wyroku. Zamiast zdania $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg s$ mamy bowiem klasę zdań:

$$
\begin{array}{rl}
(p \wedge r_i) \rightarrow \neg s, & \text{dla } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \\
(p \wedge r_i \wedge r_j) \rightarrow \neg s, & \text{dla } i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \\
(p \wedge r_i \wedge r_j \wedge r_k) \rightarrow \neg s, & \text{dla } i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \\
(p \wedge r_i \wedge r_j \wedge r_k \wedge r_l) \rightarrow \neg s, & \text{dla } i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \\
(p \wedge r_i \wedge r_j \wedge r_k \wedge r_l \wedge r_m) \rightarrow \neg s, & \text{dla } i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \\
(p \wedge r_1 \vee r_2 \vee r_3 \vee r_4 \vee r_5 \vee r_6) \rightarrow \neg s. &
\end{array}
$$

wyrażających mnogość przypadków w których wyrok może być wykonany nawet pod analizowanym w pracy warunkiem nałożonym przez sąd.

Niestety, przedstawiona wyżej analiza nie może zostać uznana za rozwiązanie paradoksu kata, bo chociaż trudność istotnie znika paradoks pozostaje. Wyobraźmy bowiem sobie, że wykonywanie egzekucji może odbywać się każdego dnia od poniedziałku do soboty włącznie tylko do godziny 17. Naturalnie, przeprowadzając dobrze znane rozumowanie dochodzimy do wniosku, że wyroku nie można wykonać tak, aby skazaniec nie domyślił się dnia poprzedniego, że nazajutrz zostanie stracony. Niestety, trudno oprzeć się wrażeniu, że paradoks nadal istnieje. Mamy bowiem nieodparte wrażenie, że można wyrok wykonać na przykład we wtorek lub w środę, a skazaniec nie będzie miał żadnej szansy aby zdarzenie to dzień wcześniej przewidzieć. W celu rozwiania jakichkolwiek wątpliwości, iż paradoks nadal istnieje zastąpmy tydzień rokiem. Przecież rozumowanie prowadzące od jednego dnia do innego, a wykluczające możliwość wykonania wyroku nie musi ograniczać się do sześciu kroków. Tych kroków może być dowolna skończona liczba. Jednocześnie trudno sobie wyobrazić, że wykonanie wyroku naprawdę nie jest możliwe również w ciągu całego roku. W oczywisty sposób, uwzględnienie czasu przeprowadzania egzekucji nie rozwiązuje niestety tego problemu. Mimo swej precyzji takie postawienie problemu jest wciąż niewystarczające.

Jaki więc problem stanowi prawdziwą istotę tego paradoksu?

Propozycja rozwiązania paradoksu[109]

Jak to zostało pokazane, nawet uściślenie tradycyjnej prezentacji paradoksu kata nie prowadzi do jego rozwiązania. Zamiast powtarzać to samo rozumowanie spróbujmy więc przeanalizować całą stworzoną przez orzeczenie sądu sytuację z punktu widzenia skazańca. Spróbujmy postawić problem w zupełnie nowy, właściwy dla skazanego człowieka sposób. Zmieniamy więc perspektywę myślenia i w związku z tym zmianie ulega również narracja:

„Oczywiście, w sobotę nie mogę być stracony bo musiałbym żyć w piątek po godzinie 17., ale wówczas począwszy od godziny 17. aż do północy wiedziałbym, że zostanę stracony w sobotę. Zatem ostatnim dniem wykonania wyroku jest piątek. Jednak w piątek też nie mogę zostać stracony, bo musiałbym żyć w czwartek po godzinie 17., lecz wówczas wiedząc, że nie mogę być stracony w sobotę wiedziałbym, że muszę zginąć w piątek, co przeczyłoby nałożonemu przez sąd warunkowi wykonania wyroku".

Kilkakrotnie powtarzając ten schemat rozumowania dochodzę w końcu do oczywistego dla mnie wniosku, że:

„Nie mogę zostać stracony ani w sobotę, ani w piątek, ani w czwartek, ani w środę, ani we wtorek, ani w poniedziałek. Oznacza to, że między poniedziałkiem a sobotą włącznie nie istnieje taki dzień, w którym egzekucja mogłaby być wykonana. Zatem wiem, że w ogóle nie mogę być stracony".

W tym miejscu, kończą się na ogół wnioskowania przedstawiane w znanych „rozwiązaniach" tego paradoksu. Tymczasem, ogromna radość skazańca będąca skutkiem tego wniosku jest chwilowa. Dochodzi tu bowiem do głosu świadomość, że jego wnioskowanie ma swój ciąg dalszy i nie może być w tym miejscu przerwane, gdyż:

„Skoro wiem, że nie mogę być stracony ani dzisiaj, ani jutro, ani pojutrze itd., to nie ma w tygodniu takiego dnia abym wiedział, że następnego dnia będę stracony. Przecież mocno wierzę w to, że orzeczenie sądu jest wiążące. Warunek postawiony przez sąd dotyczy jednak wyłącznie mojego stanu wiedzy. Tymczasem, wniosek do którego doszedłem nie tylko że nie ogranicza wykonania wyroku, lecz właśnie go umożliwia. Zatem można mnie stracić na przykład jutro. Mogę zostać stracony dowolnego dnia między poniedziałkiem a sobotą włącznie, gdyż wiem, że nie mogę być stracony żadnego dnia. Zatem, mogą mnie stracić dowolnego dnia, kiedy tylko zechcą".

---

[109] Łukowski [2003b].

Co gorsze, skazaniec utwierdza się w swoim przekonaniu zauważając, że:

„Przecież istotnie, skoro wiem, że można mnie stracić dowolnego dnia, to prawdą jest że nie istnieje taki dzień, w którym wiedziałbym, że zginę nazajutrz. Świadczy to o tym, że warunek wykonalności wyroku jest spełniony, nie tylko wtedy, gdy wiem, że nie mogę być stracony żadnego dnia, lecz także wówczas, gdy wiem, że mogę być stracony dowolnego dnia. Zatem, wyrok może zostać wykonany".

Jak się jednak okazuje i w tym miejscu rozumowanie skazańca nie może się zakończyć. Po chwili uświadamia on sobie bowiem, że:

„Skoro wiem, że mogę być stracony dowolnego dnia, to znaczy, że w sobotę naprawdę nie mogę być stracony! W przeciwnym razie w piątek po 17. wiedziałbym że nazajutrz zginę. Lecz wówczas piątek jest ostatnim dniem jaki pozostaje na wykonanie wyroku. Czyli jednak moje wcześniejsze rozumowanie było prawidłowe. Nie mogą mnie stracić ani w sobotę, ani w piątek, ani w żaden inny dzień z poniedziałkiem włącznie. Czyli wiem, że nie zginę, a zatem nie mogę wiedzieć że zginę. Czyli mogą mnie stracić dowolnego dnia. No może poza sobotą. Itd."

Ostatecznie koło wnioskowania się zamknęło. Ta niezwykle perfidna kolistość rozumowania sprawia, że paradoks kata jest przykładem problemu z samozwrotnością dotyczącą całego rozumowania. Proces rozumowania okazał się samozwrotny, gdyż zapętlił się i możliwe jest jedynie odtwarzanie w nieskończoność tych samych kroków wnioskowania.

Istotnie, jako skazaniec, mogę już tylko powtarzać te kroki rozumowania, przez które już wcześniej przeszedłem. Nie istnieje jednak żaden uprzywilejowany krok w tym koszmarnym dla mnie, zamkniętym kręgu wnioskowania, na którym mógłbym przerwać rozumowanie. Oznacza to, że chcąc przewidzieć dzień mojego stracenia, tak naprawdę nie mogę wykluczyć żadnego dnia, nawet soboty.

Jeśli idzie o poniedziałek, wtorek, czy środę mogę mieć wątpliwości, czy wiem, że zostanę nazajutrz stracony. Załóżmy jednak, że doczekałem czwartku. Zegar wskazuje godzinę 17.01. Mój tok myślenia jest następujący:

„Za 24 godziny będę miał pewność, że na egzekucję pozostała już tylko sobota. Zatem, za 24 godziny będę wiedział, że zginę nazajutrz, a więc muszę zginąć w piątek. Czyli w tej chwili wiem, że zginę jutro, czyli w piątek. Nie mogę więc być stracony w piątek i ja to wiem!"

Jeśli jednak wiem, że nie mogą mnie stracić nazajutrz, to przecież warunek postawiony przez sąd jest spełniony i właśnie mogą mnie stracić nazajutrz! Co gorsze. Jeśli dożyję do piątku do godziny 17., sytuacja będzie analogiczna. Wiedząc, że nie mogę być stracony w sobotę umożliwię tym samym wykonanie wyroku nawet w sobotę. A skoro mogą mnie stracić nawet w sobotę, egzekucja może mieć miejsce każdego dnia!

Jak widać, zapętlenie się rozumowania nie zależy od ilości dni. Nic więc dziwnego, że nie ma większego znaczenia to, czy mam być stracony w ciągu tygodnia, czy w ciągu roku, i tak wiem tyle samo, czyli nic konkretnego. Dobitnie fakt ten uświadamia nam poniższa, prosta analiza.

Tautologią klasycznego rachunku zdań jest prawo wyłączonego środka:

p lub nie-p.

Zawsze jest tak, że *p* lub *nie-p*. Ponieważ *nie-p* wyklucza *p*, można zwykłą alternatywę zastąpić alternatywą rozłączną:

albo p, albo nie-p.

Zatem, zawsze czyli każdego dnia jest tak, że:

I. *albo wiem, że będę nazajutrz stracony*
II. *albo nie wiem, że będę nazajutrz stracony.*

W drugim przypadku wyrok może zostać wykonany nazajutrz z powodów oczywistych. Natomiast w pierwszym przypadku, skoro znam warunek wykonania wyroku i wiem że będę nazajutrz stracony, to wiem, że nie mogą mnie stracić nazajutrz. Zatem właśnie dzięki tej mojej wiedzy, mogę zostać stracony nazajutrz. Tak więc, w obu przypadkach mogę być nazajutrz stracony. Ponieważ powyższe rozumowanie zachowuje swoją prawdziwość każdego dnia, dochodzę do następującego wniosku:

Wniosek. *Mogę zostać stracony każdego dnia.*

Łatwo zauważyć, że zaproponowane przez nas rozwiązanie zachowuje swoją ważność także w przypadku paradoksu niespodziewanego sprawdzianu. Skoro uczniowie doszli do wniosku, że sprawdzian nie może się odbyć żadnego dnia, nie mogą wiedzieć którego dnia się odbędzie. Zatem warunek spełnienia obietnicy jest uszanowany. Nauczycielka może przeprowadzić sprawdzian kiedy tylko będzie chciała, bowiem uczniowie doskonale wiedzą, że sprawdzian nie może się odbyć żadnego dnia. Widać więc, że pomysł Sainsbury'ego związany z uznaniem obietnicy nauczycielki za zdanie fałszywe jest nieporozumieniem. Przecież, jasne jest, że obietnica jest prawdziwa skoro zapowiada sprawdzian, którego uczniowie faktycznie nie mogą się spodziewać.

Uwagi końcowe

Analiza paradoksu kata nie od razu uświadamia nam istnienie dwóch czynników, od których co prawda nie zależy zaproponowane wyżej rozwiązanie, ale które wydają się być istotne dla pojawienia się tego paradoksu, czyli odpowiadają za samo odczucie problemu.

Aby pokazać czym jest pierwszy z tych czynników i unaocznić jego znaczenie, rozważmy inny paradoks ściśle wzorowany na paradoksie kata. Przeanalizujmy więc następujący problem będący kolejną wersją paradoksu kata, czy niespodziewanego sprawdzianu:

Załóżmy, że stoimy w korytarzu, w którym jest sześcioro zamkniętych drzwi, ponumerowanych od 1 do 6. Wiemy, że skarb jest schowany za jednymi tylko drzwiami, lecz nie wiemy za którymi. Drzwi możemy otwierać jedynie kolejno, według ich numeracji. Za którymi drzwiami winien zostać schowany skarb, abyśmy otwierając kolejne drzwi nie domyślili się, że jest on ukryty za następnymi drzwiami?

Analogiczne do przeprowadzonego na początku tego paragrafu, rozumowanie pokazuje, że nie sposób znaleźć drzwi, za którymi można schować skarb. Ponieważ za drzwiami numer 6, nie może być on schowany, wykluczony jest pokój z drzwiami o numerze 5 itd., aż do drzwi z numerem 1.

Nietrudno zauważyć, że czynnikiem sprawiającym, iż istnieje poważny problem związany ze schowaniem skarbu jest kolejność w jakiej możemy otwierać drzwi. Oczywiście, nie jest istotne jaka jest ta kolejność, ważne że jest. Zatem, dla przykładu, jeśli musielibyśmy otwierać najpierw wszystkie drzwi z numerami parzystymi w kolejności wzrastania tych liczb, a potem wszystkie drzwi z numerami nieparzystymi w kolejności malenia tych liczb, czyli otwieranie drzwi odbywałoby się w kolejności: 2, 4, 6, 5, 3, 1; to i tak odpowiednie, czyli zachowujące warunki zagadki, ukrycie skarbu nie jest możliwe. Jednocześnie jasnym jest, że odrzucenie przestrzegania jakiejkolwiek kolejności w otwieraniu drzwi sprawi, że otwierając dowolne drzwi nie będziemy mieli pewności, czy skarb jest za następnymi. Być może takie właśnie przekonanie, a ściślej mówiąc przekonanie do niego analogiczne leży u podstaw naszych intuicji, według których nie biorąc nawet pod uwagę godzin przeznaczonych na egzekucję jesteśmy skłonni stwierdzić, iż można wykonać wyrok zachowując warunek postawiony przez sąd? Być może patrząc z perspektywy czasu na cały tydzień nie czujemy, iż kolejność następujących po sobie dni jest tak istotnym czynnikiem w paradoksie kata. Jedynym uświadamianym przez nas faktem jest ten, iż sobota musi być ostatnim dniem.

Dla pełnej ścisłości należy jednak zauważyć, że uwolnienie się od kolejności w otwieraniu drzwi, nie uwalnia nas w pełni od problemu. Przecież i tak nie wiadomo za którymi drzwiami należy schować skarb. Przypuśćmy, że kolejność otwierania drzwi jest przypadkowa i że skarb został schowany za drzwiami numer 5. Założenia te nie gwarantują jednak spełnienia warunku, aby otwierając dowolne drzwi nie mieć pewności, że skarb jest za następnymi. Wystarczy przyjąć, że przypadek sprawił, iż drzwi z numerem 5 otworzymy jako ostatnie. Wówczas, po otworzeniu przedostatnich drzwi mamy pewność, iż skarb jest za następnymi, a więc za drzwiami numer 5. Widać więc, że z jednej strony nieuwzględnienie kolejności może wyjaśniać źródło naszych intuicji wiążących się z paradoksem kata, z drugiej zaś odrzucenie kolejności nie rozwiązuje problemu, lecz znacznie go ogranicza.

Drugim czynnikiem, który wydaje się istotny dla powstania paradoksu jest liczba dni przeznaczonych na wykonanie wyroku. Przypuśćmy, że liczba ta została zmniejszona z sześciu do dwóch. Wówczas, sformułowanie wyroku w dobrze znanej postaci najprawdopodobniej nie byłoby kojarzone z jakimkolwiek paradoksem, ponieważ od razu wiadomo by było, że wyrok taki nie jest wykonalny zaś wyjątkowo mała liczba dni nie wywoływałaby konfliktu między intuicjami a ścisłym logicznym rozumowaniem[110]. Dopiero wówczas, gdy liczba dni rośnie wynik rozumowania staje się być sprzeczny z oczywistymi wręcz intuicjami. Co więcej, szczególnie duża liczba dni, jak np. 365, sprawia, że nie jesteśmy w stanie wątpić w słuszność naszych intuicji, a zaczynamy wątpić w niezawodność rozumowania dowodzącego niewykonalności wyroku. Konieczność zbyt wielokrotnego powtarzania tego samego kroku w rozważanym rozumowaniu sprawia, że rozumowanie to przestaje być dla nas źródłem informacji. Od pewnego kroku, może drugiego, a może trzeciego przestajemy brać pod uwagę wyniki tego rozumowania. Powyżej mniej więcej czterech kroków górę w ocenie faktów bierze intuicja, która ustępuje logice dopiero wraz z radykalnie zmniejszającą się liczbą kroków.

Podobieństwo między paradoksem kata (czyli niespodziewanego sprawdzianu) oraz butelki Stevensona[111] jest uderzające. Kupienie przez kogoś butelki z dżinem spełniającym życzenia odpowiada zdarzeniu polegającemu na skazaniu człowieka na śmierć w paradoksie kata. Oczywiście, podobieństwo jakie łączy oba dylematy dotyczy również dwóch analogicznych serii zdarzeń opisanych przez obie argumentacje. W pierwszym przypadku zdarzenia te są określone przez niemożność wykonania wyroku, w drugim zaś przez niemożność powstrzymania nieszczęścia jakie ma spaść na głowę ostatniego z nabywców butelki. Można więc przyjąć, że formalna postać rozumowania w obu przypadkach bazuje na tym samym schemacie. Na tym jednak podobieństwo się kończy. Już proste porównanie analiz obu paradoksów

---

[110] Naturalnie, przedstawiona przez nas analiza pokazuje, że nawet w przypadku ograniczenia wykonalności wyroku do dwóch dni, i tak wyrok może być wykonany każdego z tych dwóch dni.

[111] Patrz paragraf 1.1.

pokazuje bowiem istotną różnicę sprawiającą, iż nie powinny być one uważane za dwie bliźniacze wersje jednego problemu. To, co tak bardzo różni oba dylematy, jest czymś niezwykle ważnym z punktu widzenia klasyfikacji paradoksów, jest nim mianowicie rozwiązanie paradoksu. Jak to zostało wcześniej pokazane, rozwiązanie paradoksu kata w zasadniczy sposób wykorzystuje czynnik psychologiczny, a dokładniej stan niewiedzy skazańca wynikający z jego dezorientacji powstałą sytuacją. Skazaniec wiedząc, że nie może zostać skazany stwarza sytuację polegającą na tym, że warunek wykonania wyroku zostaje spełniony, a wobec tego wyrok na skazanym może zostać wykonany. Fakt ten rozwiązuje dylemat i paradoks znika. Czynnik psychologiczny sprawia więc, że paradoks kata jest rozwiązywalny. W przypadku paradoksu butelki Stevensona mamy natomiast sytuację bez wyjścia. Jeśli bowiem zostanie przeprowadzona pierwsza transakcja, nic nie jest w stanie powstrzymać lawiny zdarzeń zmierzającej do tragicznego dla ostatniego nabywcy butelki finału.

Widać więc, że różnica jaka zachodzi między obydwoma paradoksami jest zasadnicza. Sprawia ona bowiem to, iż paradoks kata (czyli niespodziewanego sprawdzianu) jest rozwiązywalny, zaś paradoks butelki Stevensona nie.

3.5. PARADOKS KROKODYLA

Kolejnym przykładem zapętlającego się rozumowania jest, znany już w starożytności, paradoks krokodyla. Przypomnijmy go, przytaczając starą historię Egipcjanki opowiedzianą przez Ajdukiewicza[112].

Paradoks krokodyla
Krokodyl porwał matce dziecko. Na jej błagania, aby jej dziecko zwrócił, odrzekł wylewając krokodyle łzy: „dobrze niewiasto, żal twój mnie wzruszył, wskażę ci drogę do odzyskania dziecka. Odpowiedz mi na pytanie, czy ci dziecko oddam. Jeśli odpowiesz prawdę, to ci dziecko oddam; jeśli jednak odpowiesz nieprawdę, to ci dziecka nie oddam". Matka po namyśle odparła: „ty mi dziecka nie oddasz". A krokodyl na to: „dziecko straciłaś. Bo albo rzekłaś prawdę, albo nieprawdę. Jeśli mówiąc, że ja krokodyl, dziecka ci nie oddam, powiedziałaś prawdę, no to ja ci dziecka nie oddam, bo inaczej nie byłoby prawdą, coś powiedziała. Jeśli jednak nieprawdę wyrzekły twe usta, to wedle umowy dziecko u mnie zostaje". Ale matka nie zadowoliła się wyrokiem krokodyla i twierdziła, że dziecko na wszelki wypadek jej się należy. „bo – powiada – jeśli wyrzekłam prawdę, to oddasz mi dziecko, boś przecież przyrzekł mi je oddać, jeśli powiem prawdę. Jeśli zaś nieprawdą jest to, com powiedziała,

[112] Ajdukiewicz [1931], s. 141.

jeśli nieprawdą jest, że mi dziecka nie oddasz, to mi je musisz oddać, inaczej bowiem nie byłoby nieprawdą, com powiedziała".

Na początek prześledźmy formalną analizę Ajdukiewicza[113]. Proponuje on dla precyzji analizy operować literą *Z*, która ma symbolizować jedną z dwóch możliwych odpowiedzi matki na pytanie, czy krokodyl odda jej dziecko. Zatem, albo *Z* oznacza zdanie „krokodyl odda dziecko", albo „krokodyl nie odda dziecka". W pierwszym przypadku *non-Z* symbolizuje zdanie „krokodyl nie odda dziecka", w drugim zaś „krokodyl odda dziecko". Dalej Ajdukiewicz proponuje zapisać przyrzeczenie krokodyla następująco:

I. *Jeżeli matka powie, że Z, wówczas, jeżeli Z, to krokodyl odda dziecko, zaś jeżeli non-Z, to krokodyl nie odda dziecka.*

Jeśli w powyższym schemacie za Z podstawimy odpowiedź matki „*krokodyl nie odda dziecka*", to otrzymamy:

II. *Jeżeli matka powie, że krokodyl nie odda dziecka, wówczas, jeżeli krokodyl nie odda dziecka, to krokodyl odda dziecko, zaś jeżeli krokodyl odda dziecko, to krokodyl nie odda dziecka.*

Struktura zdania II jest następująca:

III. *Jeżeli matka powie, że krokodyl nie odda dziecka, to (jeżeli Z, to non-Z) i (jeżeli non-Z, to Z).*

Dalej Ajdukiewicz zauważa, że zgodnie z zasadami logiki, jeśli z jakiegoś zdania *A* wynika zdanie *non-A*, sprzeczne z *A*, wówczas *non-A* musi być prawdą. Analogicznie jeśli z *non-A* wynika *A*, wówczas *A* musi być prawdą. Zatem, z III wynika:

IV. *Jeżeli matka powie, że krokodyl nie odda dziecka, to Z i non-Z.*

Czyli,

V. *Jeżeli matka powie, że krokodyl nie odda dziecka, to krokodyl odda dziecko i krokodyl nie odda dziecka.*

Ajdukiewicz stwierdza więc, że jeśli przyrzeczenie krokodyla jest prawdziwe, to z faktu, iż odpowiedzią matki jest zdanie „krokodyl nie odda dziecka" wynika

[113] Ajdukiewicz [1931], s. 141–142.

sprzeczność. Jeśli więc krokodyl zamierza dotrzymać obietnicy nie może dopuścić do sytuacji, w której matka powie krokodylowi „ty mi nie oddasz dziecka". Ajdukiewicz całą winą za zaistniały problem obarcza krokodyla twierdząc[114]: „Krokodyl nie spełnił przyrzeczenia, z chwilą gdy dopuścił do wypowiedzi matki. Kto bowiem dopuszcza do zaistnienia faktu wykluczającego przyrzeczony stan rzeczy, ten tym samym nie spełnia przyrzeczenia".

Interesującą interpretację bliską tradycyjnemu sposobowi prezentacji anegdoty przedstawił Andrzej Grzegorczyk[115]. Przypomnijmy rozumowanie autora używając przesłanek w oryginalnym brzmieniu. Grzegorczyk przyjmuje sześć następujących przesłanek:

1_G *Powinien oddać ≡ zgadła,*
2_G *Powinien zjeść ≡ nie zgadła.*
3_G *Zje → zgadła,*
4_G *Nie zje → nie zgadła.*
5_G (*Powinien oddać i zje*) → [*nie* (*postąpi konsekwentnie*)],
6_G [*Powinien zjeść i nie* (*zje*)] → [*nie* (*postąpi konsekwentnie*)].

Dwie pierwsze wyrażają zobowiązanie krokodyla, kolejne dwie wynikają z odpowiedzi matki, zaś dwie ostatnie autor proponuje przyjąć dodatkowo, aby móc ocenić postępowanie krokodyla. Wobec faktu, iż formuła $(p \to q) \to [(r \equiv q) \to (p \to r)]$ jest tautologią klasycznego rachunku zdań z przesłanki pierwszej i trzeciej wynika, że

7_G *Zje → powinien oddać.*

Ponieważ tautologią klasycznego rachunku zdań jest także formuła $(p \to q) \to \{[(q \text{ } i \text{ } p) \to \text{nie } r] \to (p \to \text{nie } r)\}$ z 7_G oraz 5_G otrzymujemy:

8_G *Zje → nie* (*postąpi konsekwentnie*).

Analogiczne rozumowanie wykorzystujące przesłanki 2_G, 4_G, 6_G prowadzi do wniosku, że

9_G *Nie zje → nie* (*postąpi konsekwentnie*).

Korzystając z tautologiczności formuły $\{(p \to r) \text{ } i \text{ } [(\text{nie } p) \to r]\} \to r$ wprost z 8_G i 9_G wynika, że

10_G *Nie* (*postąpi konsekwentnie*).

Przy tej interpretacji sprzeczność kryjąca się w paradoksie zostaje zastąpiona stwierdzeniem niemożności konsekwentnego działania.

---

[114] Ajdukiewicz [1931], s. 142.
[115] Grzegorczyk [1960] , s. 122–127.

Bardzo często, gdy problem wydaje się być nie do rozwiązania warto postawić go jeszcze raz samemu. Przeanalizujmy więc ponownie problem związany z paradoksem krokodyla. Faktem jest porwanie dziecka przez krokodyla, umowa jaką zawarł on z matką dziecka oraz jej odpowiedź stwierdzająca, że krokodyl nie odda dziecka. Poza tymi faktami istnieją spekulacje, które wydają się być nie tyle paradoksalne, co absurdalne. Krokodyl odda dziecko matce lub go nie odda, gdy okaże się że matka dała prawdziwą odpowiedź na pytanie czy krokodyl odda jej dziecko czy nie. Zauważmy, że krokodyl będzie wiedział co ma zrobić, gdy wcześniej to właśnie uczyni! Oznaczmy symbolem *A* czyn krokodyla polegający na tym że odda dziecko matce. Krokodyl musi podjąć decyzję, czy ma uczynić *A* czy *nie-A*. W tym celu musi rozpoznać wypowiedź matki jako prawdziwą lub fałszywą. Jednak, wartość logiczna odpowiedzi matki będzie mu znana pod warunkiem, że sam wcześniej uczyni *A* lub *nie-A*. I to wydaje się być prawdziwym problemem tego paradoksu. Krokodyl będzie mógł podjąć decyzję, czy uczynić *A* czy *nie-A* jedynie wtedy, gdy wcześniej uczyni *A* lub *nie-A*[116]. Cała ta sytuacja przypomina sławne wyciąganie się barona Münchhausena za włosy z bagna. Niezbędnym krokiem zmierzającym do rozwiązania paradoksu krokodyla wydaje się być uwzględnienie koniecznej wręcz kolejności następujących po sobie zdarzeń:

1. *Krokodyl porywa dziecko.*
2. *Matka prosi krokodyla o uwolnienie dziecka.*
3. *Krokodyl zadaje pytanie matce: „czy ja ci dziecko oddam?".*
4. *Matka odpowiada: „ty mi dziecka nie oddasz".*
5. *Krokodyl musi ocenić wartość logiczną odpowiedzi matki. Musi więc porównać jej wypowiedź z rzeczywistością.*

I tu dochodzimy do sedna problemu: jakie zdarzenie ma być punktem odniesienia w ocenie prawdziwości lub fałszywości słów matki? Jak widać, zdarzeniem tym nie może być nic co ma dopiero nastąpić. Powinna to być sytuacja, która może i musi zajść jeszcze przed oceną wartości logicznej odpowiedzi danej przez matkę. Naturalnie, można próbować przyjąć, że chodzi tu o fakt nieoddania dziecka, który właśnie nastąpił i trwa od chwili porwania. Trudno jednak zaakceptować takie rozwiązanie, gdyż oznaczałoby ono że krokodyl pyta o coś niezwykle oczywistego, a odpowiedź matki nie wiąże się z najmniejszą trudnością. Ponadto, przy takim spojrzeniu na paradoks krokodyla, dylemat ten nie powinien być kojarzony z problemem samozwrotności.

---

[116] Podobne zastrzeżenia przedstawia E. Grodziński [1981] i [1983] wskazując na to, iż słowo „zgadnij" w zdaniu wypowiedzianym przez krokodyla „zgadnij co uczynię z twoim dzieckiem" jest pozbawione sensu, ponieważ nie można odgadnąć prawdy na temat czegoś co jeszcze się nie dokonało. Wysnuwa więc wniosek o nonsensowności wypowiedzi prezentującej paradoks krokodyla.

Pierwsza propozycja rozwiązania paradoksu[117]

Przedstawiona wyżej analiza problemu pokazuje, że rozsądnym jego rozwiązaniem powinno być założenie, że krokodylowi chodzi o to, aby matka odgadła jego zamiary. Wówczas punkty 3 i 4 w powyższym ciągu zdarzeń mają postać:

3'. *Krokodyl zadaje pytanie matce: „czy ja zamierzam oddać ci dziecko?".*
4'. *Matka odpowiada: „ty nie zamierzasz oddać mi dziecka".*

Nie jest trudno zauważyć, że w tej sytuacji nie mamy już do czynienia z żadnym paradoksem. Tym razem, punkt 5 określa bowiem w sposób bardzo ścisły kryterium oceny wypowiedzi matki:

5'. *Krokodyl musi ocenić wartość logiczną odpowiedzi matki. Musi więc porównać jej wypowiedź ze swoimi zamiarami wobec dziecka. Jeśli ma zamiar oddać dziecko, oznacza to, iż musi z tego zamiaru zrezygnować, bowiem matka pomyliła się. Jeśli zaś krokodyl nie zamierza oddać dziecka, to również i w tym przypadku musi zmienić swoje zamiary, gdyż matka odgadła jego plany podając prawdziwą odpowiedź.*

Nie jest trudno dostrzec, że inna odpowiedź matki również nie prowadzi do paradoksu. Jeśli bowiem matka powiedziała „ty mi zamierzasz oddać dziecko", to krokodyl w przypadku gdy miał zamiar oddać dziecko matce nie musi zmieniać swoich planów. Pozostaje mu tylko oddać dziecko. Jeśli natomiast krokodyl nie miał zamiaru oddać dziecka, wówczas również nie musi zmieniać swoich planów. Jednak tym razem zatrzymuje dziecko.

Przy takiej interpretacji paradoksu można pokusić się nawet o ocenę tego, czy matka uczyniła rozsądnie odpowiadając „ty mi dziecka nie oddasz", czyli „ty nie zamierzasz oddać mi dziecka". Można przypuszczać, że matka uczyniła słusznie. Czy taka bestia jak krokodyl porywa dziecko po to, aby je oddać? Chociaż ten akurat krokodyl najwyraźniej miał inne potrzeby, raczej logiczno-filozoficznej natury.

Jak widać przyjęta przez nas interpretacja anegdoty o krokodylu i matce prowadzi do sytuacji, której nie można nazwać paradoksalną. W tym przypadku nie mamy bowiem do czynienia z sytuacją, której opis z konieczności musiałby być sprzeczny.

Na koniec analiz poświęconych paradoksowi krokodyla rozważmy jeszcze jedną interpretację, która wydaje się mieć dość niespodziewane konsekwencje.

---

[117] Łukowski [2003a].

Druga propozycja rozwiązania paradoksu[118]

Dla problemu paradoksu krokodyla kluczowe są dwa zdarzenia. Pierwszym z nich jest obietnica jaką krokodyl dał matce, drugim zaś odpowiedź matki na pytanie zadane przez krokodyla. Można je przedstawić w postaci dwóch następujących równoważności:

a. krokodyl powinien oddać dziecko $\leftrightarrow$ *matka prawdziwie odpowie na pytanie,*
b. matka prawdziwie odpowie na pytanie $\leftrightarrow$ *krokodyl nie oddał dziecka.*

Znany sylogizm określa wyjątkowo intuicyjną regułę wnioskowania:

$$\begin{array}{ll} \textit{jeśli} & \alpha \leftrightarrow \beta \\ \underline{\textit{i}} & \underline{\beta \leftrightarrow \delta} \\ \textit{to} & \alpha \leftrightarrow \delta \end{array}$$

Zatem, logiczną konsekwencją przesłanek *a* i *b* jest wniosek:

c. krokodyl powinien oddać dziecko $\leftrightarrow$ *krokodyl nie oddał dziecka.*

Trudno jest polemizować z tak sformułowanym wnioskiem. Przecież krokodyl powinien oddać dziecko tylko wtedy, gdy go nie oddał. Nikt nie może przecież oddać czegoś co już oddał, a więc czego już nie posiada. Oznacza to, że wniosek jaki wynika z przeprowadzonej analizy jest nie tylko nieparadoksalny ale wręcz oczywisty. Chociaż równoważność *c* nie jest zdaniem tautologicznym, to jednak wydaje się być truizmem.

3.6. PODSUMOWANIE

Spektrum problemów wywołanych samozwrotnością jest szerokie. Samozwrotność może bowiem dotyczyć pojedynczego zdania (antynomia kłamcy), grupy zdań (paradoks Buridana), całego rozumowania (paradoks kata), konstrukcji językowej (antynomie semantyczne), czy matematycznej (antynomia Russella i inne antynomie teorii mnogości, wstęga Möbiusa, butelka Kleina), a nawet obiektu materialnego (wstęga Möbiusa). Naturalnie, każdy z problemów wywołanych cyrkularnością może przybrać postać jakiejś konkretnej, w każdym przypadku innej, kwestii, np.: prawdziwości sądów, definiowalności, niesprzeczności podstawowych założeń matematycznych, racjonalności podejmowania decyzji, sensowności zawieranych umów itd. Jednak koncentrowanie naszej uwagi na którejś z tych kwestii wówczas, gdy zadaniem naszym jest rozwiązanie danego paradoksu jest nie tylko spłyceniem problemu, lecz wręcz świadczy o nie-

[118] Łukowski [2003a].

zrozumieniu sedna badanego paradoksu. Podobnie jak w przypadku paradoksów wynikłych z wieloznaczności, chcąc rozwiązać paradoks musimy usunąć błąd wieloznaczności, nie zważając na dodatkowe, powierzchowne drugorzędne kwestie, tak samo, analizując paradoks samozwrotności musimy skoncentrować się na tym, w jaki sposób cyrkularność wpływa na powstanie analizowanej trudności. Jedynie wówczas, możemy próbować rozwiązać dany problem. Jednak, w przeciwieństwie do wieloznaczności, samozwrotność sama w sobie nie jest żadnym błędem. Oznacza to, że paradoks samozwrotności może nie mieć rozwiązania. O ile bowiem wieloznaczność zawsze wymaga usunięcia, o tyle samozwrotność nie stawia przed nami podobnego obowiązku. Jeśli więc, jakaś postać cyrkularności jest poprawna i dopuszczalna, wiążący się z nią paradoks nie zawsze musi być uważany za problem wymagający rozwiązania. W takiej sytuacji, powstała trudność może okazać się w pełni usprawiedliwiona i wówczas może wymagać jedynie naszego zrozumienia. Do paradoksów tego typu należą semantyczne antynomie golibrody, Richarda, Berry'ego, Grellinga. Za nieuzasadnione muszą więc uchodzić wszelkie próby ich rozwiązań, zwłaszcza wówczas, gdy próby te wykorzystują bardzo sztuczne i mocno nieintuicyjne konstrukcje.

Naturalnie, odróżnienie paradoksu, który nie powinien mieć rozwiązania od paradoksu dającego się rozwiązać nie zawsze jest proste i niekiedy może prowadzić nie tylko do rozwiązań „na siłę" problemów nieposiadających rozwiązań, lecz również może spowodować pochopne przyjęcie, iż dany paradoks nie ma rozwiązania, mimo iż takowe istnieje. Najlepszym tego przykładem może być antynomia kłamcy. Wielka mnogość sztucznych, forsownych rozwiązań „na siłę" tego paradoksu sprawia, że jesteśmy skłonni uznać go za całkiem naturalny problem, niewymagający rozwiązania, lecz jedynie przyjęcia do wiadomości. Tymczasem, okazuje się, iż możliwe jest dość intuicyjne rozwiązanie tej antynomii, które nie wiąże się z jakąś sztuczną, wydumaną konstrukcją, godzącą w nasze rozumienie pojęcia prawdy. To proste, zaproponowane przez nas, rozwiązanie może skłaniać do stwierdzenia, iż antynomia kłamcy jest paradoksem rozwiązywalnym, gdyż wiążąca się z nią trudność wynika z błędu polegającego na nieuświadomieniu sobie tego, iż każde zdanie jest przez nas rozumiane jako zdanie prawdziwe, a nie zdanie bez wartości logicznej. Jedynie takie podejście do zdania kłamcy, które traktuje to zdanie jako wyrażające sąd niezależny od wartości logicznej może prowadzić do paradoksalnych wniosków.

Ponieważ samozwrotność nie jest żadnym, ani logicznym, ani pozalogicznym błędem, omówione w tym rozdziale paradoksy nie muszą wymagać rozwiązania. Mogą one być jedynie świadectwem realności problemów pewnego rodzaju, z istnienia których nie zawsze zdajemy sobie sprawę. Zatem, każda propozycja rozwiązania któregokolwiek z paradoksów samozwrotności powinna spełniać jeden podstawowy warunek: musi być naturalna, a nawet w pewnym sensie oczywista. W przeciwnym razie jest zwykłą, niekiedy jałową chociaż być może dość ambitną, zabawą logiczną.

4
PARADOKSY ONTOLOGICZNE

Powszechną praktyką jest stawianie paradoksów nieostrości oraz paradoksów zmiany, w tym ruchu, w rzędzie wszystkich pozostałych paradoksów. Z takiej perspektywy, paradoksy te wydają się być jeszcze jednymi, poza tymi, które wynikają z wieloznaczności lub samozwrotności, problemami logicznymi. Chociaż, bez wątpienia, paradoksy nieostrości oraz paradoksy zmiany są problemami logicznej natury, ich ranga wydaje się być znacznie większa i przewyższająca nawet, uważaną za paradoks wszechczasów, antynomię kłamcy. W istocie, posługując się językiem jesteśmy w stanie bez większego trudu unikać paradoksu kłamcy. Takiego komfortu nie mamy jednak w przypadku paradoksów nieostrości i paradoksów zmian. Powszechność tych dylematów jest porażająca. Wystarczy uświadomić sobie, że kończące się paradoksalnym wnioskiem rozumowanie stosu można zastosować wobec dowolnego niematematycznego predykatu i dowolnej niematematycznej nazwy. Wydaje się, że jedynymi pozamatematycznymi wyraźnymi, a więc nie-nieostrymi (ostrymi), wyrażeniami naszego języka są nazwy „ruch" i „bezruch" oraz predykaty „być ruchem", „być w ruchu", „być bezruchem" i „być w bezruchu"[1]. Wszystkie, pozostałe wyrazy naszego języka wydają się być nieostrymi, a więc generującymi paradoksalne, niemożliwe do zaakceptowania wnioski.

Ten niewątpliwy, wręcz oczywisty i co ciekawe, doskonale znany od starożytności, fakt może okazać się druzgocący dla wielu poglądów i wielu systemów filozoficznych. Analiza problemów nieostrości była i wciąż w wielu przypadkach nadal jest lekceważona, gdyż systematyczne jej bagatelizowanie jest jedyną formą obrony przed konsekwencjami do jakich musi doprowadzić każda rzetelna refleksja nad fenomenem nieostrości. Poważne potraktowanie zjawiska nieostrości, czy to natury językowej, czy pozajęzykowej, musi postawić pod znakiem zapytania sens każdej metafizyki i ontologii, w których jest miejsce dla bezruchu, rzeczy, własności, zakresów nazw, matematycznie pojmowanych relacji i innych, przejętych wprost ze świata matematyki, konstrukcji myślowych. Paradoksy nieostrości oraz

---

[1] Może się wydawać, że wyraźne są niektóre z nazw i predykatów funkcjonujących w fizyce kwantowej. Jednak, nie jest do końca jasne, na ile wyrażenia te są wyrażeniami pozamatematycznymi.

paradoksy zmiany w sposób bezlitosny pokazują naiwność każdej takiej metafizyki i każdej takiej ontologii.

Pocieszające jest jednak to, że, po trwającej od starożytności prawie zupełnej nieobecności w myśli filozoficznej i logicznej, problem nieostrości od przeszło stu lat przeżywa prawdziwy renesans. I chociaż niektóre z podejmowanych od początku XX wieku prób analizowania kwestii nieostrości muszą w niejednym przypadku uchodzić za kuriozalne, a nawet absurdalne, to samo ich istnienie daje nadzieję na to, iż być może w pewnej nieodległej przyszłości pojawią się propozycje uwzględniające ten niezwykły z punktu widzenia naszej myśli, a absolutnie powszechny fenomen. To niezwykle trudne zadanie wydaje się być ułatwionym dzięki dokonaniom Henri'ego Bergsona. Na pewno warto, a być może nawet trzeba, sięgnąć do jego niezwykłej filozoficznej spuścizny.

4.1. PARADOKSY RÓŻNIC MINIMALNYCH – PARADOKS STOSU

Czy ta tkanina ma kolor żółty, czy może zbliżony do żółtego? Czy ten mężczyzna jest w średnim wieku, czy może jest starszym panem? Czy ten bagaż jest lekki, czy ciężki, a może ani lekki, ani ciężki? Czy godzina 8. rano jest wczesną godziną, czy może niezbyt wczesną? Takich pytań istnieje wiele. Odpowiedzi na wszystkie pytania tego typu są zawsze subiektywne i zależą na przykład od doświadczenia, od wieku, a nawet od tych czynników, których zwykle nie uznajemy za istotne. Jaki więc problem wiąże się ze znaczeniem tych i wielu innych słów? Wiemy, który kolor na pewno uznamy za żółty, który na pewno za nie-żółty, lecz istnieją kolory i ich odcienie, które sprawią nam poważne kłopoty z zakwalifikowaniem ich do jednego z dwóch przypadków: koloru żółtego lub koloru nie-żółtego. Istnieją więc barwy, co do których zdania różnych ludzi będą różne. Ktoś uzna dany kolor za żółty, ktoś inny ten sam kolor określi jako nie-żółty. Jedna i ta sama osoba jednego dnia oceni dany kolor jako nie-żółty, innego zaś dnia będzie to dla niej kolor żółty. Co ciekawe, nasze kłopoty nie znikną nawet wówczas, gdy będziemy się starali zdobyć na interesujący nas temat jakieś dodatkowe informacje. Problem ten okazuje się bowiem niezależny od wiedzy, naturalnie niezależność ta nie jest pełna. Osoba od urodzenia niewidoma, która po dwudziestu latach dzięki operacji przejrzy na oczy będzie musiała uczyć się barw. Jednak nie o tego rodzaju zdobywanie wiedzy tu chodzi. Idzie raczej o to, że ktoś trafnie rozpoznający kolor żółty, a więc mający wystarczającą w tym względzie wiedzę, niewątpliwie może się znaleźć w sytuacji, w której z rozpoznaniem tego właśnie, doskonale mu znanego koloru będzie miał problem, którego żadna dodatkowa informacja nie pomoże mu go rozwiązać. Naturalnie, problem ten jest doskonale znany od wieków. W starożytności był reprezentowany przez takie argumentacje, jak „paradoks stosu", czy „paradoks łysego".

Dzięki swej treści *paradoks stosu*, a szczególnie jego bliźniacza wersja *paradoks łysego* wydaje się być argumentacją prowokującą do zlekceważenia. Można rzec, iż jego wręcz śmieszna postać sugeruje, iż paradoks ten nie reprezentuje żadnego poważnego problemu logicznego czy filozoficznego. Tymczasem, waga tego paradoksu stawia go znacznie powyżej wszystkich innych, także powyżej wielkiego i szczególnie ważnego paradoksu kłamcy. Co ciekawe, a zarazem budzące szacunek, autorem obu największych paradoksów wszechczasów, stosu oraz kłamcy, jest jeden i ten sam człowiek, współczesny Arystotelesowi, Eubulides z Miletu (IV w. p.n.e.) uczeń Euklidesa z Megary (ok. 400 p.n.e.), twórcy erystyki[2]. Wydaje się, iż zachodzi pewna zgodność między poglądami Eubulidesa a konsekwencjami jego paradoksu stosu. Jak pisze Diogenes Laertios[3]: „Eubulides był wrogiem Arystotelesa i często go atakował". Mimo to, nie sposób znaleźć w obszernych dziełach Arystotelesa choćby najmniejszej wzmianki o paradoksie stosu, czy paradoksie łysego. Trudno przypuszczać, że tak wybitny filozof, jakim był Arystoteles, nie dostrzegł wyjątkowej wagi argumentacji paradoksów, tak zwanej, nieostrości. Dlaczego człowiek zajmujący stanowisko w każdej filozoficznej kwestii, jaka była poruszana przed nim, a także przez współczesnych mu myślicieli, zrobił dla problemu nieostrości wyjątek, mimo, iż był osobiście atakowany przez Eubulidesa? Czyżby zdawał sobie sprawę, że argumentacja ta godzi w samo sedno jego nauki? Czy może zdawał sobie z tego sprawę, lecz czuł się wobec niej bezradny? Niewątpliwie, bardzo trudno jest znaleźć dzisiaj odpowiedź na tego typu pytania. Mimo to, zastanawiające jest milczenie tego wielkiego filozofa w tak podstawowej dla filozofii kwestii.

Prześledźmy więc różne odmiany paradoksów nieostrości. Niestety, w przeciwieństwie do wielu innych pochodzących ze starożytności dylematów, zacytowanie Arystotelesa w przypadku któregokolwiek z paradoksów nieostrości jest niemożliwe.

Paradoks stosu

Czy wiemy co oznacza słowo „stos"? Załóżmy, że tak. Przypuśćmy więc, że mamy kopiec trzydziestu tysięcy ziaren pszenicy. Możemy bez wahania orzec, iż mnogość ta tworzy stos[4]. Usuńmy z tego stosu jedno zaledwie ziarno pszenicy.

---

[2] Ściślej mówiąc, Euklides z Megary, uczeń Sokratesa odwiedzający swego mistrza, gdy ten był osadzony w więzieniu i skazany na śmierć, był twórcą terminu "erystyka". W tym też sensie mówi się o nim jako o twórcy erystyki. Sztuka dyskutowania rozumiana jako umiejętność posługiwania się nie zawsze uczciwymi metodami prowadzenia sporu była w rozkwicie jeszcze przed Euklidesem. Stosowanie niektórych metod erystycznych można na przykład zauważyć w argumentacji samego Sokratesa (patrz niemal dowolny dialog Platona).

[3] Diogenes Laertios, II 109.

[4] Zazwyczaj prezentacje argumentacji paradoksu stosu milcząco zakładają odpowiednią postać jaką ma dana mnogość ziaren. Łatwo zauważyć, że nawet zbiór trzydziestu tysięcy ziaren

Pozostała mnogość nadal tworzy stos. Co więcej, trudno spostrzec, że nowy stos jest mniejszy od poprzedniego. Usuńmy więc kolejne ziarno ze stosu. Chociaż ilość ziaren się zmniejszyła, pozostała mnogość nadal tworzy stos. Jasne jest, że usunięcie ze stosu jednego ziarna pszenicy, nie może z czegoś co jest stosem uczynić nie-stos. Oznacza to, że po każdym usunięciu jednego ziarna ze stosu musimy przyznać, że pozostała ilość ziaren nadal tworzy stos. A jednak, trudno nie zgodzić się z tym, że po powtórzeniu tej czynności dwadzieścia dziewięć tysięcy dziewięćset dziewięćdziesiąt osiem razy otrzymamy mnogość ziaren nie tworzącą stosu – przecież zbiór dwóch ziaren pszenicy nie jest stosem. Jednak, zgodnie z ustaloną zasadą winniśmy orzec, iż wciąż mamy stos. Nadal postępując konsekwentnie, musimy na sam koniec przyznać, że i jedno ziarno tworzy stos.

Jasne jest więc, że nie jest prawdą, że wiemy co oznacza słowo „stos". Może więc wiemy co oznacza wyrażenie „nie-stos"?

Załóżmy, że mamy jedno ziarno pszenicy. Niewątpliwie, mamy tym samym nie-stos. Dodając do tego jednoelementowego zbioru jedno ziarno nadal mamy nie-stos. Analogicznie do poprzedniego przypadku możemy przyjąć, że jeśli jakaś mnogość ziaren pszenicy tworzy nie-stos, czyli nie jest stosem, dodanie do niej jednego zaledwie ziarna nie uczyni z nie-stosu stos. Powtarzając wielokrotnie czynność zwiększania mnogości ziaren o jedno z jednoczesnym stwierdzaniem, iż otrzymany zbiór nie tworzy stosu, dochodzimy do wniosku, że kopiec trzydziestu tysięcy ziaren jest nie-stosem, czyli nie tworzy stosu.

Równie jasnym jak poprzedni jest kolejny wniosek, iż nie wiemy co oznacza wyrażenie „nie-stos".

Argumentacja paradoksu stosu dobitnie pokazuje, iż przypuszczenie, że kopiec trzydziestu tysięcy ziaren pszenicy tworzy stos prowadzi do wniosku, że zbiór jednoelementowy też jest stosem. Naturalnie, założenie, że zbiór jednoelementowy jest nie-stosem, czyli nie jest stosem, prowadzi nieuchronnie do wniosku, że trzydzieści tysięcy ziaren pszenicy również jest nie-stosem, czyli nie jest stosem.

Argumentacja ta ma postać indukcji matematycznej ograniczonej do skończonej liczby kroków. Jej formalne przedstawienie może mieć postać jednego z dwóch wzajemnie równoważnych schematów. Albo powtarzamy skończoną liczbę razy analogiczne rozumowanie wykorzystujące *Modus Ponens*, albo też wychodzimy od dwóch przesłanek, jednej będącej odpowiednikiem sprawdzenia indukcyjnego w indukcji matematycznej oraz drugiej będącej krokiem indukcyjnym.

---

pszenicy może nie tworzyć stosu, jeśli tylko jest on rozsypany na wystarczająco dużej powierzchni. Dlatego też, tak w tej jak i w każdej następnej argumentacji milcząco zakładamy, że każdy z rozważanych zbiorów ziaren przybiera kształt „odpowiedni", czyli jak najbardziej zbliżony do stosu.

Pierwsza formalizacja paradoksu stosu

Krok 1. *Przesłanka pierwsza*: 30 000 ziaren pszenicy tworzy stos.
Przesłanka druga: Jeżeli 30 000 ziaren pszenicy tworzy stos, to 29 999 ziaren pszenicy tworzy stos.
Wniosek: 29 999 ziaren pszenicy tworzy stos.

Krok 2. *Przesłanka pierwsza*: 29 999 ziaren pszenicy tworzy stos.
Przesłanka druga: Jeżeli 29 999 ziaren pszenicy tworzy stos, to 29 998 ziaren pszenicy tworzy stos.
Wniosek: 29 998 ziaren pszenicy tworzy stos.

•

•

•

Krok 29 998. *Przesłanka pierwsza*: 3 ziarna pszenicy tworzą stos.
Przesłanka druga: Jeżeli 3 ziarna pszenicy tworzą stos, to 2 ziarna pszenicy tworzą stos.
Wniosek: 2 ziarna pszenicy tworzą stos.

Krok 29 999. *Przesłanka pierwsza*: 2 ziarna pszenicy tworzą stos.
Przesłanka druga: Jeżeli 2 ziarna pszenicy tworzą stos, to 1 ziarno pszenicy tworzy stos.
Wniosek: 1 ziarno pszenicy tworzy stos.

Druga formalizacja paradoksu stosu

Sprawdzenie indukcyjne: 30 000 ziaren pszenicy tworzy stos.
Krok indukcyjny: Dla dowolnej liczby naturalnej n, jeżeli zbiór n ziaren pszenicy tworzy stos, to zbiór $n-1$ ziaren pszenicy tworzy stos.
Wniosek indukcyjny: 1 ziarno pszenicy tworzy stos.

Naturalnie, z założenia, że 30 000 odpowiednio usypanych ziaren pszenicy tworzy stos wynika, że każda większa od 30 000 ilość odpowiednio usypanych ziaren pszenicy także tworzy stos. Dlatego też, powyższe rozumowanie dowodzi, że jeśli jakaś mnogość ziaren jest stosem, to każda mnogość odpowiednio usypanych ziaren również tworzy stos.

Rozumowanie paradoksu stosu może zostać przeprowadzone także ze względu na nazwę „nie-stos".

Pierwsza formalizacja innej wersji paradoksu stosu

Krok 1. *Przesłanka pierwsza*: 1 ziarno pszenicy tworzy nie-stos (czyli nie jest stosem).
Przesłanka druga: Jeżeli 1 ziarno pszenicy tworzy nie-stos, to 2 ziarna pszenicy tworzą nie-stos.
Wniosek: 2 ziarna pszenicy tworzą nie-stos.

Krok 2. *Przesłanka pierwsza*: 2 ziarna pszenicy tworzą nie-stos.
Przesłanka druga: Jeżeli 2 ziarna pszenicy tworzą nie-stos, to 3 ziarna pszenicy tworzą nie-stos.
Wniosek: 3 ziarna pszenicy tworzą nie-stos.

•

•

•

Krok 29 998. *Przesłanka pierwsza*: 29 998 ziaren pszenicy tworzy nie-stos.
Przesłanka druga: Jeżeli 29 998 ziaren pszenicy tworzy nie-stos, to 29 999 ziaren pszenicy tworzy nie-stos.
Wniosek: 29 999 ziaren pszenicy tworzy nie-stos.

Krok 29 999. *Przesłanka pierwsza*: 29 999 ziarno pszenicy tworzy nie-stos.
Przesłanka druga: Jeżeli 29 999 ziaren pszenicy tworzy nie-stos, to 30 000 ziaren pszenicy tworzy nie-stos.
Wniosek: 30 000 ziaren pszenicy tworzy nie-stos.

Druga formalizacja innej wersji paradoksu stosu

Sprawdzenie indukcyjne: 1 ziarno pszenicy tworzy nie-stos.
Krok indukcyjny: Jeżeli zbiór n ziaren pszenicy tworzy nie-stos, to zbiór n+1 ziaren pszenicy tworzy nie-stos.
Wniosek indukcyjny: 30 000 ziaren pszenicy tworzy nie-stos.

Oczywiście, wnioskowanie dowodzące, że dana mnogość ziaren pszenicy tworzy nie-stos, czyli nie tworzy stosu może być kontynuowana w nieskończoność. Dlatego też, z tej wersji paradoksu stosu wynika, że żadna ilość odpowiednio usypanych ziaren pszenicy nie tworzy stosu.

Podsumowując argumentacje obu wersji paradoksu stosu należy zauważyć, że wniosek jaki z nich wynika jest zaskakujący: *żadna ilość nawet odpowiednio usypanych ziaren pszenicy nie tworzy stosu oraz każda ilość odpowiednio usypanych ziaren pszenicy tworzy stos*. Tym samym, jeśli coś jest stosem, to zarazem jest i nie-stosem, czyli nie jest stosem: *żaden stos nie jest stosem*. Wykorzystując argumentację paradoksu nie można jednak udowodnić, że każdy nie-stos jest stosem (np. każdy pies, bez wątpienia, jest nie-stosem). Wystarczy pamiętać, że nawet 30 tys. ziaren nie tworzy stosu jeśli jest, dla przykładu, równomiernie rozsypanych. Można natomiast z powyższej argumentacji wywnioskować, że każda „odpowiednio" usypana ilość ziaren nie będąca stosem jest stosem.

Na uwagę zasługuje pewien kluczowy dla każdej odmiany paradoksu stosu element, związany z tym, iż w długim ciągu kolejnych kroków rozumowania nie istnieje miejsce, w którym rozumowanie to można zakończyć. W przypadku argumentacji dotyczącej stosu, nie istnieje taka ilość k odpowiednio usypanych ziaren, która byłaby nie-stosem, podczas gdy $k+1$ byłaby stosem. Ta niezwykle istotna dla paradoksu kwestia, będąca sednem problemu nieostrości jest szczególnie dobrze widoczna w stoickiej wersji paradoksu:

Stoicka wersja paradoksu stosu[5]

Krok 1. *Przesłanka pierwsza*: 30 000 ziaren pszenicy tworzy stos.
Przesłanka druga: Nie jest prawdą, że (30 000 ziaren pszenicy tworzy stos, a 29 999 ziaren pszenicy nie tworzy stosu).
Wniosek: 29 999 ziaren pszenicy tworzy stos.

Krok 2. *Przesłanka pierwsza*: 29 999 ziaren pszenicy tworzy stos.
Przesłanka druga: Nie jest prawdą, że (29 999 ziaren pszenicy tworzy stos, a 29 998 ziaren pszenicy nie tworzy stosu).
Wniosek: 29 998 ziaren pszenicy tworzy stos.

•

•

•

Krok 29 998 *Przesłanka pierwsza*: 3 ziarna pszenicy tworzą stos.
Przesłanka druga: Nie jest prawdą, że (3 ziarna pszenicy tworzą stos, a 2 ziarna pszenicy nie tworzą stosu).
Wniosek: 2 ziarna pszenicy tworzą stos.

Krok 39 999 *Przesłanka pierwsza*: 2 ziarna pszenicy tworzą stos.
Przesłanka druga: Nie jest prawdą, że (2 ziarna pszenicy tworzą stos, a 1 ziarno pszenicy nie tworzy stosu).
Wniosek: 1 ziarno pszenicy tworzy stos.

Wyżej zaproponowane formalne przedstawienia paradoksu stosu oraz nie--stosu, zarówno w postaci serii zapytań typowej dla starożytnych filozofów, jak i w formie indukcji matematycznej; zakłada równoważność obu tych wersji: serii pytań oraz indukcji matematycznej. Uznanie tej równoważności nie jest jednak powszechne, a jej odrzucenie wiąże się z opinią, iż paradoks stosu *de facto* nie dotyczy indukcji matematycznej i może być przedstawiony bez jej wykorzystania[6]. Wydaje się jednak, iż pogląd ten jest błędny. Dowodem na to, iż w argumentacji stosu indukcja matematyczna jest

[5] Łatwo zauważyć, że skoro tautologią klasyczną jest formuła $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$, zdanie „Jeżeli k ziaren pszenicy tworzy stos, to $k-1$ ziaren pszenicy tworzy stos" jest równoważne zdaniu „Nie jest prawdą, że (k ziaren pszenicy tworzy stos, a $k-1$ ziaren pszenicy nie tworzy stosu)".

[6] Pogląd, iż indukcja matematyczna jest istotnym elementem w argumentacji stosu, odrzuca na przykład Williamson, [1994], s. 42.

istotnym i nieusuwalnym elementem może być następujący, prosty przykład wyjątkowo długiej, czyli wydawać by się mogło wystarczającej dla zaistnienia paradoksu, serii pytań:

Czy liczba −10 000 jest ujemna?
Czy dodając 0,00001 do liczby −10000 otrzymujemy liczbę ujemną?
Czy dodając 0,00001 do liczby −9999,99999 otrzymujemy liczbę ujemną?
Czy dodając 0,00001 do liczby −9999,99998 otrzymujemy liczbę ujemną?
Czy dodając 0,00001 do liczby −9999,99997 otrzymujemy liczbę ujemną?
Czy dodając 0,00001 do liczby −9999,99996 otrzymujemy liczbę ujemną?
Czy dodając 0,00001 do liczby −9999,99995 otrzymujemy liczbę ujemną?

Odpowiedzią na pierwszy miliard (!) pytań jest „Tak". Czy to znaczy, że mamy do czynienia z paradoksem stosu? Dlaczego, mimo perspektywy tak ogromnej ilości odpowiedzi trafnie spostrzegamy, że rozumowanie to nie prowadzi do paradoksu? Dlaczego miliard takich samych, twierdzących odpowiedzi nie wystarcza dla zaistnienia paradoksu? Otóż, przyczyną tego stanu rzeczy jest to, że wcale nie zajmujemy się miliardem pytań i odpowiedzi, lecz właśnie korzystając z dobrodziejstwa indukcji matematycznej, jesteśmy w stanie dać błyskawiczną i co ważniejsze prawidłową ocenę sytuacji. Z paradoksem nie mamy do czynienia wówczas, gdy na bardzo wiele pytań musimy dać jedną i tę samą odpowiedź, lecz dopiero wówczas, gdy istnieje równoważna tej serii postać skróconej argumentacji mającej formę indukcji matematycznej, a ponadto odpowiedzi na pytania tworzące argumentację indukcji matematycznej są jednakowe. Wcześniej podana seria pytań będzie tworzyła argumentację stosu, o ile okaże się równoważna następującej:

Czy liczba −10 000 jest ujemna?
Czy dodając 0,00001 do dowolnej liczby ujemnej *a* otrzymujemy liczbę ujemną?

Oczywiście, dwa wyżej przedstawione pytania są równoważną postacią wcześniej podanej nieskończonej serii pytań. Jednak, o ile odpowiedź na pierwsze pytanie jest niewątpliwie twierdząca, o tyle nie ma jednej odpowiedzi na pytanie drugie: ani twierdzącej ani przeczącej. Drugie pytanie jest po prostu źle postawione. Niektóre liczby ujemne powiększone o 0,00001 nadal dają liczbę ujemną podczas, gdy inne liczbę dodatnią lub zero. Okazuje się więc, że paradoks stosu istotnie opiera się na fakcie, iż do jakiejkolwiek ilości ziaren nie tworzących stosu dodamy jedno ziarno, zawsze z nie-stosu otrzymamy nie-stos, jak również odejmując jedno ziarno od dowolnej ilości ziaren tworzących stos, zawsze ze stosu otrzymamy stos. To właśnie konkretna postać kroku indukcyjnego, będącego odpowiednikiem serii zapytań pokazuje, czy mamy do czynienia z dopuszczalnym, choć paradoksalnym rozumowaniem:

Jeśli dwie odpowiednio usypane ilości ziaren różnią się jednym ziarnem, to albo obie tworzą stos, albo obie nie tworzą stosu;

czy też może z ewidentnie fałszywym rozumowaniem, które w celu uniknięcia fałszywości musi zostać w pewnym momencie przerwane:

> *Jeśli dwie liczby różnią się wartością o* 0,00001, *to albo obie są dodatnie, albo obie są ujemne.*

Można wręcz przyjąć, że gdyby nie nasze głębokie przekonanie o prawdziwości kroku indukcyjnego wyrażającego fakt, iż dodanie jednego ziarna do nie-stosu nie czyni zeń stosu, jak również to, że odjęcie od stosu jednego ziarna nie czyni ze stosu nie-stos, mielibyśmy duże trudności z dostrzeżeniem paradoksu. Za każdym razem, w konkretnej sytuacji musielibyśmy analizować serię przypadków związanych z odpowiednimi pytaniami.

Istnieje jednak jeszcze inny argument, uzasadniający nierozerwalność rozumowania charakterystycznego dla paradoksów stosu od zasady indukcji matematycznej. Otóż, wyrażenia dające wykorzystać się w argumentacjach stosu są tradycyjnie uznawane za *tolerancyjne*, w tym sensie, iż jesteśmy skłonni stosować dane wyrażenie na określenie nie jednego obiektu (zjawiska), lecz serii różnych obiektów (zjawisk). To właśnie możliwość, a nawet konieczność ignorowania tych, drobnych, chociaż niekiedy łatwo dostrzegalnych, różnic świadczy o tolerancyjności danego wyrażenia[7]. Okazuje się jednak, że ta, tak przecież istotna, własność jest wyrażalna i wykorzystana jedynie w argumentacji stosu w wersji opartej na indukcji matematycznej. W przypadku paradoksu stosu zasada ta, zwana *zasadą tolerancji*[8], mówi, że[9]: *jeśli zbiór n ziaren pszenicy tworzy stos* (*nie-stos*), *to zbiór* $n-1$ ($n+1$) *ziaren pszenicy również tworzy stos* (*nie-stos*). To właśnie silne przekonanie, że ta zasada jest, w oczywisty sposób prawdziwa, jest sednem całego problemu. Gdyby, w jakiś sposób można było wykazać jej fałszywość, problem paradoksu stosu zniknąłby raz na zawsze. Przecież, jeśli nie uznajemy paradoksalności argumentacji, która w niewyobrażalnie długiej serii pytań stawia ten sam problem odejmowania od danej liczby wartości 0,00001, to tylko dlatego,

---

[7] Dopiero kumulacja odpowiednio dużej ilości tych drobnych, nieznaczących różnic daje różnicę znaczącą. Interesujący przykład zastosowania drobnych, nieznaczących ustępstw w dyskusji, które w efekcie większego nagromadzenia prowadzą do znaczących i najczęściej niechcianych konkluzji podaje Platon, który, w szóstej księdze *Państwa*, ustami Adejmanta tak oto charakteryzuje sposób w jaki Sokrates zwykł prowadzić dialog: „Sokratesie, nikt nie potrafił spierać się z tobą o ten punkt. Ale kiedy się ciebie słucha, jak mówisz takie rzeczy jak teraz, to zawsze się człowiekowi robi coś w tym rodzaju, ma się wrażenie, że człowiek nie ma wprawy w pytaniu i w odpowiadaniu, więc go twoja myśl z pomocą każdego pytania odrobinę na bok odwodzi, a jak się tych drobiazgów nazbiera, to się w końcu pokazuje błąd wielki i coś przeciwnego, niż było zrazu.", Platon, *Państwo. Prawa*, *Państwo*, VI, 487 B, s. 190. To Sokratesowe przeprowadzanie rozmówcy od danego stanowiska do stanowiska przeciwnego przy pomocy licznych drobnych kroków jest doskonałym przykładem rozumowania stosu, zastosowanego do wyznawanych przez człowieka, konkretnych poglądów.

[8] Zachodzi tu zbieżność nazwy z inną, tym razem, carnapowską zasadą tolerancji, głoszącą wolność wyboru rodzaju weryfikacji zdań, patrz Bocheński, [1954], s. 67.

[9] Por. Sainsbury, [1988], s. 29.

że doskonale zdajemy sobie sprawę, iż nie jest prawdą zdanie: *jeśli od dodatniej liczby a odejmiemy* 0,00001, *to otrzymamy liczbę dodatnią*. Innymi słowy, zdajemy sobie sprawę z faktu, że w tym przypadku nie jest prawdą odpowiednia postać zasady tolerancji.

Można więc przyjąć, że o ile istnienie paradoksu w postaci indukcji matematycznej implikuje istnienie tego paradoksu w postaci serii pytań, o tyle nie jest prawdą, że każda seria pytań, na które istnieje jedna i ta sama odpowiedź tworzy argumentację paradoksu stosu, niezależnie od wyniku zastosowania indukcji matematycznej. Argumentacja w postaci serii pytań jest więc paradoksalną argumentacją stosu pod warunkiem, że istnieje równoważne jej rozumowanie, którego istotną częścią jest odpowiednia postać zasady tolerancji, czyli takie rozumowanie, które wykorzystuje właśnie zasadę indukcji matematycznej.

Zupełnie odrębną kwestią jest to, czy faktycznie wszystkie osoby trafnie rozpoznające paradoks stosu miały, względnie mają znajomość *zasady indukcji matematycznej*. Można i chyba należy przyjąć, że nie. To jednak wcale nie oznacza, że osoby te nie mogły, względnie nie mogą intuicyjnie a zarazem poprawnie stosować tę właśnie zasadę. Sytuacja jest w pełni analogiczna do tej, w której poprawnie, choć intuicyjnie, a więc niezupełnie świadomie, stosujemy prawa logiczne. Przecież prawa te, jak chociażby zasada niesprzeczności czy prawo wyłączonego środka, mogą wydawać się oczywiste nawet dla kogoś, kto nie posiada umiejętności ich sformułowania, czy nawet wysłowienia.

Oczywiście, „stos” nie jest jedynym wyrażeniem prowadzącym do podobnych trudności. Łatwo w powyższej argumentacji zastąpić wyraz „stos” innymi takimi jak chociażby „łysy”, „dziecko”, czy „starzec”.

Paradoks łysego[10]

Łysy: Człowiek, który nie ma żadnego włosa na głowie jest łysy.
Jeśli człowiek, który ma *n* włosów na głowie jest łysy, to człowiek mający n+1 włosów na głowie również jest łysy.
Zatem, człowiek posiadający dowolną ilość włosów na głowie jest łysy.
Innymi słowy każdy jest łysy.

Niełysy: Człowiek, który ma sto tysięcy włosów na głowie jest niełysy.
Jeśli człowiek, który ma *n* włosów na głowie jest niełysy, to człowiek mający n−1 włosów na głowie również jest niełysy.
Zatem, człowiek posiadający dowolną ilość włosów na głowie jest łysy[11].
Innymi słowy każdy jest niełysy.

---

[10] Tak jak w przypadku paradoksu stosu, tu również zakładamy swoistą równomierność, względnie jakąś „odpowiednią” prawidłowość w rozmieszczeniu *n* włosów na głowie.

[11] Analogicznie do paradoksu stosu, argumentacja paradoksu łysego dowodzi, iż każdy człowiek, którego ilość włosów na głowie jest równa lub mniejsza od stu tysięcy jest niełysy.

Paradoks noworodka[12]

I. Człowiek, od którego urodzenia upłynęła minuta jest noworodkiem.
Jeśli człowiek, który ma n minut życia jest noworodkiem, to człowiek mający $n+1$ minut życia również jest noworodkiem.
Zatem, człowiek w dowolnym wieku jest noworodkiem.
Innymi słowy każdy człowiek jest noworodkiem.

II. Człowiek, od którego urodzenia upłynęło sto lat jest nie-noworodkiem.
Jeśli człowiek, który ma n minut życia jest nie-noworodkiem, to człowiek mający $n-1$ minut życia również jest nie-noworodkiem.
Zatem, człowiek w dowolnym wieku jest nie-noworodkiem.
Innymi słowy każdy człowiek jest nie-noworodkiem.

Podobnie, możemy dowieść, że każda farba ma kolor zarazem czerwony, jak i nie-czerwony, żółty i nie-żółty, czy też jakikolwiek inny.

Paradoks koloru czerwonego

Załóżmy, że mamy dziesięć litrów farby koloru czerwonego.
Jeśli dziesięć litrów farby czerwonej zmieszane z n kroplami farby nie-czerwonej ma kolor czerwony, to dziesięć litrów farby czerwonej zmieszane z $n+1$ kroplami farby nie-czerwonej ma kolor czerwony.
Zatem, dziesięć litrów farby czerwonej zmieszane z dowolną ilością farby nie-czerwonej ma kolor czerwony.
Innymi słowy kolor nie-czerwony jest czerwony.

Paradoksalnymi mogą być także nazwy abstrakcyjne.

Paradoks zabójstwa[13]

Pozbawienie człowieka jednej kropli krwi nie jest zabójstwem.
Jeśli pozbawienie człowieka n kropli krwi nie jest zabójstwem, to pozbawienie człowieka $n+1$ kropli krwi też nie jest zabójstwem.
Zatem, pozbawienie człowieka dowolnej ilości krwi nie jest zabójstwem.
Innymi słowy nie można zabić człowieka pozbawiając go krwi.

Innym faktem nie związanym z argumentacją jest to, iż każdy kto ma więcej niż sto tysięcy włosów na głowie też jest niełysy – skoro niełysym jest ten kto ma równe sto tysięcy włosów na głowie. Stąd każdy człowiek jest zarazem łysy i niełysy, o ile rozmieszczenie włosów na jego głowie jest odpowiednie.

[12] Paradoks starca powstaje z paradoksu noworodka przez zamianę wyrazu „noworodek" na „nie-starzec" oraz „nie-noworodek" na „starzec".

[13] Przykład podany przez Sorensena, [1990].

Argumentację stosu można znaleźć u samego Horacego, który w *Liście do Augusta* pisze[14]:

„Czy poetę, który umarł sto lat temu, należy zaliczyć do dawnych i doskonałych, czy też do marnych i nowych? Niechaj kres sporom postawi jakaś wyraźna granica wieku! „Otóż znakomitym i starym poetą niech będzie ten, kto skończył sto lat". A do jakiej kategorii zaliczyć poetę, któremu do tej granicy brakuje miesiąca lub roku? Albo też takich, którymi wzgardzi teraźniejszość lub przyszłość? „Ten, który jest młodszy o krótki miesiąc lub cały rok, będzie słusznie zaliczony do starych poetów". Korzystam z zezwolenia i tak, jak wyrywa się włosy z końskiego ogona, tak ujmuję rok po roku, aż pokonany dowodem zmniejszającej się ilości podda się ten, kto odwołuje się do kalendarza i wartość poety mierzy przy pomocy lat i nie podziwia niczego, czego nie uświęciła Libityna".

Przedstawione wyżej przykłady pokazują, że paradoks stosu ma postać indukcji skończonej. Jednak, ze względu na tę indukcję można wyróżnić dwie kategorie argumentacji stosu. Jedną stanowią przypadki, w których ilość kroków rozumowania indukcyjnego jest znana, np. dowód pokazujący, że człowiek niemający w ogóle włosów na głowie nie jest łysy. Do drugiej należą te rozumowania, które co prawda również muszą składać się ze skończonej ilości kroków, jednak nie jest wiadome jaka jest faktyczna ilość tych kroków. Przykładem tego typu rozumowania jest dowód pokazujący, że każdy człowiek jest łysy. Wiadomo, że ilość włosów na głowie dowolnego człowieka jest skończona, jednak nie musimy wiedzieć jaka jest ta ilość, aby dowieść, że człowiek o tej właśnie ilości włosów jest łysy. Rozumowania drugiej kategorii do złudzenia przypominają indukcję matematyczną. W końcu, jeśli dowodzone jest twierdzenie, że dla dowolnej liczby naturalnej n:

$$1 + 2 + ... + n = 0{,}5 \cdot n \cdot (n + 1),$$

to chociaż rozumowanie indukcyjne jest nieskończone, dotyczy wyłącznie skończonych wartości n. Nieskończoność rozumowania nie oznacza, iż powyższe twierdzenie jest prawdziwe dla nieskończonej wartości n. Ponieważ n jest liczbą naturalną, zawsze jest liczbą skończoną. Wspomniana nieskończoność jest jedynie gwarantem tego, iż dowód przeprowadzony przy pomocy odpowiedniego, czyli nieskończonego rozumowania obejmie wszystkie możliwe, ale zawsze skończone przypadki. Różnica między dowodem łysości

---

[14] *Epistula II, 1*, w tłumaczeniu S. Stabryły, w *Rzymska krytyka i teoria literatury*, [1983], s. 25. Zdania ujęte w cudzysłów wyrażają myśli fikcyjnego oponenta, z którym dyskutuje autor listu.

człowieka posiadającego na głowie dowolną ilość włosów a dowodem wyżej przytoczonego twierdzenia matematyki jest taka, że ilość włosów jaką posiada człowiek na głowie nie jest zupełnie dowolna. Co więcej, należy przyjąć, że jest ograniczona. Nie jest jednak trudno zauważyć, iż przytoczony wcześniej dowód łysości każdego człowieka w ogóle nie uwzględnia, bo nie musi uwzględniać faktu jakiegokolwiek ograniczenia ilości włosów. Dlatego też, ze względu na swój kształt, dowód ten wygląda dokładnie tak jak standardowy dowód indukcji matematycznej.

Symboliczna postać argumentacji stosu, w zależności od tego czy reprezentuje indukcję skończoną, czy „praktycznie" nieskończoną ma następujący schemat:

Albo: p_1;
jeśli p_1, to p_2;
jeśli p_2, to p_3;
•
•
•
jeśli p_{n-1}, to p_n;
Zatem: p_n.

Albo: p_1;
jeśli p_1, to p_2;
jeśli p_2, to p_3;
•
•
•
jeśli p_{n-1}, to p_n;
•
•
•
Zatem: dla dowolnego n, p_n.

W wersji skróconej oba schematy można przedstawić odpowiednio:

Albo: p_1;
dla dowolnego $k \in \{2, ..., n\}$, jeśli p_{k-1}, to p_k;
Zatem: dla dowolnego $k \in \{2, ..., n\}$, p_k.

Albo: p_1;
dla dowolnego $n \in N-\{0,1\}$, jeśli p_{n-1}, to p_n;
Zatem: dla dowolnego $n \in N-\{0,1\}$, p_n.

Podstawą rekonstrukcji nazwowego odpowiednika powyższych, zdaniowych schematów rozumowania stosu może być schemat sylogizmu kategorycznego trybu *Barbara*:

	Każde M jest P;	Symbolicznie:	*MaP*
	Każde S jest M;		*SaM*
więc:	*Każde S jest P.*		*SaP*

Marius Victorinus, teoretyk retoryki żyjący w czwartym wieku n.e. przedstawił w swym dziele *Expositione in Rhetor* (II 27) *sylogizm sorites*, uogólnioną postać powyższego schematu tworząc jego łańcuszkową wersję zaliczaną do tak zwanych polisylogizmów[15]:

Każde F_1 *jest* F_2*;*
Każde F_2 *jest* F_3*;*
.
.
.
Każde F_{n-1} *jest* F_n*;*
więc: *Każde* F_1 *jest* F_n*.*

„Arystotelejska" wersja schematu *sorites* ustępuje jednak schematom zdaniowym, które wydają się znacznie bliższe rozumowaniu charakterystycznemu dla paradoksu stosu.

Serię, przedstawionych wyżej, przykładów paradoksalnych rozumowań zamknijmy w, wydawać by się mogło, paradoksalny sposób, przytaczając paradoks Hao Wanga, który jak pokazał to Michael A. E. Dummett, niekoniecznie musi być paradoksem, mimo iż stosuje argumentację *sorites* do predykatu „jest małą liczbą". Dylemat ten dotyczy liczb naturalnych[16]:

Paradoks Wanga
0 jest małą liczbą;
Jeśli *n* jest małą liczbą, to *n*+1 jest małą liczbą:
Zatem, każda liczba naturalna jest mała.

Dummett podaje taką interpretację predykatu „jest małą liczbą", przy której nie tylko obie przesłanki, lecz i wniosek, są prawdziwe: *liczba naturalna jest mała, jeśli jest, zarazem, większa od skończonej i mniejsza od nieskończonej ilości liczb naturalnych.* Każda liczba naturalna jest w takim sensie mała, a więc argumentacja paradoksu Wanga, faktycznie, nie jest paradoksalna.

Wniosek jaki wynika z tego przykładu jest dość prosty: predykat „jest małą liczbą" został zdefiniowany w ścisły, matematyczny sposób przestał stanowić jakikolwiek problem. Z punktu widzenia własności jaką nadał mu Dummett, predykat ten przestał być tolerancyjnym: albo dana liczba jest zarazem większa od skończonej i mniejsza od nieskończonej ilości liczb naturalnych, albo nie jest. To precyzyjne, bo matematyczne sformułowanie wyklucza możliwość paradoksalności wnioskowania typu *sorites*. Podobnie, nie jest możliwe przejść przy

[15] Williamson, [1994], s. 31.
[16] Dummett, [1975], s. 303–308.

pomocy rozumowania stosu od kwadratu do nie-kwadratu: albo dana figura płaska jest kwadratem, albo nie jest. Tym brakiem tolerancyjności wykazują się wszystkie wyrażenia matematyki klasycznej.

Przykłady argumentacji stosu przedstawione w tym paragrafie uświadamiają nam wielką mnogość wyrażeń, które nie są odporne na tę argumentację, a w związku z tym mogą stać się przedmiotem prowadzącego do sprzeczności wnioskowania. Wyrażenia dające się wykorzystać w prowadzącym do sprzeczności rozumowaniu przeprowadzanym na wzór argumentacji stosu, są nazywane nieostrymi. Analizie nieostrości poświęcony jest odrębny paragraf, w którym zostanie pokazane, iż wśród filozofów, dość powszechnie uznaną tezą jest ta, zgodnie z którą, każde wyrażenie języka naturalnego jest wyrażeniem nieostrym.

4.1.1. HISTORIA PARADOKSU STOSU

Z obecnie dostępnych, pisanych źródeł historycznych wynika, że paradoks stosu oraz łysego został sformułowany po raz pierwszy przez Eubulidesa w typowej dla starożytnej Grecji postaci serii pytań: *Czy człowiek posiadający na głowie jeden włos jest łysy?*, *Czy człowiek posiadający na głowie dwa włosy jest łysy?*, *Czy człowiek posiadający na głowie trzy włosy jest łysy?* itd. To charakterystyczne powtarzanie pytania dla coraz to nowych, układających się w pewien malejący względnie rosnący ciąg, kolejnych wartości, najprawdopodobniej sprawił, że J. Barnes uznał, iż pierwszym człowiekiem stosującym argumentację stosu[17] był starotestamentowy Abraham „targujący"[18] się z Bogiem o uratowanie Sodomy przed zagładą[19]: „W końcu przybliżył się jeszcze bardziej [do Jahwe] i zapytał: Czy razem z bezbożnymi zamierzasz wytracić także sprawiedliwych? Może znajdzie się w tym mieście choć pięćdziesięciu sprawiedliwych? Czy postanowiłeś ich także wygubić? Czy nie zechcesz ocalić całego miasta ze względu na owych sprawiedliwych? [...] Rzekł wtedy Jahwe: Jeśli znajdzie się w Sodomie pięćdziesięciu sprawiedliwych, to ze względu na nich oszczędzę całe miasto. Odpowiedział na to Abraham: Niech mi będzie wolno jeszcze raz przemówić do Ciebie, o Panie, choć jestem tylko

[17] W całym rozdziale, wyrażenie „argumentacja stosu" oznacza nie tylko rozumowanie dotyczące wyrazu „stos" lub „nie-stos", ale każde rozumowanie, które wielokrotnie wykorzystuje krok wnioskowania wychodzącego od danego przypadku i prowadzącego do następnego nieznacznie różniącego się od danego. Rozumowanie takie będziemy też określali mianem *sorites*.

[18] Naturalnie, często w tym kontekście używane słowo „targowanie się" jest mocno na wyrost. Już z cytowanego poniżej fragmentu Księgi Rodzaju widać, że Abraham przyjmuje postawę człowieka, który chociaż dość natrętnie, to jednak prosi, a nie targuje się.

[19] Pismo Święte Starego i Nowego Testamentu, Księga Rodzaju, 18, 23–28 (s. 36).

prochem i pyłem. Być może, iż do pięćdziesięciu sprawiedliwych zabraknie pięciu. Czy z powodu braku tych pięciu zniszczysz całe miasto? Nie – odpowiedział. – Nie zniszczę owego miasta, jeśli znajdzie się w nim przynajmniej czterdziestu pięciu sprawiedliwych". W podobny sposób, Abraham ubłagał Boga o uratowanie miasta ze względu na, kolejno, trzydziestu, dwudziestu i na koniec dziesięciu sprawiedliwych. Oczywiście, rozmowa Abrahama z Bogiem miała na celu uratowanie sprawiedliwych mieszkańców Sodomy przed zagładą, nie zaś dowodzenie Bogu, że jeśli jest gotów zrezygnować z ukarania miasta z powodu pięćdziesięciu sprawiedliwych, to jest również skłonny zrezygnować z zagłady miasta także z powodu dziesięciu sprawiedliwych. Mamy tu raczej do czynienia z natrętnym proszeniem, niż z rozumowaniem charakterystycznym dla paradoksu stosu. W przypadku argumentacji stosu powinniśmy dysponować krokiem indukcyjnym w mniej więcej następującej postaci: *jeśli Bóg nie powinien zniszczyć miasta z powodu n sprawiedliwych mieszkańców, to nie powinien zniszczyć miasta także z powodu* $n-10$ *sprawiedliwych mieszkańców*. Takie postawienie sprawy mogłoby prowadzić do stwierdzenia, że Bóg nie powinien zniszczyć miasta także wówczas, gdy w mieście nie byłoby żadnego sprawiedliwego mieszkańca. W *Księdze Rodzaju* nie mamy jednak podobnego problemu. Motywem dyskusji Abrahama z Bogiem jest raczej przekonanie, iż człowiek niewinny nie powinien odpowiadać za złe uczynki innego człowieka. Zgodnie z takim właśnie odczuciem sprawiedliwości Bóg rozstrzyga problem prawych mieszkańców Sodomy, wyprowadzając ich wszystkich z miasta tuż przed mającą się dokonać zagładą. Wydaje się więc, iż przypuszczenie Barnesa jest na wyrost. Nie oznacza to, rzecz jasna, iż Eubulides był tym, który jako pierwszy zastosował argumentację stosu. Już bowiem parokrotnie cytowany w poprzednich rozdziałach Zenon z Elei, na przeszło sto lat przed Eubulidesem, przedstawił interesujące rozumowanie mające na celu wykazanie zawodności świadectwa opartego na danych zmysłowych. Ajdukiewicz referuje rozumowanie Zenona następującymi słowami[20]:

Paradoks Zenona niepewności świadectwa zmysłów (worka zboża)
„Wierzycie – powiada ów Zenon – świadectwu własnych uszu, gdy słyszycie hałas przy wysypywaniu worka zboża na ziemię. Sądzicie, że wysypywane z worka zboże naprawdę sprawia szmer. Ale to być nie może. Bo po pierwsze: jedno ziarnko, spadając na ziemię, szmeru żadnego nie sprawia. A po drugie: jeśli x ziarnek szmeru nie sprawia, to i $x+1$ ziarnek też głosu nie wyda. Gdyby więc rzucić po kolei 1, 2, 3 itd. ziarnek zboża na ziemię, to gdyby jakaś ich ilość szmer istotnie sprawiała, to musiałaby wśród nich istnieć najmniejsza ilość ziarnek głos wydająca: niech by to było np. przy stu ziarnkach. W takim razie 99

[20] Ajdukiewicz, [1931], s. 139.

ziarnek, padając na ziemię, już by szmeru nie sprawiało. Ale to jest niemożliwe, bo gdy x ziarnek padając na ziemię głosu nie wydaje, to i x+1 ziarnek głosu wydać nie może. Zatem żadna ilość ziarnek zboża, padając na ziemię, szmeru żadnego nie sprawia. Nie wierzcie więc własnym uszom. Podobnie można by też podkopać naszą wiarę w świadectwo dotyku, w świadectwo wzroku itd."

Łatwo zauważyć, że przedstawione rozumowanie nie jest wymierzone w jakiekolwiek wyrażenie, w szczególności w nazwę „stos". Nie ma więc na celu pokazanie, że stos jest nie-stosem. Wydaje się, iż jedynym zamiarem Zenona było udowodnienie czegoś z czym każdy powinien się zgodzić, a mianowicie, że zmysły są zawodne. Rozwiązanie tego problemu wymaga uznania, iż istnieje coś, co można określić mianem progu słyszalności, a ponadto próg ten nie wyznacza wyraźnej (ostrej) granicy słyszalności. Tak więc, paradoks Zenona przenosi analizowany w tym rozdziale problem „stosu" z płaszczyzny językowej na pozajęzykową, a ściślej mówiąc fizjologiczną. Należy jednak przyznać, że bez względu na ten fakt, przypomniane tu rozumowanie Zenona niewątpliwie wykorzystuje charakterystyczną dla paradoksu stosu argumentację.

Nie jest więc przesądzone, że tym, który pierwszy zastosował argumentację stosu do udowodnienia tego, że używanie niektórych nazw prowadzi do paradoksalnych wniosków był sam Eubulides. Nie jest jednak wykluczone i to, że jest on faktycznym odkrywcą tego paradoksu. Argumentacja stosu była przecież przed Eubulidesem znana, jednak sam paradoks być może nie. Odrębną kwestię stanowi pytanie, czy Eubulides faktycznie znał, czy może tylko wyczuwał prawdziwą doniosłość tego paradoksu. Williamson wskazuje na różne, istniejące w literaturze przypuszczenia, co do zamiarów Eubulidesa związanych z tym właśnie dylematem. Nie można więc wykluczyć, że Eubulides chciał przy pomocy argumentacji stosu uderzyć w[21]:

- spójność pojęć empirycznych;
- zasadę niesprzeczności;
- prawo wyłączonego środka;
- pluralizm jako koncepcję przyjmującą istnienie więcej niż jednej rzeczy;
- Arystotelejską teorię nieskończoności[22];
- Arystotelejską teorię znaczenia.

Bez względu na trafność tych przypuszczeń, konflikt Eubulidesa z Arystotelesem jest znamienny, zwłaszcza gdy weźmiemy pod uwagę fakt, iż w żadnym dziele Arystoteles nie analizuje paradoksu stosu czy łysego, chociaż rozważa znacznie mniej ważne paradoksy, których fałsz jest wręcz oczywisty, na przykład paradoks stadionu dotyczący łatwej do zauważenia względności prędkości.

---

[21] Williamson, [1994], s. 9.

[22] Chodzi tu o nieskończoność potencjalną.

Mimo milczenia Arystotelesa w kwestii paradoksu stosu, argumentacja właściwa temu dylematowi stawała się coraz ważniejszym elementem dysput filozoficznych. Najprawdopodobniej, początkowo paradoks ten pełnił funkcję chwytu stosowanego w dyskusji dla wprowadzenia oponenta w zakłopotanie. Wydaje się, iż tak właśnie wykorzystywali argumentację stosu zarówno Eubulides, jak i jego uczeń Apollonios Kronos. Jednak już Diodor Kronos (koniec IV/początek III wieku p.n.e.), uczeń Apolloniosa, nauczając dialektyki, jako sztuki dyskutowania opartej na zadawaniu pytań i właściwym na nie odpowiadaniu stworzył pewną teorię analizującą zagadkę stosu. Mimo, iż nie zachowały się żadne teksty Diodora wyraźnie wspominające paradoks stosu, można przypuszczać, że łączył on ten dylemat z problemem ruchu. Jednak jak zauważa Williamson, zachowane fragmenty tekstów Diodora układają się w na tyle nieprzekonywującą całość, że należy przypuszczać, iż treści w nich zawarte zostały wypaczone[23].

Po śmierci Diodora zagadki stosu stały się podstawową bronią w walce dwóch, rywalizujących ze sobą, szkół filozoficznych: Stoi oraz Akademii. Około 273 roku p.n.e. na czele Akademii stanął Arkesilaos z Pitane (ok. 318–242 p.n.e.), który zasłynął tym, iż wprowadził szkołę na drogę sceptycyzmu. Sceptycy Akademii kwestionowali *dogmatyzm* stoików wspierając się paradoksalną argumentacją stosu. W przeciwieństwie do stoików, którzy z racji swoich poglądów na każde pytanie winni zawsze dać, albo twierdzącą, albo przeczącą odpowiedź, mogli pozwolić sobie na powstrzymanie się od zajęcia stanowiska. Tym samym programowe zawieszenie sądów na temat rzeczywistości znalazło u stoików swoje mocne uzasadnienie w postaci logicznego rozumowania wykorzystującego serię pytań wymagających coraz bardziej paradoksalnych odpowiedzi. Mimo doceniania ogromnego znaczenia argumentacji stosu, szkoła stoików dość długo musiała czekać na wypracowanie metody pozwalającej bronić się przed nią. Strategię stanowiącą obronę przed atakami stoików, opartymi między innymi na wspomnianej argumentacji, opracował Chryzyp z Soloi (ok. 277–208 p.n.e.)[24], uznany przez Klemensa Aleksandryjskiego (Titus Flavius Clemens, 150–215) za największego logika, większego od samego Arystotelesa, którego z kolei uważał za największego przyrodnika[25].

Wiadome jest, że interesującemu nas problemowi Chryzyp poświęcił co najmniej dwa dzieła: *O dowodzie z małego przyrostu do Stezagorasa*[26] zajmującego objętość dwóch zwojów papirusu oraz *O argumentach stosu prze-*

---

[23] Williamson, [1994], s. 10.

[24] Tradycyjnie przyjmuje się, iż miejscem urodzenia Chryzypa jest Soloi, jednak Diogenes cytując *Sukcesje filozofów* Aleksandra dopuszcza możliwość, iż Chryzyp urodził się w Tarsie.

[25] Kneale i Kneale, [1962], s. 116.

[26] Diogenes Laertios, VII, 197, s. 465.

ciwko słowom w trzech zwojach[27]. Niestety, tak jak z całej potężnej spuścizny pisarskiej Chryzypa, tak również z obu wspomnianych dzieł zachowały się zaledwie fragmenty. Williamson podejmuje jednak próbę rekonstrukcji stanowiska Chryzypa w kwestii stosu twierdząc, iż stoicy rozwiązywali problem stosu uznając istnienie ostrej granicy między przypadkami, w których dana mnogość ziaren nie tworzy stosu, a przypadkami, w których mamy do czynienia z mnogością tworzącą stos. Swą analizę stosunku stoików do paradoksalnej argumentacji poprzedza przypomnieniem, iż byli oni zwolennikami dwuwartościowości logicznej zdań do tego stopnia, iż wbrew stanowisku Arystotelesa, przyznawali wartość logiczną prawdy lub fałszu nawet zdaniom orzekającym o przyszłości[28]. Konsekwencją takiego stanowiska musi być to, iż wśród ciągu wyrażeń $P_1, ..., P_n$ będących odpowiedziami na pytania $P_1?, ..., P_n?$, pewne muszą mieć postać „Tak", pozostałe zaś „Nie"[29]. Stoicy rozważali serię pytań „Czy i jest małe?" dla liczby naturalnej i należącej do pewnego skończonego, choć odpowiednio długiego ciągu, którego pierwszym elementem jest jeden[30]. Oczywistym, nie tylko dla nich stwierdzeniem było to, iż odpowiedzi na pierwsze i ostatnie pytanie są oczywiste i przeciwne – odpowiedzią na pierwsze pytanie jest „Tak", na ostatnie zaś „Nie". Naturalnie, pozostałe odpowiedzi tworzą ciąg monotoniczny w tym sensie, że żadne „Tak" nie występuje w ciągu między dwoma „Nie"[31]. Zgodnie z tym założeniem, jeśli pewne i jest małe, to $i-1$ również jest małe oraz jeśli pewne i nie jest małe, to także $i+1$ nie jest małe. Williamson wnioskuje, iż wyznając dwuwartościowość wszystkich możliwych zdań stoicy musieli zaakceptować fakt, iż wśród wszystkich liczb tworzących rozważany ciąg musi istnieć taka i_0, że odpowiedziami na dwa pytania „Czy i_0 jest małe?" oraz „Czy i_0+1 jest małe?" muszą być odpowiednio „Tak" oraz „Nie". Innymi słowy, w monotonicznym ciągu wszystkich odpowiedzi musi istnieć element będący ostatnim wystąpieniem odpowiedzi „Tak", za którym występuje element będący pierwszym wystąpieniem odpowiedzi „Nie". Swój wniosek Williamson uzasadnia przytaczając przykłady konkretnych wypowiedzi Chryzypa i innych anonimowych stoików. I tak, zgodnie ze świadectwem Cycerona (Marcus Tullius Cicero, 106–43 p.n.e.), Chryzyp miał porównywać siebie do utalentowanego woźnicy, który potrafi zatrzymać powożony przez siebie rydwan w ostatnim momencie,

[27] Angielskie tytuły obu dzieł podane przez Barnesa to *On the Little-by-Little Argument* oraz *On Sorites Arguments Against Words*, [1982], s. 41–42.

[28] Stanowisko Arystotelesa w kwestii zdań orzekających o przyszłości stało się impulsem dla konstrukcji logik wielowartościowych.

[29] $P_1?, ..., P_n?$ są naturalnie pytaniami rozstrzygnięcia, Ajdukiewicz [1965], s. 88.

[30] Barnes, [1982], s. 30.

[31] Wobec wcześniej przyjętego stwierdzenia dotyczącego pierwszej i ostatniej odpowiedzi, założenie to oznacza, że również żadna odpowiedź „Nie" nie występuje między dwiema odpowiedziami „Tak".

tuż przed przepaścią. Krawędź oznaczająca z jednej strony koniec bezpiecznej jazdy, z drugiej zaś początek spadania, jest zdaniem Williamsona odpowiednikiem ostrej granicy oddzielającej odpowiedzi twierdzące od przeczących w serii pytań tworzących argumentację stosu. Ponadto, stoicy stanowczo odrzucali stanowisko, zgodnie z którym istnieją stopnie cnotliwości. Ich zdaniem każdy jest albo perfekcyjnie cnotliwy, albo nie-cnotliwy. Powoływali się przy tym na przykład tonącego człowieka, który ratując swoje życie wypływał na powierzchnię. Człowiek ten albo był tonący, albo nie. Tonął do momentu, gdy nie wydobył się ponad powierzchnię wody, zaś z chwilą wydobycia się nagle i natychmiast przestawał tonąć. Operując terminem „wrażenia poznawcze"[32], Williamson stwierdza, iż także w kwestii tych właśnie wrażeń Chryzyp był zwolennikiem istnienia ostrych granic: albo wrażenia te wprowadzają w błąd, albo nie. Przyjęcie założenia istnienia ścisłej odpowiedzi w kwestii stosu Williamson dodatkowo uzasadnia przypomnieniem faktu, iż stoicy oddzielali problem prawdziwości danego zdania od ludzkiej wiedzy na temat tej prawdziwości: „Czy liczba gwiazd jest parzysta?"[33]. Taka postawa umożliwiała programowe zawieszenie sądu w danej sprawie. To właśnie zawieszenie sądu może być, zdaniem Williamsona, podstawą rozwiązania problemu stosu. Człowiek, który, zdaniem stoików, zasługiwałby na miano

[32] Wrażenie poznawcze jest podstawą sądu, który nie sposób odrzucić: *zero jest liczbą małą, jeden jest liczbą małą*, itd. Wrażenia niepoznawcze mogą wprowadzać w błąd. Dochodzimy do nich stosując np. argumentację stosu. Między serią wrażeń poznawczych stwierdzających, iż pewne liczby (zero, jeden, itd.) są niewątpliwie małe, a serią wrażeń poznawczych stwierdzających, że pewne liczby są niewątpliwie nie-małe (dziesięć milionów tysięcy itd.) istnieje szereg wrażeń niepoznawczych, które należy przyjąć wbrew naturalnym wątpliwościom, a czasami nawet wbrew oczywistościom, tylko dlatego, że stosujemy argumentację stosu: *pięćdziesiąt jest liczbą małą, ..., sto jest liczbą małą, ..., dziesięć tysięcy jest liczbą małą, ...*

[33] Niestety, przykład ten jest dość niefortunny. Pozornie pozamatematyczny problem stosu miesza się w nim z matematyczną kwestią parzystości liczb. Można przypuszczać, że zdaniem stoików oraz Williamsona ([1994, s. 15) liczba gwiazd jest ściśle określona, a zatem istnieje odpowiedź na to pytanie. Z tego punktu widzenia, przykład ten różni się diametralnie od kwestii stosu i nie może być traktowany jako argument za istnieniem ostrej granicy wyrazu „stos" – „parzystość" jest dobrze zdefiniowana podczas, gdy „stosowatość" nie. Okazuje się jednak, iż „gwiazda" nie jest terminem, którego zakres posiada ostre granice. Istnieją bowiem obiekty, co do których nie wiadomo czy są gwiazdami czy nie są. Zatem parzystość ich liczby również nie jest sprawą oczywistą. Przykład pytania o parzystość ilości gwiazd jest więc dobrym porównaniem dla kwestii stosu, bo wcale nie jest oczywiste istnienie jednoznacznej odpowiedzi na to pytanie.

Reasumując, pytanie o parzystość liczby gwiazd jest argumentem na rzecz istnienia ostrych granic tylko wówczas, gdy dotyczy problemu dobrze zdefiniowanej parzystości. Przy takim jednak rozumieniu pytanie to dotyczy problemu nieporównywalnego z kwestią stosu, gdyż jest przykładem wziętym z matematycznego świata i nie odpowiada problemom świata pozamatematycznego. Jednak okazuje się, że pytanie to dotyczy kwestii świata poza-matematycznego, lecz wówczas nie może uzasadniać założenia istnienia ostrych granic, gdyż odpowiedź na to pytanie jest tak samo trudna jak odpowiedź na pytania należące do argumentacji stosu, które dotyczą tzw. *problemów granicznych* – patrz dalsze paragrafy.

mądrego winien więc dysponować możliwością udzielenia nie dwóch, lecz trzech odpowiedzi: „Tak", „Nie" oraz „Nie wiem". Jeśli stoik wie, że *i* jest małe, na pytanie „Czy *i* jest małe?" powinien odpowiedzieć „Tak". Jeśli wie, że *i* nie jest małe, na to samo pytanie powinien odpowiedzieć „Nie". Jeśli zaś nie wie, czy *i* jest małe, czy nie jest małe, powinien odpowiedzieć „Nie wiem". Niestety, pomysł ten wydaje się dobrym rozwiązaniem, gdy rozważany jest w oderwaniu od serii pytań, gdy zapominając o długim ciągu subtelnie różniących się między sobą przypadków zastanawiamy się jedynie nad pewnymi, odpowiednio wybranymi przypadkami. Przyjmijmy bowiem, że taktykę udzielania jednej z trzech możliwych odpowiedzi stosujemy w przypadku serii pytań. Po serii jasnych i nie budzących wątpliwości odpowiedzi „Tak" (ewentualnie „Nie") powinna nastąpić seria odpowiedzi „Nie wiem". Problem jednak w tym, że nie wiadomo, w którym momencie seria „Tak" ma się skończyć ustępując miejsca serii „Nie wiem". Podobną, nierozwiązywalną trudność stanowi zidentyfikowanie miejsca ostatniej odpowiedzi „Nie wiem" oraz pierwszej odpowiedzi „Nie" (ewentualnie „Tak"). Wygląda więc na to, iż metoda trzech odpowiedzi nie tyle rozwiązuje problem stosu, co go przemieszcza dodatkowo go rozmnażając – problem jednej wątpliwej granicy został zastąpiony problemem dwóch równie wątpliwych granic.

Williamson podkreśla jednak, iż propozycja Chryzypa chociaż niewątpliwie przypomina taktykę udzielania jednej z trzech możliwych odpowiedzi jest inna. Różnica ta jest subtelna, ale faktycznie istnieje[34]. Otóż, Chryzyp zastępuje odpowiedź „Nie wiem" milczeniem. Zdaniem Williamsona, różnica ta jest istotna. Odpowiadając „Nie wiem" na pytanie „Czy *i* jest małe?" stoik stwierdza zarówno to, że nie wie czy *i* jest małe, jak i to że nie wie czy *i* nie jest małe. Ta trzecia z możliwych odpowiedzi oznacza więc niewiedzę człowieka ją wypowiadającego. Strategia *Tak/Nie/NieWiem* może być jednak różnie interpretowana. Mówiąc wprost, dawanie odpowiedzi „Nie wiem" trudniej pogodzić z istnieniem ostrej granicy między przypadkami „Tak" i „Nie". Istnienie tej ostrej granicy wydaje się nie wykluczać strategia powstrzymywania się od odpowiedzi. Stwierdzenie „Nie wiem" jest różne, zarówno od „Tak", jak i od „Nie". Milczenie, natomiast, może oznaczać, że nie wiem, czy w tym przypadku jest „Tak", czy może „Nie".

Załóżmy więc, że to co wiemy, wiemy w sposób jasny i oczywisty. Tak więc, można uznać, że jeśli jest jasne, że *i* jest małe, to naszą odpowiedzią jest „Tak", jeśli jest jasne, że *i* nie jest małe, to naszą odpowiedzią jest „Nie", w pozostałych przypadkach użyjemy trzeciej odpowiedzi „Nie wiem". Tak więc, strategia *Tak/Nie/NieWiem* przybiera tu postać strategii *Tak/Nie/NieJestJasne*. Mówiąc „Nie wiem" coś stwierdzamy, a skoro to co stwierdzamy, stwierdzamy

[34] Williamson, [1994], s. 16.

dlatego, że jest jasne, to[35]: *Jeśli zarówno nie jest jasne, że i jest małe jak i nie jest jasne, że i nie jest małe, to jest jasne, że zarówno nie jest jasne, że i jest małe jak i nie jest jasne, że i nie jest małe.*

Williamson dowodzi równoważności powyższego stwierdzenia z koniunkcją dwóch następujących[36]: *Jeśli nie jest jasne, że i jest małe, to jest jasne, że nie jest jasne, że i jest małe. Jeśli nie jest jasne, że i nie jest małe, to jest jasne, że nie jest jasne, że i nie jest małe.*

Te dwie tezy reprezentują zasadę *S5*:

Jeśli nie jest jasne, że P, to jest jasne, że nie jest jasne, że P;

która w podobnych przypadkach uchodzi za raczej wątpliwą: przecież może być tak, że *nie jest jasne, czy x jest żółte* i zarazem *nie jest jasna ta właśnie niejasność żółtości x*[37]. Zawodność zasady *S5* jest również zgodna z poglądami stoików i szczególnie dobrze widoczna w przypadku stosu: jeśli nie jest jasne, czy jakieś *i* jest małe, to niejasność ta nie jest jasna.[38] Obowiązywanie zasady *S5* dla przypadku argumentacji stosu, oznacza bowiem, iż niejasność tego, czy *i* jest małe implikowałaby to, iż niejasność ta jest jasna, a zatem musielibyśmy znać granicę dzielącą przypadki niewątpliwie małych liczb od liczb, których małość jest niejasna. Trudno jednak zaakceptować podobną konkluzję, dlatego też Williamson proponuje odrzucić strategię *Tak/Nie/NieJestJasne*. Williamson dowodzi, iż konkluzji tej nie zaakceptowałby również sam Chryzyp, który mając wybór między stwierdzeniem „Nie wiem" a milczeniem, wybrałby to drugie. Cytuje Sekstusa Empiryka (II/III w. n.e.), który w swym dziele *Przeciw Profesorom* (VII 416) twierdzi, że skoro w argumentacji stosu ostatnie wrażenie poznawcze sąsiaduje z pierwszym wrażeniem niepoznawczym i oba te wrażenia są od siebie nieodróżnialne, to zgodnie z nauką Chryzypa, w przypadku serii wrażeń różniących się nieznacznie, mądry człowiek w odpowiednim momencie zamilknie i będzie w milczeniu trwał tak długo, aż pojawią się przypadki nie budzące już wątpliwości. Niestety, nawet mądry człowiek nie potrafi stwierdzić, w którym momencie powinien zamilknąć, jak również nie będzie wiedział, od którego momentu znów może wypowiadać sądy odpowiadając na ciąg pytań generujących argumentację stosu. Ponieważ nie istnieje wyraźna granica między przypadkami, gdy *i* jest małą liczbą a tymi, w których nie wiadomo czy *i* jest

---

[35] Williamson, [1994], s. 16.

[36] Dowód tej równoważności Williamson zamieszcza w przypisie nr 21 s. 277, [1994].

[37] Williamson przytacza opinię Hintikki, Lenzena oraz Humberstone'a kwestionujące wartość zasady S5 w kontekście wiedzy reprezentowanej przez zbiór akceptowanych zdań, patrz przyp. 22, s. 277 [1994].

[38] Williamson, [1994], s. 17.

małą liczbą, odpowiadając na pytania „Czy *i* jest małe?" każdy kto chce stosować się do stoickiej zasady milczenia w przypadkach wątpliwych, musi przerwać mówienie „Tak", albo za wcześnie, czyli w miejscu, po którym występują przypadki, w których nadal mógłby poprawnie i bez większego wątpienia odpowiadać „Tak", albo za późno, czyli w miejscu, które występuje po przypadkach, w których odpowiedzią na pytanie powinno być milczenie. Analogiczny problem wiąże się z kwestią zakończenia milczenia i rozpoczęciem dawania odpowiedzi przeczącej „Nie". Powołując się na Barnesa, Williamson twierdzi, iż Chryzyp uważał, że z dwojga złego lepsze jest zamilknąć przed końcem przypadków nie budzących wątpliwości, aniżeli wciąż dawać precyzyjną odpowiedź w przypadkach, które już budzą wątpliwości. Rozumując analogicznie, lepiej jest zaprzestać milczenia po pojawieniu się przypadków niebudzących wątpliwości, niż zacząć udzielać precyzyjnych odpowiedzi, mimo iż wciąż przypadki są wątpliwe. Przyczyna takiego stanowiska Chryzypa jest raczej zrozumiała. Trzymając się jego wytycznej, dajemy wyłącznie prawdziwe odpowiedzi, w przeciwnym razie będziemy wypowiadać sądy niezgodne z prawdą. Tak więc, propozycję Chryzypa rozszerzoną o kwestię przerwania milczenia można wyrazić następująco:

Jeśli „Tak" jest dobrą odpowiedzią, powiedz „Tak";
Jeśli „Nie" jest dobrą odpowiedzią, powiedz „Nie";
Jeśli ani „Tak", ani „Nie" nie jest dobrą odpowiedzią, milcz.

W podejściu tym wyraża się zasada przestrzegana nie tylko przez stoików, zgodnie z którą lepiej jest nie dać dobrej odpowiedzi, niż dać złą. Niestety, jak już wcześniej zauważyliśmy, strategia Chryzypa jest niepełna. Nie daje ona bowiem żadnych wskazówek, w którym momencie zamilknąć[39]. Nie wiemy też, w którym momencie przerwać milczenie. Zrozumiałe jest więc, że strategia Chryzypa nie zyskała powszechnego uznania, zwłaszcza wśród sceptyków. Głównym jej przeciwnikiem okazał się Karneades (214–129 p.n.e.), którego krytyka rozwiązania zaproponowanego przez Chryzypa przypadła na kilkadziesiąt lat po śmierci tego wybitnego stoika. Williamson trafnie porównuje stanowisko obu filozofów do dwóch szachistów z których jeden, Karneades, dysponuje strategią gwarantującą zwycięstwo, drugi zaś, Chryzyp, zdając sobie sprawę z nieuchronnej przegranej powstrzymuje się od wykonania ruchu w grze w szachy, w której czas na wykonanie posunięcia nie jest ograniczony[40]. Karneades zauważa, iż krytyka sceptycyzmu jako stanowiska zalecającego powstrzymywanie się od wypowiadania sądów jest, zwłaszcza w przypadku Chryzypa, zupełnie niezrozumiała. Skoro zaleca on powstrzymanie się od

[39] Por. Williamson, [1994], s. 21–22.
[40] Williamson, [1994], s. 27.

orzekania w chwili, w której wciąż jeszcze możemy wypowiadać zdania, mimo pewności, iż są one prawdziwe, to dlaczego zasady tej nie należy rozszerzyć na wszystkie zdania? W istocie, Karneades wykazał, iż proponując swoją strategię Chryzyp w dość zaskakujący sposób zbliżył poglądy stoików do stanowiska zajmowanego przez sceptyków. W przypadku argumentacji stosu zalecał przecież powstrzymywać się od wypowiadania niewątpliwie prawdziwych zdań. Biorąc pod uwagę fakt, iż argumentację tą można zastosować do dowolnego terminu występującego w języku naturalnym, pomysł Chryzypa jako oponenta sceptyków może wydawać się ryzykownym. Jak widać, o znaczeniu paradoksu stosu może świadczyć to, iż stał się on przyczyną tego niewątpliwego ustępstwa stoików na rzecz sceptycyzmu. W traktacie Sekstusa Empiryka *Przeciw Profesorom* znajdujemy dowód Karneadesa wykorzystujący w dość swobodny sposób argumentację stosu, a godzący w stoicką teologię[41]: „Skoro Zeus jest bogiem, to Posejdon jako jego brat także jest bogiem. Lecz skoro Posejdon, czyli morze, jest bogiem, to rzeka Achelous także jest bogiem. Skoro Achelous jest bogiem, to Nil także jest bogiem. Skoro Nil jest bogiem, to każda rzeka jest bogiem. Jeśli wszystkie rzeki są bogami, to wszystkie strumienie są bogami. Jeśli wszystkie strumienie są bogami, to również wszystkie potoki są bogami. Jednak, ani strumienie ani potoki nie są bogami, więc i Zeus nie jest bogiem. Lecz jeśli bogowie w ogóle by istnieli, to Zeus byłby bogiem. Zatem bogowie nie istnieją". Niewątpliwie, powyższa argumentacja zaledwie przypomina precyzyjną i trudną do zakwestionowania argumentację stosu. Kolejne kroki w tym rozumowaniu nie reprezentują bowiem jednego, wspólnego, stale powtarzanego schematu.

Warto wspomnieć o ciekawym wątku w historii paradoksu stosu, który to wątek wskazuje na bardziej praktyczny niż teoretyczny wymiar tego dylematu. Otóż, paradoks ten stał się jednym z argumentów w wieloletnim sporze lekarzy empiryków, do których najprawdopodobniej należał cytowany wcześniej Sekstus, zwany właśnie Empirykiem, z lekarzami dogmatykami. Spór ten rozgorzał w drugim wieku naszej ery w Rzymie. Empirycy uważali, iż właściwym źródłem wiedzy medycznej są wystarczająco liczne fakty obserwacyjne oraz wnioski wyprowadzane ze zdań orzekających o tych faktach, uzyskiwane na mocy rozumowania indukcyjnego. Właśnie w celu zakwestionowania wartości zwrotu „wystarczająco liczne" lekarze dogmatycy wykorzystywali paradoks stosu. Istotnie, wydaje się że nie sposób jest precyzyjnie określić od jakiej liczby przypadków możemy mówić, iż jest ich wystarczająco wiele. Odpowiedzią empiryków było natomiast zakwestionowanie argumentacji stosu jako zbyt radykalnej i prowadzącej do niebezpiecznie daleko idących wniosków. Twierdzili oni, iż poważne potraktowanie tej argumentacji godzi w zdrowy rozsądek. Niszczącemu działaniu argumentacji stosu uległyby przecież

[41] Por. Sekstus Empiryk, *Przeciw Profesorom*, IX 182–184.

takie wyrażenia jak: „góra", „wielka miłość", „szereg", „silny wiatr", „miasto", „fala", „otwarte morze", „stado owiec", „stado bydła", „naród", „tłum", „wiek chłopięcy", „wiek dojrzewania", i wiele innych. Ponadto, zdaniem lekarzy empiryków o wartości argumentacji stosu powinna świadczyć jej zdolność do zlokalizowania przyczyny trudności którą ujawnia. Tymczasem, paradoks stosu, pokazując problem nie wskazuje na jego źródło. W tej atmosferze narodził się pomysł uczonego, będącego zarazem lekarzem cesarza Marka Aureliusza, Claudiusa Galenusa (Galena) (129–199). Uważał on, iż dodanie do pewnej mnogości ziaren jednego ziarna może z mnogości niebędącej stosem uczynić stos. Naturalnie, konsekwentnie przyjmował, iż istnieje taki stos (minimalny) ziaren, że usunięcie z niego jednego ziarna sprawia, iż powstała mnogość przestaje być stosem. Innymi słowy, Galen przyjął założenie istnienia ostrych granic tych nazw, które obecnie są powszechnie uważane za nieostre[42]. Broniący się przed rozumowaniem stosu lekarze empirycy podawali jeszcze jeden argument. Każdy kto wykorzystuje rozumowanie stosu w celu wykazania, iż nie ma sensu wyrażenie „wystarczająco wielu przypadków", przypomina osobę poszukującą jednego jedynego prawidła, które mogłoby być użyte przez szewca do wytworzenia butów wszystkich rozmiarów. Skoro więc, każdy rozmiar buta wymaga innego prawidła, każdy analizowany problem medyczny wymaga sobie właściwej, wystarczająco dużej liczby obserwowanych przypadków. Pomysł ten przeniesiony został na grunt oryginalnego paradoksu stosu. Uznano bowiem, iż każdy sposób usypania ziaren wymaga innej ilości tych ziaren, aby można było mówić o stosie. Czasami pięćdziesiąt ziaren pszenicy będzie tworzyło stos, innym zaś razem ta sama liczba ziaren nie będzie tworzyła stosu. Tak więc, w ogólności nie można powiedzieć od jakiej ilości ziaren mamy do czynienia ze stosem, gdyż „stosowatość" zależy także od sposobu usypania określonej ilości ziaren.

Intensywność analizowania zarówno paradoksu stosu, jak i odpowiadającej mu argumentacji uległa znacznemu zmniejszeniu pod koniec starożytności. Na przestrzeni następnych wieków, od czasu do czasu pojawiały się postaci stosujące wnioskowanie jedynie swą formą przypominające rozumowanie stosu, bez głębszego analizowania samego fenomenu paradoksu stosu. Wśród osób reprezentujących tego typu postawę znajdują się Lorenzo Valla (1407–1457), Rudolf Goclenius (1547–1628), Pierre Gassend (1592–1655)[43].

Znacznie więcej uwagi paradoksowi stosu poświęcił John Locke (1632–1704). Swoje stanowisko w tej sprawie przedstawił w *Essay Concerning Human Understanding* wydanym w 1690 roku. Stwierdził w nim, że granice tak rodzajów, jak i gatunków są ustalone przez rozum, nie zaś przez naturę

[42] Williamson, [1994], s. 28–29.

[43] Przykłady rozumowań Valli, Gocleniusa i Gassenda wykorzystujących argumentację stosu podaje Williamson, [1994], s. 32–33.

klasyfikowanych rzeczy. Pogląd ten uzasadniał istnieniem istot należących do obszarów rozdzielających gatunki[44].

Filozofem, który podjął z Locke'm polemikę w kwestiach związanych z paradoksem stosu był Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). W swym dziele zatytułowanym *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, wydanym w 1704 roku wyraził opinię, iż istnienie przypadków granicznych gatunków i rodzajów nie może świadczyć o tym, że sama klasyfikacja ma postulatywny charakter. W przeciwieństwie do Locke'a uważał, że istnieją granice gatunków wyznaczone przez samą naturę rzeczy. Niekiedy jednak jest konieczne, aby sam człowiek ustalił granicę zwłaszcza tam, gdzie rozróżnienie wymaga uwzględnienia niemal niedostrzegalnych wręcz różnic, np. w przypadku dokonywania szczegółowych pomiarów długości, masy itp. To właśnie te, sztuczne, bo stworzone przez człowieka przypadki wiążą się z argumentacją stosu: człowiek łysy nie wyznacza naturalnego gatunku, podobnie jak stos. Oczywistą konsekwencją takiego stanowiska jest uznanie, iż przypadki graniczne są kwestią ludzkich ocen. Dlatego też, nie jest niczym niezwykłym, że w tej samej kwestii istnieją różne opinie. Co więcej opinie te mogą być tak samo dobre. Na poparcie swojej tezy Leibniz[45] wykorzystał przykład Locke'a, stwierdzającego, że ten sam koń może przez jednego człowieka być uznanym za dużego, podczas gdy inny człowiek uzna go za małego[46]. Podejście Leibniza do kwestii

---

[44] „Być może, że gdybym chciał utrzymywać, iż jacyś odmieńcy, którzy przeżyli lat czterdzieści nie okazując śladu rozumu, są czymś pośrednim między człowiekiem a zwierzęciem, to zdanie to byłoby poczytane za śmiały paradoks, jeśli nie za niebezpieczny fałsz; ale jest to przesąd nie oparty na niczym innym niż na błędnej supozycji, że nazwy „człowiek" i „zwierzę" oznaczają odrębne gatunki, tak rozgraniczone przez esencje realne, że pomiędzy nimi nie może się znaleźć żaden inny gatunek", Locke, *Rozważania dotyczace rozumu ludzkiego*, II 13, s. 260–261. W dalszej części przeprowadzanej przez siebie analizy, Locke wyraźnie stosuje argumentację stosu na poparcie swojej tezy: „Powiadacie, że nie ulega wątpliwości, iż normalnie zbudowany odmieniec jest człowiekiem i ma duszę rozumną, chociaż jej nie przejawia. Ale niechże jego uszy będą nieco dłuższe i bardziej spiczaste, nos bardziej niż zwykle spłaszczony, a już zaczniecie się wahać; niech twarz stanie się jeszcze węższa, bardziej płaska i dłuższa, a znajdziecie się w kłopocie; niech podobieństwo do zwierzęcia jeszcze wzrośnie, tak że głowy naszego stworu nie da się już odróżnić od głowy zwierzęcia, a staje się on nagle potworem; i oto mamy dowód, że duszy rozumnej nie posiada i musi ulec zagładzie", II 16, s. 265–266.

[45] Stwierdzeniem tym Leibniz niefortunnie utożsamił nieostrość z zależnością od kontekstu, patrz Williamson, [1994], s. 34.

[46] „Zazwyczaj natura rzeczy ustala granice gatunków, np. człowieka i zwierzęcia, końca i ostrza szpady. Przyznaję jednak, że istnieją pojęcia, w których rzeczywiście jest coś arbitralnego: kiedy chodzi np. o oznaczenie stopy, bo wobec tego, że linia prosta jest jednorodna i nieograniczona, natura nie wyznacza tu żadnych granic. Istnieją także istoty rzeczy mgliste i niedoskonałe, gdzie w grę wchodzi ocena, jak np. ile co najmniej pozostawić trzeba włosów człowiekowi, aby nie był łysy. To był jeden z sofizmatów starożytnych, kiedy nastaje się na przeciwnika: Aż padnie oszukany argumentem nacierającej gromady. Ale trafna odpowiedź jest ta, że natura nie wyznaczyła tego pojęcia i że ocena odgrywa tu swoją rolę; że istnieją osoby,

nieostrości było w szczególny sposób praktyczne: Niewątpliwie nawet znacznie różniące się między sobą przypadki można połączyć serią wielu przypadków reprezentujących kolejne niemal niedostrzegalne zmiany (tzw. serie typu *sorites*); Cóż z tego, skoro podobne serie typu *sorites* nie zdarzają się w rzeczywistości; Oznacza to, że te poszczególne raczej typowe przypadki można poklasyfikować, wzorując się na tym co naprawdę istnieje. Leibniz uważał ponadto, że niektóre z pytań w serii tworzącej argumentację stosu nie mają, ani prawdziwych, ani fałszywych odpowiedzi. Naturalnie, pytaniami bez odpowiedzi są te, które dotykają przypadków granicznych. Leibniz wskazywał także na istotną cechę wyróżniającą nieostrość od innych trudności związanych z wyrażeniami języka naturalnego. Jest nią niezależność od dodatkowych informacji na dany, nurtujący nas problem. Bez względu na głębię naszej analizy konkretnej kwestii nieostrości, problem pozostanie nierozwiązany. Tym samym, Leibniz[47] zwrócił uwagę na to, iż niemożność odpowiedzi na pytania w istotny sposób dotykające problemów nieostrości nie jest skutkiem naszej ignorancji[48].

Pod koniec osiemnastego wieku, niespodziewanie okazało się, że argumentacja stosu nie tylko nie jest trudnością, lecz jest wręcz pożądanym uzasadnieniem teorii przechodzenia wielu drobnych, płynnych zmian ilościowych w skokowo dokonujące się zmiany jakościowe. Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770–1831) w swoich *Wykładach z historii filozofii* sporo uwagi poświęcił wielu paradoksom starożytnych. W punkcie γ, paragrafu zatytułowanego *Eubulides* rozważa paradoksogenny problem stosu i łysiny, jako argument przemawiający za uznaniem idei jedności przeciwieństw. Również w tym przypadku, Williamson zauważa, iż przykłady Hegla wskazują na to, iż powinien on uznać istnienie ostrych granic nieostrych wyrażeń. Skoro temperatura wody rośnie stopniowo, aż woda zmieni się w parę, bądź też maleje zmieniając wodę w lód, widać istnieje ostra granica, po przekroczeniu której

o których można wątpić, czy są, czy nie są łyse, i że są one dwojako ujmowane: łyse dla jednych, ale nie dla drugich. Tak, jak to pan zauważył, że koń oceniany jako mały w Holandii, będzie uchodził za dużego w kraju Walijczyków. Jest nawet coś takiego w ideach prostych, bo zauważyłem właśnie, że granice barw są wątpliwe", Leibniz, *Nowe rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*, III v 9, s. 52–53.

[47] „Filalet: [...] widzi pan przecież, że nie zawsze można wyznaczyć stałe granice gatunkom. Teofil: Już to panu przyznałem. Bo gdy idzie o fikcje i o możliwość rzeczy, przejścia od gatunku do gatunku mogą być niedostrzegalne i chcąc je odróżnić, byłoby się czasem w położeniu tego, kto nie może zdecydować, ile trzeba pozostawić włosów człowiekowi, aby nie był łysy. Ta indeterminacja byłaby prawdziwa nawet wówczas, gdybyśmy znali doskonale wewnętrzną istotę stworzeń, o które chodzi. Ale nie widzę wcale, by ona mogła przeszkodzić rzeczom, by posiadały istoty realne niezależnie od poznającego rozumu, a nam, byśmy je poznawali. To prawda, że nazwy i granice gatunków byłyby niekiedy jak nazwy miar i ciężarów, gdzie trzeba dokonać wyboru, aby mieć granice stałe. Wszelako na codzień nie ma powodu do takiej obawy, gdyż gatunki przybliżone wcale nie występują razem", Leibniz, *Nowe rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*, III vi 27, s. 84.

[48] Williamson, [1994], s. 33–34.

ciecz staje się parą. Podobnie, chłop zwiększając uncja po uncji ładunek na grzbiecie swojego osła doprowadza do sytuacji, w której nagle kręgosłup osła z trzaskiem łamie się. Rozumując przez analogię, Williamson dochodzi do wniosku, że naturalną konsekwencją przytoczenia przez Hegla obu powyższych przykładów powinno być stwierdzenie, iż ostre granice dzielące stos od nie-stosu istnieją: dodając ziarnko do ziarnka w pewnym momencie z nie-stosu powstaje stos[49]. Wydaje się jednak, że uzasadnianie istnienia ostrych granic dzielących jakościowo różne przypadki nie było dla Hegla kwestią szczególnie istotną. Okazało się bowiem, że zmierzał on do wniosku znacznie bardziej wykraczającego poza problemy nieostrości i ewentualnego istnienia ostrych granic dla wyrażeń tradycyjnie uznawanych za nieostre. Paradoks stosu, w takiej czy innej wersji, dowodzi zdaniem Hegla tego, iż przeciwieństwa przechodzą wzajemnie w siebie w sposób niedostrzegalny, będąc przeciwstawnymi są zarazem jednością[50]. Williamson dowodzi jednak, iż przykłady Hegla można wykorzystać także w innym celu. Mały wydatek finansowy nie jest niczym specjalnym, jednak duży wydatek może świadczyć o rozrzutności. Kondycja państwa nie zmienia się wraz ze śmiercią lub narodzinami pojedynczego obywatela, jak również w związku z przyłączeniem czy też utratą jednego akra ziemi. Jednak pozycja małego miasta jest nieporównywalna z pozycją potężnego

---

[49] Williamson, [1994], s. 34. Naturalnie, uwaga Williamsona jest mocno na wyrost i wskazuje jedynie na chęć znalezienia zarówno argumentów, jak i prekursorów dla swoich własnych poglądów, wyrażających wiarę w istnienie ostrych granic nieostrych wyrażeń. Ani zamarzająca woda, ani łamiący się grzbiet osła nie są przecież zdarzeniami dokonującymi się w jednym punkcie czasowym, lecz trwającymi w czasie procesami, chociaż czas trwania tych procesów jest znacznie krótszy niż czas trwania procesów do nich prowadzących, a więc zmian temperatury, czy załadunku osła. Cała znajdująca się w jakimś miejscu woda nie zamarza w jednym, nagłym momencie, tak jak i pękanie grzbietu nie jest procesem chwilowym.

[50] „Pytamy: Czy jedno ziarno stanowi stos? Albo czy jeden włos mniej stanowi łysinę? – Nie. – A jeśli dodamy jeszcze jedno ziarno lub odejmiemy jeszcze jeden włos? Wciąż jeszcze nie. Pytanie to ciągle powtarzamy, cały czas dokładając po jednym ziarnie, względnie wyrywając po jednym włosie. Gdy więc wreszcie można będzie powiedzieć, że jest to już bez wątpienia stos, względnie łysina, to okaże się, że stos, względnie łysinę stanowi ziarno dodane na końcu, względnie na końcu wyrwany włos; czemu na wstępie zaprzeczało się. Z kolei jednak, w jaki sposób jedno ziarno może tworzyć stos, który składa się przecież z tak wielu ziaren? Twierdzi się: jedno ziarno nie czyni stosu. Sprzeczność stanowi to, że dołożenie albo też odjęcie Jednego przechodzi w coś przeciwstawnego, w wielość. [...] Jedno staje się swoim przeciwieństwem, kupą; odejmowanie Jednego sprawia, że powstaje łysość. Jedno i stos są sobie przeciwstawne; ale też są jednym. [...] Cały czas oddzielamy od siebie nawzajem jakość i ilość. Ta wielość jest różnicą ilościową; ale ta obojętna różnica mnóstwa, wielkości zmienia się tu w końcu nagle w różnicę jakościową. [...] Ta różnica, przeciwieństwo ilości i jakości, jest czymś bardzo ważnym; ale występujący w ich przechodzeniu w siebie nawzajem moment dialektyczny jest czymś, czego nasz rozsądek nie uznaje, pozostając przy tym, że to, co jakościowe, nie jest ilościowe, a to, co ilościowe, nie jest jakościowe. Owe przykłady, wyglądające na żarty, opierają się na gruntownej analizie określeń myślowych, jakie wchodzą tam w grę”, Hegel, *Wykłady z historii filozofii*, I, s. 646–645.

państwa. Różnice w stopniu, jakkolwiek nieznaczne, nie mogą być rozpatrywane bez ich wpływu na różnice jakości. Williamson twierdzi, że spójne z poglądami Hegla jest odrzucenie prawa, zgodnie z którym: *Jeśli x i y różnią się pod względem ilości o mniej niż q, oraz x ma własność Q, to y również ma własność Q.* Trudno nie zauważyć, iż prawo to uniemożliwia zaakceptowanie tezy, tak bardzo cenionej przez Williamsona, a zakładającej istnienie ostrych granic nieostrych wyrażeń. Wydaje się, że Willamson nie dostrzega tego, iż paradoks stosu w każdej wersji wiąże się z tym, że stopniowe zmiany ilościowe prowadzą do zmian jakościowych: stopniowe dodawanie po jednym ziarnku z czegoś co stosem nie jest prowadzi do „pojawienia" się stosu; stopniowe wyrywanie po jednym włosie prowadzi do tego, że człowiek niełysy staje się łysym. Tak ważne dla Williamsona, a wymyślone przez Hegla przykłady nie są więc żadnym wielkim odkryciem w badaniach nad fenomenem nieostrości. Pokazują jedynie to, iż pewne procesy mimo swojego w miarę ciągłego charakteru, zachodzą w na tyle krótkim czasie, aby sprawiać na nas wrażenie zachodzących w sposób nagły.

Jednak prawdziwy renesans paradoks stosu przeżył w drugiej połowie dziewiętnastego wieku wraz z narodzinami logiki współczesnej oraz wczesnej filozofii analitycznej. Biorąc pod uwagę poważne potraktowanie tego dylematu, okres zapoczątkowany w dziewiętnastym wieku można porównać jedynie do tego sprzed dwóch tysięcy lat. Przyczyny tego zjawiska należy, zdaniem Williamsona, poszukiwać w dynamicznym rozwoju logiki formalnej oraz wpływowi jaki wywarła ona na filozofię dziewiętnastego i dwudziestego wieku. Ponadto, odkryty na nowo paradoks stosu został trwale związany z problemem nieostrości wyrażeń języka naturalnego. Ta właśnie powszechność zjawiska nieostrości sprawiła, iż doceniona została waga tego, od dwóch tysiącleci doskonale znanego paradoksu.

Dość zgodnie przyjmuje się, iż rok 1879, w którym Gottlob Frege (1848–1925) opublikował swoje przełomowe dzieło *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachbildete Formelsprache des reinen Denkens* jest rokiem narodzin logiki współczesnej[51]. W istocie Frege określił metodę budowania systemów logicznych obowiązującą do dzisiaj. Z jednej strony mamy więc język wyrażeń logicznych zwanych formułami wraz ze ściśle określonymi regułami syntaktycznymi, wyznaczającymi klasę tak zwanych *dobrze zbudowanych formuł.* Aksjomaty oraz reguły inferencji umożliwiają wyprowadzanie konsekwencji logicznych przyjętych przesłanek, stanowiących podzbiory zbioru wszystkich dobrze zbudowanych formuł. Z drugiej zaś strony, mamy semantykę określoną przez reguły znaczeniowe wszystkich dobrze zbudowanych formuł. Frege zaproponował więc logikę formalizującą *czyste myślenie*, czyli rozumowanie niezależne od treści takich wyrażeń, jak predykaty, nazwy czy zdania.

---

[51] Frege, [1879].

Tak sformalizowana logika, zgodnie z zamiarami Fregego, miała stać się podstawą określenia matematyki. Mimo iż w świecie współczesnej logiki formalnej nie ma miejsca na wyrażenia nieostre okazało się, że podjęto próby scharakteryzowania tych wyrażeń przy użyciu technik typowych dla matematyki. Frege wskazywał na wadliwość wielu definicji pojęć podstaw matematyki. Na gruncie matematyki mamy do czynienia głównie z definicjami warunkowymi. Wadliwość znaczenia danego pojęcia zdefiniowanego warunkowo polega najczęściej na tym, iż warunki służące określeniu znaczenia tego pojęcia nie wyczerpują wszystkich możliwych przypadków, w których pojęcie to powinno mieć sens. Takie rozumienie wadliwości definicji pojęć matematyki może być z łatwością przeniesione na grunt pozamatematyczny. Wystarczy, aby nieostrość postrzegać jako szczególny przypadek semantycznie wadliwych wyrażeń, których wadliwość jest właśnie skutkiem niepełności definicji tych wyrażeń. Wyrażenie „stos" jest zdefiniowane niepełnie, gdyż istnieje brak warunków określających znaczenie słowa „stos" we wszystkich granicznych przypadkach. Co gorsza, nie jest jasne, które przypadki są graniczne, a które nie są. Oczywiste jest to, iż definiowanie rozumiane jako nadawanie znaczenia, inne jest na gruncie matematyki, inne zaś na gruncie języka naturalnego. Chociaż nie zawsze można mówić o warunkowym definiowaniu wyrażeń języka naturalnego, to można mówić o warunkowym sposobie użycia danego wyrażenia. W tym też sensie, wadliwość warunkowości wyrażeń języka naturalnego może charakteryzować nieostrość tychże wyrażeń. Na szczęście, sam Frege nie sprowadzał jednak nieostrości do definiowania, które byłoby zarazem warunkowe i niepełne. Dlatego też, mimo wszystko, Frege nie zasługuje na to, aby kojarzyć go z postulatem „matematycznego" podejścia do wyrażeń nieostrych, czyli propozycji zakładającej, iż wyrażenia nieostre są niezupełnie zdefiniowane.

W drugim tomie *Grundgesetze der Arithmetic* z 1903 roku Frege porównuje nieostrą linię do linii przerwanej. Pierwsza jest przykładem obiektu, który nie jest ostry, druga zaś reprezentuje przypadek niepełny. Zdając sobie sprawę z tej dość zasadniczej różnicy, Frege był skłonny utożsamiać nieostrość z niepełnością definicji[52]. Później, podobne podejście do nieostrości reprezentował Henryk Mehlberg[53]. Pomysł ten stał się również podstawą interesujących badań Mariana Przełęckiego nad tak zwanymi *terminami otwartymi*, czyli terminami zdefiniowanymi częściowo[54]. Kwestia ewentualnego utożsamienia obu „wadliwości" może budzić pewne zastrzeżenia z dość zasadniczego powodu. Otóż, nieostrość rozumiana jako posiadanie przypadków granicznych bywa uzależniana od tego, czy klasa przypadków granicznych sama jest wyznaczona w nieostry sposób. Przecież, notorycznie w matematyce występujące przypadki

[52] Williamson, [1994], s. 39.

[53] Mehlberg, [1958], s. 256–260, 330–338.

[54] Stanowisko Mehlberga, a szczególnie Przełęckiego, zostanie dokładniej omówione w następnych rozdziałach.

częściowego definiowania są wyznaczone precyzyjnie. Innymi słowy, w świecie w którym można stosować logikę formalną wszystkie wyrażenia mają ostre granice. Może się więc wydawać, iż warunkiem koniecznym na to, aby dane wyrażenie było nieostre jest nieostrość klasy przypadków granicznych. W dalszych rozdziałach pokażemy, że pogląd zgodnie z którym obszar nieostrości zawsze powinien być wyznaczony nieostro jest zbyt daleko idący. Faktem jest jednak to, iż cel ten zostanie osiągnięty przez wykorzystanie dość nienaturalnych wyrażeń językowych[55].

Podobieństwo jakie zachodzi między nieostrością a niepełnością definiowania wydaje się być jeszcze bardziej narzucające się, gdy uwzględnimy skutki obu „wadliwości". Jasne jest, że w języku formalnym Fregego nie ma miejsca na wyrażenia nieostre. Powód tego jest zasadniczy i został wskazany przez samego twórcę języka formalnego. Zdaniem Fregego, jeśli wyrażenia wiążą się z obszarami na płaszczyźnie, to wyrażenia nieostre powinny wyznaczać obszary nieposiadające wyraźnie wyznaczonych granic, czyli obszary stopniowo przechodzące w swoje własne dopełnienia. Fakt ten oznacza, że wyrażenia nieostre w ogóle nie wyznaczają żadnych obszarów. Wyrażenie nieostre przypomina nazwę, która niczego nie nazywa. Zatem, jeśli zastosujemy nieostry predykat w formule języka Fregego, funkcja przypisująca wartości logiczne prawdy bądź fałszu nie będzie mogła takiej formule przypisać wartości logicznej. Zgodnie z założeniami Fregego, funkcja, przyporządkowująca wartość logiczną, czyli denotację zdań, wyrażeniu złożonemu, jest wypadkową innych funkcji przyporządkowujących składnikom tego wyrażenia określonych denotacji. Skoro więc, danemu, nieostremu predykatowi nie można przypisać żadnej denotacji, żadne zdanie zawierające predykat nieostry nie ma wartości logicznej, w szczególności nie może więc być zdaniem prawdziwym. Zgodnie z takim podejściem nawet zdanie będące podstawieniem prawa wyłączonego środka jakim jest „Jan jest łysy lub nieprawda, że Jan jest łysy" nie ma wartości logicznej. Frege utożsamiał prawo wyłączonego środka, a także zasadę niesprzeczności z założeniem, iż wszystkie wyrażenia mają ostro wyznaczone granice. Tak więc, formalizacja zdania „Jan jest łysy lub nieprawda, że Jan jest łysy" nie posiada wartości logicznej niezależnie od tego, czy wspomniany w zdaniu Jan należy do przypadków granicznych predykatu „jest łysy", czy nie. To zaś jest skutkiem wspomnianego wcześniej faktu, iż predykat ten jako nieostry nie posiada żadnej denotacji. Podobną trudność wywołują jednak także wyrażenia zdefiniowane częściowo. Jeśli bowiem założymy, że predykat „jest łysy" jest zdefiniowany częściowo, to i tak mamy do czynienia z zakwestionowaniem zarówno prawa wyłączonego środka, jak i zasady niesprze-

[55] Kontrargumentem na konieczność nieostrego wyznaczenia przypadków granicznych może być predykat Sorensena jak również wiele modyfikacji tego predykatu, patrz paragraf poświęcony definicji nieostrości.

czności. Przecież, wszystkie zdania złożone, których składnikiem jest zdanie „Jan jest łysy”, nie mają wartości logicznej jeśli tylko Jan jest przypadkiem granicznym częściowo zdefiniowanego predykatu „jest łysy”. Oznacza to, że jeśli jakaś formuła może mieć przypisaną wartość logiczną prawdy lub fałszu, to wszystkie występujące w niej predykaty są zdefiniowane dla wszystkich możliwych przypadków. Frege wykorzystał argumentację stosu, aby pokazać do jak niepożądanych skutków prowadzi dopuszczenie do operowania wyrażeniami nieostrymi. Omawiając w *Begriffsschrift* twierdzenie uogólniające zasadę indukcji matematycznej, posłużył się wyrażeniem „stos ziaren fasoli”[56]. Dla Fregego, argumentacja stosu jest skutkiem traktowania predykatów nieostrych tak, jak gdyby były one ostre. Określona w precyzyjny sposób logika nie ma zastosowania do języka dopuszczającego nieostrość. Frege oceniał więc nieostrość wyłącznie negatywnie. W wygłoszonym w Towarzystwie Naukowym w Jenie, w styczniu 1891 roku, odczycie zatytułowanym *Funkcja i pojęcie*, Frege sformułował swój postulat ostrości pojęć:[57] „Jeżeli z przedmiotów bierze się pod uwagę jedynie liczby całkowite arytmetyki, to w „*a* + *b*” litery *a* i *b* markują jedynie liczby całkowite; znak dodawania wystarczy więc określić dla samych tylko liczb całkowitych. Każde rozszerzenie dziedziny przedmiotów markowanych przez „*a*” i „*b*” zmusza nas jednak do ponownego określenia znaku dodawania. Naukowa ścisłość wymaga gwarancji, że wyrażenie nie utraci nigdy znaczenia; że niepostrzeżenie nie będzie się liczyło na pustych znakach w mniemaniu, że ma się do czynienia z przedmiotami. [...] Trzeba więc ustalić umownie, co oznacza np. „▤ + 1”, gdy „▤” oznacza Słońce. Jest dość obojętne, co tu ustalimy; ważne jest tylko, by coś ustalić, by „*a* + *b*” miało zawsze znaczenie, gdy za „*a*” i „*b*” podstawi się znaki jakichś określonych przedmiotów. W odniesieniu do pojęć wynika stąd postulat, by za swą wartość dla dowolnego argumentu przybierały one wartość logiczną; aby dla każdego przedmiotu było jednoznacznie określone, czy podpada on pod dane pojęcie, czy nie. Jest to, inaczej mówiąc, postulat ostrości pojęć; bez jego spełnienia niemożliwe byłoby formułowanie odnoszących się do pojęć praw logicznych. Dla każdego argumentu *x*, przy którym „$x + 1$” nie miałoby znaczenia, nie miałaby też wartości funkcja $x + 1 = 10$. Tym samym byłaby ona pozbawiona wartości logicznej, przez co pojęcie ‘to, co zwiększone o 1 daje 10’ nie miałoby ostrej granicy. Postulat ostrości pojęć żąda w odniesieniu do funkcji w ogóle, by dla każdego argumentu miały one jakąś wartość”.

Michael Dummett twierdzi, że, w opinii Fregego, nie jest możliwy w pełni spójny rachunek oparty na języku zdolnym do wyrażania nieostrości[58]. Odwołując się do zaproponowanego przez siebie odróżnienia znaczenia od

[56] Williamson, [1994], s. 41–42.
[57] Frege, [1891], s. 33–34.
[58] Dummett, [1981], s. 32–33, także Williamson, [1994], s. 43.

denotacji przyjął, że wyrażenia nieostre mają znaczenie, lecz nie mają denotacji. Rozumiejąc więc znaczenie danego terminu nieostrego postępujemy tak, jak gdyby miał on denotację, chociaż tak naprawdę jej nie ma. Jak widać, Frege potraktował wyrażenia nieostre jak nazwy odnoszące się do nieistniejących obiektów. Niestety, Frege nie rozwinął żadnej teorii nieostrości, realizującej ideę posiadania znaczenia bez posiadania denotacji. Jego sposobem na nieostrość jest jej unikanie.

Odmienne podejście do nieostrości reprezentuje Charles Sanders Peirce (1839–1914). Z natury rzeczy, język jest i zawsze będzie nieostry. Sama zaś nieostrość może być szkodliwa tylko wówczas, gdy prowadzi do pytań na tyle niejasnych, że nie mogą na nie istnieć jakieś odpowiedzi. Można więc próbować dane pytanie doprecyzować pod pewnym względem tak, aby odpowiedź na nie stała się możliwa. To racjonalne zgłębianie wiedzy na temat właściwy dla danej kwestii, o ile jest przeprowadzane odpowiednio długo, ma postać odpowiedniej ilości kroków. Może więc w niektórych przypadkach prowadzić do precyzacji wystarczającej dla znalezienia odpowiedzi na nurtujące pytanie. Nie można jednak zakładać, bo przypuszczenie takie byłoby fałszywe, że istnieje możliwość precyzacji pod każdym możliwym do pomyślenia względem. Bardzo często, jakieś stwierdzenie jest prawdziwe, ponieważ jest nieostre. Prawdziwość ta trąci niekiedy oczywistością. Precyzując to stwierdzenie, rezygnujemy z nieostrości narażając się na to, iż jego doprecyzowanie nie jest już takie oczywiste. Zdanie „Ogień spala" jest prawdziwe, w sposób oczywisty, właśnie dzięki swej nieostrości. Co więcej, prawdziwości tego zdania nie przeczy fakt, iż na przykład ogień nie spala kamienia. W rozważanym zdaniu nie jest przecież sprecyzowane co ma ogień spalać i w jakich okolicznościach. To rozróżnienie między zdaniami określonymi i nieokreślonymi jest dla Peirce'a punktem wyjścia w rozpoznaniu nieostrości zdań[59].

Jego pierwotne stanowisko w kwestii nieostrości różniło się od tego, które sam później zaakceptował, a które obecnie uchodzi za standardowe. Początkowo, każdy przypadek nieokreślonej wypowiedzi był dla niego przypadkiem nieostrości. Jeśli rozważymy dla przykładu dwa zdania „Pan *A* ma więcej niż 11 mm i mniej niż 9437 mm wzrostu" oraz „Pan *A* jest przeciętnego wzrostu", to zgodzilibyśmy się z tym, że nieostrym jest jedynie drugie z tych zdań. Pierwsze wydaje się być precyzyjne. Zdanie pierwsze wyznacza przecież granicę, która, mimo iż wyróżnia zbyt dużo przypadków, to jednak jest granicą wyraźną. Z nieostrą granicą mamy natomiast do czynienia w przypadku jedynie drugiego zdania. Tymczasem, według „wczesnego" Peirce'a oba zdania winny być uznane za nieostre. Niewątpliwie, oba są niesprecyzowane w sensie wcześniej przedstawionym. W przypadku pierwszego zdania, przyczyną braku precyzji jest fakt, iż wskazany w nim przedział, w którym ma się mieścić wzrost

[59] Williamson, [1994], s. 46–47.

konkretnego człowieka jest na tyle duży, że zdanie to jest prawdziwe w sposób wręcz oczywisty. W przypadku zdania drugiego, brak doprecyzowania jest spowodowany tym, że w zbyt szerokim zakresie wielkości wyrażających wzrost człowieka zdanie to nie jest ani zdecydowanie prawdziwe, ani zdecydowanie fałszywe. Pierwotne stanowisko Peirce'a można więc wyrazić w następujący sposób: z nieostrością mamy do czynienia nie tylko wtedy, gdy dane stwierdzenie wyznacza jakiś zakres przypadków w nieostry sposób, lecz także wtedy, gdy jakieś stwierdzenie pozostawia pewien dość szeroki zakres przypadków, które nie są jasno wykluczone[60].

W późniejszych latach Peirce odszedł od tego poglądu, a sformułowana przez niego definicja zdania nieostrego zawarta w sławnym trzytomowym dziele *Dictionary of Philosophy and Psychology*, wydanym pod redakcją Jamesa Marka Baldwina (1861–1934) w latach 1901–1905, ogranicza pojęcie nieostrości tak, iż z nieostrością może się wiązać jedynie drugie z analizowanych wyżej zdań[61]: „zdanie jest nieostre, gdy istnieją takie stany rzeczy, że jest istotnie niepewne dla myślącego o nich człowieka, czy stany te są wykluczone czy też dopuszczone przez to zdanie. Przy czym, owa 'istotna niepewność' nie ma swego źródła w niewiedzy wspomnianego człowieka, lecz jest spowodowana tym, że reguły stosowania języka są nieokreślone, tak iż jednego dnia może on uważać dany sąd za wykluczony, innego zaś dnia za dopuszczony". W definicji tej, Peirce nieokreślenie znaczenia wyrażenia językowego wytłumaczył za pomocą nieokreślenia użycia tego wyrażenia. Brak precyzyjnych reguł użycia wyrażeń językowych powoduje nieostrość. To właśnie, a nie brak wiedzy, jest przyczyną tego, iż w niektórych przypadkach wahamy się, czy uznać dany sąd, czy go odrzucić. Nadając nieostrości nowe wobec wcześniej przez siebie uznawanego znaczenie, odróżnił ją od uogólnienia. To uchodzące za dojrzałe, stanowisko Peirce'a cechuje się tym, iż przyjmuje ono, że nieokreśloność zdania może świadczyć, albo o nieostrości tego zdania, albo o jego ogólności. Zdanie „Człowiek jest śmiertelny" jest uogólnieniem, gdyż nie zawierając kwantyfikacji w postaci takiego wyrażenia jak chociażby „pewien" narzuca ono takie swoje rozumienie, zgodnie z którym każdy człowiek jest śmiertelny. Natomiast zdanie „Do wspaniałego zdarzenia

[60] Williamson, [1994], s. 46–47.

[61] „A proposition is vague when there are possible states of things concerning which it is intrinsically uncertain whether, had they been contemplated by the speaker, he would have regarded them as excluded or allowed by the proposition. By intrinsically uncertain we mean not uncertain consequence of any ignorance of the interpreter, but because the speaker's habits of language were indeterminate; so that one day he would regard the proposition as excluding, another as admitting, those states of thing. Yet this must be understood to have reference to what might be deduced from a perfect knowledge of his state of mind; for it is precisely because those questions never did, or did not frequently, present themselves that his habit remained indeterminate", Baldwin, [1902], s. 748.

dojdzie w tym miesiącu" jest nieostre, gdyż zdanie to będzie prawdziwe jeśli *pewne* wspaniałe wydarzenie będzie miało miejsce w tym miesiącu, bez uściślenia jakie to wydarzenie. Williamson wiąże ogólność zdania z jego ogólną kwantyfikacją, także tą przemilczaną, zaś nieostrość z kwantyfikacją szczegółową. Zauważa przy tym, że Peirce nie dokonywał podziału na zdania ogólne i nieostre, kierując się wystąpieniem kwantyfikatora ogólnego w pierwszym przypadku, zaś szczegółowego w przypadku drugim. To, czy mamy do czynienia z wypowiedzią nieostrą czy z ogólną zależy, zdaniem Peirce'a, od tego, do kogo należy doprecyzowanie tej wypowiedzi: czy do wypowiadającego ją, czy może do interpretatora. Jeśli precyzacja wypowiedzi leży w gestii wypowiadającego, mamy do czynienia z wypowiedzią nieostrą[62]. Jeśli natomiast precyzacja wypowiedzi należy do interpretatora, mamy przypadek wypowiedzi ogólnej[63]. Williamson twierdzi, iż to czy dana wypowiedź wymaga uściślenia dokonanego przez wypowiadającego, czy przez interpretatora odpowiada właśnie jej skwantyfikowaniu: kontrast między doprecyzowaniem przez wypowiadającego a doprecyzowaniem przez interpretatora może być skojarzony z kontrastem między kwantyfikatorami „pewien" oraz „każdy"[64]. Swą tezę uzasadnia wykorzystując pojęcie gry semantycznej: testując prawdziwość zdań „Pewne *S* jest *G*" oraz „Każde *S* jest *G*" przykłady powinny być przedstawione w pierwszym przypadku przez wypowiadającego zdanie, w drugim zaś przez interpretatora. Stosując tę samą metodę do zdań złożonych, Williamson dochodzi do wniosku, że zdania ogólne nie muszą mieć postaci wyłącznie zdań z kwantyfikatorem ogólnym, lecz mogą być także koniunkcjami. Analogicznie, zdania nieostre nie muszą być wyłącznie zdaniami skwantyfikowanymi szczegółowo, lecz mogą mieć postać alternatywy. Wreszcie zauważa, że zarazem zdania ogólne jak i nieostre mogą mieć postać zdań prostych (tj. bez spójników i bez kwantyfikatorów), lecz

---

[62] „A sign that is objectively indeterminate in any respect is objectively vague in so far as it reserves further determination to be made in some other conceivable sign, or at least does not appoint the interpreter as its deputy in this office. Example: „A man whom I could mention seems to be a little conceited". The suggestion here is that the man in view is the person addressed; but the utterer does not authorize such an interpretation or any other application of what she says. She can still say, if she likes, that she does not mean the person addressed. Every utterance naturally leaves the right of further exposition in the utterer; and therefore, in so far as a sign is indeterminate, it is vague, unless it is expressly or by a well-understood convention rendered general", *Issues of Pragmaticism*, Peirce, [1994], s. 7287.

[63] „A sign (under which designation I place every kind of thought, and not alone external signs), that is in any respect objectively indeterminate (i.e., whose object is undetermined by the sign itself) is objectively general in so far as it extends to the interpreter the privilege of carrying its determination further. Example: „Man is mortal". To the question, What man? the reply is that the proposition explicitly leaves it to you to apply its assertion to what man or men you will", *Issues of Pragmaticism*, Peirce, [1994], s. 7287.

[64] Williamson, [1994], s. 49.

właściwe ich odczytanie wymaga użycia w przypadku pierwszego typu zdań kwantyfikatora ogólnego, w drugim zaś szczegółowego. W tym sensie, kwantyfikatory są niejako ukryte w zdaniach prostych, Williamson[65]. Wydaje się jednak, iż przytoczona wyżej definicja zdania nieostrego Peirce'a wyklucza związek nieostrości zdania z jego szczegółową kwantyfikacją. Jest w niej wyraźne stwierdzenie tego, że nieostrość nie jest skutkiem niewiedzy, i że zdobycie jakichkolwiek nowych informacji nie rozwiązuje wiążącego się z nią problemu. Tymczasem, występujący w zdaniu kwantyfikator szczegółowy, podobnie jak ogólny, wymaga przecież weryfikacji. Williamson opisuje nawet zasadę jakiej weryfikacja ta powinna podlegać[66]. Tymczasem wydaje się, iż już samo przeprowadzanie procedury mającej na celu ustalenie jakichś faktów ułatwiających ocenę prawdziwości zdania pokazuje, że nie mamy do czynienia z wypowiedzią nieostrą, przynajmniej nie w sensie definicji Peirce'a.

Peirce odkrył, iż jego podejście do ogólności oraz nieostrości wypowiedzi może zostać wyrażone przy pomocy tautologii logiki klasycznej. Odróżnił bowiem nieostrość od ogólności przyjmując, że[67]: „coś jest ogólne, jeśli prawo wyłączonego środka nie ma wobec tego czegoś zastosowania; coś jest natomiast nieostre, jeśli zasada sprzeczności nie ma wobec tego czegoś zastosowania". Williamson wyjaśnia to w sposób następujący: *Wypowiedź jest ogólnie prawdziwa, jeśli każde jej dookreślenie jest prawdziwe, jest natomiast ogólnie fałszywa, jeśli każde jej dookreślenie jest fałszywe. Ponieważ pewne dookreślenia wypowiedzi „Liczba łysych mężczyzn jest parzysta" dają sądy prawdziwe, inne zaś sądy fałszywe, wypowiedź ta nie jest ani ogólnie prawdziwa, ani ogólnie fałszywa. Właśnie w takim sensie zasada wyłączonego środka nie stosuje się do tej wypowiedzi.* Dalej Williamson tłumaczy, że wypowiedź jest dla Peirce'a nieostro prawdziwa, jeśli pewne jej dookreślenia dają sądy prawdziwe, a nieostro fałszywa, gdy pewne dookreślenia prowadzą do sądów fałszywych. Z tego punktu widzenia, wobec wspomnianego zdania o ilości łysych mężczyzn nie ma zastosowania zasada sprzeczności, ponieważ zdanie to jest zarazem nieostro prawdziwe i nieostro fałszywe[68].

---

[65] Williamson, [1994], s. 49.

[66] Ta dość dokładnie opisana przez Williamsona zasada sprowadza się do tego, iż jeśli prawdziwość jakiegoś zdania jest testowana przez podawanie odpowiednich przykładów, to wybór przykładu należy do wypowiadającego zdanie typu „Pewne F jest G" oraz do interpretatora zdania typu „Każde F jest G", Williamson, [1994], s. 49.

[67] „Perhaps a more scientific pair of definitions would be that anything is general in so far as the principle of excluded middle does not apply to it and is vague in so far as the principle of contradiction does not apply to it", *Issues of Pragmaticism*, Peirce, [1994], s. 7288.

[68] Dość konsekwentnie, Williamson utożsamia nieostrość zdania z jego szczegółową kwantyfikacją, twierdząc, że takie zdania jak „Kobieta napisała *Middlemarch*" są nieostre, gdyż zasada sprzeczności nie ma zastosowania w ich przypadku. Przykładem falsyfikacji tego zdania

Patrzenie na nieostrość wypowiedzi przez pryzmat jej kwantyfikacji prowadzi do pewnych niejasności. Otóż, oba typy zdań, i te będące uogólnieniami i te nieostre są nieokreślone, gdyż nie mają ściśle doprecyzowanej postaci. Może się jednak zdarzyć, że jedno i to samo zdanie jest zarazem przykładem na nieostrość jak i na uogólnienie: „Każdy człowiek jest odważny". Okazuje się jednak, iż podane zdanie ma być przykładem na ogólność, podczas, gdy nieostry ma być „Pewien człowiek jest odważny"[69]. To oderwanie kwestii nieostrości od poszczególnego znaku i rozważanie jej jedynie w kontekście całej wypowiedzi, która skądinąd także może być nieostra, prowadzi do tego, iż wypowiedź może uchodzić, albo za ogólną, albo za nieostrą. Tymczasem, zgodnie z definicją Peirce'a, nieostre zdanie i jego negacja dzielą ten sam nieostry obszar granicznych przypadków, co oznacza, że negacją zdania nieostrego powinno być zdanie nieostre. Jest to niezgodne z faktem, iż negacją zdania nieostrego jest zdanie raczej ogólne, niż nieostre: negacją zdania „Pewien człowiek jest odważny" jest zdanie „Żaden człowiek nie jest odważny"[70]. Trudno jednak nie zauważyć nieostrości obu zdań. Prostym rozwiązaniem tej kwestii byłoby uznanie, iż pewne wypowiedzi mogą być zarazem ogólne i nieostre. Pogląd ten czyniłby zadość definicji, którą Peirce przedstawił w słowniku Baldwina, godziłby jednak w jego pozostałe poglądy na nieostrość.

Wraz z upływem czasu, nieostrość stawała się coraz ważniejszym filozoficznym problemem. Sporo uwagi poświęcili jej Bertrand Russell oraz Max Black (1909–1988). Zainteresowania Russella stały się dla Blacka inspiracją w jego badaniach nad nieostrością. Być może skutkiem tego właśnie faktu była większa dojrzałość prac Blacka, który uznając doniosłość samej nieostrości, nie przyjął jednak poglądów Russella na nieostrość. Mimo to, Black nie uniknął głoszenia dość radykalnych, a przez to raczej ryzykownych tez.

Wśród prac poświęconych problematyce nieostrości wciąż fundamentalne znaczenie ma krótki artykuł Russella z 1923 roku zatytułowany *Vagueness*[71], będący pierwotnie referatem jaki wygłosił przed Jowett Society w Oxfordzie 25 listopada 1922 roku.

Prezentację swoich poglądów na nieostrość Russell poprzedza wyraźnym stwierdzeniem, iż nieostrość dotyczy wyłącznie reprezentacji rzeczywistości, nie

---

ma być, w opinii Williamsona, „Jane Austin napisała *Middlemarch*". Trudno jednak zgodzić się z tym, że drugie zdanie jest jakąkolwiek falsyfikacją pierwszego. Pierwsze zostałoby przecież sfalsyfikowane dopiero wówczas, gdyby się okazało, że zdanie „*A* napisał *Middlemarch*", gdzie „*A*" jest imieniem nie-kobiety, jest zdaniem prawdziwym. Patrz Williamson, [1994], s. 51–52.

[69] Williamson, [1994], s. 48.

[70] Williamson, [1994], s. 48.

[71] Russell, [1923]. Wcześniej Russell poruszył kwestię nieostrości w pochodzącym z 1913 r. rękopisie *Theory of Knowledge*. Do problemu tego powrócił także w książce *The Analysis of Mind*, London, Paul Kegan, 1921.

zaś samej rzeczywistości. O nieostrości możemy więc mówić jedynie w kontekście wyrażeń języka, czyli tego, co reprezentuje, a nie tego, co jest reprezentowane. Zatem, rzeczy nie są ani nieostre ani wyraźne. „One są takimi, jakimi są i niczym innym nigdy nie będą". Russell uważa, że ci filozofowie, którzy dostrzegają w rzeczywistości jakąś ciągłość, czy płynność przenoszą nieostrość językowej natury na pozajęzykową rzeczywistość. To zdecydowane stanowisko Russella jest zgodne z przyjętą przez niego definicją *precyzji*, a przez to i *nieostrości*, która to definicja wykorzystuje zjawisko reprezentowania jednego systemu w innym. Jeśli więc z jednej strony mamy system w postaci języka naturalnego, z drugiej zaś obiekty pozajęzykowe reprezentowane przez wspomniany język, to dla Russella zupełnie niepotrzebnym jest założenie nieostrości systemu pozajęzykowego.

Główną tezą Russella jest ta, głosząca nieostrość całego języka, którym się posługujemy. Na jej potwierdzenie Russell przytoczył szereg przykładów reprezentujących różne rodzaje słów, zaczynając od budzących najmniej kontrowersji terminów wyrażających jakości zmysłowe. Nazwa „czerwony" jest z oczywistych powodów nieostra, podobnie jak „łysy". Zdaniem Russella, wszystkie słowa oznaczające kategorie zmysłowe są nieostre w takim samym stopniu jak „czerwony". Co więcej, w mniejszym stopniu, jednak również nieostre są terminy, którymi operuje nauka. Wystarczy dla przykładu rozważyć takie wyrazy jak „metr" czy „sekunda", aby zrozumieć oczywistość tego stwierdzenia. Metr jest wyznaczony przez długość konkretnego, wybranego pręta, którego krańce nie są przecież precyzyjnymi punktami[72]. Podobnie nieścisłe jest zdefiniowanie sekundy. Russell dowodzi także nieostrości nazw własnych. Proponuje przyjąć, że nazwa „Ebenezer Wilkes Smith" oznacza jednego tylko człowieka. Jak się okazuje założenie to nie czyni wspomnianą nazwę ostrą. Z jednej strony, nie sposób przecież precyzyjnie określić chwilę, od której możemy mówić, że nazwa ta oznacza wspomnianego człowieka, z drugiej zaś wobec faktu, iż śmierć jest trwającym w czasie procesem, także nie potrafimy orzec, kiedy ta sama nazwa przestaje oznaczać człowieka. Nawet jeśli uznamy, że nazwa ta odnosi się do zwłok, to przecież natychmiast staniemy wobec problemu rozkładu zwłok i problem nieostrości pozostanie aktualny[73].

---

[72] Epoka, w której wzorcem metra był sławny pręt przechowywany w Sèvres, będącym aktualnie zachodnią częścią zespołu mieszkalnego Paryża, zakończyła się w 1960 r. Wtedy to, za wzorzec metra, przyjęto długość fali w próżni promieniowania jakie emituje atom kryptonu 86 przechodząc z energetycznego poziomu $2p_{10}$ na poziom $5d_5$. Zastępowanie wzorca mniej precyzyjnego bardziej dokładnym nie zmienia jednak faktu, iż metr pozostaje określony w sposób niedokładny. Ta oczywista prawda jest przyczyną podejmowania kolejnych prób coraz to precyzyjniejszego zdefiniowania metra.

[73] Podobny argument za nieostrością nazwy "prokurator" można znaleźć w jednym z najpopularniejszych w Polsce podręczników do nauki logiki, zatytułowanym *Logika praktyczna*, Ziembiński [1984], s. 32.

Wprost z wyżej przytoczonej analizy wynika nieostrość wszelkich nazw określających istoty żywe, a właściwie nazw wszystkich obiektów podlegających niszczeniu. Russell dowodzi także nieostrości słów mających geograficzne, czy też czasowe odniesienia podając przykłady „Juliusza Cezara", „dwudziestego wieku", „systemu słonecznego". Dotychczasowe uwagi Russella wydają się jak najbardziej trafne. Jednak w swoim tropieniu nieostrości posuwa się on znacznie dalej, gdyż twierdzi, że nieostre są także terminy logiczne. Jako przykład podaje spójnik alternatywy. Pogląd ten wynika z uznania przez Russella nieostrości pojęć prawdy i fałszu: nieostrość słów sprawia, iż nie jesteśmy w stanie precyzyjnie określić przypadków prawdziwości i fałszywości zdań. Tak więc wobec nieostrości słowa „człowiek", nie potrafimy wyraźnie wyznaczyć obszaru prawdziwości zdania „On jest człowiekiem". Naturalnie, problem ogólności tego zdania jest czymś innym niż jego nieostrość, która jest nieusuwalna. W podobny sposób można wykazać nierozstrzygalność innych zdań, co w efekcie prowadzi Russella do spostrzeżenia, iż „prawda" i „fałsz" są nieostre. Skoro tak, to również wszystkie inne pojęcia logiczne, jak chociażby pojęcia spójników zdaniowych, jako odwołujące się do tych dwóch, są nieostre. Oczywiście, głosząc nieostrość pojęć logicznych Russell zajął szczególnie radykalne stanowisko w kwestii nieostrości, raczej nie podzielane przez innych filozofów.

Najwyraźniej, nieostrość pozostaje w konflikcie z logiką klasyczną. Russell twierdził, iż nieostrość kłóci się z prawami logiki klasycznej, a w szczególności z prawem wyłączonego środka. Jeśli bowiem jakiś człowiek z racji owłosienia swojej głowy należy do półcienia słowa „łysy", to zdanie stwierdzające, iż jest on łysy lub jest on niełysy nie jest zdaniem prawdziwym[74]. Alternatywa jest przecież prawdziwa, gdy przynajmniej jedno z dwóch zdań będących jej członami jest zdaniem prawdziwym. Tymczasem, ani zdanie stwierdzające łysość, ani to, które stwierdza niełysość, nie jest zdaniem prawdziwym. Zastosowanie logiki do terminów nieostrych nieuchronnie prowadzi do sprzeczności, która wieńczy argumentację paradoksu stosu. Tak więc, zdaniem Russella i nie tylko, logika klasyczna zakłada precyzję i wyraźność symboli, do których się ją stosuje[75]. Z dwóch możliwości: poszukiwania logiki odpowiedniej do nieostrego języka, którym się posługujemy oraz poszukiwania precyzyjnego języka, który mógłby być z powodzeniem stosowany przez logikę; Russell skłaniał się ku drugiej. Zbliżył się tym samym do Fregego i podobnie jak on nie zaproponował rozwiązania kwestii nieostrości na gruncie języka naturalnego.

---

[74] „Baldness is a vague conception; some men are certainly bald, some are certainly not bald, while between them there are men of whom it is not true to say they must be either be bald or not bald. The law of excluded middle is true when precise symbols are employed, but it is not true when symbols are vague, as, in fact, all symbols are", Russell, [1923].

[75] Russell, [1923].

Mogłoby się jednak wydawać, iż słów, które w oczywisty sposób są nieostre, nie używamy na określenie przypadków wątpliwych, dla których Russell posługuje się słowem „półcień" (*penumbra*). Tak więc, skoro stosujemy je wyłącznie wobec przypadków spoza półcienia, to moglibyśmy przyjąć, iż nieostrość jest problemem, który można łatwo rozwiązać. Niestety tak nie jest, a to z tego prostego powodu, iż półcień nie ma precyzyjnie wyznaczonych granic i wobec tego nie zawsze możemy być pewni, czy dane słowo używamy akurat w przypadku należącym do półcienia, czy też może spoza półcienia. Półcień, czyli obszar nieostrości jest nieostry, gdyż nie jest możliwe, aby był wyznaczony w sposób wyraźny. Wyraźnie wyznaczony półcień przeczy nieostrości słowa, dla którego jest on półcieniem. Gdybyśmy mieli ostro wyznaczone granice dla półcienia takiego słowa jak „łysy", to moglibyśmy wprowadzić nowe słowo np. „półłysy" na oznaczenie tego półcienia. Wówczas, dysponowalibyśmy trzema słowami „łysy", „półłysy", „niełysy", które razem wzięte pokrywałyby wszystkie możliwe do rozważenia przypadki, przy czym żadne z tych trzech słów nie byłoby nieostre. Zatem, dla zupełnie dowolnej liczby naturalnej n, z dokładnością do jednego włosa wiedzielibyśmy jak nazwać kogoś, kto ma n włosów na głowie[76]. Okazałoby się więc, że słowo „łysy", które zdążyło się stać prawdziwym symbolem nieostrości jest wyraźne, czyli nie jest nieostre[77].

Przedstawiając własną definicję nieostrości Russell odwołuje się do pojęcia „precyzji" zastosowanego w kontekście wzajemnej reprezentacji systemów językowych: jeden system termów powiązanych wzajemnie określonymi relacjami jest precyzyjną reprezentacją innego systemu termów powiązanych wzajemnie określonymi relacjami, gdy istnieje funkcja różnowartościowa (*jeden-jeden*) odwzorowująca termy jednego systemu w termy drugiego systemu oraz relacje zachodzące między termami jednego systemu w relacje zachodzące między termami drugiego systemu tak, że jeśli dwa lub więcej termów jednego systemu pozostaje ze sobą w określonej relacji R, to obrazy tych termów przy danej funkcji pozostają w relacji będącej obrazem relacji R przy tej funkcji.

---

[76] Oczywiście, konieczna byłaby tu jeszcze jedna precyzacja, a mianowicie ta określająca, od ilu dokładnie mikrometrów mamy do czynienia z włosem. Precyzacja ta musiałaby też określać sposób pomiaru długości włosa, uwzględniający bruzdy skóry, co zapewne wymagałoby precyzyjnego określenia co jest, a co nie jest bruzdą skóry.

[77] To dość uzasadnione założenie rozmytości granic obszaru nieostrości stało się podstawą do sformułowania dość niezwykłej tezy, zgodnie z którą założenie to pociąga za sobą konieczność uznania istnienia nieostrości tak zwanych „wyższych rzędów": skoro słowo „red" jest nieostre, to ma nieostry obszar nieostrości. Przypadki z tego obszaru nazwijmy „dred". To nowe słowo jako nieostre również ma nieostry obszar nieostrości, nazwijmy go „ddred", itd. I tak, słowo „dddred" miałoby reprezentować nieostrość trzeciego rzędu słowa „red", patrz Williamson, [1994], s. 57. Teza ta ma służyć uzasadnieniu istnienia ostrych granic zakresów terminów nieostrych, czyli nieistnienia Russell'owskiego półcienia nawet dla terminów nieostrych. Do kwestii tej powrócimy w paragrafie zatytułowanym „Nieostrość nieostrości".

Reprezentacja jednego systemu przez inny jest nieostra, gdy rolę funkcji *jeden-jeden* pełni funkcja, która nie jest różnowartościowa, lecz, jak to określa Russell, funkcja *jeden-wiele*. Można więc powiedzieć, że system *A precyzyjnie reprezentuje* system *B*, gdy *A* jest izomorficzny z pewnym fragmentem *C* systemu *B*. Nieostrość jest więc zjawiskiem towarzyszącym reprezentacji systemu obrazów w system słów. Przykładem dla tak zdefiniowanej nieostrości jest, zdaniem Russella, zamazana fotografia, która, z powodu swojej niskiej jakości, może reprezentować zarówno pana Browna, Jonesa, jak i Robinsona – jest więc nieostra. Podobnie mapa o mniejszej skali jest bardziej nieostra, niż mapa o skali większej. Jak sam Russell zauważa, wprost z powyższej definicji nieostrości wynika, że nieostrość jest stopniowalna i zależy od tego, jak dokładnie różnice charakterystyczne dla systemu reprezentowanego są wyrażone w systemie reprezentującym. Naturalnie, system *A* precyzyjnie reprezentuje system *B*, jeśli w *A* przedstawione są wszystkie różnice, jakie tylko występują w odpowiednim fragmencie systemu *B*.

W przeciwieństwie do przytoczonego wcześniej rozróżnienia między nieostrością a niewyraźnością wyrażeń, Russell nieostrość łączy z kwestią znaczenia i w ten sposób nawiązuje do problemu wieloznaczności, którą zresztą odróżnia od nieostrości. W języku precyzyjnym znaczenie byłoby funkcją *jeden-jeden*, żadne słowo nie miałoby dwóch znaczeń i żadne dwa słowa nie miałyby jednego znaczenia. W istniejących językach znaczenie jest funkcją *jeden-wiele*[78]. Oznacza to, że nie ma jednego obiektu oznaczonego przez słowo, jak również nie ma jednego możliwego faktu, który byłby stwierdzany przez zdanie. Dlatego języki, którymi się posługujemy są w mniejszym lub większym stopniu nieostre[79]. Nieostrość nie jest też dla Russella ogólnością. Zdanie ogólne może więc być, w opinii Russella, wyraźne. Niestety, jego stanowisko niezbyt jasno odróżnia ogólność zdania od nieostrości. Przekonanie jest precyzyjne, gdy jest potwierdzone tylko przez jeden fakt, ogólne zaś, gdy jest potwierdzone przez więcej niż jeden fakt. Jeśli więc wykluczymy możliwość braku potwierdzenia przekonania przez fakty, to dojdziemy do wniosku, że przekonanie ogólne jest przeciwieństwem precyzyjnego, zupełnie tak jak przekonanie nieostre. Williamson zauważa, iż wspomniane pomieszanie przez Russella ogólności z nieostrością ma swoje zaskakujące konsekwencje. Otóż, zgodnie z wyżej zarysowanym stanowiskiem, jeśli alternatywa „P_1 lub P_2" jest zdaniem wypowiedzianym w doskonale precyzyjnym języku, to mimo nie istnienia

[78] Naturalnie, Russell odcina się tu od trywialnych przypadków, kiedy to dane słowo ma więcej niż jedno znaczenie, czyli od takich przypadków, jakim jest w języku polskim słowo „zamek". W przeciwieństwie do wieloznaczności dotyczącej przypadków z półcienia, ta jest bowiem prosta do usunięcia. Tak więc nieostrość jest wieloznacznością dotyczącą przypadków z półcienia.

[79] Russell, [1923].

jakichkolwiek półcieni, jest ona zdaniem nieostrym, gdyż może być ona potwierdzona przez więcej niż jeden fakt[80].

Analizując powszechnie występującą nieostrość, która dotyczy także wyrażeń języka nauki, Russell rozważa kwestię wartości „nieostrej" wiedzy, paradoksalnie stwierdzając, iż nieostre przekonanie ma większą szansę na to, aby być prawdziwe, niż przekonanie wyraźne. Nieostrość danego przekonania sprawia bowiem, że przekonanie to jest potwierdzane przez większą ilość faktów, niż ma to miejsce w sytuacji przekonania wyraźnego. Przekonanie jest więc „precyzyjne" (*precise*), gdy jest potwierdzone przez jeden zaledwie fakt. Przekonanie wyraźne i prawdziwe Russell nazywa „dokładnym" (*accurate*). Naturalne dążenie zastępowania w języku nauki nieostrych przekonań wyraźnymi sprawia, iż prawdziwość twierdzeń naukowych staje się trudniejsza do osiągnięcia, same zaś twierdzenia mają jednak większą wartość. Precyzja zdania zmniejsza prawdopodobieństwo jego prawdziwości. Precyzyjne tezy nauki są lepszym źródłem informacji, niż nieostre, zdroworozsądkowe zdania. Jest więc bardziej prawdopodobne, że to tezy naukowe są fałszywe, lecz gdy są one prawdziwe, ich użyteczność jest większa niż zwykłych, nieostrych zdań[81].

Russell nie unika również odpowiedzi na pytanie o źródła nieostrości. Uważa, iż źródłem tym jest ogólne prawo fizyki, które odpowiada za to, iż wygląd danej rzeczy zmienia się wraz z naszym oddalaniem się od niej. Mówiąc ściślej, im nasza odległość od danego obiektu jest większa, tym mniejsza jest nasza zdolność w rozróżnianiu szczegółów tego obiektu. Kolejny raz posługując się przykładem niskiej jakości fotografii Russell wyraźnie stwierdza, iż jego zdaniem, wszelka nieostrość języka oraz myśli jest w pełni analogiczna do nieostrości fotografii. Skoro nieostrość wynika z naszej, ludzkiej fizjologii postrzegania, jest więc zupełnie naturalnym fenomenem, i to zarówno wtedy, gdy dotyczy reprezentowania pozajęzykowego systemu przez system znaków języka naturalnego jak i wówczas, gdy wiąże się z postrzeganiem tego samego fragmentu rzeczywistości z coraz to większej odległości – mówimy wówczas o systemie obrazów pamięci reprezentujących rzeczywistość.

---

[80] Williamson przypomina, iż we wcześniejszej publikacji z 1921 r. *The Analysis of Mind*, Russell prezentuje nieco odmienne stanowisko, które lepiej odróżnia nieostrość od ogólności, lecz grzeszy tym, iż uniemożliwia odróżnienie nieostrości od wieloznaczności, Williamson, [1994], s. 283, przyp. 57.

[81] „If I believe that so-and-so is tall, I am more likely to be right than if I believe that his height is between 6 ft. 2 in. and 6 ft. 3 in.", Russell, [1923]. Williamson wskazuje na niesłuszność tej oceny. Proponuje bowiem rozważenie trzech zdań: 1. „Człowiek *A* jest wysoki", 2. „Człowiek *A* mierzy więcej niż sześć stóp i dwa cale i mniej niż sześć stóp i trzy cale", 3. „Człowiek *A* mierzy więcej niż dwa cale". Mimo, iż zdania 2 i 3 są wyraźne, czyli nie są nieostre, to jednak nieostre zdanie 1 przekazuje mniej informacji niż zdanie 2 i więcej niż zdanie 3. Również dowiedzenie prawdziwości zdania 1 wydaje się być dalece trudniejszym zadaniem niż udowodnienie prawdziwości zdania 3, Williamson, [1994], s. 67.

Mimo iż zapewne Russell starał się uniknąć tych problemów, z którymi wiąże się koncepcja nieostrości Peirce'a, to jednak sam stworzył teorię prowokującą do jej krytycznej oceny. Z tego punktu widzenia, poglądy Blacka wydają się omijać te wątpliwe kwestie, które pojawiały się w podejściu Russella. Niestety, Black proponując swoje rozwiązanie stworzył teorię wywołującą inne, niemniej trudne problemy, które działają na jej niekorzyść.

Od ogłoszenia drukiem w roku 1923 *Vagueness* Russella a następną ważną dla badań nad nieostrością publikacją musiało upłynąć czternaście lat. Dopiero bowiem w 1937 roku ukazał się głośny artykuł Blacka zatytułowany *Vagueness: an excercise in logical analysis*[82]. Od chwili ukazania się tej właśnie publikacji język naturalny stał się dla filozofów w sposób szczególny, interesującym tematem badań. Zmianie począł ulegać stosunek do nieostrości, która nie tylko, że przestawała być przekleństwem, lecz zaczęto dostrzegać w niej pewną zaletę języka naturalnego.

Black dostrzegł wadliwość zaproponowanej przez Russella definicji nieostrości[83]. Zauważył bowiem, iż definicja ta nie odróżnia nieostrości od generalizacji, chociaż sam Russell wyraźnie stwierdził, że nieostry wyraz nie może być utożsamiany z wyrazem ogólnym[84]. Z generalizacją mamy do czynienia wówczas, gdy pewien symbol stosujemy do mnogości obiektów. Tak więc, ogólność analizowanego przez Blacka słowa „krzesło" polega na tym, że może ono być zastosowane wobec wielu różnych obiektów, np. foteli, krzeseł do pracy przy biurku, krzeseł z jadalni, krzeseł kuchennych, foteli dentystycznych, tronów, foteli teatralnych i wielu innych różnego typu siedzisk[85]. Oznacza to, że mnogość możliwych zastosowań danego słowa wobec obiektów różnych ze względu na kształt, wielkość, materiał z którego są zbudowane nie powinno być uważane za dowód nieostrości tego słowa. Black uważa, iż nieostrość winna różnić się nie tylko od generalizacji, ale również od wieloznaczności, która powstaje wówczas, gdy pewna skończona liczba alternatywnych znaczeń posiada tę samą fonetyczną postać.

Naturalnie, także nieostrość jest ściśle związana ze stosowaniem symboli i winna być uważana za przejaw odchylenia modelu języka od empirycznie ustalonych zwyczajów językowych pewnej społeczności. Nieostrość termu jest rozumiana jako prowadząca do zaistnienia tzw. *przypadków granicznych* (*borderline cases*, także, choć rzadziej, zwanych *doubtful objects*), czyli indywiduów, do których wydaje się niemożliwe zarówno zastosowanie, jak i nie zastosowanie tego termu. Ta swoista wątpliwość cechująca wyrażenia nieostre funkcjonuje jak złe zdefiniowanie – nikt nie wie jak używać terminów

[82] Black, [1937].
[83] Black, [1937], s. 430.
[84] Russell, *Analysis of Mind*, [w:] Black, [1937], s. 432.
[85] Black cytuje tu H. G. Wellsa, *First and Last Things*, s. 16.

nieostrych, nie zawsze jest bowiem wiadome, czy można dany termin użyć, czy może jest to w ogóle wykluczone. Black docenia wartość definicji zdania nieostrego autorstwa Peirce'a ze wspomnianego już sławnego *Dictionary of Philosophy and Psychology*. W duchu tej definicji analizuje nieostrość słowa „krzesło", dążąc do wykazania obiektywnego charakteru nieostrości. „Krzesło" jest terminem nieostrym, gdyż możliwe jest przedstawić takie przedmioty, których przynależność do klasy krzeseł jest „niepewna" lub „wątpliwa". Black proponuje wyobrazić sobie niezwykłą wystawę w niezwykłym Muzeum Logiki Stosowanej, przedstawiającą szereg złożony z tysięcy obiektów. Każde dwa sąsiadujące ze sobą obiekty różnią się w możliwie najmniejszy, ale dostrzegalny sposób. Na jednym końcu tego długiego szeregu stoi krzesło Chippendale'a[86], na drugim zaś mały, bliżej nieokreślony kawałek drewna, będący fragmentem wspomnianego krzesła. Ten niezwykły zbiór obiektów ilustruje „płynną", w pewnym sensie, metamorfozę krzesła w nie-krzesło. Black zauważa, że dla każdego normalnego[87] człowieka odwiedzającego tę wystawę będzie niezwykle trudno wskazać na linię dzielącą krzesła na nie-krzesła, gdyż „krzesło" nie należy do słów, które dopuszczają istnienie takiego ostrego rozróżnienia. Co więcej, nieistnienie takiej ostrej granicy sprawia, że takie słowa jak „krzesło" są bardzo użyteczne, chociaż prowadzą do poważnych problemów logicznej natury. Podobnie jak inni logicy, także Black wskazuje na tę charakterystyczną dla nieostrości cechę, która polega na tym, iż wszyscy użytkownicy języka są zgodni orzec, iż konkretny przedmiot jest desygnatem danej nazwy, inny zaś desygnatem tej samej nazwy na pewno nie jest. Wątpliwości dotyczą przypadków granicznych, które zresztą nie są, bo nawet nie mogą być wyznaczone wyraźnymi granicami. Black stwierdza ponadto, iż nieostrość słowa „krzesło" jest typowa dla wszystkich termów, których użycie wymaga odwołania się do sensu wyrażenia. Podkreśla jednak, iż nie chce z góry przesądzać, czy nieostrość ma subiektywny czy może obiektywny charakter. Za subiektywne Black uważa wszystko to, co wiąże się z procesem poznania, odczuwania i pragnienia. Obiektywne jest natomiast wszystko to, co jest przedmiotem wspomnianych procesów. Przykładem własności subiektywnej danej wypowiedzi jest więc zarówno intonacja głosu, jak również przedmiot mogący realnie istnieć, o ile wypowiedź stwierdzająca jego istnienie jest fałszem i jest spowodowana nietypowym stanem w jakim znajduje się nadawca wypowiedzi, np. różowa jaszczurka, o której mówi osoba będąca w stanie

---

[86] Chippendale Thomas (1718–1779), wybitny przedstawiciel brytyjskiego meblarstwa, autor słynnej książki *The Gentleman and Cabinet Maker's Director* wydanej w 1754 r., patrz „Oksfordzki Słownik Biograficzny", [1999].

[87] W rozumieniu Blacka „normalnym" obserwatorem jest każdy, kto w sytuacjach podobnych do tej, ze wspomnianej wystawy, nie oczekuje odkrycia wyraźnej granicy podziału między obiektami nazwanymi "*a*" a obiektami będącymi „*nie-a*", Black, [1937], s. 433.

delirium tremens[88]. Oznacza to, że rozróżnienie między cechą subiektywną a obiektywną danej wypowiedzi jest ściśle związane z rozróżnieniem między jej psychologicznym a materialnym odniesieniem. Pytanie o to, czy nieostrość ma subiektywny czy obiektywny charakter sprowadza się więc do pytania, czy fakt, iż granica między desygnatami danej nieostrej nazwy a przedmiotami niebędącymi desygnatami tej samej nazwy jest różnie wyznaczana nie tylko przez różnych ludzi, ale również przez tego samego człowieka w różnych sytuacjach, zależy od specyfiki ludzkiego zachowania, czy może od fizycznych własności świata[89]. Black uważa, że aby rozstrzygnąć problem subiektywności nieostrości należy posłużyć się przykładem instrumentów stosowanych w pomiarach naukowych. Instrumenty te są po prostu przedłużeniem i wzmocnieniem zmysłów badaczy, a odchylenia w wynikach pomiarów mogą być skutkiem: *a*. „błędu" instrumentu lub *b*. zmiany warunków pomiaru niezależnych od instrumentu. Przypadek *a* odpowiada subiektywności różnorodności odczytów podczas, gdy *b* oznacza obiektywny charakter tej różnorodności. Ponieważ w przypadku serii, do których stosuje się termin nieostry różnorodność odczytów nie jest przypadkowa, lecz wykazuje pewną prawidłowość, świadczy to zdaniem Blacka o tym, iż nieostrość ma obiektywny charakter.

Teza głosząca obiektywny charakter nieostrości stała się dla Blacka podstawą dla przeprowadzenia serii pewnego rodzaju eksperymentów, które miały uzasadnić jego wiarę w istnienie ostrej granicy między przypadkami, o których można daną nieostrą wypowiedź orzec, nazwijmy je przypadkami pozytywnymi, a przypadkami, o których tej wypowiedzi orzec nie można, nazwijmy je przypadkami negatywnymi. Eksperyment polegał na tym, iż przed każdym przedstawicielem pewnej grupy ludzi stawiał jedno i to samo zadanie jednoznacznego ocenienia, czy dany, konkretny nieostry predykat można orzec o kolejnych, układających się w pewien ciąg przypadkach, czy też nie można. Każdy uczestnik eksperymentu musiał więc orzec, o każdym danym mu do rozważenia przypadku, czy jest to przypadek pozytywny, czy negatywny danego nieostrego predykatu *L*. Powstrzymanie się od takiej oceny w którymkolwiek z przypadków było wykluczone. Celem każdego eksperymentu było sporządzenie wykresu zwanego przez Blacka „profilem gęstości" (*consistency profile*). Wykres ten zależał od trzech czynników: 1. języka (ewentualnie użytkowników języka); 2. sytuacji, w której użytkownik języka próbuje zastosować symbol „*L*" do obiektu *x*; oraz 3. gęstości zastosowania (*consistency of application*) symbolu „*L*" do obiektu *x*. „Gęstość zastosowania" wiąże się z tym, że gdy nieostrość słowa jest przyczyną różnych zastosowań tego słowa przez różnych użytkowników języka, to ta właśnie różnorodność zastosowania danego słowa musi podlegać jakimś przynajmniej statystycznie rejestrowanym prawidłowościom. Uchwycenie tych

[88] Black, [1937], s. 439.
[89] Black, [1937], s. 439.

prawidłowości i ujęcie ich w postać profilu gęstości jest celem eksperymentu. Załóżmy więc, że każdemu przedstawicielowi pewnej grupy użytkowników języka dajemy do rozstrzygnięcia problem, czy do danego obiektu *x* powinien on zastosować nieostry predykat *L*, czy może *~L*[90]. W definicji gęstości zastosowania, w każdym przypadku *x*, Black posługuje się dwiema wielkościami: *m* – liczby osób, które twierdzą, że *DxL*; oraz *n* – liczby osób, które twierdzą, że *Dx~L*. Gęstość zastosowania *C* jest określona jako funkcja przyporządkowująca serii przypadków *x* granicę, do której zbiega wartość ułamka *m/n*, gdy liczba poddawanych eksperymentowi osób wzrasta nieograniczenie[91]. Tak więc, *C* jest funkcją dwóch zmiennych *L* oraz *x*: *C*(*L*, *x*). Wyniki badań nad predykatem *L* służyły zatem Blackowi do sporządzania wykresu funkcji, której argumentem był *x*, zaś wartością *C*(*L*, *x*). Jeśli więc eksperymentował ze słowem „wysoki", to wykres wyznaczał relację, jaka zachodziła między wzrostem człowieka, podanym w stopach i calach (wartości *x*), a gęstością zastosowania predykatu „wysoki" do danego *x*-a (wartości *C*(*L*, *x*)). Na osi odciętych, czyli argumentów badanej funkcji, są więc przedstawiane wartości odpowiadające stopniowi występowania (natężenia) cechy wyrażonej przez badany predykat, czyli w naszym przypadku, stopniowi wzrostu, który to stopień mógł być reprezentowany przez wielkości podane na przykład w stopach i calach. Na osi rzędnych była natomiast reprezentowana wartość *C*(*L*, *x*). Linię wykresu Black nazwał „profilem gęstości" (*consistency profile*). Black zauważył pewną prawidłowość w kształcie tej krzywej. Jak się okazało, można w niej wyróżnić trzy części: pierwsza jest linią (raczej nie prostą) dość wolno opadającą ku osi odciętych, druga część gwałtownie opada ku osi odciętych, wreszcie trzecia opada mniej więcej tak wolno, jak pierwsza. Tak więc, środkowa, druga z wymienionych części stanowi pewien uskok, który Black nazwał „fringe". Część ta odpowiada przypadkom granicznym. Im bardziej nieostry jest predykat, tym mniej stromy jest uskok, ponieważ przypadki pozytywne przechodzą bardziej płynnie w przypadki negatywne – granica między przypadkami pozytywnymi i negatywnymi jest przez osoby uczestniczące w eksperymencie lokalizowana w dość szerokim spektrum

---

[90] Black posługuje się następującym przykładem: załóżmy, że kierowca prowadzący samochód w dużej mgle zatrzymuje pojazd na skrzyżowaniu, nie wiedząc jakie światła palą się w tej chwili, czerwone, czy zielone. Mgła jest na tyle duża, że kierowca nie wie, czy palą się światła ulokowane na słupie sygnalizacyjnym wyżej, czy niżej, w przeciwnym razie, już sama lokalizacja świateł byłaby informacją o ich kolorze. Ponadto, sygnalizator świateł Blacka nie dysponuje kolorem żółtym – wyświetlić bowiem może jedynie kolor czerwony lub zielony. Kierowca ten musi więc rozstrzygnąć, czy do obiektu *x* zastosować *L*, czy *~L*. Sytuację tę Black nazywa *odróżnieniem x ze względu na L* (*discrimination of x with respect to L*), w skrócie *DxL* i przyjmuje, że *DxL* jest identyczne z *Dx~L*, Black, [1937], s. 442.

[91] Black doskonale zdaje sobie sprawę z tego, że liczba poddanych eksperymentowi osób nie może rosnąć bez końca. Pisząc „ilość osób wzrasta nieograniczenie" ma więc na myśli to, że liczba ta zbliża się do liczby wszystkich istniejących użytkowników języka i w tym właśnie sensie nie jest ograniczona, Black, [1937], s. 442.

przypadków granicznych. Zatem, im bardziej wyraźny (tj. mniej nieostry) jest predykat, tym bardziej stromy jest uskok, gdyż rozciąga się on nad mniejszą liczbą przypadków granicznych. O stopniu nieostrości predykatu świadczą także pozostałe dwie części wykresu. Im bardziej wyraźny jest predykat, tym bardziej obie części krzywej są zbliżone do linii poziomej (równoległej) względem osi odciętych, ponadto część odpowiadająca przypadkom pozytywnym jest położona dość wysoko na wykresie podczas, gdy część odpowiadająca przypadkom negatywnym bardzo nisko, prawie przy samej osi odciętych. Oznacza to, że tak samo dużo osób, dość jednomyślnie, wskazuje na zakres przypadków pozytywnych i tak samo mało osób, również dość jednomyślnie, wskazuje przypadki negatywne[92]. Zatem, im więcej wątpliwości budzi nieostry predykat, tym bardziej nachylona względem osi odciętych jest zarówno część pierwsza, jak i trzecia wykresu[93]. Podejście Blacka do nieostrości charakteryzuje więc przekonanie, iż może ona być mierzona eksperymentalnie.

Tym sposobem, Black zilustrował graficznie problem, dostrzeżonej już przez Russella, stopniowalności nieostrości predykatów. Ta stopniowalność jest dla Blacka kluczową kwestią nieostrości, odróżniającą wyrażenia nieostre od tych, wobec których można stosować zasadę wszystko-albo-nic. Zazwyczaj, ludzie popełniają błąd sadząc, że terminy nieostre należy rozumieć tak, jakby podlegały tej zasadzie i zachowują się tak jakby każdy człowiek musiał być albo wysoki, albo niewysoki. Tymczasem, stopniowalność słowa „wysoki" sprawia, że ktoś może być bardziej wysoki, i jeszcze bardziej wysoki, czy też trochę mniej wysoki. Upatrując w stopniowalności głównej przyczyny nieostrości, Black zaproponował zamianę nie wyrażających stopniowalności, nieostrych wyrażeń przez wyrażenia odwołujące się właśnie do stopniowalności, a przez to, bardziej wyraźne. Jeśli więc „*L*" jest jednoargumentowym wyrażeniem pierwszego z wymienionych typów mającym zastosowanie w zdaniu „*x* jest *L*", to w nowym, poprawionym języku, wyrażenie to powinno zostać zastąpione przez dwuargumentowe „*L*'", którego analogiczne zastosowanie powinno mieć postać „*x* jest *L*' w stopniu *c*" – naturalnie, argumentami *L*' są tu *x* oraz *c*. Parametr *c* jest nazywany przez Blacka „gęstością". Wyrażenie *L*' jest nazywane przez Blacka *analizą* wyrażenia *L*, gdyż wyrażona przy pomocy *c* stopniowalność *L*' jest ustalana na podstawie odpowiedniego wykresu – profilu gęstości dla *L*. Tak więc, *L* i *L*' wyrażają wystąpienie lub brak wystąpienia tej samej własności z tą jednak różnicą, że *L* czyni to nieostro, stosując do tej własności

---

[92] Pewnym problemem, chyba niedostrzeżonym przez Blacka jest to, iż w przypadku oczywistego zastosowania predykatu *L* do przypadku *x*, liczba osób twierdząca, że do *x*-a stosuje się ~*L* powinna być równa zeru, a tym bardziej granica do której dąży wartość *n*. Jednocześnie, wartość *m* dąży do liczby wszystkich użytkowników języka. Oznacza to, że ułamek *m*/n dąży do nieskończoności. Niestety, wykresy Blacka tego nie uwzględniają. Zupełnie nie jest jasne jaki wykres powstałby, gdyby eksperymentowi poddać taki predykat jak chociażby „bycie kwadratem".

[93] Patrz wykresy zamieszczone na stronach 443–445, Black, [1937].

zasadę *wszystko-albo-nic*, zaś *L'* precyzyjniej, uwzględniając stopniowalność występowania tej własności[94].

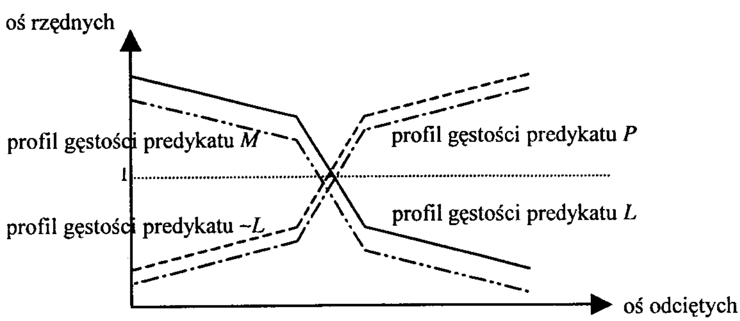
Profile gęstości dla predykatów są dla Blacka punktem wyjścia w konstrukcji logiki terminów nieostrych. Ponieważ, jego zdaniem, prawo wyłączonego środka nie ma racji bytu w przypadku logiki nieostrości, wykorzystuje on parametr *c* do określenia zasady transformacji, która z kolei pokazuje w jaki sposób zastąpić brakujące prawo wyłączonego środka. Zdanie $L(x, c)$ czytamy następująco: „*L* stosuje się do *x* z gęstością *c*". Jeśli więc, dla tego samego parametru *x* mamy $L(x, c)$ oraz $\sim L(x, c')$, to Black przyjmuje, że iloczyn obu gęstości *c* i *c'* musi być równy jeden. W ten sposób, prawo wyłączonego środka jest zastąpione przez operację transponującą $L(x, c)$ w $\sim L(x, 1/c)$. Zatem, w miejsce prawa wyłączonego środka $\forall x, c\ (Px \vee \sim Px)$, Black wprowadza jego uogólnienie: $\forall x, c\ (P(x, c) \vee \sim P(x, f(c)))$, gdzie *f* jest funkcją określoną na dziedzinie zmiennej *c* taką, że: jeśli *c* ma wartość bliską 1, to $f(c)$ jest prawie równe *c*; jeśli *c* ma dużą wartość, to $f(c)$ jest odpowiednio małe; jeśli zaś *c* jest małe, to $f(c)$ jest odpowiednio duże[95]. Kolejnym krokiem Blacka w kierunku określenia logiki nieostrości jest jego spostrzeżenie, iż profile gęstości dla terminów nieostrych mogą pełnić taką funkcję jak koła w diagramach Eulera, które służą do wyrażenia relacji zawierania oraz wykluczania się zakresów nazw. Przejście od wnętrza do zewnętrza takiego koła odpowiada operacji negowania. W przypadku profili gęstości, tej samej operacji odpowiada przejście od profilu gęstości predykatu *L*, do profilu gęstości predykatu $\sim L$ – oba profile są krzywymi osiowo symetrycznymi względem prostej równoległej do osi rzędnych przechodzącej przez ten punkt na osi odciętych, który leży w połowie wszystkich przypadków natężenia cechy odpowiadającej predykatowi *L*. Wreszcie, Black określa implikację dwóch zdań z predykatami jednoargumentowymi o wspólnej zmiennej *x*, „$Mx \supset Lx$", w następujący sposób: zdanie *Mx* implikuje zdanie *Lx* (implikacja $Mx \supset Lx$ jest wówczas przez nas akceptowana), jeśli dla każdego *x*, $Mx < Lx$, czyli gdy profil gęstości predykatu *L* leży na wykresie „pod" profilem gęstości predykatu *M*. Innymi słowy, implikacja $Mx \supset Lx$ jest akceptowalna, gdy obszar ograniczony profilem gęstości *M* jest zawarty w obszarze ograniczonym profilem gęstości *L*[96]. Black dopuszcza możliwość akceptacji implikacji $Mx \supset Lx$ mimo, iż dla pewnej bardzo małej (*very few*) ilości argumentów *x*, $Mx > Lx$. Tym samym, pojawi się groźba wprowadzenia kolejnej nieostrości do analizy mającej przecież na celu

[94] Naturalnie, uwzględnienie stopniowalności jakiejś własności nie prowadzi do powstania ostrego predykatu nazywającego tę własność, lecz jedynie do predykatu nieco mniej nieostrego. Black nie twierdzi, że *L'* jest wyraźnym terminem, lecz jedynie to, że *L'* jest bardziej wyraźnym niż *L*, Black [1994], s. 446. Tymczasem, Williamson referując konstrukcję Blacka predykatu *L'*, wyraża się o *L'* tak, jak gdyby był on predykatem wyraźnym, Williamson, [1994], s. 75–76.

[95] Black, [1937], s. 452.

[96] Black, [1937], s. 452–454.

rozwiązanie kwestii nieostrości. Chcąc uniknąć tego problemu, Black wprowadza dokładniej przez siebie nie zdefiniowaną liczbę $i(L, M)$ wyrażającą stopień odchylenia, czyli ilość tych przypadków, które stanowią argument za odrzuceniem implikacji $Mx \supset Lx$[97]. Wartość i nazywa indeksem przybliżenia (*approximation index*). Jeśli wartość i jest równa zero, implikacja jest ścisła. Uwzględniając ten nowy parametr, Black proponuje zapisać implikację „$Mx \supset Lx$" w ogólniejszej postaci „$\supset\{i, (L, M), c\}$", która uwzględniałaby istotny wpływ dwóch czynników: i oraz c. Tak określona implikacja podlega, zdaniem Blacka, prawu przechodniości. Powiemy, że akceptacja dwóch implikacji $\supset\{i, (L, M), c\}$ oraz $\supset\{i', (M, N), c\}$ dla tej samej wartości c oraz dla dwóch, niekoniecznie równych wartości i oraz i', pociąga za sobą akceptację implikacji $\supset\{i7, (L, N), c\}$ dla tej samej wartości c oraz i'', jeśli $i'' < i + i'$ z tym wyjątkiem, że dla $i = i' = 0$, $i'' = 0$. Zawieranie się obszarów ograniczonych przez krzywe będące profilami gęstości nie służy wyłącznie kwestii rozstrzygnięcia akceptowalności określonych implikacji. W podobny sposób Black określa bowiem również wykluczanie się zdań. Zdanie Lx wyklucza Px, jeśli obszar wyznaczony przez profil gęstości predykatu P zawiera się w obszarze wyznaczonym przez profil gęstości predykatu $\sim L$ (patrz poniższy diagram)[98].



Black odrzucił więc nie tylko definicję precyzji Russella wykorzystującą pojęcie reprezentowania jednego systemu w drugim, lecz także zakwestionował prawie całą analizę nieostrości dokonaną przez Russella wraz z tezą o nie-

---

[97] Jako przykład możliwego zdefiniowania parametru i, Black podaje stosunek liczby tych x-ów, dla których $Mx > Lx$, do liczby tych x-ów, dla których $Mx < Lx$. Jednocześnie stwierdza, że na tym etapie rozważań precyzyjna definicja parametru i nie jest kwestią ważną, Black, [1937], s. 453, przyp. 47.

[98] Black, [1937], s. 453–455. Wartość „1" jest granicą do której dąży m/n, gdy liczba osób m zrównuje się z liczbą n. Dlatego, punkt, którego wartość rzędnej równa się 1 jest punktem przecięcia profilu gęstości predykatu L z profilem gęstości predykatu $\sim L$. Istnieje więc taka wartość x_0 (taki przypadek x_0), dla której zachodzi równość: $C(L, x_0) = C(\sim L, x_0) = 1$.

ostrości całego języka. Uznał jednak wskazaną przez Russella stopniowalność nieostrości. Co więcej, fakt ten miał dla jego koncepcji podstawowe znaczenie. Ponadto, Black uznał, iż nieostrość jest zjawiskiem pozytywnym. Niestety, w niektórych miejscach swego artykułu zdawał się zapominać o swoich własnych ustaleniach dotyczących przypadków granicznych. Zaproponował bowiem analizę przypominającą nieco argumentację Peirce'a, której celem było pokazanie niestosowalności negacji klasycznej do zdań nieostrych. Stosując negację klasyczną dochodzimy bowiem do wniosku, że każde orzekające zdanie nieostre *P* nie wykluczając swoich przypadków granicznych, jest w tych właśnie przypadkach akceptowalne. Jednak zdanie *nie-P* ma dokładnie te same przypadki graniczne co zdanie *P*. Zatem, w tych właśnie przypadkach, zdanie *nie-P* również jest akceptowalne. Tym samym, dla wspomnianych przypadków granicznych oba zdania *P* oraz *nie-P* są jednocześnie akceptowalne, naturalnie, w sensie akceptowalności ich prawdziwości. Jest to jednak sprzeczne z klasycznością negacji będącej głównym funktorem zdania *nie-P*. Klasyczność tej negacji oznacza bowiem to, iż zdanie *nie-P* jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy *P* jest zdaniem fałszywym. W konsekwencji otrzymujemy sprzeczność: zdanie *P* jest prawdziwe i fałszywe zarazem[99]. Zatem, zdania nieostre nie są ani prawdziwe, ani fałszywe dla przypadków granicznych[100]. Spore wątpliwości musi także budzić jego sformalizowane podejście do nieostrych predykatów. Wystarczy bowiem, aby profil gęstości predykatu *L* był nad profilem gęstości predykatu *M*, przy pewnym założeniu dotyczącym odpowiedniego dla pary *L* i *M* parametru *i*, a konieczna, czy chociażby uzasadniona staje się akceptacja tezy, iż *L* pociąga za sobą *M* i to bez względu na znaczenie obu predykatów. Może się więc zdarzyć, że ta sama grupa osób badając jeden ciąg przypadków oceni, że bycie łysym implikuje bycie piegowatym lub na odwrót.

Mimo wszystko, wkład Blacka w badania nad nieostrością jest trudny do przecenienia, nawet jeśli ryzykownym może się wydawać pomysł mierzenia

[99] Jak widać, Black zastosował tu w wyraźny sposób klasyczność negacji zdania. Tylko dlatego mógł stwierdzić, że jeśli jakieś zdanie w jakimś przypadku nie jest odrzucone, to jest w tym przypadku akceptowane. Stąd otrzymujemy, że każde zdanie nieostre jest zarazem akceptowalne (a więc uznane za prawdziwe) w swoich przypadkach granicznych: „Suppose now that L_1, L_2, L_3, L_4 are true, while L_5 and L_6 are 'doubtful'. It can only follow that to assert *Lx* of any *x* is positively to exclude it only from the range 7 to 10, since we cannot be sure, when *Lx* is asserted, that *x* does not perhaps occur in the range 5,6. Thus to assert *Lx* is tantamount to confining *x* to the range 1 to 6. Having obtained this result, it is easy to construct a similar argument in respect of *~Lx*. The assertion of *~Lx* can, no more than the assertion of *Lx*, positively exclude *x* from the fringe 5, 6. It follows that to assert *~Lx* is tantamount to excluding *x* from the range 1 to 4 and confining it to the range 5 to 10. In short, inability to find a logical interpretation of doubtful and perhaps in terms of the two truth values, truth and falsehood, forces us to admit that the ranges of application of *Lx*, 1 to 6, and of *~Lx*, 5 to 10, overlap in the fringe, 5, 6", Black, [1937], s. 435–436.

[100] Williamson, [1994], s. 74.

nieostrości, częstokroć związanych przecież z płynnym spektrum kojarzonym tradycyjnie z wieloma własnościami[101]. Jednak nikt przed Blackiem nie poświęcił tematyce nieostrości tyle uwagi, nikt też nie zaproponował tak drobiazgowej, chociaż raczej chybionej, formalnej analizy tego fenomenu.

Pierwszą ważną reakcją na idee Blacka wyrażone w *Vagueness: an excercise in logical analysis* z 1937 roku był artykuł Carla Gustava Hempela (1905–1997) *Vagueness and logic* opublikowany w 1939 roku. Artykuł ten rozpoczął dyskusję nad nieostrością, konfrontując poglądy Blacka z poglądami Hempela. Debata ta, jak się okazało miała postawić kluczowe pytania o naturę nieostrości[102]. Główną kwestią stał się problem, czy nieostrość jest problemem wyłącznie semiotycznym, czy też może być rozumiana jako kwestia natury czysto semantycznej.

Hempel w swej krytycznej analizie propozycji Blacka oparł się na odróżnieniu dwóch podejść do języka. Według pierwszego, najwidoczniej reprezentowanego przez Blacka, perspektywę patrzenia na kwestie językowe ustala zachowanie się użytkowników języka. Zgodnie zaś z drugim, język jest określony przez dwa rodzaje reguł: syntaktyczne oraz semantyczne. Pierwsze podejście jest ryzykowne, gdyż zachowanie użytkownika nie musi mieć związku ani z regułami syntaktycznymi, ani z semantycznymi. Obserwacja tego zachowania może więc być przeprowadzana nawet bez rozumienia języka. Hempel, posługując się grą w szachy postawił pytanie, czy można trafnie rozpoznać reguły rządzące tą grą przez obserwację zachowania się zawodników. Zauważył, że, na przykład, wypowiedzeniu przez któregoś z zawodników słów „szach i mat" towarzyszą zazwyczaj objawy zadowolenia niewystępujące u jego przeciwnika. Podejście Blacka uwzględniałoby więc regularność behawioralnej natury, podczas gdy logikę gry stanowią wyłącznie reguły pozabehawioralne. Podobnie behawioralny charakter mają profile gęstości, zaś logika języka zależy od odpowiedniej syntaktyki i semantyki. Jeśli więc nieostrość była przez Blacka analizowana w sposób abstrahujący od syntaktyki i semantyki języka, Black nie mógł wykazać, że nieostrość godzi w logikę. Co więcej, zachowanie się użytkownika może na wiele sposobów gwałcić reguły konstytuujące język, przez co wyniki obserwacji mogą być mylące. Przecież nieuczciwy czy też

---

[101] Black sam przeprowadził eksperyment, zniechęcający do kontynuowania doświadczeń z nieostrymi predykatami (patrz Williamson, [1994], s. 78). Chcąc podać kryteria jakie decydują o tym, że jakaś osoba dokona podziału przypadków w tym a nie w innym miejscu, Black wykorzystał serię prostokątów, w której podstawa każdego kolejnego prostokąta jest coraz krótsza przy równocześnie coraz dłuższej wysokości. Odpytywane osoby miały dokonać podziału tego ciągu prostokątów na dwa podciągi przez wskazanie „najbardziej naturalnego miejsca tego podziału". Krzywa ilustrująca wyniki eksperymentu ma postać profilu gęstości z charakterystycznym uskokiem mimo, iż doświadczenie nie dotyczyło przecież nieostrego predykatu, Black [1937], s. 449–451.

[102] Williamson, [1994], s. 73.

niekompetentny gracz może nie przestrzegać reguł obowiązujących w grze w szachy. Czy wobec tego, z podobnego zachowania można wyciągać jakieś wnioski dotyczące reguł gry w szachy? W swych poglądach Hempel wyraźnie nawiązał do poglądów Charlesa Williama Morrisa (1903–1979) wyrażonych w artykule *Foundations of the Theory of Signs*[103] opublikowanym w 1938 roku w broszurze drugiej pierwszego wolumenu *International Encyclopedia of Unified Science* redagowanej przez zespół, w skład którego wchodzili Otto von Neurath, Philipp Frank, Charles W. Morris, Jörgen Jörgensen oraz Louis Rougier[104]. Morris wprowadził pojęcie *semiotyki* jako ogólnej teorii znaków i wyróżnił w niej semantykę, syntaktykę oraz pragmatykę. Pierwsza jest teorią relacji zachodzących między znakami a tym do czego się one odnoszą, druga, teorią relacji zachodzących pomiędzy znakami, trzecia zaś teorią relacji zachodzących między znakami a ich użytkownikami[105]. Później, już w 1963 roku Morris (Morris, [1963]) posunął się dalej, odróżniając pragmatykę *opisową*, czyli *empiryczną* od pragmatyki *czystej*, czyli *logicznej*[106], Hempel uznał więc, że zgodnie z podejściem Blacka, nieostrość jest termem semiotycznym odwołującym się do trzech czynników: samego znaku, tego do czego się ten znak odnosi oraz użytkownika znaku. Tymczasem, logiczna prawdziwość ma charakter semantyczny, co oznacza, że nieostrość Blacka nie odnosi się do logiki. Dostrzegając analogię między relacjami: trójargumentową „użytkownik *z* oznacza własność *y* przez term *x*" oraz dwuargumentową „term *x* oznacza własność *y*"; Hempel postawił problem, czy możliwa jest podobna redukcja, która czyniłaby z semiotycznej nieostrości, nieostrość natury semantycznej. Rozwiązanie tej kwestii w dużej mierze zależeć powinno od tego, czy nieostrość rozumiana semantycznie byłaby stopniowalna tak, jak ma to miejsce w przypadku semiotycznej nieostrości Blacka. Niestety, zdaniem Hempela, nie istnieje semantyczna postać nieostrości, gdyż nie istnieje stopniowalność oznaczania. Dany predykat ma zastosowanie do jakiegoś obiektu, jeśli oznacza cechę przez ten obiekt posiadaną. Ponieważ jednak, w opinii Hempela, posiadanie przez obiekt danej cechy nie może być stopniowalne, semantyczna nieostrość predykatu powinna wynikać z faktu stopniowalności oznaczania, co prowadzi do trudnych do zaakceptowania konkluzji. W celu pokazania tych trudności, Hempel wykorzystuje zagadnienie przekładu zdań z jednego języka na inne. Załóżmy bowiem, że słowo „sol" oznacza słońce w stopniu 0,7, zaś słowo „cal" oznacza własność bycia gorącym w stopniu 0,9. Wówczas, zdanie „Sol esti cal" powinno oznaczać w stopniu $0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$

---

[103] Morris, [1938].

[104] Ayer, [1982], s. 176.

[105] W. Marciszewski, *Podstawowe pojęcia semantyki logicznej*, [w:] Marciszewski, [1987], s. 250–255.

[106] Patrz L. Koj, *Pragmatyka logiczna*, [w:] Marciszewski, [1987], s. 281–295.

stan rzeczy polegający na tym, że słońce jest gorące. Jak więc, pyta Hempel, jest możliwy dokładny przekład tego zdania na zdanie „The sun is hot"?[107]

Black uznał, iż badana przez niego nieostrość ma semiotyczny charakter. Odrzucił jednak tezę o nieprzekładalności języków, w których relacje oznaczania są stopniowalne. Stwierdził bowiem, że jeśli nawet jakieś partie danego języka nie dają się przetłumaczyć na język angielski, to zawsze możliwe jest rozszerzenie języka angielskiego o odpowiednie, niemożliwe do ścisłego przetłumaczenia wyrażenia. Dlatego też, zdaniem Blacka, możliwa jest nieostrość pojmowana semantycznie. Tym samym, nieostrość może wpływać na ocenę logiki i uzasadniać potrzebę jej zmiany. Co więcej, starania mające obronić logikę klasyczną, bazujące na uściślaniu wyrażeń języka nie wytyczają właściwego kierunku w pracach nad nieostrością, a to z tego powodu, iż logika klasyczna wymaga zbyt dużego poziomu abstrakcji języka.

Hempel pozostał jednak na stanowisku, iż nieostrość jest problemem wyłącznie semiotycznym. Z fenomenem nieostrości mamy bowiem do czynienia w sytuacji komunikowania się ludzi. Problem w tym, aby trafnie odróżnić nieostrość od pozostałych uchybień językowych. Hempel krytykował także zastosowaną przez Blacka metodę pomiaru nieostrości wykorzystującą profil gęstości. Propozycja Blacka wydaje się uzasadniona, gdy pozostaniemy przy przykładach podobnych do tego, w którym kierowca we mgle próbuje rozstrzygnąć, jaki kolor świateł na skrzyżowaniu jest w danej chwili wyświetlany. Sytuacja jest bowiem jasna, jeśli nie jest to kolor zielony, to musi być to kolor czerwony, wykluczona jest bowiem możliwość wyświetlenia koloru żółtego. Tym samym, Black założył, że osoba rozstrzygająca kwestię o charakterze nieostrym zna pełne spektrum przypadków możliwych do zaistnienia. Hempel zauważa, że założenie to jest nieuprawnione, gdyż istnieją przypadki, w których osoba musi dokonać oceny nie znając wszystkich możliwych przypadków. Jako przykład podaje problem rozstrzygnięcia, czy dany spotkany na ulicy człowiek jest szpiegiem, superszpiegiem, czy może przypadkowym gapiem. W takich okolicznościach metoda Blacka zawodzi. Mogą również zaistnieć takie okoliczności eksperymentu, które w istotny sposób wpływają na wypaczenie wyników obserwacji. Ponadto, nieostrość nie wszystkich słów daje się stopniować liniowo. Takie chociażby słowo jak „sękaty", mimo swej niewątpliwej nieostrości nie kojarzy się z liniową stopniowalnością sękowatości. Hempel dochodzi więc do wniosku, że, mimo iż nieostrość ma charakter semiotyczny, to jednak nie daje się ona uchwycić w kategoriach behawioralnych.

Krytyka Hempela okazała się na tyle znacząca, że w swym artykule *Reasoning with loose concepts* z 1963 roku Black nie wspomniał już ani

[107] Williamson, [1994], s. 79–80.

o profilach gęstości, ani o żadnej statystycznej metodzie analizy nieostrości. Przestał też opowiadać się za potrzebą zmiany logiki mimo, iż pozostał na stanowisku uznającym niestosowalność logiki klasycznej do przypadków granicznych. W ten sposób, Black przybliżył się do stanowiska zajmowanego przez Hempela, zgodnie z którym rozwiązanie problemów wynikających z nieostrości nie powinno bazować na zastosowaniu jakiejś odpowiedniej dla nieostrości logiki nieklasycznej, lecz powinno wyjść od lepszego zrozumienia relacji między logicznymi systemami, a praktyką użycia języka[108].

4.1.2. HISTORIA PARADOKSU STOSU W POLSCE

Zaniem Juliusza Jacka Jadackiego[109], po raz pierwszy w literaturze polskiej, problem nieostrości zaistniał za sprawą Kazimierza Twardowskiego, który dostrzegł istnienie pojęć, „których niepodobna określić"[110]. Twardowski zauważył, iż mamy do czynienia z pojęciami dwojakiego rodzaju. Po pierwsze są nimi[111]: „pojęcia tych przedmiotów, których nie można drogą analizy rozłożyć na cechy; nie mogąc bowiem wyróżnić cech jakiegoś przedmiotu, nie można też cech tych wskazać". Jako przykład Twardowski przytoczył pojęcie „barwy czerwonej", „smaku słodkiego", „ciepła", „zimna", a także pojęcie „sądu" oraz „uczucia". Po drugie, pojęciami niedającymi się określić są pojęcia „przedmiotów należących do zakresu, który niepodobna ściśle odgraniczyć od przedmiotów należących do zakresu innych pojęć; niepodobna np. określić pojęcia wieku młodocianego, gdyż nie można wskazać granicy, gdzie kończy się młodość a zaczyna się wiek dojrzały"[112]. Problem nieostrości zauważa także Tadeusz Kotarbiński w *Elementach teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk* wskazując na to, iż daną nazwę możemy rozumieć jasno lub niejasno, wyraźnie lub niewyraźnie oraz chwiejnie lub niechwiejnie[113]. Nazwa jest rozumiana jasno, gdy „wyczuwam, które cechy składają się na jej konotację, iż ilekroć ich obecność w napotkanym przedmiocie zauważam, trafnie rozpoznaję w nim desygnat tej nazwy i, odwrotnie, trafnie stwierdzam, że dany napotkany przedmiot nie jest desygnatem tej nazwy, skoro tylko zauważę w nim brak którejkolwiek z tych cech"[114]. Przykładem nazwy rozumianej jasno jest zdaniem Kotarbińskiego „koń", „wróbel", „pięciogroszówka", „papieros" i jak

[108] Williamson, [1994], s. 82–83.
[109] Jadacki, *Wstęp* do Odrowąż-Sypniewska [2000], s. 1.
[110] Twardowski, [1901], s. 79.
[111] Twardowski, [1901], s. 79.
[112] Twardowski, [1901], s. 79.
[113] Kotarbiński, [1929], s. 37–38.
[114] Kotarbiński, [1929], s. 37.

sam stwierdza wiele (!) innych. Niejasno rozumiana jest natomiast nazwa „organizm". Wyraźne rozumienie danej nazwy oznacza natomiast umiejętność wyszczególnienia wszystkich cech składających się na jej konotację[115]. Przykładem nazw niewyraźnych są zdaniem Kotarbińskiego „pieniądz" i „arogant". Dalej czytamy, że istnieją nazwy rozumiane jasno lecz niewyraźnie, a często zdarza się, iż niewyraźność pociąga za sobą niejasność „i w ogóle bardzo często obie te wady idą w parze"[116]. Zdaniem Kotarbińskiego, tym dwóm wymienionym wadom często towarzyszy trzecia, wiążąca się z tym, iż pewne przedmioty „posiadają pewną własność w różnym stopniu, a nadto przy przechodzeniu od jednych do drugich własność ta słabnie lub wzrasta stopniowo i niepostrzeżenie. Mamy przy tym nazwę, do której konotacji wchodzi między innymi cecha posiadania tej własności, jak to się mówi, 'w małym stopniu'. Wtedy bywamy w prawdziwym kłopocie, gdy wypada rozstrzygnąć, czy dany poszczególny spośród tych przedmiotów jest, czy nie jest desygnatem tej nazwy"[117]. Wadę tę Kotarbiński nazywa chwiejnością. Przykładami nazw o chwiejnym znaczeniu są „młody", „młodzieniec", „dawny", „nowy", „rozległy", „duży", „olbrzym", „mały", „gromada", „jasny", „głośny" i jak sam twierdzi bardzo wiele innych. Naturalnie nazwy o chwiejnym rozumieniu są ponadto niejasne i niewyraźne. Kotarbiński podaje również wspólne określenie na wszystkie wspomniane trzy wady: *mętność*. Twierdzi, iż należy z nią walczyć stosując „jasność, wyraźność i stanowczość w rozumieniu wyrażeń"[118]. Tym, co charakteryzuje stanowisko zarówno Twardowskiego, jak i Kotarbińskiego jest fakt, iż mogłoby z niego wynikać, że wśród wielu wyrażeń, którymi się posługujemy są również i takie, które nie są nieostre. Innymi słowy, istnieją wyrażenia ostre i nieostre. Kotarbiński, jak to już wyżej przypomnieliśmy, posuwa się nawet do podania przykładów nazw niematematycznych, a mimo to wyraźnych. Chociaż niewątpliwie istnieją wyrażenia ostre, to ich istnienie jest dość szczególne i temu problemowi przyjrzymy się bliżej w dalszej części tego rozdziału. Z przytaczanych w poprzednich paragrafach przykładów wynika, że niezwykle trudno jest znaleźć przykład ostrej nazwy ogólnej należącej do pozamatematycznego języka. Leon Chwistek zdecydowanie odrzucił przytoczone wyżej stanowisko Kotarbińskiego, twierdząc, iż nieostrość cechuje wszystkie nazwy języka potocznego[119]: „[...] nawet tak proste nazwy jak te, które wymienia Kotarbiński, a mianowicie »koń«, »wróbel«, »pięciogroszówka«, »papieros«, nie posiadają zakresu ściśle określonego i nikt nie rozumie ich w ten sposób, żeby naprawdę za każdym razem mógł rozstrzygnąć,

[115] Kotarbiński, [1929], s. 37.
[116] Kotarbiński, [1929], s. 37.
[117] Kotarbiński, [1929], s. 38.
[118] Kotarbiński, [1929], s. 38.
[119] Chwistek, [1934], s.10–11.

czy rzeczywiście ma do czynienia z desygnatem danej nazwy, czy też z czymś innym. Nazwy takie jak »pięciogroszówka« i »papieros« zawodzą z chwilą, kiedy mamy do czynienia np. z częściowo zatartym napisem na pięciogroszówce lub z tytoniem do pewnego stopnia zanieczyszczonym. Nazwy gatunków zwierząt zawodzą z chwilą, kiedy zechcemy je stosować do mniej lub więcej rozwiniętego płodu lub też do egzemplarzy pochodzących z epok bardzo odległych. Jeśli zrobimy założenie, że każdy człowiek musi mieć matkę i że matka każdego człowieka musi być człowiekiem, to udowodnimy natychmiast zupełnie ściśle, że ludzkość trwała wiecznie, co jest sprzeczne z materiałem doświadczalnym, dostarczonym nam przez geologów". Ta ostatnia uwaga, Chwistka, najwyraźniej odwołująca się do teorii ewolucji, jest dowodem na nieostrość wszelkich nazw tak zwanych *gatunków naturalnych*. Ani, „człowiek", ani nazwa jakiegokolwiek zwierzęcia, czy jakiejkolwiek rośliny, rozumiana jako nazwa gatunku naturalnego nie jest wyraźna. Podobnie, swoista ciągłość procesu rozwoju każdego z osobników reprezentującego dany gatunek naturalny przeczy jakiejkolwiek ostrości nazwy tego osobnika.

Podejście Kotarbińskiego wyraźnie wskazuje na istotną zależność jaka zachodzi między stwierdzeniem chwiejności danej nazwy a osobą posługującą się tą nazwą. Do tak pragmatycznie rozumianego problemu nieostrości nawiązał Ajdukiewicz, który zdaniem Jadackiego[120] po raz pierwszy w literaturze polskiej użył terminu „nieostrość". W *Propedeutyce filozofii* Ajdukiewicz rozważa pocięty na wąziutkie paski papier, na którym uprzednio namalowano widmo tęczowe. Zauważa, iż wśród wielu pasków są takie, których kolor będzie rozpoznany bez trudu, np. kolor czerwony czy fioletowy. Będą też i takie paski, których kolor będzie trudny do rozstrzygnięcia. „Otóż taką nazwę, której znaczenie uzbraja rozumiejącego ją (w tym znaczeniu) w metodę pozwalającą tylko o niektórych przedmiotach rozstrzygnąć, czy przedmiot ten można nazwą tą określić, czy też nie, zowie się nazwą o znaczeniu niejasnym lub też nieostrym. Pojęcie, będące znaczeniem takiej nazwy, zowie się również pojęciem niejasnym lub nieostrym"[121]. Jednak w *Logice pragmatycznej* Ajdukiewicz definiuje nieostrość w kategoriach semantycznych[122]: „Nazwy, którym zwyczaj językowy lub konwencja nie przyporządkowuje żadnego zakresu, jakkolwiek o pewnych przedmiotach przesądza, że są jej desygnatami, a o innych, że nimi nie są – zowią się nazwami nieostrymi". W innym zaś miejscu dodaje[123]; „Nieostrość jest wadą znaczenia, jakie wyrażenie ma w języku, gdy nie przyporządkowuje ono terminowi żadnego zakresu". Nieostrość może cechować nie tylko nazwy lecz również inne wyrażenia wchodzące w skład zdań, np. takie czasowniki jak

120 Jadacki, *Wstęp* do Odrowąż-Sypniewska [2000], s. 2.
121 Ajdukiewicz, [1938], s. 75.
122 Ajdukiewicz, [1965], s. 58.
123 Ajdukiewicz, [1965], s. 61.

„kocha", czy „obraża". Nieostre wyrażenia występujące w zdaniach mogą sprawić, że zdania te są nierozstrzygalne, czyli kwestia prawdziwości czy też fałszywości zdań jest niemożliwa do rozstrzygnięcia. Ajdukiewicz podkreśla przy tym bardzo istotny aspekt nieostrości – swoistą niezależność od dodatkowych informacji na temat rozumienia danej nieostrej nazwy[124]: „[...] zdanie '24-letni Jan jest młodzieńcem' nie daje się żadną miarą rozstrzygnąć, choćbyśmy obejrzeli sobie naszego Jana od zewnątrz i od środka i zastanawiali się nad tym problemem z największym wysiłkiem i przenikliwością. Nierozstrzygalność tego zdania jest zasadnicza, tzn. nie pochodzi od ograniczoności naszego wnioskowania, lecz źródłem tej nierozstrzygalności jest wadliwość znaczenia wyrazu 'młodzieniec', mianowicie jego nieostrość". Ajdukiewicz dostrzega także problem nieostrości terminów mających swoje zastosowanie w nauce, posługując się przykładem terminu „żywy". O jego nieostrości decyduje np. to, iż nie daje się rozstrzygnąć czy wirusy są istotami żywymi czy nie są[125]. Użyta przez Kotarbińskiego „chwiejność" ma u Ajdukiewicza węższe niż „nieostrość" znaczenie wiążące się z wieloznacznością[126]: „Posługując się jakąś nazwą nieostrą ulegamy często pokusie, by pewne przedmioty, co do których zwyczaj językowy nie przesądził, czy są czy też nie są jej desygnatami, czasem do desygnatów zaliczać, a czasem nie zaliczać, nie zdając sobie sprawy z tej różnicy. Nazwy nieostre przemieniają się wtedy w „nazwy o znaczeniu chwiejnym". Tak określamy te nazwy wieloznaczne, które mają pozory jednoznaczności, wskutek czego używa się ich w różnych znaczeniach, nie zauważając tej różnicy". Jadacki wskazuje na niefortunność określenia takiego rodzaju wieloznaczności[127]: „Z braku zakresu [nazwy] miałaby więc wynikać wielość zakresów lub treści".

Na obiektywny charakter nieostrości niektórych wyrażeń wskazują także inni autorzy. Adam Nowaczyk i Zenobiusz Żołnowski nazwę nieostrą utożsamiają z nazwą posiadającą nieostry zakres[128]. Wskazują także na to, iż „Nieostrość jest cechą przeważającej liczby wyrażeń języka potocznego. Nie jest od niej wolna terminologia naukowa [...]"[129]. Także Jerzy Pelc dostrzega pozapragmatyczny charakter nieostrości[130]: „Nieostrość wyrażenia jest mankamentem jego zakresu. Polega na tym, iż nie ma on granicy w postaci linii, np. w postaci okręgu koła, narysowanego dobrze zatemperowanym ołówkiem, lecz zamiast tego – jakby zamazane kontury, szeroki pas ziemi niczyjej, a właściwie nie wiadomo czyjej". Tak, jak nieostrość wyrażenia wynika

[124] Ajdukiewicz, [1965], s. 60.
[125] Podobną argumentację dotyczącą pojęcia *„życie"* prezentuje Mehlberg, [1958].
[126] Ajdukiewicz, [1965], s. 59.
[127] Jadacki, *Wstęp* do Odrowąż-Sypniewska [2000], s. 3.
[128] Nowaczyk, Żołnowski, [1974], s. 114.
[129] Nowaczyk, Żołnowski, [1974], s. 114.
[130] Pelc, [1984], s. 184.

z wadliwości zakresu tak zdaniem Pelca wadliwość znaczenia wyrażenia świadczy o jego niewyraźności[131]: „[...] niewyraźność danego słowa jest mankamentem jego znaczenia. Polega ona na tym, że owo znaczenie ma zamazane kontury: tylko o pewnych cechach wiadomo, iż do niego należą, i tylko o pewnych cechach wiadomo, że nie należą; ale są i takie, co do których nie sposób rozstrzygnąć, czy stanowią elementy tego znaczenia, czy też nie stanowią. Nie sposób zaś rozstrzygnąć nie na skutek naszej nieznajomości języka, lecz na skutek usterki samego znaczenia". Dodaje jednak, iż zarówno nieostrość jak i niewyraźność wyrażeń bezpieczniej jest uznać za własność wyrażeń, aniżeli stosować wartościujące określenia takie jak „mankament", czy „usterka". Zdarzają się bowiem sytuacje, w których wyrażenia mętne, czyli nieostre lub niewyraźne okazują się być funkcjonalnymi i poręcznymi.

Jednak bezspornie, na gruncie filozofii polskiej, największy wkład w badania nad nieostrością mieli Marian Przełęcki oraz Tadeusz Kubiński. Ich wzajemnie niezależne wyniki są na tyle istotne i obszerne, że warto i należy poświęcić im uwagę w odrębnych paragrafach.

4.1.3. CZYM JEST NIEOSTROŚĆ?

4.1.3.1. DEFINICJA NIEOSTROŚCI

Z przedstawionego historycznego zarysu badań nad nieostrością wynika, że fenomen ten najczęściej był traktowany jako problem językowej natury. Mówiąc o nieostrości ma się więc zazwyczaj na uwadze pewną wadliwość nazw, predykatów, czy też zdań. Nie znaczy to, że nie istnieje kwestia nieostrości pozajęzykowej. Jednak temu, dość interesującemu zagadnieniu, poświęcone są dwa odrębne fragmenty tej książki. W pierwszym, będącym paragrafem 4.1.3.4 są przedstawione argumenty przeciw istnieniu nieostrości w świecie materialnym, jak i argumenty przeczące temu poglądowi. Natomiast w rozdziale 4.2 analizowany jest tzw. *problem wielu* (*the problem of the many*), najlepiej wyrażany przez dylematy, które można nazwać paradoksami nieostrości pozajęzykowej. Jednak, bez względu na to, czy stoimy na stanowisku akceptującym istnienie nieostrości świata materialnego, czy też nie, odrębną kwestią pozostaje to, czy nieostrość językowa ma charakter wyłącznie pragmatyczny, czy może również semantyczny. Tadeusz Kubiński w swym artykule *Nazwy Nieostre* z 1958 roku przedstawił trzy sposoby definiowania nazw nieostrych[132]:

---

[131] Pelc, [1984], s. 184.
[132] Kubiński, [1958], s. 121–122.

DEFINICJA PRAGMATYCZNA. *Nazwa a jest nieostra w języku J wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przedmiot, którego nikt (znający język J) rozumiejący nazwę a nie uzna ani za jej desygnat, ani też za desygnat nazwy nie-a*[133].

DEFINICJA SEMANTYCZNA. *Nazwa a jest nieostra, gdy jej brzeg jest niepusty*[134].

DEFINICJA SYNTAKTYCZNA. *Nazwa a jest nieostra w pewnym systemie S wtedy i tylko wtedy, gdy ani zwrot „b jest a" ani też zwrot „b jest nie-a" – „b" jest tu nazwą jednostkową, tzn. oznaczającą dokładnie jeden przedmiot – nie są tezami systemu S.*

Uznanie zjawiska nieostrości za problem wyłącznie pragmatyczny czy też semantyczno-pragmatyczny jest konsekwencją przyjęcia pewnych konkretnych założeń. Odmówienie nieostrości charakteru semantycznego jest stanowiskiem dość radykalnym i wydaje się być niezgodnym zarówno z dość powszechną opinią logików i filozofów, jak i z naszym odczuciem. Dlatego też, stoimy na stanowisku, że nieostrość ma charakter semantyczny. Naturalnie, oznacza to, że ma ona również charakter pragmatyczny. Skoro bowiem nazwa *a* ma niepusty brzeg, każdy więc użytkownik języka zawierającego wyrażenie *a*, musi mieć problem z odniesieniem tej nazwy do dowolnego obiektu z jej brzegu. W szczególności, rozpoznanie wartości logicznej każdego zdania orzekającego nazwę *a* o którymkolwiek obiekcie z jej brzegu musi być problemem nierozwiązywalnym. Nie oznacza to jednak, że semantyczna nieostrość musi być również zjawiskiem syntaktycznym. W definicji Kubińskiego mamy bowiem odniesienie do systemu dedukcyjnego *S*. Tymczasem, w każdym systemie dedukcyjnym nieostrość w ogóle nie powinna mieć miejsca, w przeciwnym razie wywoływałaby ona natychmiast trudności natury logicznej. Pojawiają się wówczas problemy z zastosowaniem najprostszych praw logicznych. Dlatego też, mimo wcześniejszych uwag na temat konsekwencji jakie wynikają z założenia, iż nieostrość ma semantyczny charakter, nie możemy się zgodzić na przyjęcie syntaktycznej definicji nieostrości, zaproponowanej przez Kubińskiego[135].

---

[133] Kubiński podaje również drugą wersję tej definicji, w której słowo „nikt" jest zastąpione przez wyrażenie „zdecydowana większość", Kubiński, [1958], s. 122. My pozostajemy przy pierwszej wersji podanej przez Kubińskiego, gdyż zjawisko nieostrości wywołuje problem u każdego normalnego (słowo „normalny" jest tu użyte w takim sensie jak u Blacka – patrz zarys historyczny) użytkownika języka. Oznacza to, że jeśli dla kogoś dany nieostry termin nie wywołuje typowego dla nieostrości problemu to znaczy, że człowiek ten nie jest typowym użytkownikiem języka.

[134] *Brzegiem* nazwy *a* jest różnica uniwersum i sumy zakresów pozytywnego i negatywnego nazwy *a*. Innymi słowy, brzeg nazwy tworzą wszystkie te obiekty, które nie należą, ani do jej ekstensji pozytywnej, ani negatywnej, Kubiński, [1958], s. 119.

[135] Sam Kubiński wskazuje na tę trudność, Kubiński, [1958], s. 123. Trafność propozycji Kubińskiego, przedstawionej w dalszej części tego rozdziału, wymaga tego aby obszar nieostrości danej nazwy, a więc w nomenklaturze Kubińskiego brzeg tej nazwy, miał ostre granice. Jak dalej

W dalszym ciągu naszych rozważań, nieostrość będziemy więc traktowali jako zjawisko semantyczne, które w oczywisty sposób jest źródłem trudności, na jakie musi prędzej czy później natknąć się każdy użytkownik języka, zawierające wyrażenia nieostre.

Okazuje się jednak, iż mimo tych ustaleń, definicja nieostrości wciąż pozostaje kwestią otwartą, a to za sprawą pewnych, koniecznych do uwzględnienia czynników towarzyszących zjawisku nieostrości językowej. Zatem, rozważmy te czynniki, które powinny charakteryzować nieostrość wyrażeń językowych, posiłkując się głównie nazwami i predykatami, traktując je zamiennie: nazwie „x" odpowiada predykat „być x-em" i odwrotnie. Spróbujmy również przedyskutować te warunki, które tradycyjnie nakłada się na wyrażenia nieostre, a których proste spełnienie nie musi być konieczne dla zaistnienia nieostrości.

Jak to już wcześniej zostało pokazane, nieostrość jest kojarzona z tak zwanymi przypadkami granicznymi. Istnienie tych przypadków jest wręcz dowodem na to, iż mamy do czynienia z nieostrością. Precyzyjne określenie przypadków granicznych wymaga posłużenia się pojęciami „ekstensji pozytywnej" oraz „ekstensji negatywnej" danej nazwy, czy danego predykatu. Powiemy, że[136]:

– dany obiekt należy do *pozytywnej ekstensji* predykatu *P*, gdy obiekt ten na pewno posiada własność, o której orzeka predykat *P*;

– dany obiekt należy do *negatywnej ekstensji* predykatu *P*, gdy obiekt ten na pewno nie posiada własności, o której orzeka predykat *P*.

Wykorzystując pojęcie prawdy i fałszu można obie ekstensje wyrazić następująco: obiekt *o* należy do ekstensji pozytywnej predykatu *P*, gdy zdanie *P*(*o*), orzekające, iż obiekt *o* posiada własność wyrażoną predykatem *P*, jest zdaniem prawdziwym; analogicznie, obiekt *o* należy do ekstensji negatywnej predykatu *P*, gdy zdanie *P*(*o*) jest fałszywe.

Jakiś obiekt jest więc *przypadkiem granicznym* predykatu *P* jeśli nie należy, ani do ekstensji pozytywnej, ani do negatywnej tego predykatu. Przypadki graniczne tworzą tak zwany półcień predykatu *P*, zwany też brzegiem, obszarem nieostrości lub obszarem granicznym.

Jeśli więc rozważymy predykat „być stosem", to sto tysięcy, odpowiednio usypanych ziaren grochu będzie stanowiło obiekt należący do pozytywnej ekstensji tego predykatu. Przeciwnie, całość złożona np. z trzech jakichkolwiek

---

pokażemy, założenie to jest w jawny sposób sprzeczne z pojęciem nieostrości. Co więcej, sam Kubiński nie podaje żadnej metody na wyostrzenie granic obszaru nieostrości, żywiąc jedynie nadzieję na możliwość takiego wyostrzenia. [1958], s. 119–120. Wbrew oczekiwaniom Kubińskiego, każde wyostrzenie granic obszaru nieostrości wiąże się jednak z pogwałceniem znaczenia danego nieostrego wyrażenia. Dlatego, uważamy, iż jest ono niemożliwe do przeprowadzenia.

[136] Sainsbury, [1988], s. 31.

ziaren, bez względu na to, jak ziarna te nie byłyby ułożone, będzie przykładem obiektu należącego do ekstensji negatywnej tego predykatu. Naturalnie, każdy zbiór ziaren, nawet ten o ogromnej ich ilości, jeśli tylko ziarna te są rozsypane, jak również każdy obiekt nie złożony z jakichkolwiek ziaren, np. samochód, komputer, pies, itd., również będzie należał do negatywnej ekstensji predykatu „być stosem"[137]. Istnieją jednak obiekty, które trudno jest zakwalifikować do którejkolwiek z tych dwóch ekstensji. Są to właśnie kolekcje takich ilości ziaren, które mimo odpowiedniego usypania, ani nie wydają się być stosem, ani niestosem. Półcień jest więc utworzony przez te obiekty, co do których nie jest prawdą, że na pewno posiadają lub na pewno nie posiadają własności wyrażonej danym predykatem.

Zatem, warunkiem na to, aby predykat *P* był nieostry jest niepustość zbioru zwanego półcieniem predykatu *P*. Czy jednak spełnienie tego warunku wystarczy aby dany predykat był nieostry? Tradycyjnie, fenomen nieostrości predykatu kojarzy się ze zjawiskiem w miarę płynnego przejścia od obiektów posiadających własność wyrażoną tym predykatem, do obiektów nie posiadających tej własności. To płynne przejście ma bowiem gwarantować nieistnienie granicy oddzielającej każdą z ekstensji od półcienia. Tak więc, niewyraźne odróżnienie półcienia od każdej z ekstensji wydaje się być istotą nieostrości. Przykładem potwierdzającym ten pogląd może być, ten podany przez Blacka, a dotyczący ciągu obiektów, z których pierwszy jest krzesłem w idealnym stanie, a ostatni kawałkiem nogi krzesła pierwotnie identycznego z pierwszym krzesłem. Każdy następny w ciągu obiekt różni się od poprzedniego zaledwie bardzo małym ubytkiem. Tak więc, cały ten ciąg obiektów może ilustrować dość płynny proces niszczenia krzesła, zamieniający obiekt niewątpliwie będący krzesłem w obiekt niewątpliwie będący nie-krzesłem.

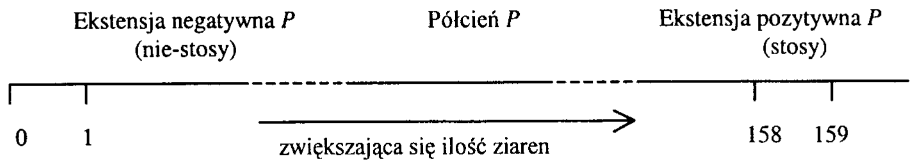
Drugim, wynikającym poniekąd z wyżej przypomnianego, warunkiem na nieostrość predykatu jest niepustość wszystkich trzech kolekcji: jego ekstensji pozytywnej, ekstensji negatywnej oraz półcienia[138].

Tradycyjnie rozważane nieostre predykaty mają więc niepuste: ekstensję pozytywną, ekstensję negatywną oraz półcień; który ponadto nie jest oddzielony od żadnej z ekstensji wyraźną granicą. W tym sensie, typowym przypadkiem jest niewątpliwie nieostry predykat „być stosem":

---

[137] Oczywiście, nasza świadomość, że materia ma atomową strukturę, nie wystarcza, aby jakiś obiekt materialny uznać za stos. Byłoby to bowiem niezgodne ze znaczeniem słowa „stos".

[138] Słowo „kolekcja" ma zastąpić inne, wydawać by się mogło, że właściwsze, słowo „zbiór". Jednak, „zbiór" jest terminem matematycznym, który charakteryzuje się tym, iż jest jednoznacznie wyznaczony przez wszystkie swoje elementy – można więc stwierdzić, czy dany, zupełnie dowolny, obiekt jest elementem danego zbioru, czy nie jest. Naturalnie, takiej własności na ogół nie posiadają, ani ekstensja pozytywna, ani negatywna, ani półcień nieostrego predykatu, czy nieostrej nazwy.



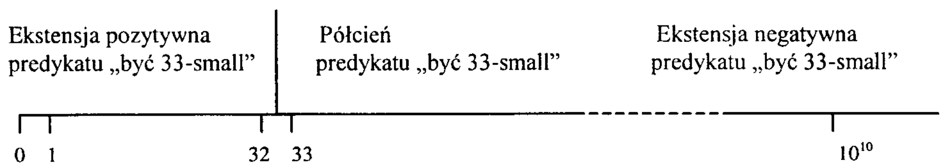
Wykorzystanie w schemacie linii przerywanej ma oznaczać nieistnienie granicy zarówno między ekstensją negatywną i półcieniem, jak i między półcieniem a ekstensją pozytywną. Innymi słowy linia ta ma symbolizować „płynne" przejście od każdej z ekstensji do półcienia[139].

Przypominając wszystkie znane z historii logiki wersje paradoksu stosu mamy do czynienia z tym właśnie zjawiskiem płynnego przejścia od jednej, niepustej ekstensji do niepustego półcienia i od tegoż półcienia do drugiej, również niepustej ekstensji. Okazuje się jednak, że są do pomyślenia predykaty niewątpliwie nieostre, które jednak nie posiadają tych własności.

Interesujący predykat został wymyślony przez Roya A. Sorensena. Zaproponował on rozważenie następującego wyrażenia: „być *n*-small"[140]. Przyjmijmy, że $n = 33$. Wówczas, „być 33-small" jest określony następująco:

Liczba naturalna k jest 33-small wtedy i tylko wtedy, gdy
k jest małą liczbą lub k jest mniejsza niż 33.

Poniższy rysunek ilustruje raczej nieintuicyjną sytuację istnienia wyraźnej granicy dzielącej ekstensję pozytywną predykatu od jego półcienia.



Istotnie, zdaniami prawdziwymi są 33-small(k)[141] dla $0 \leq k \leq 32$. Jeśli liczba 33 należy do półcienia predykatu „jest małą liczbą naturalną", to nie jest rozstrzygnięte, czy zdanie 33-small(33) ma wartość prawdy czy fałszu. Niewątpliwie natomiast, fałszywe jest zdanie 33-small(10^{10}). Najwyraźniej, nie

---

[139] Niestety, jak widać, zastosowanie linii przerywanej nie może być satysfakcjonujące, gdyż wydaje się, że łatwo jest wskazać zarówno początek tej linii, jak i jej koniec – oba punkty są wyznaczone przez końce linii ciągłych. Znacznie lepsza byłaby czarna linia przechodząca płynnie w linię białą, czyli niewidoczną na rysunku.

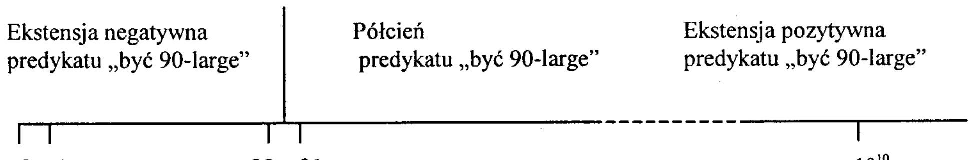
[140] Sorensen, [1985].

[141] Wyrażenie „33-small(k)" jest skróconym zapisem zdania „k jest 33-small".

istnieje ostra granica między półcieniem predykatu Sorensena, a ekstensją negatywną tego predykatu. W pewnym sensie dualny ze względu na wspomniany problem istnienia wyraźnej granicy dzielącej ekstensję pozytywną od półcienia jest przypadek predykatu „być 90-large":

Liczba naturalna k jest 90-large wtedy i tylko wtedy, gdy k jest dużą liczbą i k jest większa niż 90.

Nieostrość nowego predykatu ilustruje podobny do powyższego rysunek:

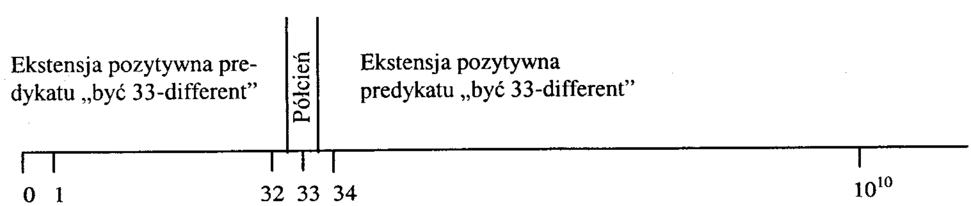


W tym przypadku, fałszywe są wszystkie zdania 90-large(k) dla $0 \leq k \leq 90$. Zdanie 90-large(10^{10}) jest zdaniem prawdziwym. Jeśli liczba 91 należy do półcienia predykatu „być liczbą dużą", to wówczas, nierozstrzygniętym jest zdanie 90-large(91).

Wykorzystując ścisłe, matematyczne relacje można tak zdefiniować predykat, aby jego półcień był precyzyjnie oddzielony od ekstensji tego predykatu. W tym celu, rozważmy wyrażenie „być n-different" określone dla liczb naturalnych w sposób następujący:

Liczba naturalna k jest n-different wtedy i tylko wtedy, gdy k jest małą liczbą lub k jest różna od n.

Załóżmy teraz, że $n = 33$. Predykat „być 33-different" stanowi raczej niezwykły przykład nieostrości[142]. Półcień tego predykatu jest zredukowany do jednego, dobrze rozpoznanego przypadku, zaś ekstensja negatywna jest zbiorem pustym[143].



[142] Możliwe jest zdefiniowanie wielu innych, równie ciekawych dzięki swym niezwykłym cechom predykatów. Interesującym, ze względu na dość złożony rozkład ekstensji i półcienia, jest predykat „być n-equal": *Liczba naturalna k jest n-equal wtedy i tylko wtedy, gdy k jest małą liczbą i k jest równa n.*

[143] Naturalnie, pustą kolekcję elementów możemy nazwać zbiorem pustym.

Jasne jest, że to ścisłe, precyzyjne określenie przypadków granicznych, a w tym przykładzie, jednego przypadku granicznego, jest możliwe dzięki matematycznemu komponentowi w definicji predykatu „być *n*-different". Wydaje się niemożliwe aby podobny efekt uzyskać operując wyrażeniami należącymi wyłącznie do języka naturalnego.

Rozważmy jeszcze jeden przykład predykatu „być dużą liczbą", określonego na zbiorze wszystkich liczb całkowitych. Wówczas, z matematycznego punktu widzenia, nie jest raczej możliwe stwierdzenie, która z liczb jest duża, a która nie jest duża. Dowolna liczba całkowita *k* jest bowiem większa od przeliczalnie nieskończenie wielu liczb i zarazem mniejsza również od przeliczalnie wielu liczb całkowitych[144]. Dotyczy to w takim samym stopniu liczby 10^{10}, jak również -10^{10} – przecież tyle samo liczb jest większych od 10^{10}, co liczb mniejszych od 10^{10} i tyle samo co liczb większych od -10^{10} i liczb mniejszych od -10^{10}. Problem ten staje się wyraźny, gdy na wyrażenia „10^{10}" oraz „-10^{10}" spojrzymy jak na nazwy pewnych liczb, mających swoje miejsce na osi liczbowej. Pozycja każdej liczby względem reszty zbioru liczb całkowitych wydaje się być taka sama. Można więc spojrzeć na predykat „jest dużą liczbą całkowitą" jak na obiekt nieposiadający zarówno ekstensji pozytywnej, jak i negatywnej, czyli predykat, którego obie ekstensje są zbiorem pustym. Jak widać, predykat „być dużą liczbą", określony na zbiorze C z matematycznego punktu widzenia nie ma sensu. Predykat ten może mieć jedynie pozamatematyczny sens. Zatem, zarówno ten, jak i wszystkie inne, podobne predykaty, np. „być małą liczbą", można rozumieć jedynie w pozamatematyczny, intuicyjny sposób. Tak też będą dalej rozumiane.

Podane wyżej przykłady predykatów, mimo swojej sztuczności, wskazują na potrzebę odejścia od dość chętnie uznawanej definicji predykatu nieostrego, jako predykatu z niepustymi trzema kolekcjami: ekstensją pozytywną, ekstensją negatywną oraz półcieniem; spełniającymi, ponadto, warunek płynnego przejścia od każdej z ekstensji do półcienia. Jak widać, nieostrość predykatu nie musi się wiązać ani z niepustością jego obu ekstensji, ani z płynnym przejściem od którejś z ekstensji do półcienia. Naturalnie, pewną wątpliwość może budzić przypuszczenie, iż istnieje predykat nieostry, który ma wyraźnie wyznaczone granice nieostrości. Wydaje się bowiem, że wystarczy przypadkom tworzącym ostro wyznaczony obszar nieostrości nadać nazwę, aby powstały trzy ostre już nazwy. Nie można jednak ignorować przykładu predykatu „być 33-different". Oczywiste jest bowiem to, iż w jego przypadku nieostrość pochodzi od niewątpliwie nieostrego, i to w tradycyjnym sensie, predykatu „być małą liczbą". Co więcej, predykat ten, określony dla liczb naturalnych, a będący

[144] Zachodzi tu wyraźne podobieństwo do, omówionego wcześniej, paradoksu Wanga. Różnica dotyczy jednak tego, iż w naszym przypadku nie definiujemy wyraźnie znaczenia predykatu „być dużą liczbą", tak jak uczynił to Dummett w [1975].

źródłem nieostrości predykatu „być 33-different", ma nieostrość charakteryzującą się płynnym przejściem przypadków granicznych w ekstensję negatywną. Jeden jedyny, przypadek będący liczbą 33 jest tak samo kłopotliwy do zakwalifikowania w przypadku predykatu „być 33-different" jak w przypadku predykatu „być małą liczbą". Jedynym wyjaśnieniem tego faktu jest to, że liczba 33 jest faktycznie przypadkiem granicznym predykatu „być 33-different", mimo iż sama, jako wartość liczbowa, jest przecież wyznaczona precyzyjnie. Nie idzie tu jednak o precyzje w wyznaczeniu liczby 33, lecz o problem ze znaczeniem predykatu „być 33-different". Może się więc wydawać, iż do stwierdzenia nieostrości predykatu nie jest konieczna jakaś stopniowalność, a tym bardziej ciągłość w przechodzeniu od stanu posiadania własności wyrażonej tym predykatem do stanu nieposiadania tejże własności[145]. Przyjmijmy zatem możliwie najogólniejszą, jednak wstępną, uwzględniającą nawet najbardziej sztuczne przypadki definicję nieostrego predykatu:

WSTĘPNA POSTAĆ DEFINICJI NIEOSTROŚCI PREDYKATU. *Predykat jest nieostry jeśli jego półcień jest zbiorem niepustym, czyli gdy predykat ten posiada przynajmniej jeden przypadek graniczny*[146].

---

[145] Stanowisko to utożsamia niezupełność terminu z jego nieostrością (niezupełność definiowania wiąże się z tak zwanym definiowaniem częściowym, cząstkowym, lub warunkowym, patrz paragraf poświęcony tym podejściom do nieostrości, które zakładają jej nieistnienie). Wydaje się, że faktycznie niezupełność terminu jest czymś ogólniejszym, czego szczególnym przypadkiem jest nieostrość. Przykład predykatu „być *n*-different" pokazuje jednak, iż prosto pojęta ostrość granic nie może być kryterium wyróżniającym nieostrość spośród innych niezupełności. Co więcej, mimo ostrych granic obszaru nieostrości tego predykatu, w jakiś dziwny, bo ukryty sposób stopniowalność dotyczy trudności związanych z zakwalifikowaniem liczby 33 do ekstensji pozytywnej predykatu. Przecież ten interesujący predykat jest zaledwie jednym z całego ciągu predykatów tworzących stopniowalne przejście od predykatu bez półcienia, przez predykat z półcieniem, do predykatów bez półcienia: „być 1-different",..., „być 33-different",...., „być 1 000 000-different". Wraz ze wzrostem liczby *n*, wpływ (istotność) komponentu nieostrego predykatu stopniowo zanika, na rzecz wpływu (istotności) komponentu wyraźnego.

[146] Naturalnie, w definicji tej posiadanie przez predykat przypadku granicznego jest rozumiane, jako logiczna możliwość zaistnienia takiego przypadku. Jeśli więc, nie jest logicznie wykluczone istnienie przypadku granicznego danego predykatu, czyli, gdy zaistnienie takiego przypadku nie jest logicznie sprzeczne, to predykat ten jest nieostry. Nie musimy zatem posiadać mocno startej monety, która byłaby przypadkiem granicznym dzielącym pięciogroszówkę od nie-pięciogroszówki, aby stwierdzić, że „pięciogroszówka" jest nazwą nieostrą. Podobnie, jeśli nawet mamy świadomość, że obecnie nie istnieje forma przejściowa między człowiekiem a którymś z naszych nie obdarzonych rozumem przodków, to i tak, zdając sobie sprawę z procesu ewolucji świata ożywionego, przyjmujemy istnienie między nie-człowiekiem, a człowiekiem takiej właśnie przejściowej formy, która tym samym jest przypadkiem granicznym dla nieostrej nazwy „człowiek".

Zatem, predykat *P* jest nieostry, jeśli logicznie niesprzeczne jest istnienie takiego obiektu *o*, że nie jest rozstrzygnięte czy zdanie *P*(*o*) jest prawdziwe, czy może fałszywe.

Wydaje się jednak, że z punktu widzenia oceny nieostrości danego predykatu, czymś absolutnie kluczowym jest dostrzeżenie, że przejście od jednej, niepustej ekstensji tego predykatu do drugiej, również niepustej ekstensji jest, z praktycznego punktu widzenia, płynne lub prawie płynne. Skoro bowiem, istnieją elementy ekstensji pozytywnej i istnieją elementy ekstensji negatywnej oraz przejście od jednych do drugich jest prawie płynne, to fakt ten znaczy, że gdzieś po drodze własność wyrażona predykatem zanikła w sposób niezauważalny. Zatem, gdzieś między jednymi elementami a drugimi muszą istnieć takie, które nie mogą należeć do żadnej z obu ekstensji, są więc przypadkami granicznymi – ich nasycenie wspomnianą własnością jest zbyt słabe, aby obiekty te mogły być elementami ekstensji pozytywnej i jednocześnie na tyle duże, że nie mogą być one elementami ekstensji negatywnej. Tak więc, nawet te predykaty, których półcień jest wyznaczony w sposób ostry, jeśli tylko są nieostre, to i tak w istotny, choć być może niejawny, sposób są związane z płynną lub prawie płynną stopniowalnością pewnej własności. Jeśli więc predykat „*n*-different" jest nieostry, to tylko dlatego, że stopniowalną własnością jest bycie małą liczbą. Gdyby nie to, wspomniany predykat nie byłby nieostry. Trudno jednak zakładać rozmytość granic obszaru nieostrości skoro możliwe jest zdefiniowanie takiego nieostrego predykatu, dla którego granice te są wyznaczone w sposób precyzyjny. Ponieważ nieostrość predykatu „być małą liczbą naturalną" jest gwarantem nieostrości predykatu być „*n*-different", nietrudno zauważyć, że wszelkie wyostrzenie z natury nieostrych granic półcienia pierwszego predykatu natychmiast usuwa nieostrość drugiego predykatu. O ile więc istnieje uzasadnienie dla założenia, że niektóre nieostre predykaty mają obszary nieostrości wyznaczone w sposób wyraźny, o tyle nie ma sensu ani założenie, że wszystkie nieostre predykaty mają ostre granice półcienia, ani teza, że nieostrość jakiegoś predykatu jest zupełnie niezależna od stopniowalności którejkolwiek własności. Pełna niezależność nieostrości predykatu od stopniowalności dowolnej cechy oznaczałaby to, że wystarczyłoby przyjąć, iż każdy nieostry predykat może wyznaczać trzy obszary: ekstensję pozytywną, ekstensję negatywną i quasi-ekstensję[147]. W przypadku predykatu „być małą liczbą naturalną" liczby należące do jego quasi-ekstensji mogłyby być jakoś nazwane, w wyniku czego mielibyśmy: małe liczby naturalne, niemałe liczby naturalne oraz np. niezbyt małe liczby naturalne. Wówczas, nieostrość tego predykatu byłaby usunięta,

[147] Słowo „może" oznacza, że któraś z ekstensji może być zbiorem pustym, a więc w tym sensie może jej nie być. Nie może jednak predykat nieostry nie wyznaczać półcienia, który jako obszar wyraźny został tu nazwany quasi-ekstensją.

czego najlepszym dowodem byłaby niemożność przeprowadzenia takiego rozumowania stosu, które doprowadziłoby do sprzeczności. Skoro bowiem jakaś liczba n_0 byłaby największą spośród małych liczb naturalnych, to $n_0 + 1$ byłaby najmniejszą niezbyt małą liczbą naturalną, a więc na tej liczbie urywałoby się wnioskowanie: jeśli n jest małą liczbą naturalną, to $n+1$ jest małą liczbą naturalną. Oczywiście, również predykat „n-different" przestałby być wówczas, predykatem nieostrym.

Uwzględniając powyższe uwagi, wskazanym wydaje się zastąpienie definicji nieostrego predykatu we wstępnej postaci taką, która uwzględni fakt nierozstrzygalności wynikającej ze stopniowalności cechy wyrażonej danym predykatem. W tym celu wprowadźmy pojęcie *cechy nierozstrzygalnie stopniowalnej*, jako takiej cechy, która może w pewnym, zachodzącym stopniowo, procesie zupełnie zaniknąć[148]:

DEFINICJA NIEOSTROŚCI PREDYKATU. *Predykat jest nieostry jeśli jego półcień jest zbiorem niepustym, a ponadto, albo sam desygnuje cechę nierozstrzygalnie stopniowalną, albo jego znaczenie zależy od predykatu wyrażającego nierozstrzygalnie stopniowalną cechę.*

Zatem, jeśli nawet jakiś predykat sam nie wyraża cechy nierozstrzygalnie stopniowalnej, lecz taką cechę, którą można przypisać jakiemuś obiektowi w zależności od tego, czy jakaś cecha nierozstrzygalnie stopniowalna przysługuje temu obiektowi, to powiemy, że taki predykat jest nieostry.

Jak widać, przyjęcie definicji predykatu nieostrego w takiej postaci oznacza, że nie zamierzamy przesądzać, czy predykaty typu „być n-different" desygnują cechę stopniowalną, czy może desygnują cechę niestopniowalną. Rozważając, dla pewnej liczby naturalnej k_0, prawdziwość zdań tworzących serię: „0 jest k_0-different", „1 jest k_0-different", „2 jest k_0-different", „3 jest k_0-different" itd., można dostrzec stopniowalność cechy wyrażonej predykatem „być k_0-different". Oznaczałoby to, że predykat „być k_0-different" desygnuje cechę stopniowalną. Predykat ten, nie stanowi jednak przypadku typowego, w takim sensie jak typowo nieostre predykaty „być łysym", „być koloru czerwonego" itd. Dlatego też, uzasadnionym wydaje się przyjęcie definicji nieostrości w wyżej przedstawionej postaci.

---

[148] Nie chodzi tu więc o jakąkolwiek stopniowalność, lecz o taką, która z konieczności prowadzi do niemożności rozstrzygnięcia, czy dany obiekt jest desygnatem, czy nie jest. Wykluczone są tu więc takie stopniowalności, które wiążą się z wyraźnie skokowymi zmianami, a więc, dla przykładu, stopnie wojskowe i wynikająca z niej cecha starszeństwa. Z drugiej strony, stopniowalność w naszym rozumieniu wcale nie musi być utożsamiana z ciągłością zmian. Zmiany mogą przecież zachodzić skokami, tak jak ma to miejsce przy dodawaniu kolejnych ziaren, a mimo to mamy do czynienia ze zjawiskiem nieostrości.

Definicję uzależniającą nieostrość wyłącznie od istnienia przypadków granicznych przedstawia Sorensen w internetowej edycji *Stanford Encyclopedia of Philosophy*[149], przypominając, że już w 1902 roku takie określenie nieostrości zaproponował Peirce w *Dictionary of Philosophy and Psychology*[150]. Idąc śladami Peirce'a, Sorensen zwrócił uwagę na konieczność odróżnienia nieostrości, zarówno od wieloznaczności, jak i ogólności. Mylne utożsamianie nieostrości z pozostałymi dwoma rodzajami błędów, wynika z prostego faktu, iż bardzo często błędy te występują jednocześnie w tych samych wyrażeniach. Dla przykładu, z łatwością można stwierdzić w jakim sensie słowo „dziecko" jest wieloznaczne, w jakim nieostre, a w jakim ogólne: „dziecko" jest wieloznaczne, gdyż może oznaczać zarówno potomka, jak i nieletniego potomka; to samo słowo jest nieostre bowiem istnieją przypadki graniczne terminu „nieletni potomek"; jest zaś ogólne, gdyż oznacza zarówno chłopca, jak i dziewczynkę[151].

Inaczej nieostrość rozumie Achille C. Varzi. Jego definicja zawiera element wskazujący na niemożność wytyczenia granicy dla kolekcji przypadków granicznych. Ponadto, Varzi zwraca uwagę na możliwość różnego interpretowania jednej i tej samej definicji. Jego zdaniem, zwrot „posiada przypadki graniczne" jest nieścisły i odpowiada za niejednoznaczność wcześniejszej definicji. Proponuje więc dwa alternatywne rozwinięcia swojej definicji, pierwsze, jak sam określa, *de re*, drugie *de dicto*[152]:

DEFINICJA *DE RE* NIEOSTROŚCI PREDYKATU. *Predykat P jest nieostry wtedy i tylko wtedy, gdy P wyznacza zbiór x dla którego nie jest określone, czy takie to a takie obiekty są przypadkami granicznymi zbioru x.*

DEFINICJA *DE DICTO* NIEOSTROŚCI PREDYKATU. *Predykat P jest nieostry wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest określone, czy P wyznacza zbiór x taki, że takie to a takie obiekty są przypadkami granicznymi zbioru x.*

Varzi łączy definicję *de re* z „ontologicznym", zaś *de dicto* z „językowym", czy też „pojęciowym" rozumieniem nieostrości. Obie definicje ilustruje następującymi przykładami dotyczącymi tego samego predykatu „jest łysy". Predykat „być łysym" jest nieostry w rozumieniu pierwszej definicji, czyli w ontologicznym sensie, jeśli wyznacza nieostry zbiór ludzi[153]: żaden obiektywny fakt nie rozstrzyga, czy dany człowiek będący przypadkiem

[149] Sorensen, [SEPh].

[150] Baldwin, [1902], s. 748.

[151] Sorensen, [SEPh]. Sorensen nie zauważa, że zarówno wieloznaczność, jak i ogólność także wiążą się z nieostrością. Przecież granica między potomkiem a nieletnim potomkiem nie jest wyraźna, podobnie jak granica między byciem chłopcem i byciem dziewczynką.

[152] Por. Varzi, [2003b].

[153] Wspomnieliśmy już wcześniej, że nieostry zbiór *de facto* nie jest zbiorem.

granicznym, czyli człowiek którego łysość jest wątpliwa, należy do tego zbioru czy nie. Ten sam predykat jest nieostry według drugiej definicji, czyli w sensie językowym, gdy żaden obiektywny fakt nie rozstrzyga, który z możliwych zbiorów ludzi jest wyznaczony przez predykat „być łysym". Jeśli założymy, że *n* jest liczbą wszystkich obecnie żyjących ludzi, to mamy dokładnie 2^n różnych zbiorów ludzi i zgodnie z definicją *de dicto* nie jest rozstrzygnięte, który z tych zbiorów odpowiada predykatowi „być łysym". Naturalnie, z punktu widzenia definicji *de re*, żaden z istniejących zbiorów ludzi nie jest wyznaczony przez rozważany predykat. Varzi uważa, że pojawiające się propozycje utożsamiania obu, wspomnianych wyżej postaci definicji nieostrości są niekiedy niefortunne – pewne nieostrości powinny być bowiem uznawane za ontologiczne, podczas gdy inne za językowe. Dodaje jednak, że oba rozumienia nieostrości wcale nie muszą się wzajemnie wykluczać.

Warto nadmienić, że zachodzi istotna różnica między obiema, rozważanymi przez Varzi'ego, postaciami definicji. Otóż, zbiór nieostry nie jest zbiorem w sensie tradycyjnej matematyki. Z tego punktu widzenia, definicja *de dicto* ma pewną przewagę nad definicją *de re*, gdyż w przeciwieństwie do niej, w pełni uprawniony sposób operuje pojęciem zbioru – pojęciem poprawnym z punktu widzenia klasycznej matematyki.

Jak widać, zaproponowana przez nas definicja nieostrości predykatu nie jest precyzyjna, lecz nieostra. Nie jest to jednak żaden problem, jeśli definiowane przez nią wyrażenie samo jest nieprecyzyjne, nieostre. Co więcej, nieprecyzyjne, nieostre wyrażenie nie może mieć precyzyjnej, wyraźnej definicji, gdyż przestałoby być nieprecyzyjne. Pozostaje więc rozstrzygnąć, czy „nieostrość" jest wyrażeniem nieostrym, czy może wyraźnym. Należałoby przypuszczać, że „nieostrość" jest nieostra. Nie można jednak poprzestać na podobnych intuicjach, gdyż wówczas, należałoby przypuszczać, że „wyraźność" jest wyrażeniem ostrym. Tymczasem, wyraźność jest rozumiana jako zaprzeczenie nieostrości. Oznacza to, że kolekcja wyrażeń nieostrych jest dopełnieniem kolekcji wyrażeń wyraźnych danego języka. Zatem, albo oba wyrażenia „nieostrość" i „wyraźność" są ostre, albo oba są nieostre. Zagadnienie to przeanalizujemy w dalszym paragrafie.

4.1.3.2. NIEOSTROŚCI WYŻSZYCH RZĘDÓW

Rozmytość granicy oddzielającej półcień od nie-półcieni, a właściwie brak takiej granicy[154], stał się inspiracją dla rozważania tak zwanych nieostrości

[154] W literaturze przedmiotu wyraźny jest brak jednoznacznego stanowiska, czy przyjąć, że granica między półcieniem a ekstensjami istnieje i jest rozmyta, czy też przyjąć, że takiej granicy nie ma. Wydaje się, że drugie stanowisko jest trafniejsze, jednak przewaga pierwszego polega na

wyższych rzędów. Skoro bowiem predykat „być stosem" jest nieostry, to nieostra jest granica nieostrości tego predykatu, a więc nieostra jest nieostrość bycia stosem. Lecz wówczas, nieostra jest również ta właśnie nieostrość nieostrości. Skoro tak, to i nieostrość nieostrości nieostrości jest nieostra[155]. Jak widać „analizę" tę można kontynuować w nieskończoność[156]. Czy istnieje jednak sens tworzenia podobnych ciągów nieostrości? Jasne jest to, że jeśli jakiś predykat *P* jest nieostry, to wszelkie stwierdzenia orzekające o tej nieostrości są wypowiadane w języku drugiego rzędu, czyli w języku o tym właśnie języku, który zawiera wspomniany nieostry predykat *P*. Gdyby w języku drugiego rzędu można było sformułować wyraźną, czyli nie-nieostrą wypowiedź o nieostrym predykacie *P*, to okazałoby się, że ta wyraźna, czyli ostra charakterystyka predykatu *P*, świadczy o ostrości samego predykatu *P*. Granice nieostrości *P* byłyby bowiem wyznaczone wyraźnie, a więc, tym samym, nie mogłyby być granicami nieostrości. Fakt ten, nie powinien budzić wątpliwości. Nieostrość wyrażenia danego języka przenosi się na odpowiedni metajęzyk. Nie jest więc możliwe usunięcie nieostrości danej wypowiedzi przez doprecyzowanie tej wypowiedzi na poziomie metajęzyka.

Gdyby tak rozumieć nieostrości wyższych rzędów, można byłoby problem uznać za zrozumiały – tylko bowiem w języku łączącym wszystkie możliwe rzędy danego języka, a takim jest przecież język naturalny, można mówić zarazem o nieostrości jakiegoś wyrażenia należącego do języka przedmiotowego, jak również o nieostrości tejże nieostrości. Tymczasem, występujące w literaturze, przykłady nieostrości wyższych rzędów wskazują na to, iż nieostrości różnych rzędów należą do jednego i tego samego rzędu języka. Nieostrością następnego rzędu wobec danej nieostrości jest po prostu inna, kolejna nieostrość wyrażona na tym samym poziomie języka co nieostrość wyjściowa. Jeszcze raz wróćmy do przykładu Williamsona ciągu słów: *red*, *dred*, *ddred*, *dddred* itd., przypomnianym już wcześniej, przy okazji prezentacji stanowiska Russella w sprawie nieostrości[157]. Słowo „dred" dotyczy jakichś przypadków odpowiadających niewątpliwie nieostremu słowu „red". Co więcej, przypadki te należą do obszaru nieostrości słowa „red". Podobnie „ddred" wyraża przypadki z zakresu nieostrości słowa „dred". Nieostrość drugiego rzędu słowa „red" jest to nieostrość słowa „dred", nieostrość trzeciego rzędu słowa „red" jest to nieostrość słowa „ddred" itd. Posługując się wspomnianym ciągiem słów, Williamson pokazuje, że nie może być tak, aby dane słowo było *n*-tego

tym, że umożliwia ono mówienie o przypadkach granicznych półcienia. Dlatego też, w naszej książce, kwestia ta nie jest rozstrzygnięta.

[155] Tye, [1994], s. 44. Patrz także, Hyde, [1994], s. 35–41 i [2003], s. 301.

[156] Fine, [1975], s. 287.

[157] Williamson, [1994], s. 57–58.

rzędu nieostre i zarazem (n + 1)-szego rzędu wyraźne[158]. W ten sposób, zdaniem Williamsona, nieostrość półcienia generuje nieskończony ciąg nieostrości wyższych rzędów. W celu sformalizowania nieostrości wyższych rzędów wprowadza się operator „wyraźnie" (*essentially*), który umożliwia zdefiniowanie operatora „niewyraźnie" (*inessentially*):

– ktoś jest niewyraźnie wysoki, gdy ani nie jest wyraźnie wysoki, ani nie jest wyraźnie niewysoki;

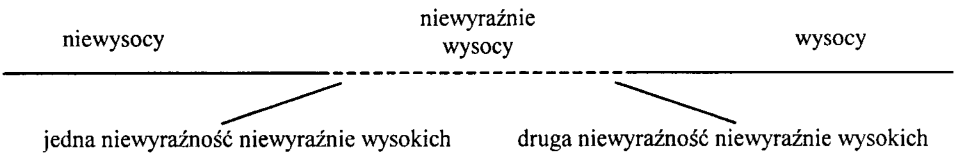
– ktoś jest niewyraźnie^2 wysoki, gdy jest niewyraźnie niewyraźnie wysoki itd.[159]

Trudno jednak nie zauważyć, że tak rozumiane nieostrości wyższych rzędów są pustą grą słowami, która ponadto może wprowadzać w błąd, sugerując coś niezgodnego z rzeczywistością. Co gorsza, propozycja Fine'a wprowadzająca nieskończony ciąg wyrażeń $\{\text{niewyraźnie}^n \text{ wysoki}\}_{n\in N}$ jest nietrafna, gdyż nie uwzględnia tego, iż dla każdej następnej liczby naturalnej, liczba wyrażeń „niewyraźnie^n wysoki" jest większa i wyraża się kolejną potęgą liczby 2. Jeśli bowiem, termin „niewyraźnie niewyraźnie wysoki" ma dotyczyć obszaru nieostrości terminu „niewyraźnie wysoki", to znaczy, że ma wyrażać nieostrość tego obszaru zarówno od strony ekstensji pozytywnej jak i od strony ekstensji negatywnej predykatu „być wysokim". Zatem, termin „niewyraźnie niewyraźnie wysoki" jest jedną nazwą określającą dwa różne, nawet niesąsiadujące ze sobą, obszary nieostrości. Czymś innym jest przecież rozmytość granicy między klasą wysokich a zbiorem przypadków granicznych, a czym innym rozmytość zupełnie innej granicy między klasą niewysokich a zbiorem przypadków granicznych. W miejsce jednego terminu „niewyraźnie niewyraźnie wysoki" Fine powinien więc wprowadzić dwa „(niewyraźnie niewyraźnie wysoki)$_1$" oraz „(niewyraźnie niewyraźnie wysoki)$_2$". Bo tylko dwa nowe terminy mogą oddać „obustronną" nieostrość obszaru nieostrości predykatu „być wysokim". Dalej, mnożenie się terminów wyrażających kolejne nieostrości jest analogiczne. W szczególności, dla każdego wyrażenia „(niewyraźnie niewyraźnie wysoki)$_i$",

[158] Patrz paragraf poświęcony epistemicyzmowi oraz Williamson, [1994], s. 57–58. Patrz także Williamson, [1994], s. 111–113, 127–130, 156–163.

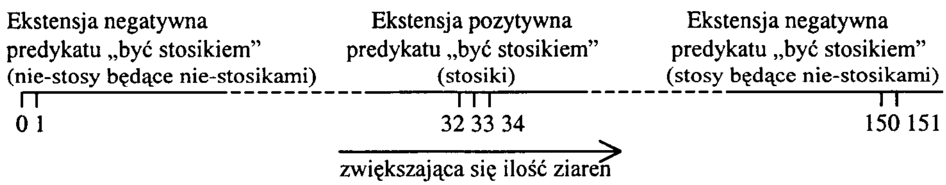
[159] "One distinctive feature of vagueness is penumbral connection. Another is the possibility of higher-order vagueness. The vague may itself be vague, or vaguely vague, and so on. For suppose that James has a few fewer hairs on his head then his friend Herbert. Then he may well be a borderline case of a borderline case or a borderline case of a borderline case of a borderline case of a bald man. This feature of vagueness can be expressed with the help of the operator '*D*' for 'it is definitely the case that'. Let us define the operator '*I*' for 'it is indefinitely that' by: $IA =^{df} -DA$ & $-D-A$. This is in analogy to the definition of the contingency operator in modal logic. But note that '*D*', unlike the adjective 'definite' or the truth-value designator '*T*', is biased towards the truth. Then $I^nFa = II\ldots IFa$ (operator I występuje n-krotnie po prawej stronie równości [przypis autora]) expresses that what a denotes is an n-th order borderline case of F. For example, the first of the two possibilities for James is expressed by: *II*(James is bald).", Fine, [1975], s. 287.

dla i = 1, 2, powinny istnieć dwa następne „(niewyraźnie niewyraźnie niewyraźnie wysoki)$_{i1}$" oraz „(niewyraźnie niewyraźnie niewyraźnie wysoki)$_{i2}$".



Podobnie, w przykładzie Williamsona, słowo „red" powinno generować jedno słowo „dred", dwa słowa „ddred", cztery słowa „dddred", osiem słów „ddddred" itd.

Co prawda, nie jest trudno znaleźć uzasadnienie dla dodawania nowych nieostrych predykatów, do jednego starego. Jeśli na przykład, chcemy mówić o przypadkach granicznych danego nieostrego predykatu, to możemy wykorzystać kolejny nieostry predykat, którego ekstensja pozytywna będzie podzbiorem półcienia wyjściowego predykatu. W tym właśnie sensie można wykorzystać jakąś „nieostrość wyższego rzędu" w celu uściślenia danej wypowiedzi. Jeśli więc, chcemy zmniejszyć obszar nieostrości predykatu „być stosem", możemy w tym celu posłużyć się innym predykatem, na przykład, „być stosikiem". Nowy predykat, jako że jest nieostry, również ma swój półcień, a mówiąc ściślej nawet dwa półcienie. Pierwszy z nich znajduje się między ekstensją negatywną predykatu „być stosem", a ekstensją pozytywną predykatu „być stosikiem". Drugi półcień oddziela natomiast ekstensję pozytywną predykatu „być stosikiem" od ekstensji pozytywnej predykatu „być stosem". Zarówno ekstensja pozytywna jak i negatywna predykatu „być stosem" powinna wówczas być ekstensją negatywną predykatu „być stosikiem": przecież żaden stosik nie jest stosem, jak również żaden stosik nie jest nie-stosem.



Tradycyjnie, półcień zaznaczony jest linią przerywaną. Tak więc, nieostrość jednego predykatu została wzbogacona o nieostrość innego. Opierając się na tym przykładzie łatwo jest zauważyć, że co prawda nieostrość danego predykatu daje się zastąpić nieostrością innego, nie daje się jednak usunąć.

Powyższy przykład pokazuje, że dodanie kolejnego predykatu do danego może istotnie wzbogacić, czy nawet w jakimś sensie uściślić analizę przypadków granicznych predykatu wyjściowego. Mimo to, propozycja wykorzystująca multiplikację operatora „niewyraźnie" nie wydaje się być szczególnie trafną strategią. Przecież operowanie nieostrą nazwą „czerwony" można wzbogacić stosowaniem długiej serii równie nieostrych nazw: „nieco czerwony", „trochę czerwony", „trochę mniej czerwony niż bardzo czerwony", „ciut mniej czerwony niż jasnoczerwony", „prawie czerwony", „prawie nieczerwony", „ciemnoczerwony", „jasnoczerwony", „bardzo czerwony", „mniej czerwony niż czerwony", „bardziej czerwony niż nieczerwony", „jeszcze bardziej czerwony niż bardziej czerwony niż nieczerwony", „intensywnie czerwony", „różowy", „amarantowy", „ciemno różowy" itd. Nazwy te wydają się w jakiś sposób reprezentować przypadki należące do półcienia nazwy „czerwony". W jaki jednak sposób jest możliwe jakiekolwiek uporządkowanie tych i wielu innych nazw ze względu na wspomniany rząd nieostrości. Która nazwa miałaby reprezentować rząd nieostrości o jeden niższy, czy o dwa wyższy, od nieostrości innej nazwy? Której nazwy? Naturalnie, jest to możliwe jedynie wtedy, gdy, tak jak to uczynił Kit Fine, będziemy operowali pewnym specjalnie spreparowanym zbiorem nazw: „niewyraźnie czerwony", „niewyraźnie niewyraźnie czerwony", „niewyraźnie niewyraźnie niewyraźnie czerwony" itd. Czemu jednak podobny ciąg miałby służyć? Co naprawdę oznacza wyrażenie „niewyraźnie niewyraźnie niewyraźnie czerwony"? Czy nie jest to zwykła, pusta zabawa słowami?[160]

Niestety, jak już wcześniej wspomnieliśmy, zabawa ta jest szkodliwa, gdyż nie służy jedynie prostemu i oczekiwanemu stwierdzeniu, że nieostrości danego słowa nie da się usunąć przez zastosowanie do jego przypadków granicznych, innego ostrego już słowa. Jest ona bowiem także podstawą analiz, ważnej skądinąd kwestii, ewentualnej nieostrości nieostrości[161]. Tymczasem, właściwą odpowiedź na pytanie, czy predykat „być nieostrym" jest nieostry, można znaleźć przeprowadzając zupełnie inne rozważania.

Stojąc na stanowisku, iż nieostrości wyższych rzędów są pseudoproblemem, zwłaszcza w tym rozumieniu, w którym najczęściej występują w literaturze[162], w dalszym ciągu będą one pomijane milczeniem. Dotyczy to zwłaszcza dyskusji, w których zwolennicy któregoś z podejść do nieostrości atakują propozycje alternatywne. Z naszego punktu widzenia, wszelka próba pokazania wyższości jednego ze stanowisk wobec innych, przy pomocy kwestii tak zwanych nieostrości wyższych rzędów jest pozbawiona większego sensu.

---

[160] Podobny pogląd reprezentują: D. Edgington, [1993], s. 198–200; oraz P. Simons, [1992], s. 200. Patrz, Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 46–47.

[161] Np. Sorensen, [1985]; Tye, [1994]; Hyde, [2003]; Varzi, [2003a].

[162] Np. Fine, [1975]; Sainsbury, [1991]; Williamson, [1994].

4.1.3.3. CZY „NIEOSTROŚĆ" JEST NIEOSTRA?

W celu rozstrzygnięcia kwestii czy nieostrość jest ostra, czy może nieostra, Sorensen, Michael Tye, Dominic Hyde, a także Varzi rozważali problem, czy predykat „być nieostrym" jest nieostro nieostry oraz czy coś, co jest nieostro nieostre, nie jest czasem nieostre[163]. Ryzykując wpadnięcie w pułapkę cyrkularności rozumowania próbowano rozwiązać ten problem analizując sens nieostrości. Analizy te przypominają nieco roztrząsanie kwestii, czy przyjaciel mego przyjaciela jest moim przyjacielem, i czy wróg mojego wroga jest moim wrogiem.

Chcąc uniknąć podobnych rozważań, można by stwierdzić, tak jak uczynił to John Langshaw Austin (1911–1960), że po prostu, oczywistością jest to, iż predykat „być nieostrym" jest nieostry[164]. Okazuje się jednak, że istnieje metoda rozstrzygnięcia tej kwestii, wykorzystująca, sformułowaną w tym paragrafie, definicję nieostrości.

Przypomnijmy, że dany predykat jest nieostry, gdy ma niepusty półcień, oraz gdy półcień ten nie jest oddzielony przynajmniej od jednej ekstensji tego predykatu wyraźnymi granicami. Jeśli więc chcemy dowieść, że „być krzesłem" jest predykatem nieostrym, to możemy postąpić tak jak Black[165], pokazując, że nie jest logicznie wykluczone istnienie uporządkowanego zbioru takich obiektów, z których każde dwa sąsiednie różnią się, ze względu na stosowalność predykatu *P*, minimalnie, a ponadto, zdanie orzekające *P* o pierwszym z nich jest prawdziwe, zaś zdanie orzekające *P* o ostatnim z tych obiektów jest fałszywe. W tym też sensie, pierwszy obiekt uporządkowanego zbioru jest krzesłem, ostatni zaś jest nie-krzesłem. Minimalność różnic, istotnych dla orzekania predykatu *P*, jakie dzielą każde dwa kolejne obiekty tej kolekcji sprawia, że nie istnieje, ani ostatni obiekt będący krzesłem, ani pierwszy będący nie-krzesłem. Konstrukcja ta pokazuje istnienie takiego niepustego zbioru przypadków granicznych dla predykatu „być krzesłem", który nie jest oddzielony od ekstensji pozytywnej i negatywnej tego predykatu wyraźną granicą. Zatem, zaproponowana przez Blacka konstrukcja wspomnianego ciągu obiektów, z fikcyjnego Muzeum Logiki Stosowanej, dowodzi nieostrości predykatu „być krzesłem".

Aby udowodnić nieostrość predykatu „być nieostrym predykatem" przeprowadźmy podobną konstrukcję. W tym celu wykorzystajmy specjalną klasę predykatów, podobnych do predykatu Sorensena, a określonych na zbiorze liczb naturalnych. Dla każdej liczby naturalnej *n*, zdefiniujmy predykat „być *n*-small(<*n*)" następująco:

---

[163] Sorensen, [1985]; Tye, [1994]; Hyde, [1994], [2003]; Varzi, [2003a].

[164] Hyde, [2003], s. 303.

[165] Przykład Blacka z krzesłem został omówiony w paragrafie 4.1.1, poświęconym historii zmagań z paradoksem stosu.

Liczba naturalna *k* jest *n*-small (<n) wtedy i tylko wtedy, gdy *k* jest małą liczbą lub $k < n$.

Dla $n = 0$, nierówność $k < 0$ jest fałszywa dla każdej liczby naturalnej *k*. Zatem, w tym przypadku, predykat „być 0-small(< 0)" jest po prostu predykatem „być małą liczbą" i jako taki jest bez wątpienia predykatem nieostrym.

Podobnie nieostre są też predykaty „być *n*-small(< *n*)" dla $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Gdy na przykład, $n = 5$, zdania 5-small(< 5)(*k*) są niewątpliwie prawdziwe dla $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, jak również powinny być prawdziwe dla jeszcze pewnej liczby liczb naturalnych większych od 5.

Jednocześnie, predykat „być 10^{10}-small(< 10^{10})" jest predykatem wyraźnym. Dowodzi tego fakt, iż dla każdej liczby naturalnej $k < 10^{10}$, zdanie 10^{10}-small (< 10^{10})(*k*) jest prawdziwe, podczas, gdy dla każdej liczby $k \geq 10^{10}$, zdanie 10^{10}-small(< 10^{10})(*k*) jest fałszywe. Oznacza to, że ten predykat nie posiada przypadków granicznych, a więc jest ostry.

W bardzo długim ciągu predykatów, między nieostrym „być 0-small(< 0)", a ostrym „być 10^{10}-small(< 10^{10})" muszą więc istnieć takie, co do których nie jest jasne, czy mają przypadki graniczne, czy też ich nie mają. Wynika to z faktu, iż kluczową rolę w całym ciągu odgrywa „małość" liczby naturalnej, która jest niewątpliwie terminem nieostrym. Sytuację tę przedstawiono w poniższym zestawieniu[166]:

$n = 0$		$n = 33$		$n = 10^{10}$
0-small(< 0)(0) = 1		33-small(< 33)(0) = 1		10^{10}-small(< 10^{10})(0) = 1
0-small(< 0)(1) = 1		33-small(< 33)(1) = 1		10^{10}-small(< 10^{10})(1) = 1
.		.		.
.		.		.
.		.		.
0-small(< 0)(33) = ?	...	33-small(< 33)(32) = 1	...	10^{10}-small(< 10^{10})($10^{10}-1$) = 1
.		33-small(< 33)(33) = ?		10^{10}-small(< 10^{10})(10^{10}) = 0
.				
.				
0-small(< 0)(10^{10}) = 0		.		10^{10}-small(< 10^{10})($10^{10}+1$) = 0
		.		
		.		
.		33-small(< 33)(10^{10}) = 0		.
.				.
.				.

W tym ciągu predykatów istnieją więc takie, które, ani nie są nieostre, ani nie są ostre – nie jest bowiem prawdą, ani to, że posiadają przypadki graniczne, ani to, że ich nie posiadają. Predykaty te stanowią więc przypadki graniczne dla predykatu „być nieostrym predykatem". Oznacza to, że nieostrość jest nieostra.

---

[166] Naturalnie, predykat 33-small(< 33) jako nieostry nie jest przykładem przypadku granicznego. Został jedynie podany dla lepszego zilustrowania rozważanego tu ciągu predykatów.

Należy zauważyć, że dokładnie ten sam, przedstawiony wyżej, ciąg predykatów, dowodzący nieostrości nieostrości udowadnia nieostrość predykatu „być wyraźnym predykatem". Dostarcza więc dowodu na to, że nieostra jest również ostrość.

W obu wnioskach nie ma jednak niczego zaskakującego. Skoro bowiem wszystkie niematematyczne terminy języka naturalnego są nieostre, to w szczególności nieostre są również „nieostrość" i „wyraźność"[167]. Ponadto, wiedząc, że każda definicja nieostrości powinna być nieostra, możemy już teraz ze spokojem przyjąć naszą nieostrą definicję nieostrości predykatu.

4.1.3.4. KWESTIA NIEOSTROŚCI POZAJĘZYKOWEJ

W swym sławnym, cytowanym już wcześniej wystąpieniu, którego zapis ma postać artykułu znanego pod tytułem *Vagueness*[168], Russell uznał, iż nieostrość jest fenomenem charakteryzującym wyłącznie to, co reprezentuje, a nie to co jest reprezentowane, jest więc jedynie zjawiskiem językowym lub mentalnym. Dopatrywanie się nieostrości w obiektach pozajęzykowych, a więc przedmiotach reprezentowanych przez dany język byłoby, zdaniem Russella, typowym błędem werbalizmu: własności słów byłyby przypisywane obiektom reprezentowanym przez te słowa. Michael Dummett stwierdził natomiast, iż pogląd, zarówno ten, głoszący nieostrość rzeczy, jak i ten, uznający, iż są one nieostro opisywane, jest nie do zrozumienia[169]. Tak pojmowana nieostrość jest nazywana *nieostrością językową*. W kwestii nieostrości, bliski, zarówno Russellowi, jak i Dummettowi, jest David Lewis. Uważa on bowiem, iż jedynym miejscem, w którym można lokalizować nieostrość jest myśl i język. Jego zdaniem, przyczyną językowej nieostrości nie są nieostre obiekty, lecz mnogość obiektów ostrych, różniących się jednak umiejscowieniem swoich granic. Na szczęście, zdaniem Lewisa, nikt nie jest na tyle głupi, aby któryś z tych szczególnych przypadków wybrać jako obiekt ustalający precyzyjne rozumienie nieostrego słowa. Nieostrość jest więc pewnym rodzajem semantycznego niezdecydowania[170]. Podobny pogląd wyznaje Timothy Williamson. Swoją pracę *Vagueness in Reality* rozpoczyna od przytoczenia znamiennego w swej wymowie spostrzeżenia[171]: „Jeśli zdejmę okulary, świat wygląda nieostro. Jeśli ponownie je założę, świat wygląda na wyostrzony. Nie sądzę, aby świat faktycznie był zamazany; wiem, że zmianie

[167] Wydaje się, że jedynymi pozamatematycznymi nazwami, które są wyraźne są: „ruch" i „bezruch" (czyli „spoczynek").

[168] Russell, [1923].

[169] Dummett, [1975], s. 314.

[170] Lewis, [1986], s. 212.

[171] Williamson, [manuskrypt].

uległa jedynie moja relacja do obiektów świata fizycznego, które mam przed oczami, one same przecież się nie zmieniły. Jestem więc bardziej skłonny uwierzyć, że świat jest i był ostry". Jako przedstawiciel epistemicyzmu, Williamson nie tylko wyklucza istnienie nieostrości materialnej, lecz również uważa, że wyrażenia języka są ostre, nieostrość zaś powstaje jako skutek braku wiedzy, czy umiejętności w rozpoznaniu ostrych granic jakie oddzielają ekstensję pozytywną od negatywnej danego wyrażenia. Tak pojmowana nieostrość nosi nazwę *nieostrości epistemicznej*.

Mimo iż pogląd wykluczający istnienie nieostrości w świecie materialnym ma zwolenników wśród tak wpływowych filozofów jak Russell, Dummett, czy Lewis, istnieją filozofowie nie tylko dopuszczający możliwość takiej nieostrości, lecz wręcz uważający przedmioty świata materialnego za obiekty nieostre. Tak rozumiana nieostrość jest nazywana *nieostrością obiektywną*, *metafizyczną*, lub też *ontyczną*. Pogląd ten, zgodnie z którym nieostrość wyrażeń języka ma swoje źródło w nieostrości pozajęzykowej reprezentuje, na przykład, Tadeusz Pawłowski[172]: „[...] przyczyna nieostrości nie leży ani w braku wiedzy, ani w postępowaniu człowieka, a w każdym razie nie wyłącznie w postępowaniu człowieka, lecz w naturze przedmiotów oznaczanych przez wyrażenia nieostre, w specyficznym charakterze cech tych przedmiotów. Są to mianowicie cechy stopniowalne, przy czym przejście od stanu występowania danej cechy do jej nieobecności ma charakter ciągły. Oznacza to, iż nie można przeprowadzić ostrej granicy między tymi dwoma stanami". Podobną opinię, chociaż w inny sposób uzasadnioną, podziela Tye: skoro predykat „być czerwony" jest predykatem nieostrym, to własność nim wyrażona również jest nieostra. Istnieją przecież obiekty, które nie są ani czysto czerwone, ani czysto nie-czerwone. Ta nieostrość własności wydaje się wymagać obiektów będących możliwymi przypadkami granicznymi (*possible borderline instances*)[173]. Tye będąc zwolennikiem pozajęzykowej nieostrości proponuje rozważyć przypadek góry Mount Everest. Pewne cząsteczki niewątpliwie należą do wnętrza góry, pewne zaś w równie niewątpliwy sposób są poza tą górą. Istnieją jednak cząsteczki, które mają niejasny, czyli graniczny status. Nie jest bowiem przesądzone ani to, że są wewnątrz góry, ani to że są na zewnątrz. Można więc stwierdzić, że góra Mount Everest ma graniczną, czasoprzestrzenną część, i właśnie ze względu na nią wykazuje podobieństwo do chmury. Zatem Mount Everest jest nieostrym chociaż konkretnym obiektem[174]. Należy tu dodać, iż graniczny status pewnych cząstek nie oznacza, że tworzą one trzecią kategorię, gdzie dwie pierwsze są utworzone odpowiednio przez cząsteczki góry oraz cząsteczki otoczenia góry. Pomysłowi temu Tye

[172] Pawłowski, [1978], s. 72.
[173] Tye, [1998], s. 563.
[174] Tye, [1990], s. 535, także [1998], s. 563.

przeciwstawia się twierdząc, iż w ten sposób doszlibyśmy do utworzenia pojęcia czegoś, czemu nic nie odpowiada w rzeczywistości. Ponadto musielibyśmy tworzenie nowych kategorii obiektów kontynuować, bowiem istnienie trzeciej kategorii cząsteczek tworzyłoby dwie kolejne strefy przypadków granicznych: między cząsteczkami góry a cząsteczkami trzeciej kategorii oraz między cząsteczkami trzeciej kategorii a cząsteczkami otoczenia góry. Naturalnie, utworzenie czwartej i piątej kategorii cząsteczek pociągałoby potrzebę powołania do istnienia kolejnych kategorii, na wzór nieostrości wyższych rzędów[175]. Tak więc cząsteczki z obszaru granicznego nie tworzą odrębnej kategorii, bo tworzyć jej nie mogą, a to z tego powodu, iż obszar graniczny nie jest precyzyjnie wyznaczony. Mówimy, że pewne cząsteczki są przypadkami granicznymi, ponieważ nie można o nich orzec ani że tworzą górę, ani że należą do otoczenia góry. Przy czym brak możliwości orzekania o ich przynależności nie wynika z ułomności naszego poznania, lecz z własności samej materii. Dzięki współczesnej fizyce wiemy, iż na powierzchni każdego ciała następuje nieustanna wymiana cząstek elementarnych tego ciała z otoczeniem. Tym samym, wiemy, że w powyższych rozważaniach górę Mount Everest można zastąpić dowolnym, innym makroskopowym obiektem materialnym. Tye proponuje więc uogólnienie tego rozumowania podając definicję obiektu nieostrego[176]:

PIERWSZA DEFINICJA NIEOSTREGO OBIEKTU. *Obiekt o jest nieostry w sensie czasoprzestrzennym wtedy i tylko wtedy, gdy*
(a) ma graniczne czasoprzestrzenne części oraz
(b) nie ma żadnego faktu stwierdzającego, czy istnieją obiekty które nie są ani częścią o, ani częścią graniczną o, ani są spoza o.

Jak widać, powyższa definicja Tye'a, tak jak wcześniej przyjęta przez nas definicja nieostrości, nie ogranicza się jedynie do istnienia przypadków granicznych, lecz wskazuje ponadto na konieczność niemożności wytyczenia wyraźnych granic między obiektem a obszarem granicznym i między obszarem granicznym a otoczeniem obiektu. Tye podaje jednak jeszcze inne uzasadnienie istnienia w świecie pozajęzykowym obiektów nieostrych. Uzasadnienie to nie wynika ze słabości poprzedniego, lecz z faktu, iż powyższy argument dotyczy obiektów czasoprzestrzennych, czyli materialnych. Tymczasem, istnieją również obiekty pozamaterialne, które zdaniem Tye'a także zasługują na miano obiektów nieostrych[177]. Dla tych właśnie obiektów Tye proponuje kolejną definicję[178]:

---

[175] Por. Tye, [1990], s. 535.
[176] Tye, [1990], s. 535–536.
[177] Tye, [1990], s. 536.
[178] Tye, [1998], s. 563.

DRUGA DEFINICJA NIEOSTREGO OBIEKTU. *Obiekt o jest nieostry, jeśli tylko istnieje taki obiekt o', że nie jest określone czy o jest identyczne z o'.*

O nieostrości obiektu *o* świadczy nieokreśloność relacji identyczności w jakiej pozostaje obiekt *o* z innym obiektem. Cytując J. Broome'a [1984], Tye przytacza przykład D. Parfita, dotyczący klubu posiadającego swoją siedzibę, listę członków oraz statut. Załóżmy, że spotkania w klubie są coraz rzadsze, aż w końcu przestają się odbywać. Przypuśćmy, że po kilku latach w ciągu których nie doszło do żadnego spotkania w klubie, kilku dawnych jego członków wraz z paroma nowymi doprowadziło do spotkania w dawnej siedzibie klubu. Naturalnie nazwa klubu pozostała niezmieniona. Trudno orzec, czy nowy klub i dawny są jednym i tym samym klubem, ich identyczność jest więc nieokreślona. Zatem, zarówno stary, jak i nowy klub jest obiektem nieostrym, chociaż żaden z nich nie jest obiektem o czasoprzestrzennej naturze.

Zdaniem Tye'a, niektóre obiekty abstrakcyjne także są nieostre. Za przykład dowodzący prawdziwości tej tezy może posłużyć zbiór wszystkich wysokich mężczyzn[179]:

DEFINICJA NIEOSTREGO ZBIORU. *Zbiór S jest nieostry wtedy i tylko wtedy, gdy*
(a) ma elementy graniczne oraz
(b) nie ma żadnego faktu stwierdzającego, czy istnieją obiekty które nie są ani elementami S, ani elementami granicznymi S, ani są spoza S.

Oczywiście, *nieostry zbiór* nie jest zbiorem w dobrze nam znanym, matematycznym sensie. W analogiczny sposób można zdefiniować nieostrość własności[180]:

DEFINICJA NIEOSTREJ WŁASNOŚCI. *Własność P jest nieostra wtedy i tylko wtedy, gdy*
(a) może mieć przykłady graniczne oraz
(b) nie ma żadnego faktu stwierdzającego, czy mogą istnieć obiekty które nie są ani przykładami własności P, ani przykładami granicznymi P, ani kontrprzykładami P[181].

---

[179] Tye, [1990], s. 536.

[180] Tye, [1990], s. 535–536.

[181] Idąc śladem Russella, Tye uzasadnia nieostrość nawet tak precyzyjnie wyglądających własności jak posiadanie wysokości 2000 stóp. Istotnie, chyba bez większego ryzyka można przyjąć, iż wzorzec z Trafalgar Square w Londynie dostarcza informacji precyzyjnych w podobnym stopniu, co wzorzec z Sèvres pod Paryżem. Naturalnie, dzisiaj, ani pręt z Sèvres, ani tablica z Trafalgar Square nie są już wzorcami miar długości – patrz jeden z wcześniejszych przypisów w tym rozdziale.

Odwołując się do ustaleń fizyki współczesnej, Tye pokazał nie tylko istnienie materialnych, czyli czasoprzestrzennych obiektów nieostrych, ale uzasadnił, iż wszystkie tego typu obiekty są nieostre. Podobny pogląd reprezentuje Silvio Seno Chibeni. W celu udowodnienia swej tezy wykorzystuje, jak sam mówi, najlepszą z teorii opisujących strukturę materii, czyli mechanikę kwantową. Jego uzasadnienie ma, zarówno aspekt ogólno teoretyczny, jak i wiąże się z analizą szeregu przykładów. Istnienie obiektów nieostrych okazuje się być jeszcze bardziej oczywiste w świetle teoretycznych i doświadczalnych wyników mikrofizyki, która nakłada poważne ograniczenia na każdą teorię głoszącą możliwość rekonstrukcji ostrości obiektów kwantowych[182]. Wydaje się więc, że uzasadnienie wykluczenia nieostrości z pozajęzykowej rzeczywistości nie jest sprawą aż tak łatwą, jak mogłoby się to wydawać. Jak bowiem można, nie licząc się zupełnie z ustaleniami nauk empirycznych, orzekać o kwestiach tak podstawowych dla przedmiotu badań tych nauk.

Naturalnie, na gruncie filozofii możliwe jest odrzucenie argumentacji bazujących na wynikach nauk empirycznych. Cena za taki zabieg jest jednak dość wysoka, jest nią bowiem, niezgodność poglądów z ustaleniami współczesnych nauk empirycznych, takich jak chociażby fizyka, czy biologia. Należy jednak pamiętać, że niezgodność tez filozoficznych z wynikami badań empirycznych nie musi przeczyć tym tezom. Przecież teorie nauk empirycznych składają się z twierdzeń, które czekają na swoje obalenie. Tak więc, mogłoby się wydawać, że zarówno zwolennicy jak i przeciwnicy pozajęzykowej nieostrości mogą pozostawać wierni swoim przekonaniom. Okazuje się jednak, że istnieje cała ogromna, bo nieskończenie liczna grupa paradoksów reprezentujących jeden i ten sam, wspomniany już wcześniej, problem, zwany problemem wielu. Otóż, problem wielu jest źródłem tych dylematów, które należy zakwalifikować do paradoksów nieostrości świata materialnego. Kwestię tę przeanalizujemy w paragrafie 4.2.

Dość niezwykłą, a zarazem sławną próbę „logicznego" wykluczenia możliwości istnienia nieostrości w świecie materialnym podjął Sorensen. Jej niezwykłość polega na tym, że pewien fakt natury czysto empirycznej jest ustalany na drodze wyłącznie logicznej spekulacji w zupełnym oderwaniu od pozostałych faktów empirycznych. Z metodologicznego punktu widzenia jest to więc zabieg raczej podejrzany. Przypomnijmy ten dość niecodzienny „dowód" Sorensena na to, iż kropla (np. wody) jest obiektem ostrym. Podkreślić należy, że jest to jedna z głośniejszych spekulacji dotyczących kwestii nieostrości[183].

Swoją argumentację Sorensen poprzedza uwagą, iż nawet rozszerzający się Wszechświat ma wyraźne granice, gdyż są one zawsze ustalone przez kolejne

---

[182] Chibeni, [manuskrypt].
[183] Sorensen, [1998].

fazy jego ekspansji[184]. Skoro więc całość wszelkich bytów materialnych jaką jest Wszechświat jest ostra, to dlaczego poszczególne byty miałyby być nieostre. Sorensen posuwa się w swej argumentacji tak daleko, jak to tylko jest możliwe, przyjmując, iż wszystkie obiekty materialne mają granice, a ponadto granice te są ostre[185]. Wprowadzeniem do właściwego „dowodu" na to, iż kropla ma ostre granice jest jego wcześniejsza argumentacja, jak sam zauważa, topologicznej natury, pokazująca, iż nie jest możliwe, aby szara „nieostra" kula przechodząca w białe otoczenie była obiektem nieostrym[186]. Tak więc, przyjmijmy za Sorensenem, że pewna szarość w kształcie kuli przechodzi w miarę płynnie w biel otoczenia kuli. Załóżmy ponadto, że począwszy od środkowego punktu kuli szarej zaczyna rozrastać się kula biała, pochłaniająca stopniowo całą szarość. Kula biała jest rozumiana jako rosnąca, biała dziura w kuli szarej, tak, iż szarość nie rozszerza się, lecz stopniowo znika. Zanik kuli szarej wydaje się przebiegać stopniowo, co byłoby zgodne z oczekiwaniami. Okazuje się jednak, że kula szara znika nagle. Granica szarości nie ma bowiem żadnej szerokości, nie może więc wyznaczać obszaru, który mógłby przetrwać istnienie kuli szarej. Skoro więc granica szarości musi zniknąć nagle, gdyż jest wyznaczona przez ostrą linię, a nie pas o niezerowej szerokości, cała szara kula również musi zniknąć nagle. Oznacza to, że kula szara, nawet ta stopniowo przechodząca w biel, jest obiektem posiadającym ostre granice.

Opierając się na powyższym rozumowaniu, Sorensen proponuje kolejne, które tym razem dotyczy materialnej kropli, np. wody. Rozumowanie to wyrażone jest w pięciu krokach[187]:

1. *Kropla musi mieć granicę.*
2. *Jeśli kulista pustka rośnie od środka kropli, to granica kropli pozostaje nietknięta tak długo, jak długo będzie istnieć jakaś cząstka kropli.*
3. *W chwili gdy nic nie pozostanie z kropli, cała granica kropli zniknie w tej jednej chwili.*
4. *Lemat: Granica kropli przestaje istnieć nagle.*
5. *Wniosek: Kropla przestaje istnieć nagle.*

[184] Trudno bez zastrzeżeń przyjąć ten argument. Istnienie granicy Wszechświata wcale nie musi oznaczać tego, że jest ona wyznaczona w sposób wyraźny. Jeśli bowiem obszar Wszechświata jest wyznaczony przez rozszerzające się pole energetyczne, to czemu pole to miałoby się w pewnym ściśle określonym miejscu kończyć. Przecież rozpraszanie energii jest tradycyjnie kojarzone z takim jej rozkładem, który przechodzi w miarę płynnie od pewnego nasilenia tej energii do jej braku.

[185] Sorensen, [1998], s. 275.

[186] Sorensen używa słowa „nieostra" wziętego w cudzysłów. Gdyż chce pokazać, że nieostrość tej kuli nie jest możliwa, Sorensen, [1998], s. 275.

[187] Sorensen, [1998], s. 276.

Sorensen opatruje komentarzem, każdy z powyższych kroków rozumowania. (1) Istnienie granicy kropli jest warunkiem koniecznym na to, aby sama kropla mogła istnieć. Założenie to nie przesądza jednak, czy granica jest częścią kropli, czy jej otoczenia. (2) Granica kropli dotyczy jedynie jej zewnętrznej części, nie zaś jej wnętrza. (3) Granica kropli zostaje w pełni unicestwiona dopiero wówczas, gdy pustka zakończy swoją ekspansję. Granice pasożytują na swoich żywicielach[188] – gdy nie ma obiektu, to nie ma jego granicy. Ponadto, unicestwienie granicy kropli dokonuje się jednolicie, a więc żadna część granicy kropli nie znika wcześniej niż inna część tej granicy. Tak jak kropla nie może przeżyć swojej granicy, tak granica kropli nie może przeżyć samej kropli. (4) Krok czwarty jest wnioskiem wynikającym z założenia drugiego i trzeciego. Skoro, na mocy założenia drugiego, los kropli jest związany z losem jej granicy, zaś na mocy założenia trzeciego, cała granica znika jednocześnie i jednolicie, zatem zanik granicy jest zdarzeniem dokonującym się w chwili będącej punktem czasowym, jest więc zdarzeniem dyskretnym, a nie stopniowym procesem. (5) Kropla kończy się dokładnie wtedy, gdy kończy się jej granica. Zatem, również zanik kropli jest zdarzeniem dyskretnym[189].

Już prosta analiza pierwszej z dwóch wyżej przedstawionych argumentacji pokazuje, że jest ona nie do przyjęcia, gdyż Sorensen popełnił w niej błąd *peticio principi*, posługując się w dowodzie danej tezy tą właśnie tezą. Chodzi tu, rzecz jasna, o zdanie stwierdzające ostrość kuli szarej. Po pierwsze, Sorensen przyjął definicję granicy kuli jako obiektu bez szerokości, a więc jako czegoś co samo jest ostre. Po drugie, w niemy sposób założył, że biel jest jedna jedyna, a więc ostra, zupełnie zapominając o tym, że np. Eskimosi odróżniają więcej odcieni bieli, niż my szarości. Jeśli więc biel jest u Sorensena wyznaczona ostro, to jej brzeg, czyli linia bez szerokości jest zarazem ostrą granicą szarej kuli. Szarą kulę, Sorensen rozumie, bowiem, jako wszystko to, co jest poza bielą ograniczoną wspomnianą ostrą linią. Innymi słowy, szara kula jest, dla Sorensena, dopełnieniem ostrego obszaru będącego jej otoczeniem. Oznacza to, że szara kula jest z założenia obiektem ostrym, chociaż jej natężenie szarością nie jest jednakowe. Dla tak rozumianego obiektu nie jest już niczym trudnym udowodnić, że jego granica zniknie nagle, zaś on zniknie wraz ze zniknięciem swojej granicy, a więc również nagle. Innymi słowy, Sorensen udowodnił, że

---

[188] Chociaż „granice pasożytują na swoich żywicielach", to dlaczego żywicielem dla granicy kropli ma być kropla? Na tę wątpliwość wskazują E. J. Lowe [1982], [1995] oraz M. Johnston [1992], którzy uważają, że podłożem dla granicy nie jest sam obiekt, lecz materialne ustanowienie tego obiektu. Obiekty zaś posiadają swoje granice jedynie pośrednio.

[189] Patrz Sorensen, [1998], s. 276–277. Sorensen przeciwstawia się także zarówno poglądowi, zgodnie z którym obiekty nieostre nie mają granic, jak również opinii, że ostre obiekty mają ostre granice, zaś nieostre obiekty mają granice rozmyte, Sorensen, [1998], s. 278–282, s. 290–292. Pierwszy pogląd reprezentuje Mark Sainsbury, [1990], [1991]; drugi zaś przedstawiciele teorii *zbiorów rozmytych*, patrz paragraf poświęcony logikom rozmytym.

ostry obiekt zniknie nagle. W tej argumentacji Sorensen nie jest oryginalny. Pół wieku wcześniej bowiem, już w 1948 roku, Ajdukiewicz przedstawił rozumowanie dowodzące istnienia ostrej granicy dla stanu *A* przechodzącego w stan *nie-A*. Jakakolwiek, choćby najmniejsza zmiana stanu *A* sprawia, że przechodzi on już w stan *nie-A*[190]. Oczywiście, nie każdy stan może spełniać ten nałożony przez Ajdukiewicza na *A* warunek. Stan bezruchu spełnia go (najmniejsza zmiana w stanie bezruchu czyni z niego ruch), podobnie jak stan ruchu (ruch może zmienić się jedynie w bezruch, inaczej pozostanie ruchem, a więc się nie zmieni). Podobnie, nie każda własność spełnia ten warunek. Jeśli zmienimy cokolwiek w kwadracie o boku 2 cm, to otrzymana figura nie będzie już kwadratem o boku 2 cm. Jeśli jednak zmienimy odrobinę kolor białego szalika, to szalik ten nadal może być biały. Widać więc, że rozważany przez Ajdukiewicza problem dotyczy wyłącznie wyraźnie zdefiniowanych pojęć, typowych dla matematyki[191].

Druga argumentacja Sorensena powiela błąd popełniony w pierwszej. Z założenia, otoczenie kropli jest wyznaczone w sposób ostry przez ostrą granicę bez szerokości. Kroplą jest więc wszystko to, co nie jest jej, tak właśnie ostro pojmowanym, otoczeniem. Zatem, kropla jest ostra z założenia. Nic więc dziwnego, iż zakładając ostrość kropli Sorensen udowodnił, że kropla znika nagle, czyli, że jest obiektem ostrym.

Interesującą krytykę argumentacji Sorensena podał Ned Markosian, który sam wierząc w to, iż kropla jest obiektem ostrym, nie mógł zaakceptować rozumowania, które Sorensen podał jako dowód tej tezy[192]. Niestety, Markosian nie dostrzega niczego złego w tym, że fakt natury materialnej jest ustalany nieempirycznie. Markosian zauważył, że kluczowe dla całej argumentacji pojęcie „granicy kropli" nie jest przez Sorensena zdefiniowane. Markosian przedstawił więc różne sposoby rozumienia granicy obiektu, poszukując takiego, przy którym byłyby jednocześnie prawdziwe wszystkie przesłanki rozumowania. Swoje poszukiwania rozpoczął od wykluczenia takiego rozumienia granicy obiektu, zgodnie z którym, byłaby ona częścią wspólną tego obiektu i jego dopełnienia. Stwierdził bowiem, że takie rozumienie granicy nie uwzględnia obiektów stopniowo przechodzących w swoje dopełnienie[193]. Wykorzystał teorię zbiorów rozmytych, w której przynależność danego przedmiotu do zbioru określa się stopniem, wyrażonym liczbą należącą do obustronnie domkniętego przedziału [0,1]. Jeśli przedmiot należy do zbioru w stopniu 1, to znaczy, że przedmiot ten jest zdecydowanie,

---

[190] Ajdukiewicz, [1948], s. 102.

[191] Dokładniejsza analiza tego problemu jest przeprowadzona w paragrafie *Paradoks momentu śmierci*, poświęconemu problemom zmiany.

[192] Markosian, [2000].

[193] Markosian, [2000], s. 3.

czyli w sposób pewny, elementem tego zbioru. Jeśli natomiast przedmiot należy do zbioru w stopniu 0, to znaczy, że zdecydowanie, a więc w sposób pewny, nie jest on elementem tego zbioru. Zakres rozmytości tworzą wszystkie te przedmioty, których stopień należenia do zbioru jest mniejszy od 1 i większy od 0, czyli nie jest ani 0, ani 1. Najwyraźniej, Markosian nie zauważył, że takie określenie zdecydowanego należenia i nienależenia wprowadza wyraźną granicę tychże należeń. Mimo to, posługując się pojęciem stopnia należenia do zbioru odróżnił granicę ostrą od nieostrej posługując się następującą serią definicji[194]:

- *Punkt p jest punktem granicy zdecydowanej obszaru R wtedy i tylko wtedy, gdy każde otwarte otoczenie punktu p zawiera zarówno punkt, należący do R w stopniu 1, jak i punkt należący do R w stopniu 0*[195].
- *Punkt p jest punktem granicy niezdecydowanej obszaru R wtedy i tylko wtedy, gdy*
  (i) p nie jest punktem granicy zdecydowanej obszaru R oraz
  (ii) każde otwarte otoczenie punktu p zawiera dwa punkty, które należą do R w różnym stopniu.

DEFINICJA GRANICY OBIEKTU NIEOSTREGO (DGON): *B jest granicą obiektu x wtedy i tylko wtedy, gdy B jest zbiorem rozmytym wszystkich punktów granicy zdecydowanej i wszystkich punktów granicy niezdecydowanej obszaru zajmowanego przez x, zaś każdy element zbioru B należy do B w takim samym stopniu, w jakim jest punktem granicy obszaru zajmowanego przez x.*

- *Granica obiektu x jest zdecydowana wtedy i tylko wtedy, gdy granica x zawiera wyłącznie punkty zdecydowanej granicy obszaru zajmowanego przez x.*
- *Granica obiektu x jest niezdecydowana wtedy i tylko wtedy, gdy granica x zawiera przynajmniej jeden punkt niezdecydowanej granicy obszaru zajmowanego przez x.*

Markosian słusznie zauważył, że jeśli granicę będziemy rozumieli zgodnie z definicją DGON, to wniosek 4 (lemat) nie wynika z przesłanek 1–3 w rozumowaniu Sorensena. Tak rozumiana granica nie musi przecież zniknąć nagle. Właściwie, nagłe zniknięcie takiej granicy wydaje się wręcz niemożliwe. Dlatego też, Markosian postanowił zdefiniować granicę w taki sposób, aby lemat 4 wynikał z założeń 1–3. W tym celu posłużył się, tak zwaną, *granicą zewnętrzną*[196]:

---

[194] Markosian, [2000], s. 4–5.

[195] Otoczeniem otwartym punktu *p* jest kula otwarta o środku w punkcie *p* i dowolnie małym promieniu *r*, czyli zbiór tych wszystkich punktów danej przestrzeni, których odległość od punktu *p* jest mniejsza niż *r*.

[196] Markosian, [2000], s. 5.

– *Punkt p jest punktem granicy zewnętrznej obszaru R wtedy i tylko wtedy, gdy każde otwarte otoczenie punktu p zawiera zarówno punkt, należący do R w stopniu 0, jak i punkt należący do R w stopniu większym niż 0.*

DEFINICJA GRANICY ZEWNĘTRZNEJ (DGZ): *B jest granicą obiektu x wtedy i tylko wtedy, gdy B jest zbiorem wszystkich punktów granicy zewnętrznej obszaru zajmowanego przez x.*

Jednak, zdaniem Markosiana, i takie rozumienie granicy nie ratuje argumentacji Sorensena, gdyż co prawda zdanie 4 wynika ze zdań 1–3, lecz tym razem, ostateczny i najważniejszy wniosek 5 nie wynika z lematu 4. To, że granica zewnętrzna jakiegoś obiektu przestaje istnieć nagle, nie musi oznaczać, że również nagle przestaje istnieć ten obiekt.

Podsumowując swoją analizę argumentacji Sorensena, Markosian stwierdził, że przyjmując definicję DGON granicy obiektu, zapewniamy prawdziwość przesłanki 1 oraz 3, jak również i to, że 5 wynika z 4. Jeśli natomiast granicę obiektu będziemy rozumieli zgodnie z definicją DGZ, to prawdziwe są wszystkie trzy przesłanki 1–3 oraz lemat 4[197].

Deklarując swoją sympatię dla tezy głoszącej ostrość obiektów materialnych, Markosian przyznał jednak, iż wciąż otwartą kwestią pozostaje dowód tej tezy.

Innym, również z założenia formalnym, argumentem przeciwko istnieniu nieostrych obiektów materialnych jest analiza identyczności przeprowadzona przez Garetha Evansa[198]. Przyjął on bowiem, że jeśli w świecie istnieją nieostre obiekty materialne, to niekiedy zdania stwierdzające identyczność obiektów również muszą być nieostre, czyli nieokreślona musi być ich wartość logiczna. Przyjmijmy więc, że identyczność $a = b$ jest nieokreślona pod względem wartości logicznej. Niech operator „∇„ wyraża nieokreśloność zdań. Wówczas prawdą jest, że $\nabla(a = b)$. Na zdanie to możemy spojrzeć jak na przypisujące obiektowi b własność '$x\nabla(x = a)$'. Zatem, $x\nabla(x = a)b$. Naturalnie, nie jest prawdą, że identyczność $a = a$ jest nieokreślona, mamy więc $\neg\nabla(a = a)$. Stąd, $\neg x\nabla(x = a)a$. Na mocy prawa Leibniza[199], otrzymujemy więc, że $\neg(a = b)$. Tym samym, Evans pokazał, że jeśli identyczność dwóch obiektów jest nieostra, to obiekty te są różne. Harry Deutsch dostrzega podobieństwo argumentacji Evansa

[197] Markosian, [2000], s. 8.

[198] Evans, [1978].

[199] Zgodnie z prawem Leibniza, jeśli a i b są identyczne, to są zamienialne we wszystkich możliwych kontekstach. Jeśli więc, istnieje jakiś kontekst, w którym a nie daje się zamienić na b (lub odwrotnie), to znaczy, że a i b nie są identyczne. Z niemożnością zamiany a na b mamy do czynienia wówczas, gdy zdanie, w którym dokonuje się zamiany a na b wraz ze zmianą a na b zmienia swoją wartość logiczną.

do argumentacji Churcha, znanej pod nazwą paradoksu Churcha[200]: *Założmy, że Pierre sądzi, że London i Londres są różnymi miastami, chociaż, jasnym jest, że wie, że London i London są tym samym miastem podobnie jak Londres i Londres. Stosując prawo Leibniza, stwierdzamy, więc że London i Londres faktycznie są różne. Skoro myślenie o obu je rozróżnia, to są różne*[201]. Problem tożsamości zmieniającego się obiektu, będący istotą paradoksu *łodzi Tezeusza*, jest omówiony w paragrafie 4.3, poświęconym paradoksom zmiany[202].

Trudno jest zrozumieć, dlaczego argumentacja Evansa miałaby przeczyć istnieniu nieostrych obiektów materialnych. Jeśli założymy, że Jan Kowalski jednego dnia ma n włosów na głowie, drugiego zaś, $n-1$, to jasnym jest, że istnieje kontekst ustalony np. przez zdanie mówiące o tym, że Jan Kowalski ma n włosów na głowie, który rozróżni Jana Kowalskiego z n włosami, od Jana Kowalskiego z $n-1$ włosami na głowie. Prawo Leibniza uzależnia identyczność dwóch obiektów od wszelkich możliwych kryteriów, a zatem, zgodnie z tym prawem identyczne może być jedynie a z a. Stąd, faktyczne zastosowanie tego prawa ogranicza się do matematyki i logiki formalnej. Jeśli więc stosujemy tak maksymalnie precyzyjne, bo matematyczne narzędzie w określaniu identyczności, to jasnym jest, że Jan Kowalski jednego dnia jest różny od Jana Kowalskiego z innego dnia i to nie tylko z powodu ilości włosów na głowie, lecz również z bardzo wielu innych powodów. Zatem, wniosek do jakiego dochodzi Evans jest jak najbardziej poprawny, a nawet oczywisty, przez co jest bezużyteczny[203]. Ponadto, jest to kolejny czysto spekulacyjny „dowód" wyraźnie empirycznego faktu.

Wymienione trzy sposoby postrzegania nieostrości, jako fenomenu językowego, epistemicznego lub obiektywnego, nie są jedynymi próbami wyjaśnienia źródła tego szczególnego, chociaż tak bardzo powszechnego, zjawiska. Ken Akiba jest autorem podejścia, które każe nieostrość rozumieć jako fenomen nie związany z językiem, lecz ze światem materialnym[204]. Nieostrość jest dla Akiby nieokreślonością. Jego zdaniem, świat ma więcej niż trzy wymiary. Oczywiście, czwartym wymiarem jest czas, generujący światy temporalne, na wzór światów możliwych. Każdy świat temporalny jest pewnym

---

[200] Deutsch, [SEPh], 2.6.

[201] Jak widać, cały problem paradoksu Churcha polega na tym, że kontekst ustalający brak zamienności nazw „London" i „Londres" jest ustalony przez zbiór przekonań konkretnego Pierre'a. Taki kontekst nie ma jednak charakteru obiektywnego. Prawo Leibniza pozostaje więc w mocy, gdyż przy pomocy tego właśnie kontekstu zostało ustalone nie to, że obiektywnie London nie jest tym samym miastem co Londres, lecz to, że na przykład, w świadomości ludzi London i Londres nie są tym samym miastem.

[202] Por. paragraf 4.3.

[203] Podobne stanowisko w kwestii argumentacji Evansa zajmuje Tye, patrz, Tye [1990], s. 556.

[204] Akiba, [manuskrypt].

czasowym plasterkiem świata. Piąty wymiar jest skutkiem istnienia metafizycznych światów możliwych, i dlatego Akiba nazywa go wymiarem *modalnym*. Jednak to, co jest dla nas najistotniejsze w jego propozycji wyraża się w wymiarze szóstym, zwanym przez niego wymiarem *precyzacji*. Wymiar ten ma wpływ na określanie lub nieokreślanie wyrażeń i jest tworzony przez tzw. *doprecyzowane światy*, w których wszystko jest precyzyjne. W żadnym z tych światów nie może być mowy o nieostrości. Każdy materialny obiekt jest *obiektem trans-światowym* i jako taki jest rozpięty nad światami temporalnymi i możliwymi (modalnymi), tak jak jest rozpięty nad trzema wymiarami przestrzeni. Dwa materialne obiekty mogą więc pokrywać się w jednym świecie i rozdzielać w innym. Pokrywanie się jakichś dwóch obiektów w pewnym świecie oznacza ich nieodróżnialność w tym świecie, czyli posiadanie w tym świecie przez jeden z tych obiektów wszystkich i tylko tych cech, które posiada drugi obiekt. Pokrywanie się obiektów może mieć wymiar modalny bez temporalnego i temporalny bez modalnego. Naturalnie, dotyczy to również wszystkich cech czasoprzestrzennych. Akiba wprowadza termin ścisłej identyczności, na określenie takich obiektów, które są nieodróżnialne we wszystkich światach. Jednak przyczyną nieostrości obiektu materialnego jest fakt jego rozpięcia nad wymiarem precyzacji. Mimo, iż każdy świat wymiaru precyzacji jest perfekcyjnie precyzyjny, obiekt materialny będący wypadkową swoich rzutów na te światy może być nieprecyzyjny. Chociaż każdy obraz rzutowania obiektu materialnego na dany precyzyjny świat wymiaru precyzacji jest precyzyjny, to sam obiekt może być nieprecyzyjny, czyli nieokreślony, a więc nieostry. Jako przykład Akiba podaje łysość Bruce'a Willisa. Bruce Willis jest przypadkiem granicznym słowa „łysy" w tym sensie, że w pewnych światach wymiaru precyzacji ma on własność bycia łysym, podczas gdy w innych, równie precyzyjnych światach tego samego wymiaru, ma on własność bycia niełysym. w takim więc sensie, podejście Akiby różni się od wszystkich wcześniej przedstawionych propozycji wyjaśnienia źródeł nieostrości: nieostrość nie jest ani fenomenem językowym, ani epistemicznym, lecz wynika z natury rzeczy, jednak w nieco innym znaczeniu, niż ma to miejsce w koncepcji nieostrości obiektywnej.

4.1.4. PROPOZYCJE ZASTĘPUJĄCE NIEOSTROŚĆ OSTROŚCIĄ

Już samo zjawisko nieostrości, a tym bardziej niezliczona ilość wywołanych przez nie problemów wymaga wyjaśnienia, które powinno przybrać postać spójnej teorii. Wartość tej teorii powinna się wyrażać w naturalności, albo unikania, albo rozwiązywania wszelkich problemów generowanych przez nieostrość. Nic więc dziwnego, że paradoks stosu uchodzi za absolutnie najlepszy test jakiemu można poddać daną teorię nieostrości. Niestety, najczęściej tak zwane rozwiązania paradoksu stosu wynikają z prostego faktu, iż przyjmuje się założenie, że nieostrość jest zastępowalna przez ostrość. Jasne jest, że jeśli dziecko przerażone jakimś obserwowanym przez siebie zjawiskiem zasłoni oczy rękami, to zjawisko to nie wydaje się już tak bardzo przerażające. Nie sposób jednak zgodzić się z tym, że zasłaniając oczy, dziecko rozwiązuje swój problem. Podobnie, przyjmując, że nieostrość nie istnieje wcale nie rozwiązuje się problemów nieostrości. Takie „dziecinne" podejścia do nieostrości są tematem niniejszego paragrafu.

Szerokie spektrum podejść do nieostrości oraz wiążąca się z tym dość duża liczba proponowanych rozwiązań paradoksu stosu stawia nas przed innym problemem, a mianowicie, klasyfikacją porządkującą wszystkie te propozycje. Naturalnie, możliwe jest proste wymienienie tych podejść, w jakiejś przyjętej arbitralnie kolejności. Taka właśnie praktyka znajduje zazwyczaj zastosowanie w większości książkowych prezentacji poświęconych nieostrości. Możliwe jest jednak przyjęcie pewnego sposobu uporządkowania istniejących propozycji według pewnego, metodologicznie uzasadnionego klucza. Okazuje się bowiem, że każde, tak zwane, rozwiązanie paradoksu stosu, idące zazwyczaj w parze z jakąś propozycją spojrzenia na nieostrość, albo łączy się z bardziej lub mniej jawnym poglądem zakładającym nieistnienie nieostrości (także tej językowej), albo podchodzi do tego fenomenu, jako do faktycznie istniejącego zjawiska. Faktem jest, iż bardzo trudno zaprzeczyć istnieniu, przynajmniej tej językowej, nieostrości. Jeśli więc staniemy na stanowisku, że jakaś postać nieostrości istnieje, to pierwsza grupa podejść wyda się z metodologicznego punktu widzenia podejrzaną. Jak bowiem można w ogóle rozwiązywać jakiś problem przyjmując, że go nie ma?[205] Najczęściej, stanowisko godzące w istnienie nieostrości jest realizowane przez proste zastąpienie nieostrości ostrością. Zastąpienie to, chociaż zawsze proste, ma niekiedy ukrytą, niejawną postać. Zdarza się wręcz, że ktoś reprezentujący takie podejście głosi poglądy uznające realność zjawiska nieostrości, jednak przyjęta przez niego technika unicestwia, nie tyle problemy nieostrości, ile samą nieostrość. Żadna propozycja mieszcząca się w tej grupie nie może więc dostarczyć, ani rozwiązania paradoksu stosu, ani interesującej analizy samego zjawiska nieostrości. Najprawdopodobniej, jedynym uzasadnieniem dla propozycji należących do tej grupy jest to, iż przedstawiają one jakiś konkretny sposób doraźnego uporania się z problemami wynikającymi z nieostrości, bez nadziei na gruntowne uzdrowienie sytuacji. Nic więc dziwnego, że znacznie bardziej interesująco przedstawiają się te propozycje, które nie odmawiają nieostrości istnienia.

Wszystkie, najbardziej znaczące podejścia wychodzące od założenia, iż nieostrość nie istnieje są omówione w tym rozdziale. Okazuje się, iż bardzo

---

[205] Pewien wyjątek stanowi tu epistemicyzm, w którym jawnie zakłada się nieistnienie nieostrości i z tego założenia czyni się podstawę całej teorii.

trafną klasyfikację wszystkich tych propozycji przedstawił, wspomniany już wcześniej, Marian Przełęcki w ważnym dla badań nad nieostrością artykule z 1964 roku *Z semantyki pojęć otwartych*[206]. Znalazł on bowiem wspólną dla nich formułę, charakteryzującą się wykorzystaniem modeli dla logiki klasycznej. To właśnie operowanie klasą modeli sprawia, że podejścia te, niejako z definicji, choć w niektórych przypadkach bez przyznawania się do tego, zakładają proste zastąpienie nieostrości wyraźnością.

Swoje pierwsze uwagi w kwestii nieostrości Przełęcki zawarł w pracy *W sprawie terminów nieostrych* z 1958 roku[207]. Przedstawione tam poglądy Przełęcki porzucił, na rzecz postawy człowieka niezajmującego konkretnego stanowiska w sprawie nieostrości, a mimo to, wprowadzającego pewien ład w rozważania kwestii terminów nieostrych. Swoje uwagi zawarł we wcześniej wspomnianej pracy, w której sklasyfikował możliwe podejścia do nieostrości. W swoich badaniach, Przełęcki wyraźnie nawiązuje do sposobu w jaki Frege, a później również Mehlberg postrzegali nieostrość. Co więcej, pewna część propozycji Przełęckiego jest istotnym rozwinięciem idei Mehlberga, tak zwanych zdań niezdeterminowanych[208].

W swej pierwszej pracy *W sprawie terminów nieostrych*, z 1958 roku, Przełęcki odrzuca, zarówno to stanowisko, które przyjmuje istnienie przedmiotów, nie będących, ani *A*, ani *nie-A*, jak i pogląd przyznający co prawda, że każdy przedmiot jest, albo *A*, albo *nie-A*, lecz uważa, że rozstrzygnięcie tego czy dany przedmiot jest *A*, czy *nie-A* nie zawsze jest możliwe. Przełęcki przeciwstawił się odrzuceniu ontologicznego prawa wyłączonego środka, jako sposobu rozwiązania kwestii nieostrości. Przyjął więc, że założenie, iż nie jest prawdą, że każdy przedmiot posiada daną cechę lub jej nie posiada, nie może stanowić rozwiązania problemów nieostrości. Jednocześnie, odrzucił takie rozwiązanie, które bazuje na założeniu, iż istnieją w języku nauki twierdzenia zasadniczo nierozstrzygalne. Wreszcie, odrzucił również i ten pogląd, który każe widzieć w problematycznych zdaniach *nonsensy*, czyli zdania pozbawione znaczenia. Jak sam pisze, dzięki przyjęciu takiego stanowiska[209]: „Odpadają tym samym na gruncie tego poglądu kłopoty z ograniczeniem powszechnego waloru praw logicznych, czy z istnieniem zasadniczo nierozstrzygalnych problemów." Zdaniem Przełęckiego, problem nieostrości wiąże się z takim wprowadzaniem terminów do języka naturalnego, który na gruncie języka nauki jest znany jako tak zwane *definiowanie cząstkowe*, zwane też *definiowaniem warunkowym*[210]. Rezygnując w późniejszej publikacji

---

[206] Przełęcki, [1964].
[207] Przełęcki, [1958].
[208] Mehlberg, [1958], s. 256–260, 330–338.
[209] Przełęcki, [1958], s. 79.
[210] Twórcą teorii definicji cząstkowych jest Rudolf Carnap, który zarys tej teorii przedstawił w *Testability and Meaning*; Carnap, [1936], Przełęcki, [1958], s. 80.

z zajmowanego przez siebie, wyraźnego, jednoznacznego stanowiska w sprawie terminów nieostrych, Przełęcki pozostał wierny postrzeganiu tych terminów, jako zdefiniowanych częściowo.

W swej najogólniejszej postaci, *definicja cząstkowa* (*częściowa*), zwana również *warunkową*, terminu Q jest parą zdań:

$$\forall x\,(K_1(x) \rightarrow Q(x))$$
$$\forall x\,(K_2(x) \rightarrow \neg Q(x)),$$

gdzie nie jest prawdą, że $\exists x\,(K_1(x) \wedge K_2(x))$[211]. Predykaty K_1 i K_2 ustanawiają kryterium stosowalności terminu Q do obiektów z danej dziedziny D następująco: jeśli obiekt a dziedziny D spełnia K_1, znaczy to, że do tego obiektu stosuje się termin Q (czyli, jeśli prawdą jest $K_1(a)$, to prawdą jest $Q(a)$), jeśli zaś obiekt a spełnia K_2, znaczy to, że do a nie stosuje się Q (czyli, jeśli prawdą jest $K_2(a)$, to nieprawdą jest $Q(a)$). Cząstkowość podanej definicji polega na tym, iż nie jest założona równość $K_1 = \neg K_2$[212], czyli nie jest stwierdzone, że oba kryteria wyczerpują wszystkie możliwe przypadki, w jakich może się znaleźć dowolny obiekt z dziedziny. Jeśli bowiem jest możliwe, aby jakiś obiekt nie był, ani K_1, ani K_2, znaczy to, że rozważany obiekt, ani nie jest Q, ani nie jest *nie-Q*[213]. Ta swoista nieokreśloność, czy też niepełność zdefiniowania warunkowego leży u podstaw zakwalifikowania terminów wprowadzonych do języka definicjami warunkowymi do klasy terminów *otwartych*, czyli nazw nieostrych i terminów teoretycznych[214]. Wprost z definicji cząstkowej wynika więc istnienie przypadków granicznych, czyli niepustość zbioru:

$$D - (\{x{:}\ Q(x)\} \cup \{x{:}\ \neg Q(x)\}).$$

Pewnym problemem, tego podejścia do nieostrości może być fakt, iż kryteria K_1 i K_2 mogą być ustanowione w ten sposób, a właściwie powinny być tak ustanowione, aby półcień był wyznaczony wyraźnie, co chociaż nie stoi w sprzeczności ze zjawiskiem nieostrości, to jednak może wywoływać pewne

---

[211] To dodatkowe założenie wyklucza możliwość istnienia takiego obiektu c, dla którego prawdą byłaby koniunkcja: $Q(a) \wedge \neg Q(a)$.

[212] Założenie, że $K_1 = \neg K_2$, oznacza, że definicja dana dwoma podanymi warunkami staje się definicją zupełną daną w jednej, z dwóch równoważnych postaci: albo $\forall x\,(K_1(x) \leftrightarrow Q(x))$, albo $\forall x\,(K_2(x) \leftrightarrow \neg Q(x))$. Przełęcki słusznie zauważa, że sam kształt definicji nie świadczy o tym, że definiuje ona termin nieostry. Termin nieostry może być zdefiniowany również przy pomocy definicji zupełnej, wystarczy bowiem, aby występujący w niej predykat K_1 (czyli również K_2) był nieostry, Przełęcki, [1958], s. 82.

[213] Przełęcki, [1958], s. 80.

[214] Przełęcki, [1964], s. 87, 110.

wątpliwości w wielu naturalnych przypadkach związanych z typową nieostrością. Jeśli bowiem chcemy zdefiniować termin „młodzieniec", to możemy ustalić następujące kryteria stosowalności dla tego terminu[215]:

$\forall x$ (x ma mniej niż 18 lat $\rightarrow$ x jest młodzieńcem)
$\forall x$ (x ma więcej niż 30 lat $\rightarrow$ x nie jest młodzieńcem).

Wówczas, istnieją wyraźne granice dla przypadków tworzących półcień słowa „młodzieniec". Przełęcki przyznaje ponadto, że można przyjąć inne granice wiekowe, gdyż te podane w definicji wcale nie muszą być trafnie dobrane. Jednak najważniejsze dla niego jest to, że takie podejście do nieostrości tłumaczy przyczynę zaistnienia przypadków granicznych[216]. Podejście to jest jak najbardziej uzasadnione, gdyż jak to zostało już wcześniej ustalone, do zaistnienia nieostrości wystarczy samo zaistnienie warunków granicznych[217].

Takie rozumienie terminów nieostrych powoduje potrzebę ostrożniejszego operowania tymi terminami. O sensowności wyrażenia $Q(a)$ decyduje bowiem to, czy przedmiot a jest czy może nie jest K_1 lub K_2. Istnieje więc potrzeba odwołania się do doświadczenia, bo tylko ono może rozstrzygnąć, czy a jest K_1, czy może K_2, czy też może nie jest, ani jednym, ani drugim[218]. Okazuje się więc, że prawu wyłączonego środka nie podlegają tylko te zdania, które są pozbawione znaczenia. Dzięki temu, propozycja Przełęckiego umożliwia uniknięcie założenia o istnieniu zasadniczo nierozstrzygalnych twierdzeń[219]: „Wyrażenie orzekające termin nieostry o przedmiocie z tzw. zakresu nieostrości jest rezultatem nieuprawnionego użycia tego terminu poza dziedziną jego stosowalności i jako takie pozbawione jest sensu. Zanika zatem niepokojąca możliwość formułowania przy pomocy terminów nieostrych zdań, które mają określone znaczenie, a których mimo to nigdy nie potrafimy rozstrzygnąć".

Przedstawiony pogląd Przełęckiego na nieostrość jest sformalizowanym odpowiednikiem tego podejścia do nieostrości, które nazywane jest

---

[215] Przełęcki, [1958], s. 81.

[216] Przełęcki zwraca uwagę na to, iż definicja cząstkowa terminu nieostrego może mieć postać definicji deiktycznej, a więc definicji przez wskazanie: *ten oto kolor jest czerwony, a tamten nie jest*; Przełęcki, [1958], s. 81.

[217] Sam Przełęcki wyraża wątpliwość, czy faktycznie można utożsamić warunkowe zdefiniowanie danego terminu z jego nieostrością, nie podając jednak innego rozwiązania, Przełęcki, [1964], s. 110.

[218] Przełęcki zwraca uwagę, że konieczność odwołania się do faktów empirycznych, w celu stwierdzenia sensowności danego wyrażenia, nie zachodzi jedynie w przypadku terminów nieostrych. Podobną sytuację mamy na przykład wówczas, gdy stosujemy wyrażenia okazjonalne, czy też te częściowo definiowalne wyrażenia, które nie są nieostre, Przełęcki, [1958], s. 82.

[219] Przełęcki, [1958], s. 83.

„pragmatycznym". Przełęcki deklaruje jednak swoją sympatię do innego podejścia, o którym mowa będzie w dalszej części tego paragrafu. Również później, omówione zostanie podejście pragmatyczne.

Przedstawiona wyżej, prosta analiza nieostrości jest dla Przełęckiego dość wygodnym i, z pewnego punktu widzenia, precyzyjnym punktem wyjścia dla sklasyfikowania znanych propozycji rozwiązania paradoksu stosu. W porządkowaniu istniejących podejść do nieostrości, Przełęcki odwołuje się do podstawowych pojęć teorio-modelowych i ogranicza się do operowania językiem sformalizowanym, a właściwiej wpół sformalizowanym[220], zawierającym węższy rachunek predykatów z identycznością. Wzorem takiego języka jest struktura J, zawierająca: zmienne indywiduowe $x, y, ...$; nazwy indywiduowe $a_1, a_2, ..., a_n$; predykaty o dowolnej liczbie argumentów $P_1, P_2, ..., P_m$; oraz stałe logiczne $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv, \forall, \exists, =$. Modelem języka J jest każda dziedzina, o której można mówić w języku J. Model $\mathcal{M}$ jest parą $\langle U, C\rangle$, w której U jest niepustym zbiorem, zwanym uniwersum modelu $\mathcal{M}$, zaś C jest tzw. charakterystyką modelu $\mathcal{M}$. Uniwersum jest zakresem zmienności zmiennych języka J. Charakterystyka obejmuje niektóre wybrane elementy zbioru U, oraz niektóre wyróżnione podzbiory zbioru U, lub relacje zachodzące między elementami U. Każdy z członów charakterystyki C stanowi denotację pewnego prostego wyrażenia pozalogicznego języka J, oraz każde takie wyrażenie denotuje pewien człon charakterystyki C[221]. Charakterystykę stanowi więc ciąg: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, ..., \boldsymbol{P}_n$; w którym $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ są przedmiotami będącymi denotacjami, odpowiednio, nazw $a_1, a_2, ..., a_n$; zaś $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, ..., \boldsymbol{P}_n$ są denotacjami, odpowiednio, predykatów $P_1, P_2, ..., P_n$. Zatem, dla przykładu, zdanie $P_k a_s$ jest prawdziwe w modelu $\mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{a}_s \in \boldsymbol{P}_k$.

Załóżmy teraz, że język J zostaje wzbogacony o nowy, jednoargumentowy predykat Q wprowadzony za pomocą definicji cząstkowej $D(Q)$:

$$\forall x\, (\Psi x \rightarrow (Qx \equiv \Phi x)),$$

gdzie predykaty Ψ i Φ są wyrażeniami języka J. Powstały w ten sposób język oznaczmy J', a jego model $\mathcal{M}'$. Naturalnie, charakterystyka C' nowego modelu jest charakterystyką C poszerzoną o denotację nowego predykatu Q.

Niech $Z(Q)$ będzie dowolnym zdaniem języka J', zawierającym termin Q. Jeśli zdanie $\forall x \Psi x$ jest tautologią, to definicja $D(Q)$ nie jest cząstkową, lecz zupełną, a więc Q jest terminem eliminowalnym z każdego zdania $Z(Q)$ w tym sensie, że każde zdanie $Z(Q)$ jest na gruncie definicji $D(Q)$ równoważne jakiemuś

[220] Przełęcki, [1964], s. 88.
[221] Przełęcki, [1964], s. 88.

zdaniu Z, nie zawierającemu terminu Q. Zatem, zdanie $D(Q) \rightarrow (Z(Q) \equiv Z)$ jest tautologią. Przełęcki określa więc warunek wyrażający wspomnianą eliminowalność terminu Q następująco[222]:

(EL) *Q jest eliminowalne z $Z(Q)$ na podstawie definicji $D(Q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zdanie Z nie zawierające Q, takie iż zdanie $D(Q) \rightarrow (Z(Q) \equiv Z)$ jest prawdziwe w każdym modelu $\mathcal{M}'$.*

Przyjmijmy jednak, że $D(Q)$ jest jedynie definicją cząstkową, a więc nie jest definicją przekładalną w podanym wyżej sensie[223]. Wówczas, należy przyjąć, że chociaż w ogólności termin Q nie jest eliminowalny z każdego zdania $Z(Q)$, to jednak istnieją w J' zdania spełniające warunek (EL). Zdaniami tymi są, na przykład, wszystkie te, w których termin Q występuje w sposób nieistotny, w tym sensie, że zdania te są równoważne zdaniom nie zawierającym Q: $Qa_1 \vee \sim Qa_1$, $Qa_1 \wedge \sim Qa_1$, $P_1a_1 \wedge (\sim P_1a_1 \rightarrow Qa_1)$[224]. Przełęcki podaje również przykłady takich zdań, w których termin Q występuje w sposób istotny, a mimo to, zdania te są na gruncie definicji $D(Q)$ logicznie równoważne zdaniom nie zawierającym Q: $\Psi a_1 \wedge Qa_1$, $\Psi a_1 \rightarrow Qa_1$, $\Psi a_1 \rightarrow \sim Qa_1$, $\forall x(\Psi x \rightarrow Qx)$, $\exists x(\Psi x \wedge Qx)$, $\sim\exists x(\Psi x \wedge Qx)$[225]. Warunku (EL) nie spełniają natomiast zdania: Qa_1, $\Psi a_1 \vee Qa_1$, $\Psi a_1 \equiv Qa_1$, $\sim\Psi a_1 \wedge Qa_1$, $\sim\Psi a_1 \rightarrow Qa_1$, $\forall xQx$, $\exists xQx$, $\forall x(Qx \rightarrow \Psi x)$[226].

Warunek *eliminowalności* (EL) nie jest jedynym kryterium, jakie można sformułować w celu uzyskania pożądanego podziału zdań języka J'. Przełęcki formułuje warunek *określoności*, w którym jest uwzględniony fakt, iż nawet przy ustalonej interpretacji języka J, definicja $D(Q)$ dopuszcza różne interpretacje terminu Q[227]:

(OL) *$Z(Q)$ ma określoną wartość logiczną ze względu na Q na podstawie definicji $D(Q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych modeli $\mathcal{M}_1'$* i *$\mathcal{M}_2'$ różniących się co najwyżej denotacją terminu Q zachodzi zależność następująca: jeżeli $D(Q)$ jest prawdziwe w $\mathcal{M}_1'$ oraz $D(Q)$ jest prawdziwe w $\mathcal{M}_2'$, to $Z(Q)$ jest prawdziwe w $\mathcal{M}_1'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Z(Q)$ jest prawdziwe w $\mathcal{M}_2'$.*

Jeśli więc zdanie $Z(Q)$ jest prawdziwe (fałszywe) w pewnym modelu $\mathcal{M}'$ języka J', to zdanie to jest prawdziwe (fałszywe) w każdym modelu języka J', który różni się

---

[222] Konsekwentnie, $\mathcal{M}'$ jest rozumiany jako model języka J'.
[223] Tym samym, zakładamy, że $D(Q)$ nie jest równoważna żadnej zupełnej definicji.
[224] Ostatnie z przykładowych zdań jest bowiem równoważne zdaniu P_1a_1.
[225] Przełęcki, [1964], s. 90.
[226] Przełęcki, [1964], s. 91.
[227] Przełęcki, [1964], s. 92.

od $\mathcal{M}'$ jedynie denotacją terminu Q, pod tym wszakże warunkiem, że w obu tych modelach denotacje terminu Q spełniają warunek wyrażony przez definicję $D(Q)$. Okazuje się, że warunki (EL) oraz (OL) są równoważne: (OL) jest spełnione przez te i tylko te zdania, z których Q jest eliminowalne w sensie (EL)[228].

Warunki (EL) oraz (OL), Przełęcki określa mianem absolutnych, pragnąc podkreślić niezależność definiowanych w nich pojęć „eliminowalności" i „określoności" od tego jakie zdania są przez nas akceptowane. Przyjęcie założenia prawdziwości pewnych zdań może mieć wpływ na rozumienie zarówno eliminowalności, jak i określoności. Eliminowalność w „relatywnej" i zarazem ogólniejszej postaci Przełęcki definiuje następująco:[229]

(ET) *Q jest eliminowalne z $Z(Q)$ na podstawie definicji $D(Q)$ w teorii T wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zdanie Z nie zawierające Q, takie iż zdanie $D(Q) \rightarrow (Z(Q) \equiv Z)$ jest prawdziwe w każdym modelu $\mathcal{M}'$, w którym prawdziwa jest teoria T.*

Analogicznie „relatywna" postać definicji określoności wyraża się kolejnym warunkiem[230]:

(OT) *$Z(Q)$ ma określoną wartość logiczną ze względu na Q na podstawie definicji $D(Q)$ w teorii T wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych modeli $\mathcal{M}_1'$ i $\mathcal{M}_2'$ które różnią się co najwyżej denotacją terminu Q i w których prawdziwa jest teoria T, zachodzi zależność następująca: jeżeli $D(Q)$ jest prawdziwe w $\mathcal{M}_1'$ oraz $D(Q)$ jest prawdziwe w $\mathcal{M}_2'$, to $Z(Q)$ jest prawdziwe w $\mathcal{M}_1'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Z(Q)$ jest prawdziwe w $\mathcal{M}_2'$.*

Podobnie do poprzedniej pary warunków, również (ET) i (OT) są wzajemnie równoważne.

Przełęcki zauważa jednak, że dla rozważań ustalających klasyfikację podejść do nieostrości okazują się być ważniejszymi kolejne dwie definicje, w których eliminowalność i określoność zdań również są zrelatywizowane, lecz tym razem do modelu $\mathcal{M}$ języka J. Tym co odróżnia oba poniższe warunki od poprzednich, jest fakt związania definiowanych przez nie pojęć z doświadczeniem[231].

---

[228] Dowód tego faktu w Przełęcki, [1964], s. 92. Ponadto, warunek (EL) jest równoważny pozornie silniejszemu warunkowi (EL*): *Dla dowolnego modelu $\mathcal{M}'$ jeżeli $D(Q)$ jest prawdziwe w $\mathcal{M}'$ to $Z(Q)$ jest prawdziwe w $\mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Z(\Phi)$ jest prawdziwe w $\mathcal{M}'$ lub krócej, '$D(Q) \rightarrow (Z(Q) \equiv Z(\Phi))$ jest prawdziwe w każdym modelu $\mathcal{M}'$*, Przełęcki, [1964], s. 93.

[229] Przełęcki, [1964], s. 93.

[230] Przełęcki, [1964], s. 94.

[231] Przełęcki, [1964], s. 94: Ograniczając się do opisanych języków J i J', model $\mathcal{M}'$ języka J' nazywać możemy wzbogaceniem modelu $\mathcal{M}$ języka J, jeśli universa i denotacje terminów wspólnych dla obu języków J i J' są w obu modelach $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ identyczne. I tak, jeśli $\mathcal{M} = \langle U, x_1,$

(EM) *Q jest eliminowalne z Z(Q) na podstawie definicji D(Q) w modelu* $\mathcal{M}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zdanie Z niezawierające Q, takie iż zdanie* $D(Q) \rightarrow (Z(Q) \equiv Z)$ *jest prawdziwe w każdym modelu* $\mathcal{M}'$, *stanowiącym wzbogacenie modelu* $\mathcal{M}$.

Równoważny warunkowi (EM) jest następujący[232]:

(OM) *Z(Q) ma określoną wartość logiczną ze względu na Q na podstawie definicji D(Q) w modelu* $\mathcal{M}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych modeli* $\mathcal{M}_1'$ i $\mathcal{M}_2'$, stanowiących wzbogacenia modelu $\mathcal{M}$ *zachodzi zależność następująca: jeżeli D(Q) jest prawdziwe w* $\mathcal{M}_1'$ *oraz D(Q) jest prawdziwe w* $\mathcal{M}_2'$, *to Z(Q) jest prawdziwe w* $\mathcal{M}_1'$ *wtedy i tylko wtedy, gdy Z(Q) jest prawdziwe w* $\mathcal{M}_2'$.

Ostatni z warunków pokrywa się ściśle z definicją zdania *zdeterminowanego* podaną przez Mehlberga[233]. Jako przykład zdania niezdeterminowanego Mehlberga podaje zdanie typu Qa_1, gdy nieprawdą jest, że $\boldsymbol{a}_1 \in \boldsymbol{\Psi}$[234]. Wówczas, wartość logiczna zdania *Z*(*Q*) zależy od tego, w jaki sposób zinterpretujemy termin *Q*: przy jednej interpretacji *Z*(*Q*) będzie zdaniem prawdziwym, przy innej zaś, fałszywym. To właśnie w takiej sytuacji, powiemy, że zdanie *Z*(*Q*) jest niezdeterminowane w rozumieniu Mehlberga. Zdania zmieniające swoją wartość logiczną wraz ze zmianą interpretacji terminu *Q*, a więc zdania niezdeterminowane są tymi i tylko tymi zdaniami, które spełniają warunek (OM)[235].

Sprawdzenie, że zdanie *Z*(*Q*) spełnia warunek (EL) sprowadza się do rozstrzygnięcia, czy zdanie $D(Q) \rightarrow (Z(Q) \equiv Z(\Phi))$[236] wynika z pustego zbioru zdań. Analogicznie, *Z*(*Q*) spełnia warunek (ET), jeśli zdanie $D(Q) \rightarrow (Z(Q) \equiv Z(\Phi))$ wynika ze zdań zbioru *T*. Jak widać, w obu przypadkach, zdanie stwierdzające, że *Z*(*Q*) spełnia odpowiedni warunek ma charakter analityczny, a więc nie wymaga odwołania się do doświadczenia. Element weryfikacji przez doświadczenie zawiera sprawdzenie, czy zdanie *Z*(*Q*) spełnia warunek (EM): należy bowiem rozstrzygnąć, czy zdanie $D(Q) \rightarrow (Z(Q) \equiv Z(\Phi))$ jest prawdziwe przy dowolnej interpretacji terminu *Q* i przy tej interpretacji pozostałych terminów, które stanowią model $\mathcal{M}$. Rozpoznanie zaś tego faktu może zależeć właśnie od doświadczenia, a więc stwierdzenie, że *Z*(*Q*) spełnia warunek (EM)

$x_2, ..., x_n, X_1, X_2, ..., X_m\rangle$ stanowi model języka *J*, model $\mathcal{M}' = \langle U, x_1, x_2, ..., x_n, X_1, X_2, ..., X_m, Y\rangle$ języka *J'* jest wzbogaceniem modelu $\mathcal{M}$.

[232] Przełęcki, [1964], s. 95.

[233] Przełęcki, [1964], s. 93, 95. Patrz także Mehlberg, [1958], s. 256–260, 330–338.

[234] Przełęcki, [1964], s. 95. Zgodnie z notacją przyjętą w tym paragrafie, a która jest zgodna z notacją Przełęckiego z [1964], $\boldsymbol{a}_1$ i $\boldsymbol{\Psi}$ są denotacjami odpowiednio: a_1 i Ψ.

[235] Przełęcki, [1964], s. 95.

[236] Korzystamy tu z warunku (EL*), równoważnego warunkowi (EL) – patrz przypis 203.

może mieć charakter syntetyczny. W podobny sposób, warunek (OM) odróżnia się od każdego z dwóch warunków: (OL) i (OT).

Spełnienie bądź niespełnienie przez zdanie typu *Z*(*Q*) warunków eliminowalności czy określoności, wpływa na określenie warunków rozstrzygalności tych zdań. Rozstrzygnięcie zdania *Z*(*Q*) polega na okazaniu, czy zdanie to jest prawdą, czy fałszem. Jeśli wartość logiczna zdania *Z*(*Q*) zależy od interpretacji terminu *Q*, to konieczne jest przyjęcie dodatkowych założeń. Zatem, rozstrzygalne mogą być tylko te zdania, które spełniają warunek eliminowalności, a tym samym, określoności. Spodziewana zależność odwrotna jest następująca: jeśli zdania języka *J* są rozstrzygalne, to rozstrzygalność zdania *Z*(*Q*) implikuje jego eliminowalność, a więc i określoność[237]. Oznacza to, że z każdym rodzajem eliminowalności, a więc i określoności, wiąże się odpowiedniego typu rozstrzygalność: *L*-rozstrzygalność, *T*-rozstrzygalność, *M*-rozstrzygalność. Przełęcki zauważa, że właściwie, rozstrzygalność zdania *Z*(*Q*) oznacza sprowadzalność tego zdania do zdań rozstrzygalnych. Rodzaj rozstrzygalności zdania świadczy więc o tym, na jakiej podstawie sprowadzamy to zdanie do pewnego zdania rozstrzygalnego: czy na podstawie samej definicji *D*(*Q*) (*L*-rozstrzygalność), czy na podstawie definicji *D*(*Q*) w teorii *T* (*T*-rozstrzygalność), czy może na podstawie definicji *D*(*Q*) w modelu $\mathcal{M}$ (*M*-rozstrzygalność). Zdanie *Z*(*Q*) jest więc *M*-rozstrzygalne, gdy jest równoważne pewnemu zdaniu rozstrzygalnemu przy dowolnej, zgodnej z definicją *D*(*Q*), interpretacji terminu *Q* i przy tej interpretacji terminów pozostałych, którą wyznacza model $\mathcal{M}$. Zdania *M*-nierozstrzygalne są właśnie zdaniami niezdeterminowanymi w sensie podanym przez Mehlberga, którego podejście nie jest jednak tak formalne, jak analiza Przełęckiego[238].

W swych dalszych rozważaniach Przełęcki koncentruje się na klasie tych zdań, które zawierają warunkowo zdefiniowany termin *Q*, a ponadto, klasa ta jest równoważna z klasą tych wszystkich zdań języka *J'* zawierających termin *Q*, które nie spełniają warunku (OM). Kryterium klasyfikacji możliwych podejść do nieostrości jest ustalone przez sposób stwierdzania prawdziwości tych zdań, które nie spełniają warunku (OM). Prawdziwość nie ma charakteru absolutnego, lecz jest zrelatywizowana do modelu, a właściwie do klasy modeli. Punktem wyjścia do określenia tej klasy jest tak zwany model *właściwy* M^* języka *J*, czyli pewien, jeden, konkretny model wybrany z klasy wszystkich modeli języka *J*. Prawdziwość absolutna jest wówczas rozumiana

---

[237] Przełęcki, [1964], s. 96.

[238] Przełęcki podaje także dwa następujące przykłady zdań: 1.$\Psi a_1 \wedge Qa_1$ jest zdaniem typu *Z*(*Q*), rozstrzygalnym w każdym z trzech znaczeń; 2. zdanie Qa_1, nie będąc *L*–rozstrzygalnym, jest *T*-rozstrzygalne, gdy zdanie Ψa_1 jest twierdzenie teorii *T*, a *M*-rozstrzygalne, gdy zdanie Ψa_1 jest prawdziwe w modelu $\mathcal{M}$, Przełęcki, [1964], s. 96.

jako prawdziwość w modelu właściwym. Język J' jest wzbogaceniem języka J o nowe terminy, które są wprowadzone definicjami warunkowymi. Interesująca nas klasa RM' modeli $M^{*}{}'$ języka J' składa się z wszystkich tych modeli języka J', które są wzbogaceniami modelu M^{*} i w których definicja $D(Q)$ jest prawdziwa[239].

Klasyfikacja Przełęckiego możliwych określeń prawdziwości i fałszywości zdań języka J', dla którego dana jest jedynie klasa modeli *RM'* uwzględnia pięć stanowisk[240] i jest to główny cel artykułu. Sam autor odcina się bowiem od ewentualnego kojarzenia jego osoby z którymś ze stanowisk, nie zajmując w tej kwestii ostatecznego poglądu. Dostrzega on bowiem wady i zalety w każdym z podanych przez niego podejść, chociaż najbliższym wydaje mu się ostatnie z przedstawionych stanowisk[241].

Chcąc uwzględnić pewne poglądy, które nie zostały objęte uporządkowaniem Przełęckiego, jego klasyfikację poszerzyliśmy o pogląd wyrażony w stanowisku, u nas, oznaczonym jako drugie[242]:

STANOWISKO I

Z jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest prawdziwe w każdym modelu M' należącym do rodziny RM'. Z jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest fałszywe w każdym modelu M' należącym do rodziny RM'.

STANOWISKO II

Z jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest prawdziwe w pewnym modelu M' należącym do rodziny RM'. Z jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest fałszywe w pewnym modelu M' należącym do rodziny RM'.

---

[239] Przełęcki, [1964], s. 99. Załóżmy, że termin Q jest wprowadzony przez definicję $D(Q) = \forall x((P_1x \rightarrow Qx) \wedge (P_2x \rightarrow {\sim}Qx))$ taką, że denotacje $\boldsymbol{P}_1$ i $\boldsymbol{P}_2$, odpowiednio, predykatów P_1 i P_2, są zbiorami rozłącznymi, których suma nie wyczerpuje uniwersum U. Wówczas, rodzina $\mathcal{RM}'$ modeli języka J' składa się z wszystkich tych i tylko tych modeli $\langle U, \boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{P}_1, ..., \boldsymbol{P}_m, Y\rangle$, w których $\boldsymbol{P}_1 \subset Y \subset -\boldsymbol{P}_2$, gdzie $-\boldsymbol{P}_2$ jest dopełnieniem zbioru $\boldsymbol{P}_2$ do uniwersum U, czyli $-\boldsymbol{P}_2 = U - \boldsymbol{P}_2$, Przełęcki, [1964], s. 99.

[240] Przełęcki, [1964], s. 101–105.

[241] Przełęcki, [1964], s. 111–113. Na sam koniec artykułu Przełęcki wyznaje: „Stanowisko, do którego gotów byłbym zgłosić swój akces, reprezentuje typowe rozwiązanie 'realistyczne'. Twierdzenia zawierające nieeliminowalne terminy teoretyczne uznane są tu za zdania w pełni sensowne, posiadające – pojmowaną klasycznie – wartość logiczną. Niejednoznaczność ich interpretacji pociąga jedynie ich nierozstrzygalność. Co więcej, występujące w nich terminy teoretyczne denotują – w sensie tradycyjnym – pewne przedmioty, a tylko jednoznaczne określenie tych ostatnich pozostaje rzeczą niewykonalną. Zadowalające pod względem logicznym sformułowanie tego 'realistycznego' rozwiązania stanowiło jeden z celów niniejszych rozważań". Przełęcki, [1964], s. 113.

[242] Stanowiska trzecie, czwarte, piąte i szóste w tym paragrafie mają w artykule Przełęckiego numer, odpowiednio, drugi, trzeci, czwarty i piąty, Przełęcki, [1964], s. 101.

STANOWISKO III

Z jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest prawdziwe w pewnym modelu M' należącym do rodziny RM'. Z jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest fałszywe w każdym modelu M' należącym do rodziny RM'.

STANOWISKO IV

Z jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest prawdziwe w każdym modelu M' należącym do rodziny RM'. Z jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest fałszywe w pewnym modelu M' należącym do rodziny RM'.

STANOWISKO V

Z jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest prawdziwe w modelu M_i'; Z jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest fałszywe w modelu M_i'; gdzie M_i' jest określonym modelem wybranym z rodziny RM na podstawie dodatkowych założeń.

STANOWISKO VI

Z jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest prawdziwe w modelu $M^{*}{}'$; Z jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest fałszywe w modelu $M^{*}{}'$; gdzie $M^{*}{}'$ jest modelem właściwym języka J' scharakteryzowanym wyłącznie przez warunek: $M^{*}{}' \in RM'$.

Szczegółową analizę każdego z wymienionych stanowisk poprzedźmy dość istotnymi uwagami ujawniającymi to, co łączy wszystkie stanowiska. Otóż, bez względu na stanowisko, wszystkie zdania języka *J'*, które nie zawierają terminu otwartego *Q* oraz wszystkie te zdania *Z*(*Q*), które spełniają warunek (OM) posiadają określoną wartość logiczną. Są więc, albo prawdziwe, albo fałszywe, a zatem są to zdania rozstrzygalne. Ponadto, każde stanowisko zachowuje wszystkie prawa klasycznego rachunku kwantyfikatorów, w szczególności prawdami logicznymi są: $\forall x(Qx \vee \sim Qx)$, $Qa_1 \vee \sim Qa_1$, $\forall x \sim (Qx \wedge \sim Qx)$, $Qa_1 \wedge \sim Qa_1$; dla otwartego terminu *Q*.

Przedstawione niżej analizy każdego z sześciu stanowisk zawierają sprawdzenie pokazujące, jak dany, kolejny pogląd rozwiązuje paradoks stosu. Tradycyjnie bowiem, paradoks ten jest kluczowym testem na trafność proponowanego podejścia do nieostrości. Nie jest to jednak test wystarczający dla rozstrzygnięcia, jaką wartość ma naprawdę dana propozycja. Może być bowiem tak, iż, przy danym podejściu, daje się, co prawda, uniknąć paradoksu stosu, lecz cena za to jest tak duża, że podejście to nie może być uznane za faktyczne rozwiązanie problemu nieostrości. Prawdę mówiąc, wszystkie niżej przedstawione propozycje wydają się być na tyle sztuczne, niezgodne z intuicjami, lub wręcz paradoksalne, że żadna z nich nie zasługuje na miano rozwiązania, ani problemu nieostrości, ani paradoksu stosu. Pamiętać należy, że definicja warunkowa terminu nieostrego jest sformułowana w języku bez terminów nieostrych, czyli w takim języku, w którym wszystkie terminy są wyraźne. Oznacza to, że częściowe zdefiniowanie terminu nieostrego, z konieczności, wprowadza wyraźne, ostre granice dla obu ekstensji, a więc i dla brzegu tego wyrażenia. Jak to wcześniej pokazaliśmy, istnieją, co prawda, terminy nieostre z ostro wyznaczonym obszarem nieostrości, mimo to, nie wolno przyjmować, że wszystkie terminy nieostre mają wyraźnie wyznaczony obszar nieostrości. Założenie takie byłoby przecież jawnie niezgodne z charakterem nieostrości.

4.1.4.1. STANOWISKO I (NADWARTOŚCIOWANIA)

Z jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest prawdziwe w każdym modelu M' należącym do rodziny RM'. Z jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest fałszywe w każdym modelu M' należącym do rodziny RM'.

Cechą odróżniającą stanowisko pierwsze od wszystkich pozostałych jest to, iż przyjmując je odmawiamy wartości logicznej wszystkim zdaniom niezdeterminowanym. Zdania te, będąc prawdziwymi w jednych modelach rodziny *RM'*, a fałszywymi w innych modelach tej samej rodziny, nie mogą być więc, ani prawdziwe, ani fałszywe w każdym modelu danej klasy. Zatem, suma zbioru wszystkich zdań prawdziwych oraz zbioru wszystkich zdań fałszywych języka *J'* nie jest zbiorem wszystkich zdań języka *J'*. Z tego powodu możliwe są dwa stanowiska: albo zdania pozbawione wartości logicznej są wyrażeniami bezsensownymi, albo zdania te mają sens.

I.1. Załóżmy, że zdania nie posiadające wartości logicznej są wyrażeniami bezsensownymi, a więc nie należą do języka *J'*. Niestety, stanowisko to jest dość trudne do zaakceptowania. Oznacza ono bowiem, że o tym, czy dane zdanie należy do języka *J'*, czy nie należy, może decydować doświadczenie[243]. Jest to spowodowane tym, że rozstrzygnięcie, czy dane zdanie *Z*(*Q*) spełnia warunek (OM) zależeć może właśnie od doświadczenia. Ponadto, koniunkcja lub alternatywa dwóch wyrażeń bezsensownych może być zdaniem prawdziwym lub fałszywym, a więc sensownym – wskazuje na to przykład zdań będących podstawieniami prawd logicznych, lub zdań z nimi sprzecznych. Przełęcki przyznaje, iż sam kiedyś przyjmował to stanowisko, z którego się później wycofał[244].

I.2. Jeśli jakieś wyrażenie ma syntaktyczny charakter zdania, to mimo, iż nie ma ono wartości logicznej jest sensownym zdaniem języka *J'*. Konsekwencją

---

[243] O ile zależność prawdziwości niektórych zdań od doświadczenia jest zrozumiała, o tyle zależność sensowności jakiegokolwiek zdania od doświadczenia nie jest poglądem popularnym w logice.

[244] Przełęcki reprezentuje stanowisko I.1 w [1958].

tego stanowiska jest to, iż wszystkie spójniki dwuargumentowe tracą swoje matrycowe charakterystyki. Skoro bowiem takie zdania jak Qa_1 i $\sim Qa_1$ nie mają wartości logicznej, a mimo to wartość logiczną mają $Qa_1 \vee \sim Qa_1$, $Qa_1 \wedge \sim Qa_1$, $Qa_1 \rightarrow Qa_1$, $Qa_1 \leftrightarrow \sim Qa_1$, to znaczy, że matryce logiczne alternatywy, koniunkcji, implikacji i równoważności nie obowiązują. Zostają zatem zawieszone wszelkie klasyczne prawa metalogiczne: zasada sprzeczności, prawo wyłączonego środka, zasada tożsamości, prawo podwójnego przeczenia, prawa de Morgana itd.

Za stanowiskiem I.2 opowiada się Mehlberg w swojej książce z 1958 roku *The Reach of Science*. Swoim poglądom nie nadaje on jednak żadnego formalnego kształtu[245]. Później pogląd ten, choć od zawsze wzbudzał i wciąż wzbudza kontrowersje, stał się bardziej popularny w swej formalnej postaci, znanej jako *teoria nadwartościowania* (*supervaluation theory*). Jej twórcą jest Kit Fine, który w swojej pracy *Vagueness, truth and logic*[246] zastosował nadwartościowania, wprowadzone wcześniej do logiki formalnej, bez jakiegokolwiek odniesienia do kwestii nieostrości, przez Basa van Fraassena[247].

Klasę modeli *RM'* tworzą tak zwane *dopuszczalne wartościowania*, czyli klasyczne wartościowania przypisujące każdemu zdaniu języka wartość logiczną, w ten sposób, aby były uszanowane semantyczne zasady charakterystyczne dla znaczeń terminów nieostrych. Każde dopuszczalne wartościowanie, zwane również *precyzacją*, spełnia warunki, które przedstawimy posługując się następującymi przykładami:

– Każda precyzacja ustala ostrą granicę oddzielającą ekstensję pozytywną od negatywnej dla każdego terminu nieostrego. Jeśli więc mamy w języku serię zdań: *Człowiek mający x cm wzrostu jest wysoki*[248]; to dla każdego dopuszczalnego wartościowania v_0 istnieje taka liczba x_0, że zdanie „Człowiek mający x cm wzrostu jest wysoki", jest prawdziwe gdy $x \geq x_0$ ($x > x_0$), fałszywe zaś dla $x < x_0$ ($x \leq x_0$):

v_0(*Człowiek mający x cm wzrostu jest wysoki*) = 1, dla $x \geq x_0$ ($x > x_0$);

v_0(*Człowiek mający x cm wzrostu jest wysoki*) = 0, dla $x < x_0$ ($x \leq x_0$).

– Każda precyzacja v ustalając ostrą granicę szanuje ekstensję pozytywną i ekstensję negatywną danego terminu nieostrego. Oznacza to, że jeśli P jest nieostrym predykatem, to $vP(x) = 1$, gdy x należy do ekstensji pozytywnej predykatu P, zaś $vP(x) = 0$, gdy x należy do ekstensji negatywnej P. Zatem, każda precyzacja wyznacza ostrą granicę między nową ekstensją pozytywną i nową ekstensją negatywną, która przebiega przez obszar nieostrości, czyli

---

[245] Mehlberg, [1958], s. 256–260, 277–280, 330–338. Także Williamson, [1994], s. 143–146.

[246] Fine, [1975].

[247] Van Fraassen, [1966], [1968], [1972]; Fine, [1975].

[248] W wyrażeniu „Człowiek mający x cm wzrostu jest wysoki" x nie jest zmienną, lecz pewną konkretną wartością liczbową. Dlatego wyrażenie to jest zdaniem, a nie formą zdaniową.

półcień. Tym samym, ekstensja pozytywna (negatywna) predykatu jest podzbiorem właściwym nowowyznaczonej ekstensji pozytywnej (negatywnej).

– Każda precyzacja ustala ostrą granicę nieostrego terminu konsekwentnie ze względu na ten termin. Jeśli więc prawdą jest zdanie „Człowiek mający x cm wzrostu jest wysoki", dla $x = x_1$, to zdanie to musi być prawdziwe również wtedy, gdy $x > x_1$. Jeśli natomiast to samo zdanie jest fałszywe, dla $x = x_1$, to zdanie to musi być fałszywe także wówczas, gdy $x < x_1$.

– Każda precyzacja ustala ostrą granicę nieostrego terminu konsekwentnie ze względu na wszystkie inne terminy. Chodzi tu o zachowanie intuicyjnych zgodności między wyraźnie wyznaczonymi ekstensjami pozytywnymi i negatywnymi takich nieostrych przecież predykatów jak np. „być wysokim", „być bardzo wysokim", „być niskim", „być średniego wzrostu" itd. Jeśli więc $vP(x_1) = vP(x_2) = 1$, dla $x_1 < x_2$, to np. nie może być tak, że x_1 należy do ekstensji pozytywnej predykatu „być wysokim", a x_2 należy do ekstensji pozytywnej predykatu „być niskim".

Nie sposób nie zauważyć, że drugi z wymienionych warunków na precyzację jest idealizacją, ignorującą faktyczny stan rzeczy. Cóż może bowiem oznaczać stwierdzenie, iż precyzacja szanuje ekstensję pozytywną i negatywną jakiegoś wyrażenia? Najwyraźniej, założenie to przyjmuje istnienie ostrych granic obu ekstensji, co jest niezgodne z nieostrością wyrażenia. Przecież, aby szanować ekstensję trzeba ją dobrze, czyli dokładnie rozpoznać. Wspomniane „szanowanie" ekstensji wyklucza więc dwie sytuacje. W pierwszej, jakiś obiekt z ekstensji pozytywnej (negatywnej) traktujemy tak, jak gdyby nie należał do tej ekstensji. W drugiej zaś sytuacji, jakiś obiekt nie należący do ekstensji pozytywnej (negatywnej) traktujemy jako należący do tej ekstensji. Zatem, wykluczenie tych dwóch warunków oznacza, ukryte założenie istnienia ostrych granic obu ekstensji. Sama idea precyzacji jest więc odejściem od analizy nieostrości w jej najbardziej typowej, podstawowej i powszechnej postaci.

Nadwartościowanie jest przyporządkowaniem zdefiniowanym przy pomocy klasy wszystkich precyzacji, które przypisuje niektórym zdaniom języka wartość prawdy lub fałszu według przepisu zgodnego ze stanowiskiem I.2: zdanie jest w nadwartościowaniu prawdziwe, gdy jest prawdziwe przy każdej precyzacji, fałszywe zaś wówczas, gdy jest fałszywe przy każdej precyzacji. Widać więc, że nadwartościowanie nie przypisuje wartości, ani prawdy, ani fałszu żadnemu ze zdań, które przy różnych precyzacjach przyjmuje różne wartości logiczne. Należy podkreślić, istotny dla logików rozwijających tę teorię, fakt, iż brak wartości logicznej zdania w nadwartościowaniu nie jest tu rozumiany jako kolejna wartość logiczna, np. nieokreśloność, czy też wartość reprezentująca wątpliwość. Brak wartości logicznej zdania jest przypadkiem faktycznego nieposiadania przez to zdanie wartości logicznej. Ponieważ każda precyzacja przypisuje wartość logiczną prawdy lub fałszu każdemu zdaniu języka, dla uniknięcia nieścisłości, przyjmuje się, że nadwartościowanie przypisuje wartość nadprawdy (*supertruth*) lub nadfałszu (*superfalshood*) lub też nie przypisuje zdaniu żadnej z tych dwóch superwartości.

Nie jest niczym dziwnym, że tak sformułowana, teoria nadwartościowania umożliwia uniknięcie, dobrze znanych, paradoksalnych konsekwencji rozumowania typu *sorites*. Rozważmy to wykorzystując paradoks łysego. Dla każdej precyzacji v, istnieje taka liczba naturalna k_v, że każde zdanie stwierdzające, że człowiek posiadający k włosów na głowie jest łysy, jest zdaniem prawdziwym, jeśli tylko liczba k jest mniejsza niż k_v lub jest równa liczbie k_v. Każde zaś zdanie stwierdzające, że człowiek posiadający k włosów na głowie jest łysy, jest zdaniem fałszywym, jeśli tylko liczba k jest większa od liczby k_v. Oznacza to, że w przypadku każdej precyzacji v, prawdziwość serii wnioskowań '*jeśli człowiek posiadający n włosów na głowie jest łysy, to człowiek posiadający n* + 1 *włosów na głowie jest łysy*' kończy się na liczbie $n = k_v-1$: zdanie '*człowiek posiadający* k_v *włosów na głowie jest łysy*' jest prawdziwe, natomiast zdanie '*człowiek posiadający* k_v+1 *włosów na głowie jest łysy*' jest fałszywe. Jak widać, już na poziomie precyzacji nie jest możliwe przeprowadzenie takiego rozumowania stosu, które doprowadziłoby do paradoksalnego wniosku, że '*człowiek posiadający sto tysięcy włosów na głowie jest łysy*' jest zdaniem prawdziwym. Niestety, trudno znaleźć, dla takiej precyzacji jakiekolwiek, choćby najsłabsze, uzasadnienie. Przecież istnienie wyraźnej granicy między ekstensją pozytywną, a negatywną predykatu nieostrego stoi w jawnej sprzeczności z samą istotą nieostrości predykatu. Na jakiej więc podstawie można przypuszczać, że taką granicę daje się w ogóle wyznaczyć? Co ma ona symbolizować w przypadku dowolnego, lecz konkretnego predykatu? Jeśli jednak każda precyzacja unicestwia paradoks stosu, a czyni to przez unicestwienie nieostrości, rozumowania typu *sorites* nie prowadzą już do paradoksu także na poziomie nadwartościowania. Dla każdej klasy precyzacji istnieją bowiem dwie liczby k_1 i k_2 takie, że zdanie '*człowiek posiadający n włosów na głowie jest łysy*' jest nadprawdziwe, jeśli tylko $n \leq k_1$, zaś nadfałszywe, gdy $k_2 < n$. Dla $k_1 < n \leq k_2$, zdanie to nie posiada nadwartości logicznej. Zatem, zdanie '*człowiek posiadający* k_1 *włosów na głowie jest łysy*' jest prawdziwe w każdej precyzacji, natomiast zdanie '*człowiek posiadający* k_1+1 *włosów na głowie jest łysy*' jest fałszywe w pewnej precyzacji. Oznacza to, że implikacja '*jeśli człowiek posiadający* k_1 *włosów na głowie jest łysy, to człowiek posiadający* k_1+1 *włosów na głowie jest łysy*' jest prawdziwa przy pewnej precyzacji i fałszywa przy innej, a więc nie ma nadwartości logicznej. Podobna sytuacja ma miejsce dla liczby k_2. Zdanie '*człowiek posiadający* k_2 *włosów na głowie jest łysy*' jest fałszywe w pewnej precyzacji, natomiast zdanie '*człowiek posiadający* k_1+1 *włosów na głowie jest łysy*' jest fałszywe w każdej precyzacji. Zatem, implikacja '*jeśli człowiek posiadający* k_2 *włosów na głowie jest łysy, to człowiek posiadający* k_2+1 *włosów* *na głowie jest łysy*', jako że jest prawdziwa przy pewnej precyzacji i fałszywa przy innej, nie posiada nadwartości logicznej. Tym samym, dla każdej klasy precyzacji istnieje taka liczba k_1, że z prawdziwości (nadprawdziwości) zdania '*człowiek posiadający* k_1 *włosów na głowie jest łysy*' nie wynika prawdziwość (nadprawdziwość) zdania '*człowiek posiadający* k_1+1 *włosów na głowie jest łysy*'. Oznacza to, że argumentacja stosu nie jest paradoksalna w teorii nadwartościowania. Łatwo jednak dostrzec, że sama paradoksalność nie zniknęła, gdyż została jedynie przeniesiona z rozumowania stosu na całą teorię. Paradoksalny jest przecież końcowy efekt, a mianowicie powstanie dwóch, wyraźnie wyznaczonych progowych wartości, oddzielających z matematyczną precyzją wszystkie przypadki pozytywne, od brzegowych oraz wszystkie brzegowe od negatywnych.

W istocie, trudności wynikające z teorii nadwartościowania są tak oczywiste, że trudno zaproponowaną wyżej konstrukcję uznać za rozwiązanie paradoksu stosu. Już samo odróżnienie prawdy od nadprawdy, podobnie jak fałszu od nadfałszu, jest problematyczne. Czym miałaby być prawda, a czym nadprawda? Dostrzegalne jest tu pewne podobieństwo do sytuacji z opisanego wcześniej eksperymentu Blacka. Każdy człowiek musi określić wyraźną granicę dla danego, nieostrego predykatu, a więc każdy człowiek ustanawia pewną precyzację. Powstaje tu jednak naturalne pytanie: kto tak postępuje? Czy w codziennym posługiwaniu się językiem, najeżonym przecież terminami nieostrymi, ktokolwiek wprowadza ostrą granicę w przypadku któregokolwiek nieostrego terminu?[249] Nadprawdziwe jest więc to zdanie, które jest prawdziwe dla każdego człowieka uczestniczącego w eksperymencie. Czy nadprawda jest tą wartością, którą operuje społeczność władająca danym językiem? Czym ma być jednak to „operowanie przez społeczność wartością nadprawdy"? Przecież czegoś takiego w ogóle nie ma. Wydaje się więc, że teoria nadwartościowań nie ma uzasadnienia filozoficznego. Jasno też widać trudność natury metodologicznej. Przecież, problem semantyczny jest tu zredukowany do kwestii czysto pragmatycznej. Najgorsze jest jednak to, że rozwiązanie paradoksu stosu jest pozorne. Nadwartościowanie uniemożliwia bowiem zaistnienie tego paradoksu, tylko dlatego, że każda precyzacja traktuje każdy termin nieostry jak ostry[250]. To proste, przeczące wszelkim intuicjom i założeniom

[249] Oczywiście, wyostrzenie terminu „nieletni" spowodowane potrzebą precyzyjnego rozumienia Kodeksu Karnego nie oznacza, że w języku codziennym rozumiemy je jako dopełnienie ostrego terminu „dorosły", gdyż termin „dorosły" również jest dla nas nieostry.

[250] Faktem jest, że może się wydawać, iż z punktu widzenia nadwartościowania, termin nieostry pozostaje nieostrym. Rozważmy jednak predykat „być łysym". Łatwo zauważyć, że w nadwartościowaniu ma on przypadki brzegowe. Są nimi wszyscy ci ludzie, dla których n, ilość włosów na głowie, spełnia warunek: $k_1 + 1 \leq n \leq k_2$. Zatem, w świetle przyjętej przez nas, i nie tylko przez nas, definicji nieostrości, predykat „być łysym" jest nieostry, gdyż posiada przypadki

filozoficznym dotyczącym nieostrości, „udawanie", że predykaty nieostre są ostre jest bodaj największym, choć nie jedynym grzechem teorii nadwartościowania. Najlepszym dowodem na niedopuszczalność podejścia Fine'a jest to, iż w jego teorii takie zdania jak „Predykat 'być łysym' jest predykatem wyraźnym", czy „Predykat 'być łysym' nie ma obszaru nieostrości" są prawdziwe w każdej precyzacji, a więc są nadprawdziwe! Istotnie, skoro każda precyzacja ustala ostrą granicę między nową ekstensją pozytywną i nową ekstensją negatywną predykatu „być łysym", zatem przy każdej precyzacji prawdziwe jest, zarówno zdanie „Predykat 'być łysym' jest predykatem wyraźnym", jak i zdanie „Predykat 'być łysym' nie ma obszaru nieostrości". Każde z tych zdań jest więc nadprawdziwe. Już ten jeden fakt przekreśla sensowność przedsięwzięcia Fine'a. Skoro w teorii nadwartościowania łysość jest wyraźna, to znaczy, że teoria Fine'a nie jest żadną teorią nieostrości, lecz właśnie ostrości. Niedorzecznością jest przecież uważać pogląd, traktujący terminy nieostre jak gdyby były ostrymi, za jakiekolwiek rozwiązanie problemu nieostrości. Czy można rozwiązać poważną kwestię nieostrości, zastępując nieostrość ostrością? Czy takie działanie ma jakikolwiek sens? Owszem, może mieć sens jedynie z jakiegoś praktycznego powodu. Jeśli bowiem, z jakichś przyczyn, w danej sytuacji zachodzi konieczność wyostrzenia pewnych terminów nieostrych, czyli zastąpienia ich przez terminy ostre, to teoria nadwartościowań jest konkretnym pomysłem na realizację tego rodzaju zamierzenia. Oczywiście, jest to pomysł, jeden, z wielu możliwych. Jednak, nie może być on jakimkolwiek rozwiązaniem, ani nawet wyjaśnieniem tak niezwykłego przecież fenomenu nieostrości[251]. Co gorsza, odwoływanie się w tej teorii do

---

brzegowe. Przypadki te są jednak wyznaczone ostro, co, po pierwsze, oznacza zmianę znaczenia predykatu „być łysym". Po drugie, zaś, skoro wiemy już kto jest łysy, a kto niełysy, przyjmijmy, że wszystkich tych, o których nie wiemy czy są łysi, czy niełysi będziemy nazywali np. *quasi-łysymi.* W ten sposób, nieostry wybór, między łysym a niełysym, został zastąpiony ostrym już wyborem, między łysym, quasi-łysym, a niełysym. Co oznacza faktyczną ostrość predykatu „być łysym" w teorii nadwartościowania. Należy jednak podkreślić, że podobieństwo tego przypadku do rozważanego wcześniej, nieostrego predykatu „*n*-different", którego półcień jest wyznaczony w ostry sposób, jest pozorne, gdyż nieostrość predykatu „*n*-different" jest konsekwencją nieostrości predykatu „być małą liczbą". Jeśli jednak wyostrzeniu uległby predykat „jest małą liczbą" (co właśnie jest sednem uwagi dotyczącej wyostrzenia predykatu „być łysym"), to wówczas, konsekwentnemu wyostrzeniu mógłby zostać poddany również predykat „*n*-different".

[251] Pod tym względem, podejście Fine'a przypomina metodę wpływania na człowieka przez jego dowartościowywanie. W przypadku niektórych ludzi można bowiem zastosować, z pozytywnym skutkiem, następujący trik: jeśli kogoś zachowującego się źle będziemy konsekwentnie traktowali jakby był kimś dobrym, to po jakimś czasie, faktycznie, człowiek ten może zacząć zachowywać się dobrze. Niestety, nieostrość może być nieczuła na podobne zabiegi. Jeśli będziemy nieostre predykaty traktowali jak ostre, to one, mimo naszych starań, wcale nie muszą stać się ostrzejszymi.

jakiejś mitycznej klasy kompletnie nieuzasadnionych i sztucznych precyzacji wyklucza sensowność stosowania tej teorii w celach praktycznych.

Co więcej, sposób uzdrowienia sytuacji wynikającej z istnienia nieostrości jest w teorii Fine'a trywialny. W oczywistych, czyli uznawanych przez wszystkich przypadkach, rozumianych jako wszelkie możliwe precyzacje, stosujemy dany termin nieostry lub nie: jeśli prawdziwość odpowiedniego zdania typu $Z(Q)$ jest oczywista (zdanie to jest nadprawdziwe), to stosujemy ten termin; jeśli natomiast fałszywość zdania typu $Z(Q)$ jest oczywista (zdanie to jest nadfałszywe), to terminu tego nie stosujemy. We wszystkich pozostałych przypadkach powstrzymujemy się od używania tego terminu, gdyż nie wiemy za bardzo co z nimi zrobić. Wydaje się, że tak właśnie postępujemy od wieków, nie angażując do tego prostego zabiegu jakiejś teorii nadwartościowania, która operuje dziwnymi pojęciami nadprawdy i nadfałszu. Co więcej, nasze praktyczne podejście jest wolne od fikcyjnego, niczym nieuzasadnionego założenia, iż wszystkie przypadki pozytywne dokładnie odróżnimy od przypadków granicznych, te zaś równie dokładnie odróżnimy od przypadków negatywnych.

Lista zarzutów formułowanych pod adresem teorii nadwartościowania jest dłuższa[252]. Zwróćmy uwagę na kilka najpoważniejszych trudności, które wydają się być nierozerwalnie związanymi z tą teorią.

W swych zamierzeniach, Fine chciał rozwiązać paradoks stosu zachowując prawa logiki klasycznej. O ile jednak na poziomie precyzacji logika klasyczna jest niewątpliwie zachowana, o tyle istotne wątpliwości budzić musi logika nadwartościowania. Fakt, iż nadwartościowanie zachowuje wszystkie klasyczne tautologie oraz wszystkie klasyczne kontrtautologie, nie wystarcza do stwierdzenia, iż funkcja ta wyraża logikę klasyczną. Aby dokładniej przeanalizować ten problem rozważmy dwa wynikania: lokalne oraz globalne. Zdanie A *wynika lokalnie* ze zbioru zdań Γ, gdy dla każdego wartościowania w[253]: jeśli $w(B) = 1$, dla każdego $B \in \Gamma$, to $w(A) = 1$. Zdanie A *wynika globalnie* ze zbioru zdań Γ, gdy prawdziwa jest następująca implikacja: jeśli dla każdego wartościowania w i dla każdego zdania B ze zbioru Γ, $w(B) = 1$, to dla każdego wartościowania w, $w(A) = 1$[254]. Zatem,

– A wynika lokalnie z Γ, gdy $\forall w$ [jeśli $\forall B \in \Gamma\ w(B)$, to $w(A)$];
– A wynika globalnie z Γ, gdy [jeśli $\forall w\ \forall B \in \Gamma\ w(B)$, to $\forall w\ w(A)$].

---

[252] Prezentację dyskusji jaka rozgorzała wokół teorii nadwartościowań można znaleźć w książce Joanny Odrowąż-Sypniewskiej *Zagadnienie nieostrości*, [2000], s. 26–50. Z naszego punktu widzenia, dyskusja ta jest jednak bezprzedmiotowa już tylko z tego jednego powodu, iż metodologicznie chybione jest każde podejście do nieostrości, które proponuje takie działania, jak gdyby nieostrości nie było.

[253] Naturalnie, dowolność wartościowania jest zrelatywizowana do pewnej ustalonej klasy wartościowań.

[254] Williamson, [1994], s. 148.

Łatwo sprawdzić, że każde lokalne wynikanie jest wynikaniem globalnym, a ponadto, na zbiorze tautologii oba wynikania pokrywają się. W ogólności, jednak, wynikanie globalne nie musi być lokalnym. Kontrprzykładem może tu być reguła Gödla dla takich systemów modalnych, jak *K*, *T*, *S4*, *S5*: jeśli α jest tezą danego systemu, to $\Box\, \alpha$ również jest tezą tego systemu; tymczasem, formuła $\alpha \rightarrow \Box\, \alpha$ nie jest tezą żadnej z tych logik.

Określając nadwartościowania, Fine zdefiniował wynikanie globalne, które nawet na gruncie logiki klasycznej różni się od wynikania lokalnego[255]. Jednak, różnice okazały się większe, gdyż, jak już wcześniej wspomnieliśmy, Fine, w swej kluczowej dla teorii nadwartościowań pracy *Vagueness, truth and logic*, użył operatora „wyraźnie", oznaczonego przez siebie symbolem „*D*" (z ang. *definitely*). W konstrukcji tej wzorował się na modalnym systemie *S5*, w którym operator *'jest konieczne, że p'* zastąpił właśnie przez '*Dp*'[256]. Skutkiem tego wynikanie globalne na formułach z operatorem *D* nie spełnia szeregu reguł dedukcyjnych typowych dla logiki klasycznej. Williamson przytacza cztery przykłady[257]. I tak, w logice klasycznej, obowiązuje twierdzenie o dedukcji, zgodnie z którym: jeśli z *A* wynika *B*, to z pustego zbioru przesłanek wynika $A \rightarrow B$. Naturalnie, w obu przypadkach wynikanie jest lokalne. Tymczasem, na gruncie teorii nadwartościowania mimo, iż z *p* wynika *Dp*, to jednak z pustego zbioru przesłanek nie wynika $p \rightarrow Dp$. Oczywiście, tym razem, chodzi o wynikanie globalne[258]. Podobnie, jeśli z *A* wynika na gruncie logiki klasycznej *B*, to zgodnie z regułą kontrapozycji, z $\neg B$ wynika na gruncie logiki klasycznej $\neg A$. Tymczasem, w nadwartościowaniu mimo, iż z *p* wynika globalnie *Dp*, to z $\neg Dp$ nie wynika globalnie $\neg p$. Dalej, na gruncie logiki klasycznej obowiązuje reguła wnioskowania z przypadków, która mówi, że: jeśli z *A* wynika *C* i z *B* wynika *C*, to *C* wynika z $A \vee B$. Okazuje się jednak, że na gruncie teorii Fine'a, chociaż mamy wynikanie zdania $Dp \vee D\neg p$ zarówno z samego *p* jak i z samego $\neg p$, to z $p \vee \neg p$ nie wynika $Dp \vee D\neg p$. Wreszcie, znane z klasycznej logiki *reductio ad absurdum* nie obowiązuje w teorii nadwartościowania: mimo, iż z $p \wedge \neg Dp$ wynika zarówno *Dp*, jak i $\neg Dp$, to jednak z pustego zbioru przesłanek nie wynika $\neg(p \wedge \neg Dp)$[259].

---

[255] Mimo, iż dla dowolnych zdań $B_1, ..., B_k, A_1, ..., A_n, A$: *A* wynika na gruncie logiki klasycznej ze zbioru $B_1, ..., B_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy *A* wynika ze zbioru $B_1, ..., B_k$ na gruncie teorii nadwartościowania; to jednak, dla $n > 1$, nie jest prawdą, że: $A_1, ..., A_n$ wynika na gruncie logiki klasycznej ze zbioru $B_1,..., B_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1, ..., A_n$ wynika ze zbioru $B_1, ..., B_k$ na gruncie teorii nadwartościowania, Hyde, [1997], s. 652, 655.

[256] Fine, [1975], s. 287, 290.

[257] Williamson, [1994], s. 149–152.

[258] Patrz, wcześniejsza uwaga dotycząca reguły Gödla. Wcześniej, problem ten dostrzegł już Fine, [1975], s. 290.

[259] Williamson, [1994], s. 151–152.

Dość istotne wątpliwości wiążą się z obowiązującym w teorii Fine'a pojęciem prawdy, a właściwie z dwoma pojęciami: prawdy i nadprawdy. Jak już zostało to wcześniej zauważone, charakterystyka spójników w nadwartościowaniu nie wyraża się klasycznymi matrycami: podstawienia klasycznych tautologii mogą zawierać zdania pozbawione wartości logicznej[260]. Problem ten jest dość poważny. Skoro bowiem prawdą jest zdanie „Jan jest łysy lub Jan nie jest łysy", będące podstawieniem prawa wyłączonego środka, to zgodnie z rozumieniem spójnika alternatywy, przynajmniej jedno ze zdań składowych powinno być prawdziwe. Zatem, Jan powinien być łysy lub nie powinien być łysy. Tymczasem, oba zdania nie mają nadwartości logicznej, gdyż żadne z nich nie jest, ani nadprawdziwe, ani nadfałszywe, chociaż ich nadprawdziwa alternatywa wyraźnie stwierdza, że Jan jest łysy lub nie jest łysy[261]. Jak widać, problem ten wynika, co prawda, z faktu utraty przez spójniki zdaniowe swoich klasycznych charakterystyk, jest jednak głębszy. W teorii nadwartościowania, prawo wyłączonego środka jest zachowane, przy jednoczesnej rezygnacji z zasady dwuwartościowości. To jednak, jak twierdzi Williamson, prowadzi do sprzeczności, gdyż ze zdań $\neg(\mathrm{Ver}(p) \vee \mathrm{Ver}(\neg p))$, $\mathrm{Ver}(p) \leftrightarrow p$, $\mathrm{Ver}(\neg p) \leftrightarrow \neg p$, wynika $\neg(p \vee \neg p)$, a więc i $\neg p \wedge \neg\neg p$. Zarówno ten argument, jak również dość niejasne funkcjonowanie dwóch rodzajów prawdziwości, czy wreszcie dyskusyjna możliwość prawdziwości zdania zbudowanego ze zdań pozbawionych wartości logicznych, wywołało polemikę godzącą w same podstawy teorii Fine'a[262].

---

[260] To stanowisko, reprezentowane np. przez Williamsona, nie podziela Przełęcki, który jak to już wcześniej przypomnieliśmy, dopuszcza sensowność zdania, które nie posiada wartości logicznej.

[261] Broniąc prawdziwości zdania $p \vee \neg p$ nawet wówczas, gdy, ani p, ani $\neg p$ nie są prawdziwe, Fine ucieka się do analogii z wymyśloną przez siebie, raczej karkołomną, hipotezą dotyczącą prawdziwości zdania wieloznacznego (!) przed jego, jak sam to nazywa, ujednoznacznieniem: zdanie wieloznaczne jest prawdziwe, gdy każde jego ujednoznacznienie jest zdaniem prawdziwym. Jak można było przypuszczać, pomysł ten nie spotkał się z entuzjastycznym przyjęciem, Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 34.

[262] Jasnym jest, że rozumowanie Williamsona nie dotyczy precyzacji, gdyż spełnia ona zarówno prawo wyłączonego środka jak i zasadę dwuwartościowości. Zatem, w przypadku precyzacji nie możemy założyć, że $\neg(\mathrm{Ver}(p) \vee \mathrm{Ver}(\neg p))$. Oznacza to, że argument Williamsona musi dotyczyć nadwartościowania, lecz w tym przypadku, zdaniem Fine'a, nie może obowiązywać konwencja Tarskiego definiująca prawdę, czyli nie można przyjmować, że $\mathrm{Ver}(p) \leftrightarrow p$, $\mathrm{Ver}(\neg p) \leftrightarrow \neg p$. Przyjęte przez Fine'a założenie, iż pojęcie nadprawdy nie spełnia konwencji Tarskiego wywołało ożywioną dyskusję, w której wyróżnił się pogląd McGee i McLaughlina. Uznali oni, że nieostrość dowodzi tego, iż potoczne pojęcie prawdy jest sprzeczne, gdyż bazuje ono na dwóch zasadach: konwencji Tarskiego [T] oraz zasadzie korespondencji [ZK]. Ta druga, głosi, że warunki prawdziwości zdań są ustanawiane przez myśli i działania użytkowników języka, i że zdania są prawdziwe, gdy pozajęzykowe fakty określają, że warunki te są spełnione. Uważają oni, iż sprzeczność pojęcia prawdy wynika z jednoczesnego zastosowania obu tych zasad do zdań z terminami nieostrymi: zdanie nieostre, według [T] ma wartość logiczną, natomiast, według [ZK] nie ma żadnej wartości logicznej, Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 30–33, 49.

Zarzutem o jeszcze bardziej podstawowym charakterze jest ten, sformułowany wspólnie przez Jerry'ego A. Fodora i Ernesta Lepore'a w ich wspólnej pracy pod, zdradzającym jej sens, tytułem *What Cannot Be Evaluated Cannot Be Evaluated, And It Cannot Be Supervalued Either*[263]. Wychodząc od oczywistego stwierdzenia, iż nie istnieje doświadczenie, które rozstrzygałoby prawdziwość zdania z terminem nieostrym, dochodzą do wniosku, iż nieokreśloność takiego zdania jest prawdą analityczną. Zatem, wszelka precyzacja takiego zdania godziłaby właśnie w tę prawdę analityczną[264]. Jak widać, zarzut ten jest poważny, gdyż ma metodologiczny charakter.

Podsumowując analizę teorii nadwartościowania, należy jeszcze raz stwierdzić, iż nie jest ona żadnym rozwiązaniem problemu stosu, ani nawet samego paradoksu stosu. Jest ona bowiem przykładem teorii, która, nawet w najmniejszym stopniu, nie jest wrażliwa na zjawisko nieostrości, co, w oczywisty sposób, wystarcza do tego, aby nie zaistniała jakakolwiek trudność, nawet ta, z konieczności wywoływana przez nieostrość. Oczywiste w swej wymowie zdania są, albo prawdziwe (czyli nadprawdziwe), albo fałszywe (czyli nadfałszywe), pozostałe zaś zdania, czyli wszystkie te, które budzą jakiekolwiek, choćby najmniejsze wątpliwości, są pozbawione wartości logicznej, a więc, tym samym, są usunięte z pola naszego „logicznego widzenia" – umawiamy się, że ich po prostu nie ma. Sedno teorii nadwartościowania tkwi w nadprawdziwości zdań orzekających ostrość nieostrych predykatów. Dzięki teorii nadwartościowania opis świata znów może być wyraźny. Tylko, jakiego świata jest to opis? Na pewno nie naszego.

4.1.4.2. STANOWISKO II (PODWARTOŚCIOWANIA, DIALETEIZM)

Z jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest prawdziwe w pewnym modelu M' należącym do rodziny RM'. Z jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest fałszywe w pewnym modelu M' należącym do rodziny RM'.

Pogląd ten nie jest uwzględniony w klasyfikacji Przełęckiego. Najprawdopodobniej, nie dopuszczał on wówczas, czyli w 1964 roku, możliwości jednoczesnego uznania prawdziwości i fałszywości jednego i tego samego zdania. Zgodnie ze stanowiskiem drugim, każde zdanie języka *J'* ma bowiem wartość logiczną, z tym że niektóre zdania mają nawet dwie wartości logiczne. Każde zdanie *Z(Q)*, które nie spełnia warunku (OM) jest prawdziwe i fałszywe zarazem. W tym sensie, można przyjąć, iż stanowisko drugie jest

[263] Fodor i Lepore, [1996].
[264] Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 26.

dualne do pierwszego. Ten dualizm jest widoczny również w warunkach formułujących każde z tych dwóch stanowisk. Można więc, stosując *zasadę życzliwości*[265], przyjąć, że zdania $Z(Q)$ nie spełniające warunku (OM) bardziej zasługują na miano niezdeterminowanych, gdyż jako posiadające wartość prawdy i fałszu trudno jest uznać je za określone.

Wbrew przypuszczeniom Przełęckiego, stanowisko drugie znalazło swoich zwolenników. Pogląd, iż pewne zdania są prawdziwe i fałszywe zarazem, jest głoszony przez wyznawców *dialeteizmu*, wierzących w istnienie takich właśnie zdań, tak zwanych, *prawdziwych sprzeczności* (*true contradictions*)[266]. Tradycyjnie, jako przykład tego typu zdań dialeteiści wskazują na zdanie kłamcy, sedno, od wieków znanego, paradoksu Eubulidesa[267]. Ponadto, w ich opinii, licznych przykładów uzasadniających sensowność dialeteizmu dostarczają właśnie zdania zawierające terminy nieostre. Priest rozważa przykład osoby *A* w chwili, gdy ta przechodzi przez drzwi łączące przedpokój z pokojem. Jego zdaniem, stwierdzenie, że osoba *A* znajduje się w pokoju jest przez pewien czas jednocześnie prawdziwe i fałszywe[268]. Jednak, na gruncie badań nad nieostrością, najbardziej wpływową postacią realizującą idee dialeteizmu, dającą się zaklasyfikować do stanowiska drugiego jest, tak zwana, *teoria podwartościowania* (*subvaluation theory*). Chociaż za jej twórcę, słusznie, uważa się, cytowanego już parokrotnie, Dominica Hyde'a, który swe idee przedstawił w 1997 roku w artykule *From heaps and gaps to heaps of gluts*[269], to okazuje się jednak, że teoria ta ma polskie korzenie. Już bowiem, w 1948 roku Stanisław Jaśkowski w swojej pracy *Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych* (jej wersja angielska z 1969 roku, to *Propositional calculus for contradictory deductive systems*)[270] zaproponował konstrukcję, tak zwanych, *systemów dyskusyjnych*, które formalizują dialog osób posiadających odmienne poglądy w sprawie prawdziwości stosowanych w dyskusji zdań. Najważniejszym

---

[265] Kierowanie się *zasadą życzliwości* oznacza wybór takiego sposobu rozumienia danego poglądu, przy którym pogląd ten, albo w ogóle nie jest kontrowersyjnym, albo przynajmniej budzi on możliwie najmniej kontrowersji. Stosowanie tej zasady wydaje się być sensowne w niektórych sytuacjach, jak np. na początkowym etapie zapoznawania się z czyimiś poglądami. Jednak w przypadku analizy paradoksów, bezwzględne przestrzeganie tej zasady może okazać się szkodliwym. Jeśli bowiem, jakieś rozumowanie jest paradoksalnym z powodu prostego błędu wieloznaczności, to stosowanie zasady życzliwości może doprowadzić do tego, że błąd ten nigdy nie zostanie zauważony, natomiast cała analiza będzie „na siłę" dowodzić słuszności przypuszczenia, iż dane rozumowanie faktycznie jest z jakiegoś tajemniczego powodu paradoksalne.

[266] Dialeteizm jest zwykle kojarzony z szerokim dziś nurtem logik parakonsystentnych, czyli, najogólniej mówiąc, logik tolerujących sprzeczność, Priest i Tanaka, [SEPh].

[267] Np. Priest, [1993], s. 42–45; [2000], s. 31–37; [SEPh].

[268] Priest, [1987], s. 202.

[269] Hyde, [1997].

[270] Jaśkowski, [1948], [1969].

systemem jest sławny system D_2 Jaśkowskiego. Inspiracją dla Jaśkowskiego było występowanie w języku naturalnym terminów, w rozumieniu Kotarbińskiego, chwiejnych, a więc nieostrych. Źródłem tej odmienności poglądów może być, zdaniem Jaśkowskiego, właśnie nieostrość terminów występujących w zdaniach. Wówczas, może się zdarzyć, że tak samo brzmiące zdanie jest różnie rozumiane przez uczestników dyskusji, a więc i różna jest dla dyskutujących osób wartość logiczna tego zdania. Istotnym jest więc pamiętać o tym, że dwa, „na pozór" sprzeczne, zdania A i $\neg A$ mogą być jednocześnie zaakceptowane, wówczas, gdy A będzie zaakceptowane przy pewnym znaczeniu występujących w nim terminów, zaś $\neg A$ przy innym znaczeniu tych samych terminów[271].

Jak już wcześniej zauważyliśmy, teoria podwartościowania, reprezentując stanowisko drugie, jest dualna wobec, reprezentującej stanowisko pierwsze, teorii nadwartościowania. Tak jak w przypadku teorii Fine'a, podstawą teorii Hyde'a jest klasa precyzacji, rozumianych tak samo jak w nadwartościowaniu. Zatem, wszystkie zarzuty pod adresem teorii Fine'a, które dotyczą zastosowania precyzacji są aktualne wobec teorii Hyde'a. Jasnym jest więc, że i ta teoria zabija nieostrość, raz, zakładając istnienie ostrych granic między ekstensjami i półcieniem, drugi raz stosując klasę precyzacji, a przez to sprowadzając problem semantyczny do pragmatycznego. Obie teorie różnią się jedynie sposobem wykorzystania tej kontrowersyjnej klasy, co nie znaczy, że wynikła z tego różnica jest niewielka. Pojęcie nadprawdy (nadfałszu) jest tu zastąpione pojęciem podprawdy (podfałszu). Jeśli jakieś zdanie $Z(Q)$ nie spełnia warunku (OM), to znaczy, że w pewnej precyzacji jest ono prawdziwe, a przy innej fałszywe. Oznacza to, że takie zdanie ma wartość podprawdy i podfałszu. Jak widać, prawo wyłączonego środka jest spełnione przez podwartości logiczne. Mogłoby się też wydawać, że zasada niesprzeczności nie jest zachowana w teorii podwartościowania. Tak by faktycznie było, gdyby logika teorii Hyde'a była logiką klasyczną. Jednak, Hyde zrezygnował z logiki klasycznej, ratując w ten sposób zasadę niesprzeczności. Pojęcia podwartości logicznych zostały przez nas użyte przez analogię do teorii Fine'a. Tymczasem, Hyde operuje pojęciami *zdecydowanej prawdziwości* i *zdecydowanej fałszywości*, które

[271] „Współczesne formalistyczne ujęcie logiki zwiększa ścisłość wielu badań, nie byłoby jednak rzeczą słuszną wysłowić zasadę niesprzeczności Arystotelesa w postaci: 'Dwa zdania sprzeczne nie są zarazem prawdziwe', lecz trzeba jeszcze dodać: 'ze względu na ten sam język' lub 'przy tym samym znaczeniu występujących w tych zdaniach wyrazów'. Zastrzeżenie to nie zawsze jest spełnione w życiu codziennym, a także w nauce operujemy często wyrazami o znaczeniu mniej lub więcej chwiejnym (w sensie wyjaśnionym przez prof. Kotarbińskiego, [1929], s. 26–29), jak to zauważa Chwistek (*Granice nauki. Zarys logiki i metodologii nauk ścisłych*, Lwów–Warszawa, s. 12) Każda zaś chwiejność nazwy *a* może doprowadzić do sprzeczności zdań, bo o tym samym przedmiocie *X* możemy orzec, że '*X* jest *a*', a także że '*X* nie jest *a*', zależnie od każdorazowo przyjętego znaczenia.", Jaśkowski, [1948], s. 60.

pokrywają się z, odpowiednio, nadprawdą i nadfałszem. Tak więc, z punktu widzenia teorii podwartościowań, istnieją trzy rodzaje zdań: zdania zdecydowanie prawdziwe, zdania zdecydowanie fałszywe oraz zdania, które są jednocześnie prawdziwe i fałszywe.

Naturalnie, zastosowanie logiki klasycznej, a mówiąc ściślej, każdej logiki z prawem przepełnienia[272], prowadzi do trywializacji każdego wnioskowania, którego przesłanki zawierają jakiekolwiek zdanie wraz z negacją tego zdania. Aby zapobiec notorycznej trywializacji wnioskowań wykorzystujących jako przesłanki te zdania typu $Z(Q)$, które nie spełniają (OM), Hyde zrezygnował z logiki klasycznej i wybrał, wspomnianą już, logikę dyskusyjną D_2 Jaśkowskiego, w której, jako parakonsystentnej, nie obowiązuje prawo przepełnienia. Zgodnie z dyrektywą Jaśkowskiego, każda teza systemu D_2 powinna być poprzedzona zwrotem „przy pewnym znaczeniu użytych terminów". To zabezpieczenie, jest w logice Hyde'a zastąpione przez zwrot „dla pewnej dopuszczalnej precyzacji". Skutkiem tego, chociaż istnieje precyzacja, w której dane zdanie A jest prawdziwe oraz taka, (oczywiście, inna), w której $\neg A$ jest zdaniem prawdziwym, to, na mocy całej konstrukcji, jest wykluczone, aby istniała taka precyzacja, w której prawdziwe są jednocześnie A i $\neg A$. Nie ma przecież takiej precyzacji w której prawdziwa byłaby koniunkcja $A \wedge \neg A$. Jeśli więc dodamy, że wnioskowanie w teorii podwartościowania jest poprawne, gdy z prawdziwości przesłanek dla jakichś precyzacji wynika, iż wniosek musi być prawdziwy dla jakiejś precyzacji (być może zupełnie innej), to mamy jasność, że na gruncie teorii Hyde'a, ze zbioru zdań $\{A, \neg A\}$ nie może wynikać $A \wedge \neg A$. Fakt ten można uogólnić następująco: ze zbioru zdań $\{A, B\}$ nie wynika, na gruncie teorii podwartościowań, koniunkcja $A \wedge B$. Istotnie, jeśli zdanie A jest prawdziwe dla pewnej precyzacji, zaś B jest prawdziwe dla, być może, innej precyzacji, to, w ogólności, nie musi istnieć precyzacja dla której koniunkcja $A \wedge B$ jest prawdziwa, a więc nie musi być tak, że $A \wedge B$ jest prawdziwe dla jakiejkolwiek dopuszczalnej precyzacji. Tak więc, rezygnacja z logiki klasycznej na rzecz systemu Jaśkowskiego spowodowała, iż w teorii podwartościowania można twierdzić, iż obowiązuje zasada niesprzeczności[273]. Jak widać, w powyższych rozważaniach, kluczową rolę odgrywa precyzacja, która niejako nadaje znaczenie, istotnemu dla danego zdania, nieostremu terminowi. Dlatego też, teorię podwartościowania uważa się za tę, która nieostrość

---

[272] Prawo przepełnienia, zwane również prawem Dunsa Szkota, umożliwia wyprowadzenie dowolnego zdania z pary zdań sprzecznych: $\{A, \neg A\} \vdash B$. Mamy wówczas do czynienia z *trywializacją* wnioskowania. Zatem, zbiór wniosków wyprowadzalnych z takiej pary przesłanek jest zbiorem wszystkich zdań języka, stąd nazwa „prawo przepełnienia".

[273] Co prawda, istnieją opinie głoszące, iż w teorii Hyde'a spójnik „$\wedge$" nie jest spójnikiem koniunkcji, gdyż na gruncie tej teorii, ze zbioru zdań $\{A, B\}$ nie wynika $A \wedge B$, Priest i Routley, [1989], s. 159.

sprowadza do wieloznaczności[274]. Fakt ten nie może uchodzić za zaletę propozycji Hyde'a. Niestety, jego teoria ma jeszcze trudniejsze do zaakceptowania konsekwencje. Przeanalizujmy bowiem, jak w teorii podwartościowania rozwiązywany jest paradoks stosu.

Załóżmy, że dysponujemy pewną klasą precyzacji. Sprawdźmy poprawność wnioskowań tworzących dobrze znaną serię. W tym celu rozważmy przesłanki:

(k-ta przesłanka kategoryczna) *Człowiek mający k włosów na głowie jest łysy.*
(k-ta przesłanka warunkowa) *Jeśli człowiek mający k włosów na głowie jest łysy, to człowiek mający k+*1 *włosów na głowie jest łysy.*

Czy dla dowolnej liczby naturalnej k możemy, na gruncie teorii podwartościowań, poprawnie wywnioskować zdanie:

(k-ty wniosek) *Człowiek mający k+*1 *włosów na głowie jest łysy.*

Jasne jest, że dla każdej, a więc w szczególności i naszej, klasy precyzacji, istnieją dwie, wspomniane już wcześniej, liczby k_1 oraz k_2 takie, że zdanie „Człowiek mający n włosów na głowie jest łysy" jest:

a. prawdziwe dla każdej precyzacji, jeśli tylko $n \leq k_1$;

b. prawdziwe dla pewnej precyzacji i fałszywe dla innej precyzacji, jeśli tylko $k_1 < n \leq k_2$;

c. fałszywe dla każdej precyzacji, jeśli tylko $k_2 < n$.

Zatem, z samego określenia poprawności wnioskowania na gruncie teorii Hyde'a wynika, że wnioskowanie:

(k-ta przesłanka kategoryczna) + (k-ta przesłanka warunkowa) $\rightarrow$ (k-ty wniosek)

jest poprawne, jeśli zdanie będące k-tym wnioskiem będzie prawdziwe dla jakiejś precyzacji. Niepoprawnym wnioskowaniem będzie dopiero to, w którym k jest największą spośród tych liczb, dla których zdanie „Człowiek mający k włosów na głowie jest łysy" jest prawdziwe dla jakiejś precyzacji, czyli gdy $k = k_2$. Wówczas bowiem, po pierwsze, zdanie to jest również fałszywe dla pewnej precyzacji, a więc k-ta przesłanka warunkowa jest dla tej precyzacji prawdziwa, a po drugie, k-ty wniosek będzie zdaniem fałszywym dla każdej precyzacji.

---

[274] Takie rozumienie nieostrości proponuje sam Hyde, [1997], s. 650: „Sentences attributing vague predicates to their borderline cases are ambiguous; there is a range of distinct admissible disambiguations, each corresponding to a precise proposition which the vague sentence might be used to express".

Jak widać, poprawne wnioskowanie stwierdzające kolejno, że człowiek mający k włosów na głowie jest łysy, zatrzyma się dopiero na $k = k_2$. Oznacza to, że dopóty będziemy stwierdzać łysość człowieka, dopóki nie wykroczymy poza półcień predykatu „być łysym". Ponieważ klasa precyzacji wyznacza, dla każdego nieostrego predykatu, w ściśle precyzyjny sposób, obie ekstensje, a więc i półcień tego predykatu, więc przedstawione wyżej rozumowanie, łączy ekstensję pozytywną predykatu „być łysym" z półcieniem tego predykatu, wytyczając, tym samym, wyraźną granicę między dwoma zbiorami: jednym jest suma ekstensji pozytywnej i ostro wyznaczonego półcienia predykatu, drugim zaś, równie ostro, wyznaczona ekstensja negatywna.

Zatem, w wyniku serii poprawnych, z punktu widzenia teorii Hyde'a, wnioskowań, predykat „być łysym" został wyostrzony w ten sposób, że jego ekstensją negatywną jest zbiór ludzi o takiej ilości włosów na głowie, że zdanie orzekające, iż człowiek mający tę właśnie ilość włosów na głowie jest łysy, jest fałszywe dla każdej precyzacji. Wszyscy pozostali ludzie tworzą wyraźnie wyznaczony zbiór łysych. Już sam fakt wyostrzenia predykatu nieostrego, a więc zastąpienie go ostrym predykatem, pod względem znaczenia w oczywisty sposób niezgodnym z wyjściowym predykatem, musi budzić wątpliwości. Zwłaszcza, że granica rozdzielająca obie ekstensje predykatu jest wyznaczona w dziwny, niezgodny z intuicjami sposób[275]. W wyniku zastosowania poprawnego przecież, na gruncie teorii Hyde'a, wnioskowania otrzymujemy zupełnie niezgodny z naszymi intuicjami taki podział ludzi na łysych i niełysych, że niełysym człowiekiem jest tylko ten, kto bez najmniejszego wątpienia jest niełysym, zaś łysym jest zarówno ten, kto bez wątpienia jest łysym, jak i ten, kto, ani nie jest bez wątpienia łysym, ani nie jest bez wątpienia niełysym. W szczególności więc, łysym jest ten, kto nie jest bez wątpienia niełysym, czyli ten którego łysość jest wątpliwa.

Jak widać, doszliśmy do niezwykłego pojmowania łysości. Jednak, przede wszystkim, niezwykła, aby nie powiedzieć dziwna, jest teoria w taki sposób

---

[275] To połączenie w jedną nową, pozytywną ekstensję dawnej ekstensji pozytywnej oraz całego półcienia jest dokładnie tym zabiegiem, który przeprowadził Sorensen w swym „dowodzie" na to, iż szara nieostra kula jest ostra (patrz paragraf poświęcony nieostrościom pozajęzykowym). Idealna biel tworzyła, jego zdaniem, dopełnienie kuli, zaś szarą kulę, której szarość przechodziła płynnie w biel rozumiał jako dopełnienie wyraźnie wyznaczonej bieli. Tym samym, w jedną szarą kulę połączył szarą kulę i jaśniejący ku bieli brzeg kuli. Najwyraźniej, Sorensen skorzystał z faktu, iż za szarość uważamy każdy kolor jaśniejszy od czerni i ciemniejszy od bieli, zupełnie tak, jak gdyby biel i czerń były terminami ostrymi. Przypuszczalnie z tego faktu wynika uprzywilejowana pozycja bieli wobec szarości. Interesująca byłaby zamiana miejscami szarości i bieli w eksperymencie myślowym Sorensena. Wówczas, kierując się wspomnianym tradycyjnym pojmowaniem szarości, najprawdopodobniej, Sorensen stwierdziłby, że kulę tworzy obszar idealnej bieli, zaś dopełnienie kuli to szarość w każdym swoim możliwym odcieniu. Prawdziwy problem wyboru pojawiłby się, gdyby biel i szarość zamienić na zieleń i czerwień. Wówczas, każde z dwóch możliwych wyostrzeń kuli byłoby tak samo uzasadnione.

wyostrzająca predykat „być łysym”. Zwłaszcza, że łatwo zauważyć, iż idąc w rozumowaniu *sorites* od niełysego do łysego, podział na łysych i niełysych będzie zupełnie inny. Łysym człowiekiem jest wówczas tylko ten, kto bez najmniejszego wątpienia jest łysy, zaś niełysym jest zarówno ten, kto bez wątpienia jest niełysym, jak i ten, kto, ani nie jest bez wątpienia łysym, ani nie jest bez wątpienia niełysym. W szczególności więc, niełysym jest ten, kto nie jest bez wątpienia łysym, czyli ten którego łysość jest wątpliwa.

Zauważmy, że ta sama klasa precyzacji wyznaczy w ostry sposób ekstensję pozytywną predykatu „być niełysym” w taki sposób, że ekstensja ta jest sumą ekstensji negatywnej oraz półcienia predykatu „być łysym”. Podobnie, ekstensja pozytywna predykatu „być łysym” jest sumą ekstensji negatywnej oraz półcienia predykatu „być niełysym”. Zatem, przy danej klasie precyzacji, ten sam obiekt, będący człowiekiem tradycyjnie uważanym za przypadek graniczny predykatów „być łysym” i „być niełysym” będzie należał do ekstesji pozytywnej jednego i drugiega predykatu – będzie więc zarazem łysym i niełysym.

W zależności od tego, czy, w przeprowadzonym na gruncie teorii podwartościowania, rozumowaniu typu *sorites* wychodzimy od predykatu *P*, czy od *nie-P*, otrzymujemy zupełnie inne, a więc wzajemnie wykluczające się, a ponadto, za każdym razem równie niezgodne z intuicjami, wyostrzenie predykatu *P*.

Wniosek ustanawiającego wyraźną granicę między ekstensją negatywną predykatu a obszarem nieostrości jest tak trudny do zaakceptowania, że sami zwolennicy teorii Hyde’a uznali, iż lepiej go nie wyprowadzać, lecz poprzestać na stwierdzeniu, że tak naprawdę, rozumowanie stosu nie jest poprawne, gdyż zawiera błąd ekwiwokacji – jedno i to samo zdanie ma różne wartości logiczne – dla pewnego *k*, w jednej przesłance rozumowania opartego na *Modus Ponens* zdanie „Człowiek mający *k* włosów na głowie jest łysy” jest prawdziwe, w innej zaś fałszywe. Ponadto, nie jest jasne, dla jakiej wartości *k* ma miejsce ta wieloznaczność. Wiadomo jedynie, że dla jakiejś konkretnej wartości tak jest. Jednak wartość ta jest nieznana. Nie jest więc wiadome, w którym miejscu przebiega dokładna granica oddzielająca ekstensję negatywną od półcienia, chociaż granica taka istnieje[276]. Innymi słowy, dowód w rozumowaniu stosu nie napotyka na wskazaną wcześniej przeszkodę, gdyż przeprowadzający ciąg rozumowań nie zdają sobie sprawy z tego, iż dla pewnego *k*, ma miejsce jednoczesna prawdziwość *k*-tej przesłanki i *k*-tej przesłanki indukcyjnej oraz fałszywość *k*-tego wniosku. Wspomniana jednoczesna prawdziwość obu przesłanek jest natomiast możliwa tylko wówczas, gdy zdanie „Człowiek mający *k* włosów na głowie jest łysy” jest różnie rozumiane, a więc jest popełniony błąd ekwiwokacji, tylko wtedy zdanie to, jako *k*-ta przesłanka kategoryczna będzie prawdziwe,

[276] Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 57–58.

zaś jako poprzednik *k*-tej przesłanki warunkowej będzie fałszywe. To różne rozumienie zdania „Człowiek mający *k* włosów na głowie jest łysy" jest przecież niezbędne do tego, aby zdanie „Człowiek mający *k*+1 włosów na głowie jest łysy" mogło być zdecydowanie fałszywe. Dopiero wówczas, seria poprawnych wnioskowań zakończy się na liczbie *k*. W ten sposób Hyde uzasadnił swój pogląd, przyjmujący, iż paradoks stosu jest błędem ekwiwokacji. Tym samym uznał, iż nieostrość ma jakiś istotny związek z wieloznacznością, istotny do tego stopnia, że aż wskazujący na potrzebę sprowadzenia nieostrości do wieloznaczności.

Propozycja Hyde'a ma jednak inne, również bardzo niebezpieczne, konsekwencje, które godzą w jakieś intuicyjne pojmowanie logiczności. Jeśli bowiem jakiemuś konkretnemu zdaniu przypisujemy w jednym wnioskowaniu dwie różne wartości logiczne, to dlaczego czynimy to w taki a nie w inny sposób? Hyde potrzebuje, aby zdanie „Człowiek mający *k* włosów na głowie jest łysy" było w przesłance kategorycznej prawdziwe, a w warunkowej fałszywe. Jeśli jednak, w jakimś miejscu zdanie to traktujemy jako prawdziwe (ew. fałszywe), to co w tym momencie robimy z jego fałszywością (ew. prawdziwością)? Najwyraźniej, kierując się rozsądkiem, zapominamy o niej. Ponadto, dlaczego nie może się okazać, że zdanie to jest fałszywe w przesłance kategorycznej, a prawdziwe w warunkowej? Co ma decydować o tym, że jakieś jedno i to samo zdanie, w pewnych konkretnych okolicznościach traktujemy jako prawdziwe, a w innych jako fałszywe? Czy kryterium wyboru jest ustanowione przez potrzebę dopasowania problemu do teorii tak, aby teoria rozwiązywała problem? Z drugiej strony, stosowanie reguły *Modus Ponens* w celu wywnioskowania *B* z dwóch przesłanek *A* oraz $A \rightarrow B$ wówczas, gdy w każdym z dwóch przypadków wystąpienia „*A*" oznacza ono coś innego, nie jest przecież wnioskowaniem na mocy reguły *Modus Ponens*. Obie przesłanki mają wówczas, odpowiednio, postać *A* oraz $C \rightarrow B$, do których reguła odrywania w ogóle się nie stosuje.

Dość niejasne jest również założenie, że wyraźna granica między ekstensją negatywną a półcieniem istnieje, lecz nie można stwierdzić, w którym miejscu. Jeśli bowiem dana jest jakaś, jakakolwiek konkretna klasa dopuszczalnych precyzacji, to wskazanie, dla jakiej wartości *k* granica ta przebiega między *k* a $k + 1$ jest nie tylko możliwe, lecz wręcz nieuniknione. Aby więc zamaskować tę granicę należałoby całą teorię oprzeć nie na jednej klasie precyzacji, lecz na klasie klas precyzacji. Wówczas, ponieważ każda klasa wyznaczy własną, wyraźną granicę, otrzymamy klasę granic. Jaki jest jednak sens podobnych komplikacji? Aby przywrócić intuicyjność teorii, należałoby na siłę zrezygnować ze sztucznej skądinąd precyzji, którą ona proponuje i chociaż w ten ułomny sposób zapewnić sobie namiastkę nieostrości.

Próbę, jak sama pisze, „nowego", rozwiązania paradoksu stosu w oparciu o teorię podwartościowania podjęła Joanna Odrowąż-Sypniewska[277]. Zauważyła, że na gruncie teorii podwartościowania rozumowanie z dwóch przesłanek:

– k_0 ziarenek tworzy kopiec,

– dla każdej liczby naturalnej *k*, jeśli *k* ziarenek tworzy kopiec, to *k*–1 również tworzy kopiec;

jest obarczone błędem materialnym, gdyż druga przesłanka jest zdecydowanie fałszywa, jako że jest fałszywa przy każdej precyzacji. Zatem, wniosek „każda ilość ziarenek tworzy kopiec" nie może wynikać z tych przesłanek. Istotnie, spostrzeżenie to jest, w oczywisty sposób, słuszne. Przypomnijmy, że każda precyzacja ustala dla każdego nieostrego predykatu *P* ostrą granicę oddzielającą jego ekstensję pozytywną od negatywnej, ignorując kompletnie fakt istnienia przypadków granicznych. Przyjęcie więc klasy precyzacji oznacza założenie, iż nie ma żadnej nieostrości, a istnieje jedynie różnorodność opinii, w którym miejscu przebiega ostra granica między *P* a *nie-P*. Założenie to jest więc prostym zaprzeczeniem drugiej przesłanki, która mówi dokładnie to, że takiej granicy nie da się nigdzie przeprowadzić. Przesłanka ta ma bowiem równoważną postać: dla każdej liczby naturalnej *k*, nie jest prawdą, że (*k* ziarenek tworzy kopiec, a *k*–1 ziarenek nie tworzy kopca). Jeśli więc przyjmiemy założenie „istnieje taka liczba naturalna *k*, dla której *k* ziarenek tworzy kopiec, a *k*–1 ziarenek nie tworzy kopca", to znaczy, że zakładamy, iż „nie jest prawdą, że dla każdej liczby naturalnej *k*, nie jest prawdą, że (*k* ziarenek tworzy kopiec, a *k*–1 ziarenek nie tworzy kopca)", co jest precyzyjnym zaprzeczeniem drugiej przesłanki. Oczywiście, nie jest to żadne rozwiązanie paradoksu stosu, a najwyżej rozumowanie obarczone błędem *petitio principi*: aby pokazać, że jakieś zdanie jest fałszem zakłada się prawdziwość jego negacji.

Odrowąż-Sypniewska trafnie jednak zauważa, że proponowane przez nią rozwiązanie sprowadza teorię podwartościowań do teorii nadwartościowań. Tak faktycznie jest. Przecież, skoro nadprawdziwość jest tożsama ze zdecydowaną prawdziwością, więc w teorii podwartościowania, zdecydowanie prawdziwe są takie zdania, jak „Predykat 'być łysym' jest predykatem wyraźnym", czy „Predykat 'być łysym' nie ma obszaru nieostrości". Jasno więc widać, że w obu teoriach, problem nieostrości „rozwiązuje" się przyjmując, że nieostrości nie ma.

Przedstawione wyżej uwagi dotyczące propozycji Hyde'a wyraźnie pokazują, iż teoria podwartościowania nie ma większej wartości dla badań nad nieostrością, bo też nie bada nieostrości, lecz dziwnie pojętą ostrość. Pod tym względem jest podobna do teorii Fine'a nadwartościowania. Już samo

[277] Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 60–61.

operowanie klasą precyzacji, w każdej z obu teorii, zabija nieostrość nie pozostawiając nawet jej resztek. To zaś, co się potem robi przy pomocy klasy precyzacji jest sprawą drugorzędną, umożliwiającą jedynie odróżnienie jednej teorii od drugiej, lecz dla samej kwestii nieostrości jest to działanie bez znaczenia. Nic więc dziwnego, że w przypadku każdej z tych teorii nie mamy, ani paradoksu nieostrości, ani jakiegokolwiek innego problemu wiążącego się z nieostrością, jednak nie mamy ich dlatego, bo nie mamy nieostrości. Jeśli umówimy się, że nie ma os, to łatwo dojdziemy do wniosku, że nie ma również pogryzień przez osy. Niestety, osy jak gryzły tak gryzą, nie zważając na nasze ewentualne umawianie się między sobą.

4.1.4.3. STANOWISKO III

Z jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest prawdziwe w pewnym modelu M' należącym do rodziny RM'. Z jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest fałszywe w każdym modelu M' należącym do rodziny RM'.

Pogląd wyrażony w stanowisku trzecim cechuje się tym, iż każde zdanie języka *J'* jest, albo prawdziwe, albo fałszywe. Oznacza to, że w szczególności wszystkie zdania typu *Z*(*Q*), nawet te nie spełniające warunku (OM), mają określoną wartość logiczną. Trudno jest więc nazywać je niezdeterminowanymi. Oczywiście, nie znaczy to, że wszystkie zdania *Z*(*Q*) „zachowują" się standardowo. Załóżmy bowiem, że jakieś zdanie *Z*(*Q*) nie spełnia warunku (OM). Wówczas wiadomo, że również ~*Z*(*Q*) nie spełnia (OM). Zatem, zgodnie ze stanowiskiem trzecim, zarówno zdanie *Z*(*Q*), jak i jego negacja są zdaniami prawdziwymi, np. Qa_1 i $\sim Qa_1$. Istnieją więc zdania, które same będąc prawdziwymi mają również prawdziwe negacje. Zatem, w przypadku stanowiska drugiego, spójniki negacji i koniunkcji nie są charakteryzowane przez klasyczne matryce. Zostaje bowiem zawieszona metalogiczna zasada niesprzeczności, chociaż na poziomie języka przedmiotowego zasada ta nadal obowiązuje: mimo iż zdania Qa_1 i $\sim Qa_1$ są prawdziwe, ich koniunkcja $Qa_1 \wedge \sim Qa_1$ ma wartość fałszu. Jasnym jest też, iż nieostrość jest tu eliminowana przez operowanie klasą modeli – przecież w każdym modelu nieostrość znika, gdyż jest traktowana jako wyraźność.

Jako reprezentanta stanowiska trzeciego, Przełęcki wskazuje W. Rozebooma[278].

---

[278] Przełęcki, [1964], s. 103: W. Rozeboom, *The Factual Content of Theoretical Concepts*, Minnesota Studies, Vol. 3, 1962.

4.1.4.4. STANOWISKO IV

Z jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest prawdziwe w każdym modelu M′ należącym do rodziny RM′. Z jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest fałszywe w pewnym modelu M′ należącym do rodziny RM′.

Jak zauważa Przełęcki, stanowisko czwarte jest dualne do trzeciego. Każde zdanie języka *J′* jest, albo prawdziwe, albo fałszywe. Zdania *Z*(*Q*) nie spełniające warunku (OM) mają tę własność, iż same będąc fałszywymi, mają również fałszywe negacje. Naturalnie, zawiesza to metalogiczną zasadę wyłączonego środka, która nadal jest prawem na poziomie języka przedmiotowego: mimo iż zdania Qa_1 i $\sim Qa_1$ są fałszywe, ich alternatywa $Qa_1 \vee \sim Qa_1$ ma wartość prawdy. Spójniki negacji i alternatywy nie są tu charakteryzowane klasycznymi matrycami. Ponadto, innym poważnym problemem wiążącym się z tym stanowiskiem jest fakt, iż zdania niezdeterminowane mają określone wartości logiczne. Kłóci się to z pojęciem zdania niezdeterminowanego. Ponadto, z oczywistych powodów, tu również mamy do czynienia z wyraźnością zastępującą nieostrość.

Cztery przeanalizowane dotychczas stanowiska cechuje to, iż uwzględniają one istnienie zdań niezdeterminowanych. Niestety, ze względu na kluczową rolę klasy modeli, w każdym z czterech przypadków, zbiór zdań niezdeterminowanych zawsze jest wyznaczony wyraźnie. Przeczy to naszym intuicjom. O ile bowiem, istnieją nietypowe raczej predykaty nieostre z ostro wyznaczonymi przypadkami granicznymi, o tyle w zdecydowanej większości przypadków, obszary nieostrości nie mają ostrych granic. W każdym z czterech stanowisk sposób rozumienia niezdeterminowania zdania jest inny. W pierwszym, zdania te nie mają nadwartości logicznej i mogą być uznane za bezsensowne: nie są, ani nadprawdziwe, ani nadfałszywe. Zgodnie z drugim stanowiskiem, fakt niezdeterminowania zdania oznacza jego jednoczesną prawdziwość i fałszywość. Zdania te nie są ani zdecydowanie prawdziwe, ani zdecydowanie fałszywe. Trzecie stanowisko zakłada, że zdanie niezdeterminowane cechuje się tym, że zarówno to zdanie jak i jego negacja są zdaniami prawdziwymi. Wreszcie, zgodnie z czwartym stanowiskiem, zdanie niezdeterminowane to takie, które jest fałszywe i którego negacja jest fałszywa. Dwa kolejne stanowiska, różnią się od czterech powyższych w sposób zasadniczy. Ani stanowisko piąte, ani szóste, nie dopuszcza bowiem istnienia zdań niezdeterminowanych. W stanowisku piątym widać to wyraźnie, w szóstym zaś, jest założone, że jedynie nam się wydaje, iż pewne zdania są niezdeterminowane, tymczasem, w rzeczywistości, żadne zdanie, które tradycyjnie uważa się za nieostre, nie jest zdaniem niezdeterminowanym.

4.1.4.5. STANOWISKO V (DEFINICJE REGULUJĄCE, TEORIA NAZW NIEOSTRYCH, TRÓJWARTOŚCIOWOŚĆ, TEORIA ZBIORÓW PRZYBLIŻONYCH)

Z jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest prawdziwe w modelu M_i'; Z jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest fałszywe w modelu M_i'; gdzie M_i' jest określonym modelem wybranym z rodziny RM' na podstawie dodatkowych założeń.

Prawdziwość (fałszywość) zdania zależy teraz od prawdziwości (fałszywości) tego zdania w pewnym konkretnym modelu M_i', należącym do klasy *RM'* modeli. Ten szczególny model jest wskazany przez pewne dodatkowe, przyjęte z góry, założenia, które tylko on spełnia. Samo zdefiniowanie prawdziwości i fałszywości sprawia jednak, że bez względu na to, jakie kryteria decydują o wyborze modelu M_i', nie tylko wszystkie prawa klasycznego rachunku kwantyfikatorów, lecz także wszelkie klasyczne, metalogiczne prawa zostają zachowane. Naturalnie, każde zdanie, a więc w szczególności zdanie typu $Z(Q)$, nie spełniające warunku (OM), jest, albo prawdziwe, albo fałszywe.

Pozostaje teraz przyjrzeć się sposobowi wyboru tego, a nie innego modelu, który może pełnić funkcję modelu właściwego w języku J', na wzór modelu M^* języka J. Ponieważ każdy model, poprzez ścisłe określenie prawdziwości i fałszywości zdań typu $Z(Q)$, w precyzyjny sposób ustala ekstensję pozytywną i negatywną nieostrego predykatu Q, to predykat ten w każdym modelu przyjmuje wyraźną postać, chociaż może być predykatem otwartym. Naturalnie, wybór modelu powinien uwzględniać funkcjonujące w społeczności zasady posługiwania się danym nieostrym terminem, w szczególności więc, powinien spełniać warunek konsekwencji w operowaniu terminem nieostrym. Zatem, wyostrzenie danego terminu nie może gwałcić zwyczaju językowego społeczności posługującej się językiem. Jeśli więc, np. dla potrzeb stosowania prawa, ustala się wyraźną granicę, między ekstensją pozytywną i negatywną, terminu „pełnoletni", tak aby półcień był zbiorem pustym, to ustalenie to nie może ignorować powszechnego rozumienia tego nieostrego przecież słowa, wyznaczając granicę nieostrości na chwilę ukończenia np. pięciu lub pięćdziesięciu lat. Ponadto, ustalanie to musi być konsekwentne w tym sensie, że jeśli pełnoletnim jest ktoś w wieku x, to każdy kto jest w wieku $y > x$ też musi być pełnoletni.

Jak widać, stanowisko piąte może się wiązać z praktyczną potrzebą wyznaczenia wyraźnej granicy przez obszar nieostrości, czyli półcień, terminu nieostrego. To wyostrzanie terminów nieostrych przeprowadza się stosując tak zwane definicje regulujące[279]. Zatem, wybór danego modelu, który ma pełnić

[279] Patrz np. Ziembiński, [1959], s. 42–44.

funkcję modelu właściwego sprowadza się do przyjęcia takich a nie innych definicji regulujących. Nie zawsze jest jednak konieczne wytyczenie ostrej granicy oddzielającej ekstensję pozytywną od negatywnej danego predykatu. Stanowisko piąte dopuszcza również możliwość zachowania niepustości półcienia, jednak półcień ten musi być wyznaczony w sposób precyzyjny, a więc wyraźny.

Możliwe jest więc, że w ramach stanowiska piątego zostanie dokonany wyraźny podział, nie na ekstensję pozytywną i negatywną danego nieostrego predykatu, lecz na trzy, oczywiście ostro wyznaczone, zbiory: ekstensję pozytywną, negatywną oraz ostry w przypadku każdego nieostrego predykatu (!) obszar nieostrości. Podział ten może być przeprowadzony w ramach logiki dwuwartościowej, jak również może być naturalną konsekwencją zastosowania logiki trójwartościowej. Przykładem podejścia zachowującego dwuwartościowość logiczną, które zakłada podział na trzy wspomniane już zbiory, jest propozycja Tadeusza Kubińskiego. Zastosowanie zaś logik trójwartościowych stało się podstawą trzech innych, również niżej omówionych, alternatywnych propozycji: Sörena Halldéna, Stephana Körnera oraz Michaela Tye'a. Mimo iż Przełęcki zakładał klasyczność modeli, trójwartościowe „rozwiązania" zostały zaliczone do stanowiska piątego, gdyż prowadzą do dokładnie tych samych konsekwencji, co propozycja Kubińskiego. Ponadto, stanowisko piąte zakłada, iż zdania niezdeterminowane mają wartość logiczną. Niekiedy więc, wartość ta jest jakąś trzecią, różną od prawdy i fałszu.

Propozycja Kubińskiego

Przedstawiając swoją klasyfikację podejść do nieostrości, Przełęcki podał *Teorię Nazw Nieostrych* Kubińskiego jako przykład propozycji reprezentującej stanowisko piąte[280]. Tę precyzyjną i zgrabną teorię Kubiński zreferował w, cytowanej już przez nas, pracy *Nazwy Nieostre*, opublikowanej w 1958 roku[281]. Podstawą propozycji Kubińskiego jest, jak sam jej twórca zauważa, założenie, że obszary nieostrości są w jakiś niesprecyzowany bliżej sposób wyostrzone, co oczywiście nie znaczy, że tych obszarów nie ma. Jak już wcześniej przypomnieliśmy[282], Kubiński za nazwę nieostrą uważa każdą, która poza ekstensją pozytywną i negatywną posiada niepusty brzeg, czyli istnieją takie obiekty, które nie należą, ani do ekstensji pozytywnej, ani do ekstensji negatywnej tej nazwy. Co więcej, brzeg każdej nazwy nieostrej jest wyznaczony wyraźnie[283]. Nie może więc ulegać najmniejszej wątpliwości, że teoria

---

[280] Przełęcki, [1964], s. 104.

[281] Kubiński, [1958].

[282] Patrz paragraf poświęcony definicji nieostrości.

[283] Kubiński, [1958], s. 159–160. Założenie to prowadzi do faktycznej likwidacji nieostrości, patrz paragraf poświęcony definicji nieostrości.

Kubińskiego nie jest teorią nieostrości, lecz jest kolejną teorią ostrości, zastępującą nieostrość wyraźnością.

Propozycja Kubińskiego relatywizuje, zarówno ostrość, jak i nieostrość nazw do systemów dedukcyjnych zwanych przez niego quasi-ontologiami, a to z powodu bliskiego pokrewieństwa tych systemów z ontologią Leśniewskiego[284]. Trzonem każdej quasi-ontologii jest system Ω, będący jej częścią właściwą. Do języka systemu Ω, poza symbolami spójników zdaniowych języka klasycznej logiki zdaniowej, należą zmienne nazwowe: u, v, w, x, y, z; funktor zdaniotwórczy od dwóch argumentów nazwowych: ε (*jest*)[285]; funktor nazwotwórczy od jednego argumentu nazwowego: N (*nie-*); funktory nazwotwórcze od dwóch argumentów nazwowych: A (*lub*), K (*i*); kwantyfikatory: $\forall$, $\exists$. Język systemu Ω jest to najmniejszy zbiór o własnościach: 1. wszystkie wyrażenia postaci $\varepsilon x\phi(y_1, ..., y_n)$ należą do tego języka; 2. jeśli p oraz q należą do tego języka, to $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$, $\neg p$, $\forall zp$, $\exists zp$ również do niego należą[286]. Aksjomaty i definicje systemu Ω są następujące[287]:

A1. $\forall x,y\, (\varepsilon xy \leftrightarrow (\exists z\, \varepsilon zx \wedge \forall v,w\, ((\varepsilon vx \wedge \varepsilon wx) \rightarrow \varepsilon vw) \wedge \forall u\, (\varepsilon ux \rightarrow \varepsilon uy)))$,
A2. $\forall x,y\, \varepsilon xy \rightarrow \neg(\varepsilon xNy))$,
D1. $\forall x,y,z\, (\varepsilon xAyz \leftrightarrow (\varepsilon xy \vee \varepsilon xz))$,
D2. $\forall x,y,z\, (\varepsilon xKyz \leftrightarrow (\varepsilon xy \wedge \varepsilon xz))$,
A3. $\forall x,y,z\, ((\varepsilon xNAyz \leftrightarrow (\varepsilon xNy \wedge \varepsilon xNz) \wedge (\varepsilon xNKyz \leftrightarrow (\varepsilon xNy \vee \varepsilon xNz) \wedge$
$(\varepsilon xNNy \leftrightarrow \varepsilon xy))$.

A1 jest jedynym aksjomatem ontologii Leśniewskiego[288]. Zgodnie z A2, jeśli coś jest y, to nie jest *nie-y*. D1 oraz D2 są zapożyczonymi z ontologii Leśniewskiego definicjami nazw: alternatywnej i koniunkcyjnej. A3 jest koniunkcją obu praw De Morgana i prawa podwójnej negacji dla nazw. Regułami inferencji są standardowe reguły dla klasycznego rachunku kwantyfikatorów. Dalej, Kubiński dowodzi niesprzeczności, niezależności oraz niezupełności systemu Ω określonego przez A1, A2, D1, D2, A3[289].

---

[284] Kubiński, [1958], s. 126. Ontologia Leśniewskiego została omówiona w rozdziale poświęconym paradoksom wynikającym z niedoskonałości naszej intuicji.

[285] Wyrażenie „εab" czytamy: „a jest b".

[286] $\phi(y_1, .., y_n)$ jest funkcją nazwową, w której jedynymi zmiennymi są y_1, .., y_n. W pracy Kubińskiego symbole „$\neg$" , „$\leftrightarrow$", „$\forall x$", „$\exists x$" są zastąpione przez odpowiednio: „'", „$\equiv$", „x" z wypukłym daszkiem, „x" z wklęsłym daszkiem.

[287] Kubiński, [1958], s. 127.

[288] Patrz paragraf poświęcony systemom Leśniewskiego w rozdziale dotyczącym paradoksów wynikających z niedoskonałości naszej intuicji.

[289] Układ A1-3, D1-2 jest niesprzeczny, gdyż istnieje interpretacja systemu Ω. Ten sam układ jest niezależny, ponieważ żadne z wyrażeń A1-3, D1-2 nie wynika z pozostałych. Ten sam układ jest niezupełny, gdyż istnieje takie wyrażenie p języka systemu Ω, które w jednej interpretacji tego systemu jest tautologią, w innej zaś interpretacji systemu Ω tautologią jest $\neg p$.

System Ω jest bazą dla zdefiniowania, tak zwanej, *quasi-ontologii minimalnej*, w której kluczową rolę odgrywa zbiór nazw jednostkowych. Quasi-ontologia minimalna jest systemem określonym na nowym języku będącym językiem systemu Ω rozszerzonym o nazwy jednostkowe. Quasi-ontologia zawiera system Ω. Jej nowymi aksjomatami są: *aksjomaty istnienia jednostkowego* (εaa, dla nazwy jednostkowej a) oraz *tezy empiryczne* (εab, εaNb, $\neg(\varepsilon ab) \wedge \neg(\varepsilon aNb)$; dla nazwy jednostkowej a oraz niejednostkowej b). Ponadto, nowymi regułami quasi-ontologii minimalnej są reguły, będące odpowiednikami reguł klasycznego rachunku kwantyfikatorów, w istotny sposób dotyczące zbioru nazw jednostkowych[290]. Aksjomaty istnienia jednostkowego wprowadzają do języka nazwy jednostkowe. Jeśli zbiór tych aksjomatów jest pusty, w języku nie ma ani jednej nazwy jednostkowej. Tak więc, wśród quasi-ontologii minimalnych szczególnie ważne są te, w których językach zbiory nazw jednostkowych nie są puste. Jedynie bowiem posługując się nazwami jednostkowymi, tezy empiryczne mogą określić, czy przedmiot reprezentowany przez nazwę jednostkową a należy do ekstensji pozytywnej nazwy niejednostkowej b (wówczas aksjomatem jest εab), czy należy do ekstensji negatywnej nazwy b (wówczas, εaNb), czy też należy do brzegu nazwy b (wówczas, $\neg(\varepsilon ab) \wedge \neg(\varepsilon aNb)$). Jak widać, istnienie nazw jednostkowych umożliwia wyrażenie syntaktycznej ostrości oraz syntaktycznej nieostrości nazwy niejednostkowej[291].

DEFINICJA SYNTAKTYCZNA 1. *Nazwa* $\phi(b_1, ..., b_n)$, *gdzie* $b_1, ..., b_n$ *są niejednostkowymi nazwami atomowymi, jest nieostra w słowniku języka quasi-ontologii minimalnej S zawierającej co najmniej jeden aksjomat istnienia jednostkowego wtedy i tylko wtedy, gdy w słowniku tym istnieje taka nazwa jednostkowa „a", że ani wyrażenie* $\varepsilon a\phi(b_1, ..., b_n)$ *ani też wyrażenie* $\varepsilon aN\phi(b_1, ..., b_n)$ *nie są tezami systemu S*[292].

DEFINICJA SYNTAKTYCZNA 2. *Nazwa* $\phi(b_1, ..., b_n)$, *gdzie* $b_1, ..., b_n$ *są niejednostkowymi nazwami atomowymi, jest ostra w słowniku języka quasi-ontologii minimalnej S zawierającej co najmniej jeden aksjomat istnienia jednostkowego wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest w tym słowniku nieostra.*

Łatwo zauważyć, że jeśli w słowniku systemu nie ma ani jednej nazwy jednostkowej, to, ponieważ nie daje się wysłowić kryterium nieostrości, żadna nazwa nie jest, ani ostra, ani nieostra. Jeśli jednak, istnieje w systemie przynajmniej jeden aksjomat istnienia jednostkowego, to każda niejednostkowa

---

[290] Patrz, Kubiński, [1958], s. 132.

[291] Kubiński, [1958], s. 141.

[292] Nazwę nazywać będziemy atomową wtedy i tylko wtedy, gdy nie występuje w niej żaden funktor nazwotwórczy od argumentów nazwowych. Nazwy nie będące atomowymi nazywać będziemy molekularnymi, Kubiński, [1958], s. 126.

nazwa języka tego systemu jest, albo ostra, albo nieostra[293]. Niestety, suma zbioru nazw ostrych i zbioru nazw nieostrych słownika quasi-ontologii minimalnej zawsze jest podzbiorem właściwym zbioru wszystkich nazw słownika tego systemu. Istnieją więc zawsze pewne nazwy, które nie są, ani ostre, ani nieostre. Są nimi nazwy jednostkowe, np. *Kaa*, gdy *a* jest nazwą jednostkową. Rozwiązanie tego problemu musi więc polegać na takim uogólnieniu podanych wyżej definicji nazw ostrych i nieostrych, aby objęły swoim zasięgiem także wszystkie nazwy jednostkowe. Kubiński proponuje przyjąć, że wszystkie nazwy jednostkowe są ostre[294]. Aby osiągnąć ten cel wystarczy usunąć z obu definicji założenie niejednostkowości nazw $b_1, ..., b_n$.

Obie definicje w nowym kształcie określają, syntaktycznie, nazwy ostre i nieostre w ten sposób, że spełnione są, przyjęte wcześniej przez Kubińskiego, cztery kryteria trafności definicji nieostrości[295]:

[i] *zbiór nazw ostrych i nazw nieostrych słownika języka systemu są rozłączne*;

[ii] *suma zbioru nazw ostrych i nazw nieostrych słownika języka systemu jest identyczna ze zbiorem wszystkich (niejednostkowych) nazw tego języka*;

[iii] *zbiór nazw ostrych języka systemu jest zamknięty ze względu na operacje tworzenia nazwy alternatywnej, koniunkcyjnej i negacyjnej*[296];

[iv] *dowolna nazwa atomowa a należąca do słownika języka systemu jest w nim nieostra wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka nazwa jednostkowa j tegoż słownika, że ani wyrażenie εja ani też wyrażenie εjNa nie są tezami systemu.*

Jasno widać, że z połączenia [i] oraz [ii] wynika, że „nieostrość" jest dla Kubińskiego nazwą wyraźną. Przeczy to naszym wcześniejszym ustaleniom, wykorzystującym klasę predykatów, w której niektóre były ostre, inne zaś nieostre, a ponadto, przejście od jednych do drugich jest „płynne".

Jednak głównym celem pracy Kubińskiego jest semantyczne zdefiniowanie ostrości i nieostrości nazw. W tym celu rozważa on niepusty zbiór *U*, „ustalający raz na zawsze" zbiór indywiduów oraz zbiór *Z*, nazwany przez siebie przestrzenią nazw. *Z* jest najmniejszym zbiorem spełniającym dwie własności: 1. do *Z* należą przedmioty $a_1, a_2, ...$, oraz 2. jeśli do *Z* należą przedmioty *x* i *y*, to należą do *Z* również przedmioty *Axy*, *Kxy*, *Nx*. Funkcją interpretującą jest f: $Z \rightarrow 2^U$, która spełnia następujące warunki: $fAxy = fx \cup fy$, $fKxy = fx \cap fy$, $fNNx$

[293] Dla quasi-ontologii z co najmniej jednym aksjomatem istnienia jednostkowego, posługując się kolejnymi definicjami, Kubiński dzieli wszystkie niejednostkowe nazwy na: ostre uniwersalne, ostre puste, ostre nieuniwersalne niepuste, nieostre uniwersalne, nieostre puste, nieostre całkowicie, nieostre niecałkowicie nieuniwersalne niepuste, Kubiński [1958], s. 143.

[294] Kubiński wskazuje na problem nazw typu „najwybitniejszy kompozytor francuski", które wydają się być jednostkowymi nieostrymi, Kubiński, [1958], s. 148.

[295] Kubiński, [1958], s. 126.

[296] Jeśli więc *a* i *b* są nazwami ostrymi, to nazwami ostrymi są również: „*a* lub *b*", „*a* i *b*" oraz „*nie-a*".

$= fx$, $fNAxy = fNx \cap fNy$, $fNKxy = fNx \cup fNy$, $fx \cap fNx = \varnothing$. Zatem, funkcja f przyporządkowuje każdej nazwie co najwyżej jeden podzbiór zbioru U, co oznacza, że żadna nazwa w zbiorze Z nie jest rozumiana wieloznacznie. Dla każdej nazwy x, elementy zbioru fx są jej desygnatami. Zatem, zbiór fx jest ekstensją pozytywną nazwy x, zaś fNx ekstensją negatywną tej nazwy. Brzegiem nazwy x jest więc zbiór $Bx = U - (fx \cup fNx)$. Postać definicji semantycznych nazwy nieostrej oraz nazwy ostrej jest spodziewana[297].

DEFINICJA SEMANTYCZNA 1. *Nazwa x należąca do przestrzeni nazw Z jest nieostra wtedy i tylko wtedy, gdy $Bx \neq \varnothing$.*

DEFINICJA SEMANTYCZNA 2. *Nazwa x należąca do przestrzeni nazw Z jest ostra wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest nieostra.*

Dla tak zdefiniowanych nazw nieostrych i ostrych Kubiński dowodzi serii twierdzeń, które wskazują na dość intuicyjne związki, jakie zachodzą między ekstensją pozytywną, ekstensją negatywną a brzegiem nazw. Dla przykładu przytoczmy niektóre z tych twierdzeń. Niech symbole „N" oraz „O" oznaczają odpowiednio zbiór wszystkich nazw nieostrych przestrzeni Z oraz zbiór wszystkich nazw ostrych tej przestrzeni. Dla $x \in Z$[298].

- *$x \in N$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Nx \in N$;*
- *$x \in O$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Nx \in O$;*
- *$fx \subseteq U - fNx$ i $fNx \subseteq U - fx$;*
- *Jeśli $x \in O$, to ($U - fNx \subseteq fx$ i $U - fx \subseteq fNx$);*
- *$Bx = \varnothing$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U - fx \cap U - fNx = \varnothing$;*
- *$BAxy = Bx(U - fy) \cup By(U - fx)$;*
- *$BKxy = Bx(U - fNy) \cup By(U - fNx)$;*
- *Jeśli $Bx \subseteq fy$ i $By \subseteq fx$, to $Axy \in O$;*
- *Jeśli $Bx \subseteq fNy$ i $By \subseteq fNx$, to $Kxy \in O$;*
- *Podzbiór O zbioru Z jest zamknięty ze względu na operację tworzenia nazwy negacyjnej, koniunkcyjnej i alternatywnej;*
- *Podzbiór N zbioru Z jest zamknięty ze względu na operację tworzenia nazwy negacyjnej. Nie jest natomiast na ogół zamknięty na operację tworzenia nazwy koniunkcyjnej i alternatywnej.*

Analogicznie do rodzajów nieostrości oraz ostrości syntaktycznych, Kubiński rozważa rodzaje nieostrości i ostrości semantycznych. Niech symbole „U", „P", „NC" oznaczają, odpowiednio, zbiór nazw: uniwersalnych, pustych, całkowicie nieostrych. Apostrof, tradycyjnie, oznacza dopełnienie zbioru, przy

---

[297] Kubiński, [1958], s. 158–159.
[298] Kubiński, [1958], s. 160.

którym występuje, do uniwersum U. Symbole „O" i „N" zachowują swoje dotychczasowe znaczenie[299]. Niech $x \in Z$[300].

$X \in OU$	*wtw*	$Bx = fNx = \varnothing$;
$X \in OP$	*wtw*	$Bx = fx = \varnothing$;
$x \in OU'P'$	*wtw*	$x \in O$ *oraz* $fx \neq \varnothing \neq fNx$;
$x \in NU$	*wtw*	$Bx \neq \varnothing \neq fx$ *oraz* $fNx = \varnothing$;
$x \in NP$	*wtw*	$Bx \neq \varnothing \neq fNx$ *oraz* $fx = \varnothing$;
$x \in NC$	*wtw*	$Bx \neq \varnothing$ *oraz* $fx = fNx = \varnothing$;
$x \in NU'P'C'$	*wtw*	$Bx \neq \varnothing$ *oraz* $fx \neq \varnothing \neq fNx$.

Jak zauważa Kubiński, przedstawione definicje ustalają podział logiczny przestrzeni Z[301]. Przedstawia także serię dowodów na to, iż zachodzi, oczekiwany, związek między syntaktyczną a semantyczną charakterystyką nieostrości i ostrości nazw. Swoją analizę kończy słowami[302]: „Do każdej quasi-ontologii minimalnej daje się tak dobrać pewien fragment rzeczywistości, by system ten opisywał ów fragment rzeczywistości i by nazwy ze słownika tego systemu należały do pewnego podzbioru zbioru nazw ostrych względnie nieostrych wyznaczonego przez definicję syntaktyczną wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tego podzbioru zgodnie z definicją asemantyczną określoną w odniesieniu do owego wycinka rzeczywistości".

Swoje rozważania Kubiński kończy analizą paradoksu stosu, pokazując, że żadnego paradoksalnego wniosku nie da się wyprowadzić na gruncie quasi-ontologii minimalnej. Jest to fakt oczekiwany, gdyż zarówno ostrość granicy między ekstensją pozytywną a brzegiem, jak i ostrość granicy między brzegiem a ekstensją negatywną nazwy „stos" sprawia, że dodanie jednego ziarnka do pewnego nie-stosu sprawia, że nie mamy już do czynienia, ani ze stosem, ani z nie-stosem. Podobnie, dodanie jednego ziarnka do pewnego obiektu, który nie jest, ani stosem, ani nie-stosem, czyni z tego obiektu stos. Nie można więc, dodając po jednym ziarenku, przejść od nie-stosu do stosu, tak samo, jak nie jest możliwe, odejmując po jednym ziarenku, przejść od stosu do nie-stosu.

Przedstawiona przez Kubińskiego propozycja wyróżnia się elegancją i precyzją. Jest także bardzo drobiazgową i, mimo swej złożoności, przejrzystą analizą problemu pewnej klasy nazw, które Kubiński uważa za nieostre. To

---

[299] Kubiński stosuje te same symbole dla oznaczenia różnych obiektów. Dotyczy to np. „N", „U". Zabieg ten jest jednak o tyle uprawniony, że zawsze z kontekstu wynika, w którym znaczeniu dany symbol występuje w danym miejscu.

[300] Kubiński, [1958], s. 163.

[301] Rodzina $\{A_i: i \in I\}$ podzbiorów zbioru A jest *podziałem logicznym* zbioru A, gdy spełnia ona dwa warunki: 1. rozłączności, czyli dla dowolnych $i,j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \varnothing$; oraz 2. adekwatności, czyli $\bigcup\{A_i: i \in I\} = A$.

[302] Kubiński, [1958], s. 167–169.

wszystko sprawia, że jego podejście wyróżnia się pozytywnie spośród wielu innych propozycji dotyczących kwestii nieostrości. Niestety, istnieje pewien nieusuwalny mankament leżący u samych podstaw tej teorii. Otóż, przyjęte przez Kubińskiego stanowisko, zamiast rozwiązywać problem nieostrości, w oczywisty sposób go upraszcza, o ile nie zabija. Tak jak w przypadku wcześniej omawianych propozycji, nieostrość jest tu zastąpiona pewnego rodzaju ostrością. Fakt ten dostrzega sam Kubiński[303]: „Przeciwko definicji [...] [def. sem. 1–2] można by wysunąć następujący zarzut: Cechą charakterystyczną nazw nieostrych jest nie tylko to, że mają one brzeg niepusty, lecz również to, że „granice" tego brzegu są nieokreślone. Nie wiadomo przy zwykłym rozumieniu nieostrości, gdzie kończy się zakres pozytywny, a zaczyna brzeg. Nie wiadomo dalej, gdzie się kończy brzeg, a zaczyna zakres negatywny. Zaś definicja [...] [def. sem. 1] traktuje brzeg dowolnej nazwy jako całkowicie określony zbiór przedmiotów." Okazuje się jednak, iż kwestia ta nie stanowi dla Kubińskiego problemu, gdyż wyznaje on wiarę w możliwość, uzasadnionego metodologicznie, wyostrzenia brzegu nazwy nieostrej[304]: „Celem odparcia [tego] zarzutu można by rzec, że brzegi nazwy dają się wyznaczyć. Sprawa metod wyznaczania brzegu nazw jest zagadnieniem metodologicznym, którym się w tej pracy – jak o tym była już mowa – zajmować nie będziemy. Formułując powyższe definicje [...] zakładamy, że brzegi nazw atomowych a_1, a_2, ... są już wyznaczone przy pomocy określonych metod. Brzegi zaś nazw molekularnych są funkcją brzegów nazw atomowych, z których powstały. Interesują nas zatem w rozważaniach przeprowadzonych w oparciu o definicje [...] [def. sem. 1–2] nazwy nieostre rozpatrywane na tym etapie, kiedy przy pomocy określonych zabiegów metodologicznych udało się nam już wyznaczyć ściśle ich brzegi. Zarzut zaś sformułowany był w odniesieniu do etapu, na którym nie przeprowadzono jeszcze badań nad zasięgiem brzegów nazw branych pod uwagę". Kubiński zdaje sobie sprawę z tego, że sensowność jego propozycji zależy od tego, czy brzegi nazw nieostrych dają się wyostrzyć, czy nie. Najwyraźniej, nie dopuszcza on możliwości, iż takie wyostrzenie jest niewykonalne. Tymczasem, sedno problemu nieostrości polega właśnie na tym, iż podobnie proste rozwiązanie nie ma tu zastosowania. Przecież, gdyby wyznaczenie granicy między brzegiem a obiema ekstensjami było w ogóle możliwe do zrealizowania, to zapewne już od bardzo dawna operowalibyśmy, omówionymi wcześniej, trójkami nazw: *a*, *quasi-a*, *nie-a*; w miejsce budzących odwieczne wątpliwości par: *a*, *nie-a*[305]. Wszystko to sprawia, że mimo swojego niewątpliwego, matematycznego piękna, propozycja Kubińskiego nie może uchodzić za rozwiązanie kwestii nieostrości. Fakt ten jest szczególnie jaskrawo widoczny, gdy teorię tę wykorzystujemy do rozwiązania paradoksu stosu.

[303] Kubiński, [1958], s. 159.
[304] Kubiński, [1958], s. 159–160.
[305] Patrz paragraf poświęcony definicji nieostrości.

Propozycja Kubińskiego nie jest typowym przykładem reprezentującym stanowisko piąte. W ogólności bowiem stanowisko to wiąże się z tym, że zdania niezdeterminowane mają określoną wartość logiczną. Nadanie wartości logicznej każdemu zdaniu, również temu niezdeterminowanemu jest celem każdej precyzacji, realizowanej tu przez serię definicji regulujących. Podstawą teorii Kubińskiego również jest precyzacja, która jednak zachowuje w pewien ściśle określony sposób niezdeterminowanie zdań. Tak więc, w podejściu tym, zdanie dotychczas niezdeterminowane pozostaje niezdeterminowanym jedynie w ściśle określonych przypadkach, w pozostałych zaś jest zdeterminowane. Fakt ten sprawia, że trudno jest zdania dotychczas niezdeterminowane uznać w teorii Kubińskiego, zarówno za zdeterminowane, jak i niezdeterminowane.

Propozycja Halldéna

Dość nietypowymi dla stanowiska piątego, gdyż nieklasycznymi przykładami propozycji są również te, odrzucające dwuwartościowość logiczną na rzecz trójwartościowości. Okazuje się jednak, że podobieństwo czterech omówionych niżej propozycji do teorii Kubińskiego jest duże, zwłaszcza gdy za punkt widzenia w ocenie każdego z tych podejść przyjmiemy problem nieostrości.

Jak już wcześniej, parokrotnie zauważyliśmy, nieostrość wyrażeń słusznie jest postrzegana jako szczególny przypadek ich nieokreśloności. Jeśli więc dane zdanie jest w pełni określone, to fakt ten powinien objawiać się tym, iż zdanie to musi posiadać wartość logiczną prawdy lub fałszu[306]. Wszelkie niedookreślenie zdania, powinno więc być kojarzone z faktem, iż zdanie to nie posiada wartości, ani prawdy, ani fałszu. Zatem, w szczególności, powinno tak być wówczas, gdy jakieś, istotne dla znaczenia danego zdania, wyrażenie użyte w tym zdaniu jest nieostre. Tym samym, wprowadzenie trzeciej wartości logicznej może być uzasadnione nieostrością wyrażeń występujących w zdaniach. Okazuje się jednak, że owo niedookreślenie może być co najmniej dwojako rozumiane: albo zdanie posiada wartość logiczną, lecz jest ona w danym momencie niemożliwa do rozpoznania, albo zdanie to jest pozbawione sensu. Przyjęcie któregoś z tych dwóch alternatywnych punktów widzenia ma istotny wpływ na sposób rozumienia spójników zdaniowych. Jeśli bowiem zdanie p jest fałszywe, zaś q ma nieznaną wartość logiczną, to koniunkcja $p \wedge q$ tych zdań powinna być uznana za fałszywą. Jeśli jednak, zdanie p jest fałszywe, zaś q bezsensowne, to koniunkcja $p \wedge q$ tych zdań powinna być uznana za pozbawioną sensu. Zatem, chcąc ustalić związek jaki zachodzi między niedookreślonością zdań a charakterystyką spójników zdaniowych, należy najpierw dokonać wyboru rozumienia tej niedookreśloności. W roku 1938, Stephen Cole Kleene (1909–1994) opublikował pracę *On a notation for ordinal numbers*, w której

[306] Naturalnie, chodzi tu o typowe zdania orzekające o tym co się już dokonało lub w danej chwili ma miejsce, nie zaś zdania przewidujące przyszłość.

jako pierwszy przedstawił tabele trzech wartości logicznych: prawdy *T*, fałszu *F* oraz nieznanej wartości logicznej *U* (*unknown*):

p	$\neg p$
T	*F*
U	*U*
F	*T*

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*U*	*U*	*T*	*U*	*U*
T	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*
U	*T*	*U*	*T*	*T*	*U*
U	*U*	*U*	*U*	*U*	*U*
U	*F*	*F*	*U*	*U*	*U*
F	*T*	*F*	*T*	*T*	*F*
F	*U*	*F*	*U*	*T*	*U*
F	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*

Za symbolem „*U*" kryje się więc, albo prawda, albo fałsz, lecz my nie wiemy, która z tych dwóch wartości. Inspiracją dla Kleenego w skonstruowaniu tej trójwartościowej logiki były definicje częściowe, zwane również warunkowymi.

Drugie rozumienie niedookreśloności sprawia, że trzeci symbol „*N*" (*nonsense*) nie reprezentuje już żadnej wartości logicznej. Przecież, jeśli jakieś zdanie jest bezsensowne, to, nawet po upływie jakiegoś czasu, nie może się okazać, że zdanie to jest prawdziwe lub fałszywe. Uznanie zdania, którego niedookreśloność wynika z użycia w nim wyrażenia nieostrego poza zakresem ostrości tego wyrażenia, za pozbawione sensu wydaje się znacznie lepiej umotywowane, aniżeli założenie, że zdanie to ma wartość logiczną, tyle tylko, że nie wiadomo którą. Co więcej, uznanie zdania nieostrego za pozbawione sensu wydaje się być, w przeciwieństwie do drugiego rozważanego tu rozumienia, zgodne z istotą nieostrości. Jeśli, dla przykładu, niedookreśloność zdania wynika z faktu, iż orzeka ono o człowieku mającym sto włosów na głowie, że jest łysy, to niemożność ocenienia wartości tego zdania zawsze będzie aktualna. Najgorsze jest jednak to, że przekonanie, iż zdanie to ma jakąś wartość logiczną przeczy nieostrości predykatu „być łysym", gdyż wyraża wiarę w istnienie ostrej granicy. Skoro uznamy, że zdanie „Człowiek mający 100 włosów na głowie jest łysy" ma, choćby nieznaną, wartość logiczną, to podobnie musimy uznać, iż zdanie „Człowiek mający *k* włosów na głowie jest łysy" ma wartość logiczną dla dowolnego *k*, z tym jednak zastrzeżeniem, że dla niektórych liczb naturalnych *k* wartość ta jest nieznana.

W tym samym, 1938 roku, w którym Kleene przedstawił swoją propozycję, D. A. Bochwar opublikował w języku rosyjskim pracę[307], w której przedstawił

[307] Bochwar, [1939].

charakterystykę trzech wartości: prawdy *T*, fałszu *F* oraz nonsensu (bezsensu, bezsensowności) *N*[308].

p	$\neg p$
T	F
N	N
F	T

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	N	N	N	N	N
T	F	F	T	F	F
N	T	N	N	N	N
N	N	N	N	N	N
N	F	N	N	N	N
F	T	F	T	T	F
F	N	N	N	N	N
F	F	F	F	T	T

Na trzy lata przed monografią Kleenego, w 1949 roku, najprawdopodobniej nie znając jeszcze pracy Bochwara[309], Sören Halldén publikuje książkę *The Logic of Nonsense*[310], w której proponuje podzielenie zdań na dwie kategorie, w zależności od tego, czy zdania te mają jedną z dwóch wartości logicznych prawdy lub fałszu, czy też nie mają żadnej z nich. Pierwsze nazwał *sensownymi*, drugie zaś *bezsensownymi*. Halldén przyjął jednak, że zarówno sensowność, a więc prawdziwość lub fałszywość, jak i bezsensowność zdań złożonych powinny podlegać pewnej prawidłowości wiążącej się, z jednej strony z wartością logiczną zdań składowych lub z brakiem tej wartości, z drugiej zaś z rodzajem spójnika, będącego głównym funktorem danego zdania złożonego. Chcąc uchwycić tę prawidłowość Halldén wprowadził więc symbol oznaczający bezsensowność zdania („*N*"). Tabelki tych trzech wartości są dokładnie takie same jak u Boczwara. Williamson twierdzi, że najprawdopodobniej, Halldén był pierwszym logikiem, który, w wyraźny i zamierzony sposób, powiązał nieostrość z tą trzecią wartością[311]. Posługując się przykładem dwóch zdań „Człowiek mający sto włosów na głowie jest łysy" oraz „Człowiek mający sto włosów na głowie jest niełysy", Halldén wyjaśnia charakter bezsensowności

---

[308] Spójniki te, w książce Kleenego *Introduction to Metamathematics*, noszą nazwę *słabych*. Tam też, *silnymi*, Kleene nazywa wcześniej przez siebie wprowadzone spójniki, definiowane przy pomocy wartości *U*. W wyraźny sposób, Kleene stwierdza jednak, że w przypadku częściowych predykatów (*partial predicates*) zastosowanie mają silne spójniki, czyli te z jego pracy z 1938 roku, Kleene, [1952], s. 334. *Predykaty częściowe*, to predykaty zdefiniowane częściowo, tak jak u Przełęckiego, patrz początkowa część paragrafu poświęconego rozwiązaniom problemu nieostrości bazującym na założeniu, że nieostrości nie ma oraz Kleene, [1952], s. 327.

[309] Williamson, [1994], s. 288.

[310] Halldén, [1949].

[311] Williamson, [1994], s. 103–104.

tych zdań. Naturalnie, oba te zdania są dla nas zrozumiałe i jako takie mają sens, przy zwykłym, intuicyjnym znaczeniu słowa „sens". O ich sensowności lub bezsensowności w znaczeniu Halldéna nie decyduje to, czy są zrozumiałe, lecz właśnie to, że w pewnych okolicznościach zdanie to może się okazać prawdziwe, w innych zaś fałszywe[312]. Swoją trójwartościową logikę Halldén wyposaża w nowy spójnik „+", umożliwiający wyrażenie sensowności zdania. Jeśli zdanie p jest prawdziwe lub fałszywe, czyli gdy p jest sensowne, wówczas $+p$ jest zdaniem prawdziwym. Jeśli natomiast zdanie p ma wartość N, wówczas $+p$ jest zdaniem fałszywym.

Nie jest trudno zauważyć, że w logice Boczwara (Halldéna) nie ma tautologii – zbiór wszystkich tautologii tej logiki jest zbiorem pustym[313]. Nawet zdania postaci $p \rightarrow p$, czy $p \vee \neg p$ mogą nie być prawdziwe, mówiąc ściślej, mogą okazać się bezsensownymi, jeśli tylko zdanie p nie jest, ani prawdziwe, ani fałszywe. Naturalnie, nie jest możliwe, aby zdania, których schematy są tautologiami logiki klasycznej okazały się fałszywymi. Wszystko to skłoniło Halldéna do przyjęcia dwóch wartości wyróżnionych dla tej logiki. Jednak zdefiniowanie wynikania logicznego jako zachowującego niefałszywość sprawiło, że inferencja w logice Halldéna okazała się trudna do akceptacji, a to z powodu swojej nieintuicyjności. Zawodzi na przykład reguła odrywania. Jeśli bowiem, zdanie p ma wartość N, zaś q ma wartość F, to wówczas dwie przesłanki p oraz $p \rightarrow q$ mają wartości wyróżnione (N). Oznacza to, że z tych dwóch zdań o wartościach wyróżnionych wynika zdanie o wartości fałszu, a więc niewyróżnionej[314]. Podobnie, nawet wówczas, gdy zdanie $p \wedge q$ ma wartość wyróżnioną, q może być zdaniem fałszywym – wystarczy, aby p było bezsensowne. Widać więc, że i odłączanie koniunkcji nie jest regułą zachowującą niefałszywość. Z niewiele lepszą sytuacją mamy do czynienia wówczas, gdy zbiór wartości wyróżnionych ograniczymy do jednoelementowego zbioru zawierającego wartość prawdy. Jeśli bowiem mamy prawdziwe zdanie p, to alternatywa $p \vee q$ nie musi być zdaniem prawdziwym. Oznacza to, że dołączanie alternatywy jest regułą, która nie zachowuje prawdziwości. Williamson trafnie zauważa, że problemem nie jest wybór takiego, czy innego zbioru wartości wyróżnionych, lecz przyjęte przez Halldéna tabele definiujące

---

[312] Williamson, [1994], s. 103.

[313] Również logika Kleenego ma pusty zbiór tautologii.

[314] Williamson podaje następujący przykład ilustrujący tę trudność. Przyjmijmy, że mamy dwa zdania „Jeśli w ogrodzie jest kopiec piasku, to robotnicy mogą rozpocząć pracę" oraz „W ogrodzie jest kopiec piasku". Założymy teraz, że drugie zdanie ma wartość N, czyli, że nie jest jasne, czy ilość piachu jest wystarczająca. Wówczas pierwsze zdanie, bez względu na następnik jest implikacją o wartości N. Oznacza to, że zdanie „Robotnicy mogą rozpocząć pracę" może być zarówno prawdziwe, jak i fałszywe. Istnienie wspomnianej wątpliwości przekłada się na trudność w ocenie, czy robotnicy mogą rozpocząć swoją pracę, czy nie. Jasnym jest więc, że reguła odrywania nie może obowiązywać, Williamson, [1994], s. 105–106.

spójniki. Na potwierdzenie swej tezy poddaje analizie wartość logiczną zdania „Kuba jest łysym filozofem", zakładając, że Kuba nigdy nie był, nie jest i nie będzie filozofem. Przy tym założeniu, oczywista jest fałszywość zdania „Kuba jest filozofem", a więc w szczególności i pierwsze również powinno być fałszywe. Tak jednak nie musi być. Naturalnie, pierwsze zdanie jest fałszywe wówczas, gdy Kuba ma dużo włosów na głowie, co oznacza, iż nie jest łysy. Wówczas, zgodnie z tabelami Boczwara-Halldéna, koniunkcja „Kuba jest łysy i Kuba jest filozofem" jest fałszywa. Wyobraźmy teraz sobie, że po jakimś dość długim czasie Kuba stracił sporo włosów, jednak nie aż tyle, aby być łysym. Jest więc przypadkiem granicznym predykatu „być łysym", co nadaje zdaniu „Kuba jest łysy" wartość N. Zatem, wspomniana koniunkcja również ma wartość N. Jeśli Kuba będzie nadal tracił włosy, to po jakimś czasie stanie się ewidentnie łysym. Zatem zdanie „Kuba jest łysy", od pewnego czasu, będzie prawdziwe, a więc od tego samego czasu, wspomniana koniunkcja znów będzie fałszywa. Z przyjętych przez Halldéna tabelek wynika ewolucja wartości logicznej zdania, które przez całe życie Kuby powinno być fałszywe: najpierw było jasne, że Kuba nie jest łysym filozofem, potem tę pewność straciliśmy, aby po jakimś czasie znów wiedzieć, że nie jest łysym filozofem[315].

Trudno jest więc uznać propozycję Halldéna za rozwiązującą kwestię nieostrości. Ocena ta jest tym bardziej uzasadniona, gdy podejście to przetestujemy przy pomocy paradoksu stosu. Po pierwsze, kluczowa dla tego paradoksu reguła odrywania nie zachowuje niefałszywości, a więc przyjmując, że wartościami wyróżnionymi są T i N nie powinniśmy jej stosować. Wydaje się zresztą, że w tym akurat przypadku można zaryzykować stwierdzenie, że paradoks stosu nie jest groźny dla teorii. Przyjmijmy więc, że prawda jest jedyną wartością wyróżnioną. Rozważmy teraz, serię zdań Z_k = „Jeśli człowiek mający k włosów na głowie jest łysy, to człowiek mający k+1 włosów na głowie jest łysy", dla $k \in N$. Naturalnie, każde kolejne zdanie z tej serii będzie prawdziwe, aż do momentu, gdy okaże się, że jego następnik „Człowiek mający k+1 włosów na głowie jest łysy" nie ma wartości T, lecz N. Tak więc, jeśli nawet nasze rozumowanie stosu rozpoczniemy od niewątpliwie prawdziwego zdania „Człowiek mający 0 włosów na głowie jest łysy", to będziemy mogli wnioskować poprawnie tylko do wskazanego wcześniej momentu napotkania zdania, którego następnik ma wartość N. Ponieważ N nie jest wartością wyróżnioną, rozumowanie stosu w tym miejscu musi się zakończyć. Nie oznacza to jednak, że uniknięcie w ten sposób paradoksalnego wniosku jest rozwiązaniem paradoksu. Cena bowiem za ten pozorny sukces jest wielka. Zastanówmy się bowiem, do której wartości liczby k włącznie, możemy uznawać zdania X_k = „Człowiek mający k włosów na głowie jest łysy" za zdania prawdziwe, a od której za posiadające wartość N? Okazuje się wówczas, że

---

[315] Williamson, [1994], s. 107.

muszą istnieć takie dwie liczby k_1 i k_2 że dla $k \leq k_1$, wartością zdania X_k jest prawda, zaś dla $k_1 < k \leq k_2$, wartością tą jest N. Oznacza to, że w propozycji Halldéna kryje się nieme założenie istnienia dwóch ostrych granic: pierwsza oddziela ekstensję pozytywną od półcienia, druga zaś półcień od ekstensji negatywnej. Co ciekawe, a przede wszystkim paradoksalne, u podstaw całej teorii leży założenie przeciwne, a mianowicie, przyjmujące nieistnienie tych granic. Jednak wprowadzenie trzech wartości logicznych, można dodać, tylko trzech, musiało doprowadzić do podobnej precyzacji.

Widać więc, że mimo iż w swej propozycji Halldén wychodzi od założenia, że nieostrość istnieje, stosując trójwartościową logikę wytycza *de facto* ostre granice wyznaczające wyraźny obszar nieostrości. Nic więc nie stoi już na przeszkodzie, aby przyjąć, że każdy nieostry predykat *P* można zastąpić, wspomnianą już parokrotnie, ostro wyznaczoną trójką (*P*, *quasi-P*, *nie-P*). Widać więc, że chociaż podejście Halldéna uznaje istnienie nieostrości, to jednak ją unicestwia i to w sztuczny, sprzeczny z intuicjami sposób, wytyczając ostre granice tam, gdzie ich z założenia nigdy nie było i nie ma.

Propozycja Körnera

Mimo istnienia, wskazanych wcześniej, problemów związanych z rozumieniem trzeciej wartości logicznej Kleenego jako odpowiadającej zdaniu nieostremu, logika Kleenego stała się podstawą kolejnego podejścia do nieostrości. W latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych Stephan Körner przedstawił swoją propozycję w serii publikacji[316], znaną jako *logikę pojęć niedokładnych* (*logic of inexact concepts*). Źródłem tej niedokładności jest właśnie nieostrość, a dokładniej, istnienie przypadków granicznych. Wyrażenia nieostre są definiowane przez przykłady. Każde nieostre wyrażenie *F* dzieli obiekty na *kandydatów pozytywnych, negatywnych i neutralnych* (*positive, negative and neutral candidates*). Obiekty pierwszego typu są „wybierane" jako przypadki pozytywne wyrażenia *F*, podczas gdy obiekty drugiego typu pretendują do bycia przypadkami negatywnymi *F*. Obiekty są kandydatami neutralnymi, jeśli, w zależności od wolnego wyboru, mogą być wybrane na przypadki pozytywne lub negatywne wyrażenia *F*. Propozycja Körnera wiąże się więc z dwiema logikami: trójwartościową logiką przedwyborczą (*pre-election logic*) i dwuwartościową logiką powyborczą (*post-election logic*). Trzem rodzajom kandydatów wśród wyrażeń odpowiadają trzy rodzaje zdań: prawdziwe, fałszywe i neutralne. Rozkład tych trzech wartości nadawanych zdaniom ustalają matryce Kleenego. Nadanie zdaniu wartości prawdy lub fałszu ma charakter stabilny. Nadanie zaś zdaniu wartości neutralnej, jest tymczasowe[317]. W propozycji Körnera nie ma więc miejsca dla takich operatorów jak np. operator „+" Halldéna. Operator ten,

---

[316] Körner, [1955], [1959], [1960], [1968].

[317] Williamson, [1994], s. 108.

w przypadku podejścia Körnera, nadawałby bowiem charakter stałości temu, co ma uchodzić za tymczasowe.

W swych rozważaniach Körner nie stosuje przyjętej przez Kleenego symboliki. Logikę Kleenego interpretuje przy pomocy tzw. *algebry klas nieostrych*. Nieostrość predykatu P polega, zdaniem Körnera, na jego częściowym zdefiniowaniu. Zatem częściowa definicja $D(F)$, dla każdego obiektu a należącego do A, zbioru wszystkich obiektów, stwierdza, czy zdanie $P(a)$ jest prawdziwe, fałszywe, czy może nieokreślone. Klasą nieostrą, wyznaczoną przez warunkowo zdefiniowany predykat P, jest dla Körnera każda trójwartościowa funkcja X_P: $A \rightarrow \{-1, 0, +1\}$ taka, że[318]:

$$X_P(a) = \begin{cases} +1, \text{ gdy } P(a) \text{ jest według } D(P) \text{ prawdziwe;} \\ 0, \text{ gdy } P(a) \text{ jest według } D(P) \text{ nierozstrzygnięte;} \\ -1, \text{ gdy } P(a) \text{ jest według } D(P) \text{ fałszywe.} \end{cases}$$

Zdefiniowanym przez Kleenego spójnikom koniunkcji, alternatywy i negacji odpowiadają w algebrze klas nieostrych operacje iloczynu, sumy i dopełnienia zbioru:

$$\begin{aligned} (-X_P)(a) &= -X_P(a); \\ (X_P \cap X_R)(a) &= \min\{X_P(a), X_R)(a)\}; \\ (X_P \cup X_R)(a) &= \max\{X_P(a), X_R)(a)\}. \end{aligned}$$

Jak widać, każdy nieostry predykat P, przy pomocy odpowiedniej klasy nieostrej X_P, wyznacza podział zbioru A wszystkich obiektów na trzy podzbiory: jeden ma odpowiadać ekstensji pozytywnej, drugi obszarowi nieostrości, trzeci zaś ekstensji negatywnej predykatu P. Niestety, użyta przez Körnera terminologia jest niefortunna. Klasą nieostrą jest bowiem u niego, funkcja wyznaczająca trzy zbiory w sposób wyraźny. Oznacza to, że chociaż każdemu nieostremu predykatowi P odpowiadają trzy zbiory, które mają być jego obiema ekstensjami oraz półcieniem, to jednak żaden z tych zbiorów nie jest ani którąkolwiek ekstensją, ani półcieniem P. Jeśli bowiem P jest predykatem nieostrym, to jego ekstensje od półcienia nie są oddzielone wyraźnymi granicami. W swej koncepcji, Körner utożsamił nieostry predykat z predykatem zdefiniowanym wyraźnie, choć częściowo.

Propozycja Körnera wiąże się również z innymi problemami, podobnymi do tych, dotykających propozycji Halldéna. Ani jednoelementowy zbiór $\{+1\}$, ani dwuelementowy $\{0, +1\}$ nie są dobrymi kandydatami na zbiór wartości wyróżnionej, będącej podstawą określenia inferencji. W pierwszym przypadku

[318] Malinowski, [1990], s. 65–67.

zdania o tautologicznej lub kontrtautologicznej strukturze, jak chociażby $p \rightarrow p$, $p \vee \neg p$, czy $p \wedge \neg p$, nie mają ustalonej wartości logicznej, jeśli tylko zdanie p dotyczy przypadków granicznych. Jest to o tyle kłopotliwe, a nawet nieuzasadnione, iż wartość 0 jest przyznana zdaniu p tymczasowo, a więc, tak naprawdę zdanie p jest, albo prawdziwe (+1), albo fałszywe (−1). Jednak, w obu tych przypadkach, wcześniejsze zdania mają przecież wartości logiczne i to stałe, tzn. niezależne od tego, czy p ma wartość +1, czy −1. Oczywiste problemy wiążą się również z uznaniem za wyróżnione dwóch wartości: +1 i 0. Między innymi, tak jak w przypadku propozycji Halldéna, reguła odrywania nie jest zachowana. Co gorsza, wyprowadzenie z przesłanek wniosku, który ma tymczasową wartość 0 może w praktyce oznaczać, wyprowadzenie zdania fałszywego. Niezależnie od wyboru zbioru wartości wyróżnionych, propozycja Körnera unicestwia wszelkie możliwe prawa logiki klasycznej. Jeśli bowiem, zdanie p ma wartość 0, która w pewnych okolicznościach może być zastąpiona przez +1, w innych zaś przez −1, to zdanie postaci $p \wedge \neg p$ jest *de facto* zdaniem $p \wedge \neg q$, które może się nawet okazać prawdziwym[319]. W ogólności, traktując trzecią wartość jako tymczasową, Körner sprawił, że trudno jest konsekwentnie operować symboliką zdaniową. Zatem, w przeciwieństwie do interpretacji Kleenego, propozycja Körnera jest dość niefortunna, zwłaszcza jako teoria nieostrości[320].

Nie jest trudno dostrzec, że propozycja Körnera, jako że jest trójwartościowym podejściem do nieostrości, wywołuje te same problemy filozoficzne co propozycja Halldéna, ani nie rozwiązując paradoksu stosu, ani nie analizując zjawiska nieostrości. Co gorsza, tak jak propozycja Halldéna, teoria Körnera ustala ostre granice, zarówno między zdaniami prawdziwymi i tymczasowymi, jak i tymczasowymi i fałszywymi. Oznacza to, że żadne z tych podejść nie jest teorią nieostrości. Obie teorie, i Halldéna i Körnera, są teoriami ostrości.

Propozycja Tye'a

Jako podstawę dla teorii nieostrości, tabelki Kleenego wykorzystał również Michael Tye. Wiele lat po Körnerze, w 1990 roku opublikował on pracę *Vague Objects*[321], w której poza uzasadnieniem nieostrości w świecie materialnym[322] zaproponował nadanie zdaniom, których źródłem nieokreśloności jest nieostrość, trzeciej wartości logicznej: *ani-prawdy-ani-fałszu*. Różnica między Körnerem a Tye'm jest więc taka, że pierwszy z nich traktuje trzecią wartość *U*

---

[319] Williamson odnotowuje, że sam Körner zdawał sobie z tego faktu sprawę, Williamson, [1994], s. 110.

[320] Williamson zauważa, że propozycja Körnera bardziej pasuje do dwuwartościowej teorii nadwartościowania, aniżeli do trójwartościowej logiki Kleenego, Williamson, [1994], s. 111.

[321] Tye, [1990].

[322] Patrz paragraf poświęcony nieostrości pozajęzykowej.

jako wyrażającą tymczasowe zawieszenie sądu na temat prawdziwości tych zdań, którym została ona przypisana, drugi zaś jako trwały brak wartości logicznej.

Oczywiście, teoria Tye'a, tak jak każda inna oparta na trójwartościowej logice musi prowadzić do wyznaczenia ostrych granic między ekstensją pozytywną i półcieniem oraz półcieniem i ekstensją negatywną. Można jeszcze próbować zastanawiać się nad tym, czy, wynikający z trójwartościowej logiki, podział według danego nieostrego predykatu *P* wszystkich obiektów uniwersum na trzy zbiory: ekstensję pozytywną *P*, ekstensję negatywną *P* oraz półcień *P*, jest wyczerpujący. Wydaje się jednak, że narzucona przez Tye'a interpretacja wyklucza możliwość, aby podział ten mógł być niewyczerpujący. Jeśli ze zbioru wszystkich zdań w sensie logicznym usuniemy wszystkie zdania prawdziwe, wszystkie zdania fałszywe oraz wszystkie zdania, które nie są, ani prawdziwe, ani fałszywe, to jakie zdania mogłyby jeszcze nam pozostać? Oczywiście, żadne. Nonsensem jest więc twierdzić, że podział na zdania prawdziwe, fałszywe i ani-prawdziwe-ani-fałszywe może nie być wyczerpujący. Zatem, teoria Tye'a ustala ostre granice i to niezależnie od intencji jej twórcy. Paradoksem tej teorii jest to, iż budując ją, Tye wyszedł od założenia, że ekstensje predykatów nieostrych są zbiorami nieostrymi, czyli takimi, co do których nie zawsze jest wiadome, czy dany obiekt należy do tego zbioru, czy nie. Nie są to więc zbiory w sensie tradycyjnej teorii mnogości. Jest to jednak niezgodne z faktem, iż logika zdań nieostrych jest trójwartościowa. Widać to natychmiast w próbie rozwiązania paradoksu nieostrości. Jeśli więc rozpoczniemy, doskonale znane, rozumowanie stosu od stwierdzenia, że człowiek mający 0 włosów na głowie jest łysy, to tak długo musimy twierdzić, że człowiek mający na głowie *k* włosów jest łysy, jak długo nie napotkamy pierwszej wartości naturalnej k_0, dla której zdanie „Człowiek mający k_0 włosów na głowie jest łysy" jest zdaniem ani-prawdziwym-ani-fałszywym. Nie jest więc możliwe, stosując argumentację stosu, dojść, na gruncie teorii Tye'a, do uznania człowieka mającego sto tysięcy włosów na głowie za łysego. Jasne jest jednak, że cena za ten sukces jest zbyt wysoka – rozwiązanie paradoksu samo jest paradoksalne. Zatem, nie jest to żaden sukces, gdyż teoria Tye'a nie rozwiązuje paradoksu, tylko go unicestwia przy pomocy prostego i doskonale znanego z innych, wcześniej już omówionych, podejść zastąpienia nieostrości ostrością. Wyostrzenie granic ekstensji predykatów nieostrych nie może być przecież rozwikłaniem tajemnicy nieostrości.

Tye, jako zwolennik istnienia nieostrości nie tylko językowej, lecz także materialnej, nie chce uznać wyostrzenia tych granic. Przeciwstawia się więc znanej od wieków argumentacji składającej się z kolejnych kroków. Niestety, czyni to w nieprzekonywający sposób. Mówiąc ściślej, odrzuca bowiem konieczność dawania odpowiedzi na kolejne pytania tworzące groźną dla jego teorii argumentację stosu. Chce bowiem uniknąć sytuacji, w której zdanie „Człowiek mający *k* włosów na głowie jest łysy" będzie prawdziwe, zaś zdanie „Człowiek mający $k + 1$ włosów na głowie jest łysy", ani-prawdziwe-ani-fałszywe. Tye przyjmuje, że nie na każde pytanie można dać odpowiedź. Ta odmowa odpowiedzi nie wynika z niewiedzy i nie powinna więc być utożsamiana z odpowiedzią „Nie wiem". Przyczyną odmowy odpowiedzi jest jej brak[323]. Powstaje jednak doskonale znany problem, na które pytanie jako pierwsze nie ma odpowiedzi?

Niestety, wiadome jest, że dla pewnych pytań tworzących argumentację stosu istnieje odpowiedź twierdząca, dla innych przecząca. Tye próbuje więc uniknąć zupełnie naturalnej konkluzji stwierdzającej, że jego stanowisko prowadzi nieuchronnie do wyostrzenia granic. Ta silna perswazja Tye'a, nie wydaje się jednak wystarczająca. Niby dlaczego, mamy unikać serii narzucających się wręcz pytań tworzących rozumowanie stosu? Oczywiście, po to, aby nie dostrzec, iż w serii tej jest takie pytanie, na które jako na pierwsze nie damy odpowiedzi. Jaką więc funkcję pełni tu logika trójwartościowa? Po co w teorii Tye'a mówi się o trzech wartościach prawdy, fałszu i ani-prawdy-ani-fałszu. Jakie zdania nie są ani prawdziwe, ani fałszywe, ani ani-prawdziwe-ani-fałszywe?

Jest w teorii Tye'a jakaś jaskrawa niekonsekwencja. Z jednej strony, w teorii tej funkcjonuje całkiem rozsądnie i poprawnie rozumiana nieostrość. Z drugiej zaś, stosuje się aparaturę formalną unicestwiającą tę nieostrość. Wreszcie, na koniec wprowadza się zdecydowany zakaz przeprowadzania standardowego rozumowania stosu, które ujawniłoby całą mistyfikację.

Postawa Tye'a, pod pewnym względem, przypomina tę, reprezentowaną przez Fine'a, który stosując klasę precyzacji definiującą nadwartościowanie, również wyznaczył ostre granice między ekstensjami i półcieniami nieostrych predykatów, twierdząc jednocześnie, że granic tych tak naprawdę nie ma[324].

Następna teoria, także stosuje podział uniwersum na trzy kategorie, z tą jednak różnicą, że inspiracją dla niej nie są problemy stwarzane przez zjawisko nieostrości, lecz brak wiedzy. Tymczasem, nieostrość jest wyraźnie kojarzona z tego rodzaju kłopotami, na które wiedza nie jest żadnym remedium. Ponieważ jednak, teoria zbiorów przybliżonych bywa kojarzona z fenomenem nieostrości, trudno pominąć ją milczeniem, zwłaszcza że tak jak inne omówione w tym paragrafie teorie, reprezentuje stanowisko piąte.

Teoria zbiorów przybliżonych Pawlaka[325]

Twórcą teorii *zbiorów przybliżonych* (*rough sets*) jest Zdzisław Pawlak. Swą koncepcję rozwijał już w latach siedemdziesiątych, jednak w pełnej formie

---

[323] Tye, [1996], s. 293. Patrz także, Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 129–131.

[324] Por. Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 130.

[325] Punkt ten mógłby nosić tytuł *Propozycja Pawlaka*, gdyby nie fakt, iż, po pierwsze, teoria zbiorów przybliżonych nie była w zamierzeniach jej twórcy sposobem na nieostrość, lecz na niepełność informacji, a po drugie, kwestia nieostrości jest zaledwie jej bocznym i chyba raczej na siłę rozwijanym wątkiem.

przedstawił ją na samym początku lat osiemdziesiątych. Podstawową publikacją Pawlaka, przedstawiającą pierwszy zarys jego teorii, jest książka *Systemy informacyjne. Podstawy teoretyczne* z 1983 roku. Zaproponowane w niej konstrukcje, będące bazami danych mają umożliwiać realizację dwóch zadań. Pierwszym jest wyszukiwanie obiektów na podstawie danego w języku formalnym opisu ich własności, drugim zaś znalezienie dla danego zbioru obiektów, jego charakterystycznego opisu, wyrażonego w języku formalnym[326].

System informacyjny Pawlaka jest czwórką[327]:

$$S = \langle X, A, V, \rho \rangle,$$

w której: X jest skończonym zbiorem obiektów; A skończonym zbiorem atrybutów; $V = \bigcup\{V_a \colon a \in A\}$, V_a jest dziedziną atrybutu a; ρ: $X \times A \rightarrow V$ jest taką funkcją, że $\rho(x,a) \in V_a$, dla każdego $x \in X$ i $a \in A$. Ponadto, zakłada się całkowitość funkcji ρ, co oznacza, że jest ona określona dla wszystkich wartości argumentów x oraz a. Nie może więc być tak, aby dla pewnego x i pewnego a funkcja ρ nie przyporządkowała jakiejś wartości z V. *Dziedzina atrybutu a* jest w systemie S określona następująco: $V_a = \{v \in V$: dla których istnieje takie $x \in X$, że $\rho(x,a) = v\}$. System informacyjny pokazuje, któremu obiektowi x ze zbioru X przysługuje, taka a nie inna, wartość atrybutu a ze zbioru atrybutów A. Dla przykładu, studentów z grupy X można scharakteryzować przy pomocy informacji na temat wartości przysługujących im dwóch atrybutów: a_1 = *ocena z egzaminu z algebry*, a_2 = *wybrany język obcy*. Oczywiście, wartościami atrybutu a_1 są oceny, np. *2*; *2,5*; *3*; *3,5*; *4*; *4,5*; *5*; *celujący*. Wartościami atrybutu a_2 są natomiast lektoraty, np. z języków: angielskiego, niemieckiego, francuskiego, włoskiego, szwedzkiego i ukraińskiego. Każdy student grupy X ma więc przyporządkowaną, zarówno jakąś ocenę z egzaminu z algebry, jak i lektorat z jakiegoś języka obcego do wyboru[328]. Dla każdego obiektu $x \in X$

---

[326] Pawlak, [1983], s. 9.

[327] Pawlak, [1983], s. 16–21.

[328] Szczególnym przypadkiem systemu informacyjnego jest *tabela decyzyjna*. Jest to system informacyjny, w którym jeden z atrybutów zbioru A jest wyróżniony i nosi nazwę *atrybutu decyzyjnego* lub po prostu *decyzji*, Pawlak, [RS], s. 18–19. Często uważa się go za wartość dodaną do zbioru A i wówczas zbiór ten jest zastąpiony zbiorem $A \cup \{d\}$, gdzie d jest decyzją. Interpretacja takiego systemu informacyjnego jest dość intuicyjna. Przypisane x-om wartości atrybutów ze zbioru A mogą bowiem mieć istotny związek z wartością decyzji d. Tabela decyzyjna ma na celu ujawnienie tego związku. Np. jeśli atrybutami są sposób odżywiania się, sposób spędzania wolnego czasu, natężenie stresu w pracy, poczucie spełnienia się w życiu rodzinnym itp., to decyzja d może wyrażać skłonność do zachorowania na depresję. Nazwanie tego typu systemu tabelą decyzyjną w oczywisty sposób wiąże się z jej funkcją, która polega na formułowaniu *reguł decyzyjnych*. Reguły te, na podstawie posiadanych danych, pokazują jakiej

można zdefiniować, *informację o obiekcie x*, czyli funkcję ρ_x: $A \rightarrow V$ taką, że $\rho_x(a) = \rho_x(x,a)$. *Informacją* w systemie S jest każda funkcja φ o argumentach w zbiorze atrybutów A oraz o wartościach należących do V taka, że $\varphi(a) \in V_a$. Każda informacja wyznacza pewien zbiór $X_\varphi = \{x \in X\colon \rho_x = \varphi\}$, wszystkich tych obiektów, które mają w systemie S jednakową informację, czyli jednakowy opis. Informacja φ jest *pusta*, gdy $X_\varphi = \emptyset$. Informacja, która nie jest pusta jest *niepusta*. System informacyjny, w którym każda informacja jest niepusta jest *zupełny*. Natomiast system, w którym każdej informacji odpowiada co najwyżej jeden obiekt jest systemem *selektywnym*. Obiekty x, $y \in X$ są w systemie S *nierozróżnialne ze względu na atrybut* $a \in A$ (symbolicznie $x \sim_a y$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho_x(a) = \rho_y(a)$. Obiekty x, $y \in X$ są w systemie S *nierozróżnialne ze względu na każdy atrybut* $a \in A$ (symbolicznie $x \sim_S y$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho_x = \rho_y$. Obiekty nierozróżnialne w systemie ze względu na każdy atrybut są *nierozróżnialne w systemie*. Jak łatwo zauważyć, obie relacje „$\sim_a$" i „$\sim_S$" są relacjami równoważności na zbiorze X. System informacyjny Pawlaka jest więc bazą danych klasyfikującą obiekty ze względu na pewne, uwzględnione w tym systemie, atrybuty i wartości tych atrybutów. Naturalnie, klasyfikacja ta jest podziałem logicznym zbioru X – relacja równoważności dzieli zbiór X na klasy abstrakcji. Im mniej liczne są te klasy, czyli im drobniejszy jest podział na klasy abstrakcji, tym dokładniejszy jest system informacyjny[329]. Jeśli w systemie nie ma jakiegoś atrybutu, czy jakiejś wartości atrybutu, to ani ten atrybut, ani ta wartość nie są uwzględnione w opisie obiektów zbioru X, chociażby nawet jakiś obiekt ze zbioru X faktycznie posiadał daną wartość danego atrybutu.

System informacyjny stanowi syntaktyczną reprezentację wiedzy, której semantyką jest *przestrzeń przybliżenia* (aproksymacji) $PA = (U, R)$. U jest dziedziną wiedzy, zwaną uniwersum, będącą zbiorem nazw obiektów, zaś R relacją równoważności dzielącą U na klasy abstrakcji[330]. Przestrzeń przybliżenia PA może zostać uogólniona do postaci $(U, \underline{R})$, gdzie U nadal jest dziedziną wiedzy, $\underline{R}$ jest natomiast klasą relacji równoważności zbioru U. Tak określoną parę $(U, \underline{R})$ Pawlak nazywa *bazą wiedzy*, która jest pożądaną interpretacją dla systemu informacyjnego. Izomorfizm odwzorowujący jeden system w drugi ustala wzajemną jednoznaczność między zbiorem atrybutów A systemu informacyjnego i klasą $\underline{R}$ relacji równoważności[331].

---

wartości atrybutu d należy się spodziewać, przy takim a nie innym zestawie wartości atrybutów ze zbioru A.

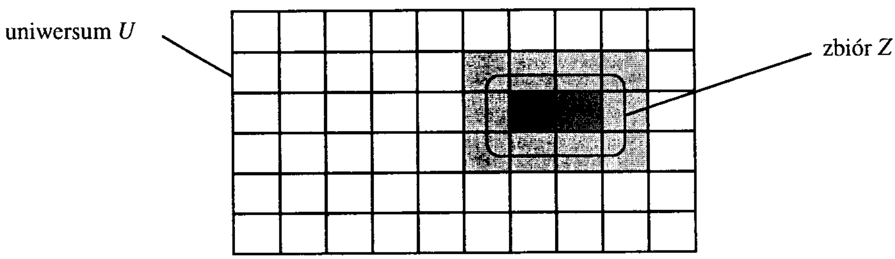
Pawlak definiuje również *systemy informacyjne wielowartościowe*, różniące się od zwykłych tym, że ρ: $X \times A \rightarrow P(V) - \{\emptyset\}$ jest taką funkcją, która parze (x,a) nie przyporządkowuje jednej wartości, lecz niepusty zbiór wartości atrybutu a. Zatem, dla dowolnych $x \in X$ i $a \in A$, $\rho(x,a) \subset V_a$.

[329] Pawlak, [1983], s. 24.

[330] Pawlak, [1982], s. 342.

[331] Pawlak, [1991], s. 3.

Podzbiór *Z* uniwersum *U* jest *definiowalny* w przestrzeni (*U*, *R*), gdy jest zbiorem pustym lub klasą abstrakcji relacji *R* w zbiorze *U* lub jest sumą takich klas abstrakcji. Każdy zbiór, który nie jest w wyżej podanym sensie definiowalny, jest *niedefiniowalny*[332]. Jeśli *R* nie jest relacją identycznościową[333], a nie powinna nią być, to istnieją w *U* zbiory niedefiniowalne. Z punktu widzenia relacji *R*, zbiory te są nieokreślone, i w tym właśnie sensie, nieostre. Nie potrafimy, bowiem, stosując relację *R*, wyznaczyć ostrej granicy oddzielającej elementy tego zbioru od pozostałych elementów uniwersum[334]. Załóżmy więc, że uniwersum *U*, największy na rysunku prostokąt, jest podzielone na klasy abstrakcji relacji *R*, symbolizowane przez kwadraty, zaś zbiór *Z* nie jest definiowalny w (*U*,*R*)[335].



Istnieje jednak możliwość przybliżonego opisu zbioru *Z* w przestrzeni *PA*. Podstawą tego opisu są dwa przybliżenia: górne i dolne. Dolne przybliżenie zbioru *Z* w *PA* (*R-lower approximation of Z*) tworzy suma wszystkich klas abstrakcji, zawierających takie obiekty, które z pewnością mogą być zaklasyfikowane, jako elementy zbioru *Z*. Górne przybliżenie zbioru *Z* w *PA* (*R-upper approximation of Z*) tworzy suma wszystkich klas abstrakcji, zawierających takie obiekty, które prawdopodobnie mogą być zaklasyfikowane, jako elementy zbioru Z. Obszar graniczny (*R-boundary region of Z*) to zbiór tych klas abstrakcji, których elementy nie mogą być zaklasyfikowane, ani jako *Z*, ani jako nie-*Z*[336]. To nieformalne i raczej nieprecyzyjne określenie, Pawlak uściśla w sposób następujący[337]:

---

332 Pawlak, [1991], s. 9–11.

333 *R* jest na zbiorze *U* relacją *identycznościową*, gdy dla dowolnych x, $y \in U$, $(x,y) \in R$ wtw $x = y$. Klasami tej relacji w zbiorze *U* są jednoelementowe podzbiory zbioru *U*.

334 Orłowska, [1985], s. 469.

335 Kwadraty na jakie podzielone jest uniwersum *U*, to porcje (*granules*) wiedzy, które nie muszą być identyczne. W ogólności, kwadraty te powinny być na rysunku zastąpione przez różnego kształtu i różnej wielkości prostokąty. W tej postaci, rysunek został zaczerpnięty z Pawlak, [RS], s. 9.

336 Pawlak, [RS], s. 8.

337 Pawlak, [RS], s. 9.

– zbiór $R_*(Z) = \bigcup\{[x]_R: [x]_R \subseteq Z\}$ jest *dolnym przybliżeniem zbioru Z ze względu na relację R*;
– zbiór $R^*(Z) = \bigcup\{[x]_R: [x]_R \cap Z \neq \varnothing\}$ jest *górnym przybliżeniem zbioru Z ze względu na relację R*;
– zbiór $RN(Z) = R^*(Z) - R_*(Z)$ jest *obszarem granicznym zbioru Z ze względu na relację R*.

Widać więc, że dolnym przybliżeniem zbioru Z w przestrzeni (U, R) jest największy, definiowalny w (U, R) zbiór zawarty w Z. Górnym przybliżeniem zbioru Z w przestrzeni (U, R) jest natomiast najmniejszy, definiowalny w (U, R) zbiór zawierający Z. Zbiór jest przybliżony (*rough*) ze względu na R, jeśli $RN(Z) \neq \varnothing$. W przeciwnym przypadku, czyli wówczas, gdy $R_*(Z) = R^*(Z)$, zbiór Z jest wyznaczony ostro.

Na rysunku, dolne przybliżenie jest sumą dwóch kwadratów z ciemnoszarym wypełnieniem, górne natomiast, jest sumą dziesięciu kwadratów, które mają jasnoszare wypełnienie oraz dwóch z wypełnieniem ciemnoszarym. Przybliżenie dolne, przybliżenie górne oraz obszar graniczny zbioru Z są też nazywane, odpowiednio, *wnętrzem*, *domknięciem* oraz *brzegiem* zbioru Z, co pozostaje w ścisłym związku z topologiczną interpretacją teorii zbiorów przybliżonych. W terminach wyrażeń nieostrych, ekstensji pozytywnej nazwy z, dla której Z jest denotacją, odpowiada zbiór $R_*(Z)$, ekstensji negatywnej nazwy z odpowiada $U - R^*(Z)$. Półcieniem nazwy z jest obszar graniczny $RN(Z)$.

Zbiory przybliżone spełniają liczne własności, do których należą[338]: $R_*(Z) \subseteq Z \subseteq R^*(Z)$; $R_*(\varnothing) = \varnothing = R^*(\varnothing)$; $R_*(U) = U = R^*(U)$; $R_*(R_*(Z)) = R_*(Z)$; $R^*(R^*(Z)) = R^*(Z)$; $R_*(Z) = -R^*(-Z)$; $R^*(Z) = -R_*(-Z)$. Zbiory przybliżone, czyli takie, dla których $RN(Z) \neq \varnothing$, Pawlak dzieli na cztery rodzaje[339]:

1. *definiowalnych w przybliżeniu* ($R_*(Z) \neq \varnothing$ i $R^*(Z) \neq U$),
2. *wewnętrznie niedefiniowalnych* ($R_*(Z) = \varnothing$ i $R^*(Z) \neq U$),
3. *zewnętrznie niedefiniowalnych* ($R_*(Z) \neq \varnothing$ i $R^*(Z) = U$) oraz
4. całkowicie niedefiniowalnych ($R_*(Z) = \varnothing$ i $R^*(Z) = U$).

Ponadto, Pawlak wprowadza pojęcie mocnego i słabego należenia przedmiotu do zbioru. *Z pewnością x należy do Z* ($x \in_* Z$), gdy $x \in R_*(Z)$. *Możliwe, że x należy do* zbioru Z, ($x \in^* Z$), gdy $x \in R^*(Z)$[340].

Już na pierwszy rzut oka widać, iż teoria zbiorów przybliżonych jest, tak jak podejścia wykorzystujące logiki trójwartościowe, luźno związana ze zjawiskiem nieostrości. Podział uniwersum na, ostro przecież wyznaczone, klasy abstrakcji

---

[338] Pawlak, [1982], s. 344–345.

[339] Pawlak, [1983]. Zachodzi tu podobieństwo do rodzajów nieostrości nazw wyróżnionych przez Kubińskiego – patrz punkt zatytułowany „Propozycja Kubińskiego".

[340] Pawlak, [1991], s. 15.

zawiera w sobie, dobrze nam znany, pomysł zastąpienia nieostrości ostrością. Ostro wyznaczona ekstensja pozytywna (negatywna), nie jest ekstensją pozytywną (negatywną) nieostrego predykatu, tak jak ostro wyznaczony obszar graniczny nie jest półcieniem żadnego nieostrego predykatu. Teoria Pawlaka jest najwyraźniej teorią wiedzy niedokładnej i niepełnej, lecz raczej wyraźnej[341]. Nie oznacza to jednak, że teoria zbiorów przybliżonych nie daje się stosować wobec nazw nieostrych i ich denotacji. Jednak, podejście zgodne z tą teorią wprowadza ostre granice obszaru nieostrości, zastępując tym samym, wiedzę nieostrą, wiedzą co prawda niepełną i niedokładną, lecz wyostrzoną. Teoria zbiorów przybliżonych zakłada więc pewnego rodzaju precyzację znaczenia danego wyrażenia nieostrego. Baza danych zawiera pewną ilość informacji i w ten sposób ogranicza problem nieostrości do tego właśnie, jak najbardziej precyzyjnego, zbioru, który z założenia, określa niedokładną wiedzę. Widać więc, jak bardzo baza danych tworząca system informacyjny, którego interpretacją jest przestrzeń przybliżenia przypomina klasę precyzacji w teorii nadwartościowania Fine'a. Nic więc dziwnego, że są podejmowane próby takiego rozwinięcia teorii zbiorów przybliżonych, które czyniłoby z niej teorię lepiej przystosowaną do wyrażania nieostrości. Próby te polegają na łączeniu zbiorów przybliżonych z rozmytymi[342]. Hybrydyzacja ta polega głównie na tym, aby podział uniwersum na klasy abstrakcji zastąpić podziałem na, tak zwane, *klasy tolerancji*. Oznacza to, że relacja definiująca te klasy nie może być relacją równoważności[343]. Ewa Orłowska rozważa relacje zwrotne i symetryczne, które nie są przechodnie[344]. Skutkiem tego, podział na klasy tolerancji jest adekwatny, lecz nie jest rozłączny.

Najlepiej, „rozmijanie" się zalet teorii zbiorów przybliżonych i potrzeb wynikających z istnienia nieostrości widać na przykładzie predykatu „być łysym" analizowanym przez Orłowską[345]. Rozważmy więc przypadek, w którym U jest zbiorem ludzi, zaś R jest relacją posiadania tej samej ilości włosów na głowie. Klasy abstrakcji relacji R są więc zbiorami ludzi o tej samej ilości włosów na głowie. Jeśli więc zamierzamy zdefiniować zbiór Z ludzi łysych, to mamy oczywisty problem, który polega właśnie na tym, że nie wiemy z których klas abstrakcji należy utworzyć sumę, mającą być zbiorem Z. Wiemy jedynie to, że niektóre z klas abstrakcji na pewno zawierają się w zbiorze Z – suma tych

---

341 Podobny pogląd wyrażają Didier Dubois i Henri Prade, autorzy wstępu do książki Pawlaka *Rough Sets*, Pawlak [1991], s. ix–x.

342 Zbiory rozmyte są omówione w części rozdziału poświęconej tym podejściom, które nie zastępują nieostrość ostrością. Wspomnianych hybrydyzacji nie omawiamy, gdyż wrażliwość na nieostrość powstałych w ich wyniku propozycji jest skutkiem rozmytości zbiorów

343 Hybrydyzację zbiorów rozmytych i przybliżonych proponują np. Dubois i Prade, [1990].

344 Orłowska, [1985], s. 469.

345 Orłowska, [1985]. Odrowąż-Sypniewska wskazuje na to, że Orłowska reprezentuje epistemiczne rozumienie nieostrości, Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 140.

klas tworzy dolne przybliżenie zbioru Z. O innych klasach wiemy tyle, że nie mają wspólnych elementów ze zbiorem Z – dopełnienie do zbioru U sumy tych klas tworzy przybliżenie górne zbioru Z. Tak długo jak nie mówimy o konkretnej przestrzeni przybliżenia, możemy odnosić wrażenie, że analizujemy nieostrość predykatu „być łysym". Niestety, wrażenie to natychmiast znika, gdy weźmiemy pod uwagę konkretną przestrzeń przybliżenia. Okaże się wówczas, że wprowadza ona ostre granice między ekstensją pozytywną tego predykatu a jego półcieniem oraz między tym półcieniem a ekstensją negatywną tego predykatu[346]. Nic więc dziwnego, że w tych warunkach nie mamy paradoksu łysego[347].

Zalety teorii zbiorów przybliżonych są niepodważalne i gwarantują zastosowanie tej teorii w najnowszych technologiach zaliczanych do nurtu sztucznej inteligencji. Jednak ta niezwykle pozytywna strona teorii nie może przysłaniać faktu, iż teoria ta proponuje praktyczne i dodajmy, skuteczne podejście do kwestii nieostrości[348], jednocześnie, zabijając ten fenomen. Nieostrość jest tu postrzegana jako niedokładność i niepełność wiedzy, co sprawia, że traktuje się ją jako problem częściowego definiowania. Należy jednak podkreślić, że fakt ten nie ujmuje ogromnej wartości teorii zbiorów przybliżonych. Co więcej, teoria ta ma na tyle wystarczająco silne motywacje, wyrażające się w bardzo praktycznych zastosowaniach, aby nie trzeba było łączyć ją na siłę z nieostrością, której najwidoczniej nie dotyczy.

Widać jasno, że rozwiązania bardziej lub mniej standardowo reprezentujące stanowisko piąte nie mogą być uznane za jakiekolwiek rozwiązanie problemu nieostrości. Okazuje się bowiem, że problem nieostrości znika, gdyż język J'. przestaje być otwartym. Każdy termin wprowadzony przez niezupełną definicję warunkową okazuje się być terminem, który daje się zdefiniować zupełnie – wystarczy odwołać się do jednego zaledwie modelu M_i', a cały wielki problem filozoficzny nieostrości znika. Zatem, nieostrości tak naprawdę nie ma, bo takie właśnie założenie zostało przyjęte. W przypadkach podejść, bardziej lub mniej jawnie, zakładających trójwartościowość, a więc propozycji Kubińskiego,

[346] Sprowadzenie nieostrości do niedokładności i niepełności wiedzy w technikach bazujących na zbiorach przybliżonych widać również w propozycji Urszuli Wybraniec-Skardowskiej, która buduje logiczną teorię pojęć nieostrych i relatywnie nieostrych, patrz Wybraniec-Skardowska, [1996].

[347] Oczywiście, chodzi tu o to, że nie mamy możliwości przejścia od zdania prawdziwego orzekającego o łysości człowieka nie mającego żadnych włosów na głowie do zdania fałszywego orzekającego, że ktoś z bujną czupryną jest łysy. Paradoksem jest natomiast istnienie dwóch wspomnianych granic. Samo rozwiązanie, jako wyostrzające nieostrość, jest przecież paradoksalne.

[348] Podobnie skutecznym jest tzw. pragmatyczne podejście do nieostrości, które nakazuje stosować wyrażenia nieostre wyłącznie w obszarach ich ostrości, patrz paragraf poświęcony propozycjom zachowującym ostrość.

Halldéna, Körnera, Tye'a, czy teorii zbiorów przybliżonych, zastąpienie nieostrości ostrością również ma miejsce, z tą jedynie różnicą, że nie jest ono aż tak łatwo widoczne: wyraźny podział wszystkich obiektów na dwa zbiory jest zastąpiony przez równie wyraźny podział na trzy zbiory. Ten nowy, trzeci zbiór ma robić wrażenie, że nieostrość jest zachowana, lecz jego wyraźne określenie przeczy właśnie nieostrości. Jak bardzo trójwartościowość jest związana z wyostrzaniem granic ekstensji widać w przypadku teorii Tye'a, który wychodząc od oczywistego jego zdaniem założenia istnienia nieostrości nie tylko językowej, lecz również pozajęzykowej, doszedł, stosując właśnie trójwartościową logikę Kleenego, do zaprzeczenia głoszonym przez siebie tezom. Ten nietrafny dobór narzędzia jakim jest trójwartościowa logika, zmusił Tye'a do zakazania przeprowadzania, w ramach swojej teorii, wszelkich rozumowań typu *sorites*. W przeciwnym razie, natychmiast ujawnia się sprzeczność między filozoficznymi założeniami a formalno-logicznymi konsekwencjami teorii Tye'a. Ten sam problem dotyczy pozostałych propozycji mieszczących się w konwencji trzech wartości logicznych.

Być może, stosowane w wyżej przedstawionych propozycjach, udawanie, że nieostrość daje się w taki, czy inny sposób sprowadzić do ostrości byłoby nawet uzasadnione, gdyby nie fakt, że jedną nieostrość można zastąpić jedynie przez inną nieostrość. Co więcej, tak jak nieostrość istnieje w sposób łatwy do zauważenia, tak ostrość poza matematyką wydaje się zupełnie nie istnieć.

Należy więc, już z samego metodologicznego punktu widzenia uznać, że dotychczas omówione stanowiska, jako paradoksalne, bo przeczące oczywistości, są nie do przyjęcia. Niestety, można przypuszczać, że kolejne, ostatnie w tej serii stanowisko, swą paradoksalnością znacznie góruje nad poprzednimi.

4.1.4.6. Stanowisko VI (epistemicyzm)

Z jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest prawdziwe w modelu $M^{*}{}'$; Z jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest fałszywe w modelu $M^{*}{}'$; gdzie $M^{*}{}'$ jest modelem właściwym języka J' scharakteryzowanym wyłącznie przez warunek: $M^{*}{}' \in RM'$.

Podobieństwo tego stanowiska do poprzedniego jest uderzające, prawdziwość i fałszywość każdego zdania jest prawdziwością i fałszywością tego zdania w jednym, właściwym modelu $M^{*}{}'$ o którym jednak, tym razem, wiadomo tylko tyle, że należy do klasy RM'. Oznacza to, że w przeciwieństwie do stanowiska piątego, nie są znane warunki charakteryzujące ten model, a więc model ten właściwie nie jest przez nas rozpoznany. Zatem, chociaż prawdą jest, że każde zdanie języka *J'*, a w szczególności każde zdanie typu *Z*(*Q*) nie spełniające warunku (OM), ma określoną wartość logiczną, to jednak wartość ta nie zawsze jest nam znana, gdyż, po prostu, nie wiemy, według którego modelu wartość ta jest ustalana. Oznacza to, że, tak naprawdę, nie ma żadnych niezdeterminowanych zdań, tylko niektóre wydają nam się być niezdeterminowanymi.

Jak widać, stanowisko to odmawia nieostrości charakteru obiektywnego, w tym sensie, że niezależnego od posługującego się językiem człowieka. Nieostrość jest tu bowiem problemem użytkownika języka, nie jest zaś problemem samego języka. To nasza niewiedza leży u podstaw wszelkich trudności wywołanych nieostrością. Gdybyśmy wiedzieli, który model jest modelem właściwym, każdy termin okazałby się dla nas wyraźnym. Ten, stosunkowo popularny dziś, pogląd jest obecnie znany pod nazwą *epistemicyzmu* lub *epistemologicznej koncepcji nieostrości*. Jej twórcą i zarazem najgorętszym propagatorem jest Timothy Williamson[349]. Swoje poglądy zawarł w szeregu prac, spośród których wyróżniają się: *Inexact Knowledge* oraz *Vagueness and Ignorance*[350]. Tym, który zasłynął wynalezieniem zaskakujących argumentów na rzecz epistemicyzmu jest natomiast, wspominany już parokrotnie, Roy Sorensen[351].

Epistemicyzm nie odrzuca logiki klasycznej, gdyż nie musi tego czynić. Każde wyrażenie nieostre jest, z samego założenia, ostre, a więc stosowalność logiki klasycznej do zdań zbudowanych wyłącznie z ostrych wyrażeń nie budzi zastrzeżeń, tak jak nie budzi zastrzeżeń stosowanie logiki klasycznej do zdań matematyki. Zdanie „Człowiek mający k włosów na głowie jest łysy" ma dla każdej liczby naturalnej k, określoną wartość logiczną. Dla żadnego k, zdanie to nie może więc być niezdeterminowanym. Niestety, nie dla każdej liczby k znamy wartość logiczną przytoczonego zdania. Nieostrość jest więc skutkiem naszej niewiedzy, co naturalnie, nie oznacza, że nie możemy się posługiwać

---

[349] Nie znaczy to wcale, że zgodne z teorią Williamsona podobne poglądy nie były głoszone już wcześniej. W swoim artykule *Zmiana i sprzeczność* z 1948 roku, dostrzegając problem nazw nieostrych, Ajdukiewicz stwierdza: „Brak nam będzie środków, by rozstrzygnąć co do człowieka w pewnym wieku, czy jest on młody, czy też nie jest młody. Jest to niewątpliwie faktem. Ale stąd gotowi niektórzy wyprowadzić wniosek, że dla człowieka, który się starzeje, ani to nie jest prawdą, iż jest on młody, ani też to, że nie jest młody. Opisany teraz atak na zasadę wyłączonego środka popełnia ten zasadniczy błąd, iż miesza niemożność rozstrzygnięcia między dwoma zdaniami sprzecznymi, z tym że żadne z tych dwu zdań sprzecznych nie jest prawdziwe. Okoliczność, że ani zdania 'on jest młody', ani zdania 'on nie jest młody' zasadniczo, a nie tylko z powodu trudności technicznych, nie potrafimy rozstrzygnąć, nie dowodzi bynajmniej, jakoby żadne z nich nie było prawdziwe.", Ajdukiewicz, [1948], s. 105–106.

[350] Williamson, [1992a], [1992b], [1994], rozdz. 8 *Inexact knowledge*, chociaż cała książka *Vagueness* ma perswazyjny charakter lansujący epistemicyzm, w każdym swoim rozdziale.

[351] Argument Sorensena na rzecz ostrości obiektów świata materialnego, mający pokazać ostrość kropli był przytoczony w paragrafie poświęconym nieostrości pozajęzykowej. Jego inne argumenty są przytoczone w dalszej części tego paragrafu.

zdaniami z terminami, które faktycznie są ostre, ale nam wydają się nieostrymi. Przecież, w przypadku niektórych wartości liczby *k*, nie mamy najmniejszych wątpliwości, że zdanie „Człowiek mający *k* włosów na głowie jest łysy" jest prawdziwe, a w przypadku innych, że jest fałszywe.

Oczywiście, na gruncie epistemicyzmu, żadnego paradoksu stosu nie ma, tak jak nie ma paradoksu kwadratu, czy paradoksu okręgu. Fałszywy wniosek, że człowiek posiadający sto tysięcy włosów na głowie jest łysy, wynika z tego, iż chociaż prawdą jest, że człowiek posiadający zero włosów na głowie jest łysy, to, naturalnie, nie jest prawdą, że dla dowolnej liczby naturalnej *k*, jeśli ktoś mając na głowie *k* włosów jest łysy, to mając k+1 włosów na głowie też będzie łysy. Istnieje bowiem taka, nieznana dla ludzi, a więc okryta „ścisłą" tajemnicą, liczba k_0, że każdy, kto ma mniej niż k_0 lub dokładnie k_0 włosów na głowie jest łysy, zaś każdy kto ma więcej niż k_0 włosów na głowie jest niełysy. Przypadków granicznych, w dotychczasowym semantycznym, czy też ontologicznym znaczeniu, już nie ma. Owszem, z powodu naszej niewiedzy, wydaje nam się, że one istnieją, a więc istnieją, lecz epistemicznie.

Jak widać, zachodzi tu bardzo duże podobieństwo do pomysłu Hyde'a, który również odrzucił indukcyjną przesłankę wyrażającą dziedziczenie własności łysości, a ponadto, stwierdził, że nie jest jasne, która liczba *k* oddziela przypadki należące do ekstensji pozytywnej od przypadków z ekstensji negatywnej nieostrego, a właściwie ostrego, predykatu. Podobnie jak Fine i Hyde, Williamson „rozwiązuje" problem nieostrości przyjmując, że jej nie ma, z tą jednak różnicą, że czyni to jawnie, twierdząc, że jest ona, po prostu, złudzeniem.

Naturalną konsekwencją epistemicyzmu jest odrzucenie nieostrości obiektów pozajęzykowej rzeczywistości[352]. Jeśli bowiem, przyjmiemy, że nieostrość w świecie materialnym jest faktem, to nieostrość wyrażeń językowych desygnujących te obiekty staje się czymś naturalnym i zrozumiałym. Trudno byłoby przecież przyjąć jednocześnie, że: 1. własność łysości jest nieostra, 2. mamy oczywiste wrażenie, że predykat wyrażający tę własność jest nieostry, a mimo to, 3. predykat wyrażający tę własność jest ostry. Co wówczas miałoby być źródłem ostrości tego predykatu? Dlaczego predykat, robiący wrażenie nieostrego, desygnujący, ponadto, nieostre zjawisko sam jest ostry? Dlatego też, epistemicyzm jest poglądem totalnej, powszechnej ostrości,

---

[352] „What distinguishes vagueness as a source of inexactness is that the margin for error principles to which it gives rise advert to small differences in meaning, not to small differences in the objects under discussion.", Williamson, [1994], s. 230–231. Zasada marginesu błędu jest omówiona w dalszej części. Tu posłużmy się jedynie przykładem: zgodnie z tą zasadą, jeśli wiemy, że człowiek mający *k* włosów na głowie jest łysy, to znaczy, że człowiek mający na głowie, bliską liczbie *k*, a więc np. k+1, k+2, k+3, ..., ilość włosów, jest łysy. Równie istotne, z punktu widzenia tej zasady przypadki k–1, k–2, k–3 są tu pominięte ze względu na charakter predykatu „być łysym": jeśli ktoś mający *k* włosów na głowie jest łysy, to raczej nie ulega wątpliwości, że ktoś mający k–1, k–2, k–3 również jest łysy.

przy jednoczesnym totalnym i powszechnym złudzeniu nieostrości, tak językowej jak i pozajęzykowej.

Swoją teorię Williamson oparł na trzech podstawowych założeniach. Pierwsze, głosi, iż wiedza dotyczy jedynie faktów, a więc jedynie fakty mogą tworzyć wiedzę. Zgodnie z drugim założeniem, niedoskonałość naszych zmysłów ma bezpośredni wpływ na to, iż nie możemy poznać dokładnych faktów. Każdy fakt jawi nam się jako nieprecyzyjny. Tym bardziej pamięć o faktach jest niedokładna, gdyż ona dodatkowo zmniejsza ich precyzyjność. Według trzeciego założenia, wiarygodność wiedzy, w tych sytuacjach, w których jest ona skazana na bycie niedokładną, zależy od zachowania tak zwanego marginesu błędu.

Aby pokazać niedokładność naszej wiedzy Williamson proponuje następujące rozumowanie, dotyczące oceny własnej wiedzy, w konkretnym przypadku. Przyjmijmy więc, że obserwujemy pewien tłum ludzi. Ponieważ nie wiem ilu ludzi jest w tym tłumie, w szczególności więc:

1. *Nie wiem, że nie ma tu dokładnie n osób.*

Założenie to oznacza, że istnieją liczby, co do których nie wiem, że nie wyrażają liczby osób tworzących tłum, na który właśnie patrzę: np. nie wiem, czy nie ma tu 1000 osób, ale nie wiem też, czy nie ma tu 800 osób, itd. Liczby te tworzą podzbiór zbioru liczb naturalnych, a więc istnieje w tym podzbiorze liczba najmniejsza, o której wiem, że nie wyraża ilości osób w tłumie. Lecz to znaczy, że liczba o jeden mniejsza będzie już tą liczbą o której wiem, że nie wyraża ilości ludzi w tłumie. Jeśli więc, najmniejszą liczbą, dla której prawdą jest założenie 1 jest 582, to znaczy, że największą liczbą, co do której wiem, że nie wyraża ilości ludzi, jest 581. Zatem,

2. *Wiem, że nie ma tu dokładnie* $n-1$ *osób.*

Jednak na podstawie własnego doświadczenia, Williamson stwierdza:

3. *Wiem, że jeśli jest tu dokładnie n osób, to nie wiem, że nie ma tu dokładnie* $n-1$ *osób.*

Williamson uważa, że 1, 2, 3 tworzą sprzeczny zbiór zdań, o ile nie odrzucimy zasady „wiem, że wiem". Wówczas, bowiem, z dwóch zdań, drugiego i trzeciego, wynika negacja pierwszego, pod jednym wszakże warunkiem. Stosując prosty rachunek zdaniowy z operatorem *W*, „wiem, że", oznaczmy przez *N* zdanie „jest tu dokładnie *n* osób", a przez *N–1* zdanie „jest tu dokładnie $n-1$ osób". Mamy wówczas: 1. $\neg W(\neg N)$, 2. $W(\neg(N-1))$, 3. $W(N \rightarrow \neg W(\neg(N-1)))$. Reguła odrywania dla implikacji objętej zasięgiem operatora *W*, powinna mieć postać: jeśli $W(a \rightarrow b)$

i $W(\neg b)$, to $W(\neg a)$. Ze zbioru zdań: drugiego i trzeciego; będziemy więc mogli wywnioskować zdanie sprzeczne z pierwszym, gdy przyjmiemy dodatkowo: 4. $W(\neg(N-1)) \rightarrow WW(\neg(N-1))$. Wówczas, z 2 i 4 mamy: 5. $WW(\neg(N-1))$, czyli $W\neg\neg W(\neg(N-1))$. I teraz dopiero, z 5 i 3 otrzymujemy $W(\neg N)$, zdanie sprzeczne z założeniem 1. W ten sposób, Williamson dowodzi niesłuszności zasady *WW*, wyrażonej przesłanką 4, a głoszącej, że: jeśli coś wiem, to wiem, że to wiem. Zdaniem Williamsona, przyjęcie tej zasady doprowadziło bowiem do sprzeczności.

Ta formalna strona wynikania sprzeczności z trzech przyjętych zdań oraz zasady *WW* może wydawać się poprawna. Jednak, całe rozumowanie nie może już robić podobnego wrażenia, gdyż jest niepoprawne. Problem tkwi w przyjętych przez Williamsona trzech zdaniach, a mówiąc ściślej w drugim z nich. Jasnym jest, że patrząc na tłum ludzi mogę wskazać szereg liczb *n*, co do których prawdziwe będzie zdanie pierwsze. Jednak, wcale to nie znaczy, że wskazany przeze mnie zbiór liczb jest wyznaczony wyraźnie. Nie mogę więc przyjąć, iż jest to ostro wyznaczony, klasyczny podzbiór zbioru liczb naturalnych *N*, a więc, że istnieje w tym podzbiorze liczba najmniejsza. Przecież, już prosta obserwacja pokaże, że istnieje pewna grupa liczb, co do których będę miał poważne wątpliwości, czy zdanie pierwsze jest dla nich prawdziwe, czy nie. W tym oczywistym fakcie wyraża się nieostrość oceny liczby ludzi tworzących tłum na który patrzę. Mamy tu jednak do czynienia z jeszcze jednym, kto wie, czy nie większym błędem. Aby można było wnioskować ze zdań 1, 2, 3 w sposób zaproponowany przez Williamsona, należy przyjąć, że w każdym z tych zdań występuje dokładnie jedna i ta sama liczba *n*. Zatem, z dwóch pierwszych zdań wynika, że *n* jest najmniejszą spośród tych, wyznaczonych w ostry sposób, liczb, co do których nie wiem, że nie wyrażają liczbie ludzi w tłumie, na który patrzę. Oczywiście, $n-1$ jest więc największą z tych liczb, mniejszych od liczb tworzących wspomniany wyraźny zbiór, co do których wiem, że nie wyrażają liczby ludzi w tłumie. Jest to, jak pokazaliśmy, mocne założenie braku nieostrości. Jeśli jednak uwzględnimy trzecie zdanie, to okaże się, że przyjęty zbiór przesłanek staje się jaskrawym założeniem ostrości, gdyż ... *n* jest liczbą ludzi w tłumie. Zatem, założenie braku nieostrości, a więc założenie ostrości, jakie wynika ze zdań 1, 2 i 3 jest silniejsze niż to, które wynikałoby z samych zdań 1 i 2. Jak widać, Williamson przyjmuje, że jeśli w tłumie jest *n* osób, to obserwator tego tłumu, nie wie, że w tłumie tym nie ma *n* osób oraz że obserwator ten wie, że w tłumie tym nie ma $n-1$ osób, przy czym liczba $n-1$ jest największą spośród tych o których wie, że nie wyrażają liczby ludzi w tłumie. Oznacza to, że pogląd reprezentowany przez Williamsona wydaje się być wewnętrznie sprzecznym[353]. Analiza tego rozumowania pokazuje, że w niemy

[353] Przyjmijmy bowiem, że mowa jest o tłumie złożonym z 1019 osób. Z założenia, obserwator tego tłumu wie, że nie ma w nim 1018 osób. Co więcej, jest to największa spośród tych

sposób jest w nim założona ostrość naszej wiedzy w sytuacji, gdy tej ostrości nie ma w sposób oczywisty.

Przykład, dotyczący oceny liczby ludzi w obserwowanym tłumie, posłużył Williamsonowi do pokazania, że czym innym jest wiedzieć coś, a czym innym wiedzieć, że się to właśnie wie. Możliwa jest bowiem wiedza na jakiś temat, bez samowiedzy, czyli bez świadomości, że się tą wiedzę posiada[354]. Ma to świadczyć o niedokładności naszej wiedzy. Jeśli bowiem wiedza byłaby dokładna, to między innymi obowiązywałaby w niej zasada *WW*: *wiem, że wiem*. Co gorsza, wiedza jest nierozerwalnie związana ze wspomnianym już wcześniej marginesem błędu. Za punkt wyjścia tej części rozważań, Williamson przyjmuje, tak zwaną, *zasadę marginesu błędu* (*margin for error principle*). Zgodnie z nią, zdanie *A* jest prawdziwe we wszystkich przypadkach podobnych do przypadków, w których prawdziwe jest zdanie „Wiem, że *A*"[355]. Oznacza to, że jeśli założymy, że zdanie „Wiem, że *A*" jest prawdziwe w przypadku *P*, to na mocy tej zasady dojdziemy do wniosku, że zdanie *A* jest prawdziwe we wszystkich przypadkach podobnych do *P*. Stosując więc tę zasadę do zdania „Wiem, że *A*", otrzymujemy następujące kryterium: Zdanie „Wiem, że *A*" jest prawdziwe we wszystkich przypadkach podobnych do przypadków, w których prawdziwe jest zdanie „Wiem, że wiem, że *A*". Przyjmijmy więc, że w przypadku *P*, prawdziwe jest zdanie „Wiem, że wiem, że *A*". Wówczas, na mocy zasady marginesu błędu, we wszystkich przypadkach podobnych do *P*, prawdziwe jest zdanie „Wiem, że *A*". Stosując ponownie tę zasadę otrzymujemy, że zdanie *A* jest prawdziwe we wszystkich przypadkach, które są podobne do przypadków podobnych do *P*. Tymczasem, ponieważ zasada *WW* nie obowiązuje, każde nowe „Wiem, że" powiększa ryzyko popełnienia błędu w ocenie prawdziwości zdania. Innymi słowy, każde zastosowanie operatora

---

liczb, o których wie, że nie wyrażają liczby ludzi w tłumie. Musi więc to wiedzieć, gdyż o następnej liczbie, którą jest 1019, nie wie, że nie wyraża liczby ludzi w tłumie. Oznacza to, że, na razie, nasz obserwator wie, że obszar nieostrości (niejasności) zaczyna się od liczby 1019. Do liczby 1018 włącznie ma on bowiem jasność, że chodzi o liczby nie wyrażające liczbę ludzi w tłumie. Naturalnie, liczba wyrażająca rzeczywistą liczbę ludzi w tłumie, a jest nią 1019, należy do tego obszaru. Zatem, obserwator wie, że liczba ludzi w tłumie jest większa od 1019 lub równa 1019. Wystarczy jednak, aby nasz obserwator zapoznał się z rozumowaniem Williamsona, aby odkrył, że liczbą tą jest dokładnie 1019. Przeczy to nie tylko całemu rozumowaniu, lecz również i przede wszystkim podstawowemu założeniu epistemicyzmu. Najgorsze jest jednak to, że przyjęte założenia są niezgodne z oczywistym stanem rzeczy.

[354] Problem, czy ktoś uświadamia sobie posiadaną przez siebie wiedzę, czy nie, wydaje się być bardziej problemem związanym z psychologią myślenia. Ponadto, najprawdopodobniej, kwestia ta jest silnie związana ze zdolnościami konkretnej osoby, z jej poziomem intelektualnym etc., i nie nadaje się do globalnego rozstrzygnięcia przy pomocy rachunku zdaniowego, które ponadto miałoby obowiązywać w przypadku dowolnej osoby.

[355] „A margin for error principle is a principle of the form: 'A' is true in all cases similar to cases in which 'It is known that A' is true.", Williamson, [1994], s. 227.

„Wiem, że" poszerza margines błędu[356]. Nie jest więc możliwa precyzyjna ocena wiarygodności naszych przekonań, gdyż każda nasza samorefleksja poszerza tylko margines błędu. Jest to drugi argument za uznaniem, iż nasza wiedza jest niedokładna, a więc i mało wiarygodna[357].

Nie sposób nie zauważyć, że przyjęta przez Williamsona zasada marginesu błędu prowadzi do tego, iż prawdziwość zdania *A* w kontekście *P*, zależy od prawdziwości zdania „Wiem, że *A*" w kontekście, pod jakimś względem, podobnym do *P*. Pomijając kwestię kontekstów, obiektywna przecież prawdziwość zdania *A* ma zależeć od subiektywnej prawdziwości zdania „Wiem, że *A*". Stanowisko to jest do tego stopnia niezwykłe, że trudno uwierzyć, iż zostało ono naprawdę sformułowane.

O ile rozwiązanie samego paradoksu stosu jest natychmiastowe, o tyle wytłumaczenia wymaga fakt, iż nie znamy, a nawet nie możemy znać, w którym miejscu, czyli między którymi przypadkami, przebiega ostra podobno granica oddzielająca ekstensję pozytywną od negatywnej. Innymi słowy, wyjaśnienia wymaga teza głosząca, że mamy złudzenie istnienia jakiegoś paradoksu stosu, podczas gdy w rzeczywistości paradoksu tego nie ma. I tu ujawnia się to, jak duże dla epistemicyzmu znaczenie ma zasada marginesu błędu. Ma ona bowiem wyjaśnić to, co jest najtrudniejsze do zrozumienia, a mianowicie, przyjętą w sposób arbitralny, niepoznawalność wyraźnej(!) z założenia prawdy, w niezliczonej ilości przypadków terminów pozornie nieostrych.

Problem ten wyjaśnijmy posługując się przykładem ostrego, zdaniem Williamsona, predykatu „być stosem". Zgodnie z kluczową dla epistemicyzmu tezą, istnieje dla tego predykatu taka liczba naturalna k_0, że:

– nawet odpowiednio usypane k ziarenek nie tworzy stosu, jeśli tylko $k < k_0$; oraz

– odpowiednio usypane k ziarenek tworzy stos, jeśli tylko $k \geq k_0$.

Prawdą jest więc zdanie Z_0 =„k_0-1 ziarenek nie tworzy stosu, a k_0 ziarenek tworzy stos"[358]. Mimo to, nie jesteśmy w stanie odkryć tej prawdy. Naturalnie, przyczyną tego stanu rzeczy jest, zdaniem Williamsona, niedokładność naszej wiedzy, skazanej na zasadę marginesu błędu. Znalibyśmy bowiem wartość liczby k_0, gdyby,

---

[356] „In effect, knowledge that one knows requires two margins of error [w przypadku właśnie opisanym], More generaly, every iteration of knowledge widens the required margin", Williamson, [1994], s. 228.

[357] Warto zauważyć, iż dowodząc dość powszechnie akceptowanej tezy o niedokładności wiedzy dotyczącej faktów, w sposób istotny związanych z nieostrością, Williamson paradoksalnie przyjmuje iż wiedza ta jest dokładniejsza niż w powszechnym mniemaniu. Przecież zazwyczaj, nie przyjmuje się, iż obszar niepewności jest wyznaczony wyraźnie. Tak więc, chcąc nas przekonać do tezy głoszącej niedokładność wiedzy, Williamson zakłada, iż wiedza jest znacznie dokładniejsza, niż nam się to zwykle wydaje.

[358] W dalszym ciągu, mimo iż nie będziemy o tym pisali, na uwadze będziemy mieli wyłącznie „odpowiednio usypane ilości ziaren".

w naszym przypadku, prawdziwe było zdanie „Wiem, że Z_0". Ponieważ Z_0 jest koniunkcją, więc zdanie „Wiem, że Z_0" byłoby prawdziwe, gdyby prawdziwe były dwa zdania „Wiem, że k_0-1 ziarenek nie tworzy stosu" oraz „Wiem, że k_0 ziarenek tworzy stos". Załóżmy teraz, że prawdziwe jest pierwsze z dwóch zdań, a więc „Wiem, że k_0-1 ziarenek nie tworzy stosu". Prawdą jest zatem zdanie, „Wiem, że k_0-1 ziarenek tworzy nie-stos". Wówczas, na mocy zasady marginesu błędu, prawdziwe jest zdanie „k_0 ziarenek tworzy nie-stos", czyli fałszywym jest „k_0 ziarenek tworzy stos". Posługując się zasadą marginesu błędu, z prawdziwości zdania „Wiem, że k_0-1 ziarenek tworzy nie-stos" wywnioskowaliśmy fałszywość koniunkcji Z_0. Załóżmy teraz, że prawdziwe jest zdanie „Wiem, że k_0 ziarenek tworzy stos". Wówczas, na mocy wspomnianej zasady, prawdziwe jest zdanie „k_0-1 ziarenek tworzy stos", a więc fałszywe jest „k_0-1 ziarenek nie tworzy stosu". Tak jak w przypadku pierwszym, kierując się zasadą marginesu błędu, z założenia prawdziwości zdania „Wiem, że k_0 ziarenek tworzy stos" wyprowadzamy wniosek o fałszywości koniunkcji Z_0. Jeśli więc, założymy, że znamy choćby jeden z członów koniunkcji Z_0, to natychmiast otrzymujemy fałszywość całej koniunkcji, co świadczy o tym, iż nie może ona być znana, jako że wydaje się być permanentnie fałszywą[359]. W ten oto sposób, prawdziwe skądinąd zdanie jakim ma być, w teorii epistemicyzmu, koniunkcja Z_0 broni się przez naszym poznaniem.

Prezentacja epistemicyzmu nie może pomijać milczeniem pewnych, dość głośnych argumentów rzekomo uzasadniających tę niezwykłą teorię nieostrości. Crispin Wright w pracy z 1994 roku *The epistemic conception of vagueness* przedstawia trzy, jego zdaniem, najważniejsze argumenty wysuwane w obronie epistemicyzmu[360].

Pierwszy argument pochodzi od Williamsona. Analizując teorię nadwartościowania, przytoczyliśmy jego analizę pokazującą, iż rezygnacja z zasady dwuwartościowości przy jednoczesnym zachowaniu prawa wyłączonego środka oraz konwencji Tarskiego, prowadzi do sprzeczności. Williamson uważa więc, że skoro odrzucenie zasady dwuwartościowości prowadzi do sprzeczności, musi być ona zachowana, a tym samym każdy predykat, nawet ten uchodzący za nieostry, musi mieć ostrą granicę dzielącą obie ekstensje tego predykatu. Naturalnie, argument Williamsona jest trudny do obronienia, gdyż wcale nie jest pewne, czy konwencja Tarskiego, zasada dwuwartościowości oraz prawo wyłączonego środka faktycznie muszą być jednocześnie zachowane w przypadku zdań z terminami nieostrymi. Jasnym jest natomiast, że wszystkie trzy zasady powinny być zachowane w sytuacji, gdy nieostrość potraktujemy jako ostrość. Lecz z tego faktu wcale nie wynika, że zasada dwuwartościowości musi obowiązywać w świecie zdań z terminami nieostrymi.

---

[359] Williamson, [1994], s. 232–233.

[360] Wright, [1994]; Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 89–98.

Sorensen jest znany jako autor dość niezwykłych argumentów na rzecz istnienia ostrych granic predykatów uważanych powszechnie za nieostre. Jeden z tych argumentów, „dowodzący", że szara nieostra kula, której szarość przechodzi płynnie w otaczającą ją biel, jest ostra, został omówiony w paragrafie poświęconym nieostrości pozajęzykowej jako wstęp do innego „dowodu" pokazującego, iż materialna kropla, np. wody, nie jest ostrym obiektem. Naturalnie, rozumowanie z szarej kuli dowodzi ostrości tejże kuli, gdyż, jak to zostało wcześniej pokazane, Sorensen założył jej ostrość. Tak więc, popełniając błąd *petitio principi*, wychodząc od zdania *p* = „Kula jest obiektem ostrym" doszedł do zdania *p*. Obecnie, skupimy się nad tymi argumentami Sorensena, które przytoczył, we wspomnianej pracy, Wright[361].

Pierwszy z argumentów Sorensena próbuje zakwestionować tolerancyjność wyrażeń nieostrych. Przypomnijmy, że predykat jest *tolerancyjny*, gdy[362]:

– *istnieje stopień zmiany k, który nie wpływa na zastosowanie tego predykatu,* oraz

– *nieistotne różnice kumulują się aż do powstania różnic istotnych, tj. takich, które mają wpływ na zastosowanie predykatu.*

Łatwo zauważyć, że w przypadku predykatu „być niskim", ten nieistotny z punktu widzenia stopień zmiany *k* może być równy, 1mm, 2mm, 3mm itd. Jeśli jednak, którąkolwiek z tych wartości odpowiednio zwielokrotnimy, to otrzymamy wielkość mającą już wpływ na ocenę zastosowania rozważanego predykatu.

Sorensen proponuje więc przeprowadzenie następującego rozumowania, które przedstawmy w wersji Odrowąż-Sypniewskiej[363].

(1) Przesłanka nieostrości występująca w paradoksie nieostrości dotyczącym wyrażenia „niski człowiek" jest fałszywa, jeżeli mówi o zmianie wzrostu równej lub większej niż 10 000 milimetrów.

(2) Jeżeli przesłanka nieostrości występująca w paradoksie nieostrości dotyczącym wyrażenia „niski człowiek" jest fałszywa, jeśli mówi o zmianie wzrostu równej lub większej niż *k* milimetrów, to jest fałszywa również, jeśli mówi o zmianie wzrostu równej lub większej niż $k-1$ milimetrów.

Zatem,

(3) Przesłanka tolerancji występująca w dowolnym paradoksie nieostrości dotyczącym wyrażenia „niski człowiek", mówiąca o zmianie wzrostu dającej się przedstawić w milimetrach, jest fałszywa.

---

[361] W swej publikacji, *A Thousand Clones*, Sorensen rozważa łącznie dwa, niżej omówione, argumenty: pierwszy uzasadniający nietolerancyjność nieostrości oraz drugi z klonów; Sorensen, [1994].

[362] Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 90.

[363] Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 91.

Argumentacja ta ma rzekomo dowodzić nieistnienia predykatów, które byłyby zarazem nieostre i tolerancyjne, gdyż, jak widać, założenie istnienia takich predykatów prowadzi do sprzeczności. Zatem, istnieć mogą jedynie te nieostre predykaty, które nie są tolerancyjne[364].

Jak już wcześniej pokazaliśmy, istnieje możliwość takiego zdefiniowania predykatu, aby jego półcień był zbiorem oddzielonym od ekstensji ostrymi granicami[365]. Jednak twierdzenie, iż nieostrość nie może być tolerancyjna wydaje się absurdalne. Przecież istotą nieostrości jest właśnie tolerancyjność, wyrażona w warunkowej przesłance o indukcyjnym charakterze. Istotą argumentacji stosu jest przecież ta przesłanka, która mówi o „przechodzeniu" danej własności z jednego przypadku na drugi. To właśnie dziedziczenie, którego nie można powstrzymać na żadnym etapie rozumowania, jeśli tylko różnica między przypadkami jest odpowiednio mała, jest przyczyną paradoksalnego rozumowania. Przyjrzyjmy się zatem argumentacji Sorensena.

Zdanie (2) ma swoją równoważną postać:

(2') Jeżeli przesłanka nieostrości występująca w paradoksie nieostrości dotyczącym wyrażenia „niski człowiek" jest prawdziwa, jeśli mówi o zmianie wzrostu o pewną wartość k milimetrów, to jest prawdziwa również, jeśli mówi o zmianie wzrostu o wartość k+1 milimetrów[366].

Naturalnie, zdanie to w połączeniu z, prawdziwą w takim samym stopniu co (1), przesłanką:

(1') Przesłanka nieostrości występująca w paradoksie nieostrości dotyczącym wyrażenia „niski człowiek" jest prawdziwa, jeżeli mówi o zmianie wzrostu równej 1 milimetr.

Daje oczekiwany wniosek:

(3') Przesłanka nieostrości występująca w paradoksie nieostrości dotyczącym wyrażenia „niski człowiek" jest prawdziwa, jeżeli mówi o zmianie wzrostu równej 10 000 milimetrów.

Jak widać, jest to, od wieków znane, klasyczne już rozumowanie stosu, które Sorensen przedstawił w nieco ukrytej, bo odwróconej postaci. W celu zamaskowania faktycznej postaci tego doskonale znanego rozumowania, Sorensen wykorzystał prawo transpozycji prostej. Jedynym więc wnioskiem jaki wynika z argumentacji Sorensena, nieważne czy reprezentowanej przez schemat {(1), (2)} |- (3), czy {(1'),(2')} |– (3'), jest to, iż zastosowanie rozumowania stosu

---

[364] Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 92.

[365] Patrz początkowa część rozdziału 4.1.3, poświęcona definicji nieostrego predykatu.

[366] Mówiąc ściślej, druga przesłanka Sorensena może być zapisana następująco: Dla dowolnego k (jeśli (dla dowolnego $n \geq k$, przesłanka nieostrości mówiąca o zmiana wzrostu o n jest fałszywa), to (dla dowolnego $n \geq k$-1, przesłanka nieostrości mówiąca o zmiana wzrostu o n jest fałszywa)). Zatem, przesłanka ta jest równoważna następującej: Dla dowolnego k (jeśli (dla pewnego $n \geq k$-1, przesłanka nieostrości mówiąca o zmiana wzrostu o n jest prawdziwa), to (dla pewnego $n \geq k$, przesłanka nieostrości mówiąca o zmiana wzrostu o n jest prawdziwa)).

do tolerancyjnych predykatów prowadzi do sprzeczności w dokładnie taki sam sposób, jak zastosowanie rozumowania stosu do predykatów nieostrych. Wydaje się zatem, że, wbrew swojemu twórcy, argumentacja Sorensena przemawia właśnie za utożsamieniem nieostrości z tolerancyjnością[367]. Jeśli bowiem, tradycyjnie uważa się, że wrażliwość na rozumowanie *sorites* charakteryzuje nieostrość, to najwidoczniej tolerancyjność jest nieostrością. Przypuszczenie, że nieostrość nie może być łączona z tolerancyjnością jest tak samo absurdalne, jak twierdzenie, że nieostrość nie może być łączona z mechanizmem dziedziczenia własności wyrażonej nieostrym predykatem, gdyż argumentacja Sorensena ujawnia, iż założenie takiego dziedziczenia prowadzi do sprzeczności[368].

Argument Sorensena nie jest więc żadnym uzasadnieniem tezy głoszącej, że predykaty nieostre nie mogą być tolerancyjne. Tym bardziej, nie jest żadnym dowodem na istnienie ostrych granic nieostrych predykatów.

Drugi argument Sorensena, z klonów, swą celnością dorównuje pierwszemu. Sorensen zakłada, że pewien mężczyzna, zwany Panem Oryginałem, został sklonowany, w wyniku czego powstał Pan Kopia. Obaj wzrastają przechodząc w tym samym czasie przez te same etapy rozwoju, w myśl zasady „wcześniejszy jest pierwszy"[369]: „jeżeli przedmiot przechodzi pewien skończony proces zmiany, to gdyby zaczął zmieniać się wcześniej i zmieniał się w ten sam sposób, to wcześniej skończyłby się zmieniać". Sorensen przyjmuje więc, że nie tylko jeden jest idealną kopią drugiego, lecz że również rozwój jednego jest idealną kopią rozwoju drugiego[370]. Przypadek tych dwóch panów sprawia, iż Sorensen stwierdza wprost, że skoro Pan Oryginał musi pierwszy zakończyć swój wzrost, w pewnej chwili *t* przestanie rosnąć, stając się wysokim mężczyzną. Jednak, w tym samym czasie *t*, Pan Kopia jeszcze rośnie, a więc nie jest wysokim mężczyzną. Zatem, linia oddzielająca wzrost wysokiego mężczyzny, od wzrostu niewysokiego mężczyzny leży gdzieś między wzrostem Pana Oryginała w chwili *t*, a wzrostem Pana Kopii również w chwili *t*. Ponieważ, sklonowanie mogło nastąpić w dowolnej chwili po urodzeniu się Pana Oryginała, na przykład

---

[367] Utożsamienie nieostrości z tolerancyjnością może budzić pewne wątpliwości, jeśli przypomnimy sobie, iż istnieją takie predykaty, jak chociażby, rozważany wcześniej, *n*-different. Wydaje się jednak, iż wspomniane utożsamienie ma sens, ponieważ nawet w przypadku predykatu *n*-different tolerancyjność odgrywa istotną rolę, tyle że niejako w tle: predykat *n*-different jest nieostry, tylko dzięki tolerancyjności predykatu „być małą liczbą". Widać więc, że predykat *n*-different jest zarazem nieostry i, w pewien ukryty sposób, tolerancyjny.

[368] Równie dobrze moglibyśmy przyjąć, że nieostrości nie wolno łączyć z nieostrością, bo, jak pokazuje argumentacja stosu, prowadzi to do sprzeczności.

[369] Wright, [1995], s. 147, w tłumaczeniu Odrowąż-Sypniewskiej, [2000], s. 92.

[370] Oczywiście, dostrzeżony, dzięki przeprowadzonym na zwierzętach doświadczeniom klonowania, fakt znacznego przyśpieszenia rozwoju klonu, nie ma tu żadnego znaczenia, gdyż argumentacja Sorensena ma charakter mentalnego eksperymentu, w którym można przyjmować takie założenia, jakich tylko dusza zapragnie. Jedynym warunkiem nakładanym na przyjmowane założenia jest to, aby nie tworzyły one sprzecznego zbioru przesłanek.

w sekundę po narodzinach, więc wzrost Pana Oryginała jest w chwili *t* dowolnie bliski wzrostowi Pana Kopii. Co oznacza, że granica między wzrostem wysokim a niewysokim jest ostra, gdyż znajduje się w dowolnie wąskim przedziale.

Błąd popełniony przez Sorensena jest oczywisty. Utożsamia on bowiem dwa kompletnie różne wyrażenia: 1. „ostatecznego wzrostu Pana Oryginała", jaki Pan Oryginał osiąga w chwili *t*, oraz 2. „wzrostu wysokiego mężczyzny"[371]. Mimo, iż jasnym jest, że Pan Kopia w chwili *t* jest niższy, choćby minimalnie, od Pana Oryginała, to przecież, w chwili *t* obaj mogą być wysokimi mężczyznami. Naturalnie, jeśli klonowanie zostałoby przeprowadzone w 20 lat po narodzinach Pana Oryginała, to w chwili *t* Pan Kopia będzie niewysoki, zaś Pan Oryginał wysoki. Jednak, ze względu na dowolność różnicy wieku obu mężczyzn, nie można w ogólności powiedzieć, że w chwili *t* jeden jest wysoki, a drugi niewysoki. Jeśli będziemy pamiętali o tym, że predykat „być wysokim mężczyzną" ma niewyraźnie wyznaczoną ekstensję negatywną, półcień oraz ekstensję pozytywną, to z łatwością zauważymy, że rozumowanie Sorensena jest, w oczywisty sposób, fałszywe. Jeśli bowiem, wzrost Pana Oryginała znajdzie się w chwili *t* w ekstensji pozytywnej tego predykatu, to nie znając różnicy wieku dzielącej obu panów, nie można wykluczyć, ani tego, że w chwili *t* wzrost Pana Kopii znajduje się wciąż w ekstensji negatywnej, ani że jest w półcieniu, ani że jest już w ekstensji pozytywnej predykatu. Jak widać, Sorensen popełnił błąd ekwiwokacji, czyli wieloznaczności w rozumowaniu, utożsamiając dwa różne wyrażenia, co spowodowało, iż jego argumentację można obciążyć także błędem *petitio principi*: w celu udowodnienia istnienia ostrych granic, założył istnienie tychże granic.

Widać wyraźnie, że argument z klonów jest powtórzeniem argumentu z szarą kulą, której szarość przechodzi płynnie w biel[372]. Załóżmy, że dwa punkty zaczynają się z tą samą prędkością i w tym samym kierunku oddalać od środka kuli, z tą różnicą, że start punktu *A* rozpoczął się wcześniej, niż start punktu *B*. Chwili *s*, w której, oddalając się od środka kuli, punkt *A* wchodzi w obszar bieli bez żadnej domieszki szarości, odpowiada chwila *t*, zakończenia przez Pana Oryginała procesu wzrostu. Oczywiście, w tej samej chwili *s* punkt *B* jest wciąż w obszarze jakiejś bardziej lub mniej intensywnej szarości. W obu argumentacjach Sorensen popełnia ten sam błąd. W przypadku kuli, zakłada, iż biel jest jedna, więc każdy choćby minimalny odcień szarości, w tym każdy „niekolorowy" odcień bieli, jest rozpoznawalny jako szarość. W przypadku klonu, Sorensen przyjmuje natomiast, że wysoki wzrost mężczyzny, to ten który Pan Oryginał osiąga dokładnie w chwili *t*, a więc każdy, choćby o mikrometr niższy będzie wzrostem niewysokiego

---

[371] Błąd rozumowania jest jasny, nawet wówczas, gdy przyjmiemy, że pan Oryginał w jakiejś chwili *t* osiągnął wzrost wysoki, a w tej samej chwili pan Kopia był jeszcze niski – patrz dalsze uwagi na temat tego argumentu.

[372] Patrz paragraf poświęcony nieostrości pozajęzykowej.

mężczyzny. Założenie ostrej granicy, tak bieli, jak i wzrostu jest oczywiste. Oczywiste jest więc, popełnienie przez Sorensena błędu *petitio principi*.

Ostatni z trzech przytoczonych przez Wrighta argument Sorensena, dowodzący, że nieostrości nie ma, odwołuje się do naszych... intuicji. Sorensen zauważa, iż długie wchodzenie pod górę kończy się nagle w chwili, w której znajdziemy się na tej górze. Zatem, chociaż wchodzenie na górę jest procesem, to jednak bycie na szczycie góry od nie-bycia na szczycie góry jest oddzielone ostrą granicą. Argument ten jest w oczywisty sposób zwykłym powtórzeniem dwóch innych: z szarej kuli oraz z klonów. Trudno powiedzieć, czy Sorensen był kiedykolwiek na szczycie jakiejś góry, ale można przypuszczać, że chyba nie. Uważa więc, iż szczyt góry przypomina blat stołu: albo się stoi na stole, albo nie. Jednak samo wchodzenie na stół, tak jak i stawanie na nim jest procesem. Przecież, jeśli jakiś proces trwa bardzo krótko, to nie znaczy, że dokonuje się w chwili rozumianej jako punkt matematyczny, czyli obiekt bez wymiarów. Nawet w przypadku stawania na stole nie można powiedzieć, od której chwili nacisk obu stóp na blat stołu jest na tyle pełny, iż świadczy o tym, że już stanęliśmy na stole. Znacznie łatwiej jest powiedzieć, że stoimy na stole, gdy już na nim staniemy, niż powiedzieć, od której chwili czasowej, rozumianej jako punkt bez wymiarów, na nim stoimy. Tym bardziej, beznadziejna jest sprawa wchodzenia na szczyt. Sorensen, we wszystkich przykładach mających, jego zdaniem, ilustrować istnienie ostrych granic, zakłada ich istnienie. Jeśli więc twierdzi, że wieloletni proces nauki języka angielskiego kończy się nagle (!) znajomością tego języka, kiedy twierdzi, że powolny rozwój osobniczy żaby kończy się nagłym (!) zniknięciem kijanki i jednocześnie, równie nagłym, pojawieniem się żaby, to nie jest jasne, na ile poważnie należy tego typu argumenty traktować. Ich fałszywość wydaje się bowiem oczywista do tego stopnia, że czyni wszelką krytykę trywialną.

Dokładniejsza analiza „argumentów" Sorensena, nie tylko że nie dowodzi istnienia ostrych granic nieostrych predykatów, lecz przyczynia się do tego, iż uwierzenie w sensowność epistemicyzmu staje się znacznie trudniejsze. Dzięki argumentom Sorensena, widzimy jasno, iż przyjęcie istnienia ostrych granic jest możliwe tylko na mocy, arbitralnej i kompletnie nie liczącej się z realiami, decyzji. Próby Sorensena pokazują, że można udowodnić nieistnienia nieostrości dopiero wówczas, gdy założymy nieistnienie nieostrości. Lista zarzutów pod adresem epistemicyzmu jest jednak dłuższa, same zaś zarzuty znacznie bardziej przekonywające, aniżeli ewentualne na nie odpowiedzi.

Głosząc istnienie ostrej granicy dla predykatów w oczywisty sposób nieostrych, epistemicyzm łatwo może popaść w sprzeczność, a to za sprawą ewolucji znaczeń słów. Williamson dostrzegając ten problem przystaje na uznanie niestabilności ostrej granicy „epistemicznie nieostrych" predykatów. Mówi on jednak o tak małych zmianach znaczenia, które są trudne do dostrzeżenia. Otóż, te właśnie niewielkie zmiany znaczenia wpływają na zmiany użycia terminów[373]. Cóż jednak począć ze zmianami znaczącymi, które sprawiają, że dawny półcień predykatu obecnie jest częścią właściwą np. ekstensji negatywnej tego predykatu? Rozważmy predykat „być wysokim człowiekiem". Dysponując wiedzą historyczną, zdajemy sobie sprawę, że w danych czasach ludzie byli znacznie niżsi niż obecnie. Tak więc, obszar nieostrości predykatu „być wysokim człowiekiem" w rozumieniu powszechnym dla Europy np. IX wieku, najprawdopodobniej zawierał się w ekstensji negatywnej tego samego predykatu w rozumieniu obecnym. Łatwo byłoby więc wyprowadzić sprzeczność: „Człowiek mający n_0 *cm* wzrostu jest wysoki i człowiek mający n_0 *cm* wzrostu jest niewysoki". Pierwszy człon tej koniunkcji jest wzięty w znaczeniu IX-wiecznej Europy, zaś drugi człon w rozumieniu XX-wiecznej Europy. Oczywiście, w tym przypadku nie ma mowy o jakiejś niedostrzegalnie małej zmianie znaczenia. Zmiana ta jest bowiem znacząca. Należy więc przyjąć, że ostra granica predykatu „być wysokim człowiekiem" zmieniła swoje położenie w sposób znaczący. Nie jest tu żadnym rozwiązaniem stwierdzenie, że mamy tu do czynienia z dwoma różnymi predykatami: „być wysokim człowiekiem w Europie w IX wieku" oraz „być wysokim człowiekiem w Europie początku XXI wieku"[374]. Trudno jest przecież odmówić znaczenia predykatowi „być wysokim człowiekiem", a więc ten predykat również istnieje. Okazuje się jednak, że mobilność ostrej granicy w teorii epistemicyzmu jest znacznie większa niż by to wynikało z faktu upływającego czasu. Granica ta musi być również wrażliwa na zmianę położenia geograficznego. Przecież ten sam predykat „być wysokim człowiekiem" ma inne znaczenie w Europie, inne zaś w Azji zwłaszcza południowo-wschodniej. Jak widać, epistemicznie nieostre predykaty mają ostre granice, które ciągle się przemieszczają i to, zarówno pod wpływem zmieniającego się czasu, jak i zmieniającej się szerokości i długości geograficznej. Zastosowanie wyjaśnienia Williamsona do tych przypadków jest o tyle trudne, iż ludzie nie znający historii i nie podróżujący po świecie mają te same problemy z nieostrym predykatem „być wysokim człowiekiem", co doskonale wykształceni światowcy[375]. Nie trzeba wiedzieć o istnieniu populacji o średniej wzrostu różnej od tej typowej dla naszej populacji, abyśmy mieli kłopoty z predykatem „być wysokim człowiekiem". Ponadto, jeśli prawdą jest, że zmiany znaczenia odpowiadają za niemożność wytyczenia ostrej granicy, to czemu te duże zmiany znaczenia wspomnianego predykatu nie wpływają na inne

---

[373] Williamson, [1994], s. 231.

[374] Przecież predykaty „być wysokim człowiekiem w Europie w IX (XXI) wieku" też są nieostre.

[375] Oczywiście, nie jest tu wcale powiedziane, że każdy światowiec jest doskonale wykształcony. Chodzi tu raczej o kogoś, kto jest zarazem światowcem i wykształconym człowiekiem.

ustalenie obszaru nieostrości tak, aby ekstensja predykatu w jednym znaczeniu nie zawierała obszaru nieostrości w innym znaczeniu? Jest to problem, który jasno pokazuje sztuczność epistemicyzmu.

Warto jednak dodać, że epistemicyzm przecząc istnieniu nieostrości godzi w uznawaną od czasów Peirce'a i raczej niekwestionowaną, charakterystykę nieostrości. Przypomnijmy, że Peirce, a wcześniej i Leibniz, wskazywali na to, że istotą nieostrości jest to, iż wiedza nie ma wpływu na rozstrzygnięcie kwestii której źródłem jest nieostrość. Jak widać, zwolennicy epistemicyzmu są innego zdania. Z ich poglądów wynika bowiem, że gdybyśmy tylko mogli posiąść pełną wiedzę o znaczeniu nieostrych predykatów, problemy z nieostrością przestałyby istnieć.

Wydaje się jednak, że akceptacja epistemicyzmu wiąże się z poważniejszym błędem wynikającym z niezrozumienia prawdziwej istoty wielu własności. W celu wyjaśnienia tej kwestii posłużmy się predykatem „być słodkim" oraz przykładem kolekcji 500 filiżanek herbaty, podanym przez Odrowąż-Sypniewską[376]. Przyjmijmy więc, że w pierwszej filiżance rozpuszczono jedno ziarenko cukru, w drugiej dwa ziarenka cukru, itd. Naturalnie, w ostatniej filiżance rozpuszczono pięćset ziarenek cukru. Jasnym jest, że zdanie „Herbata w pierwszej filiżance jest słodka" jest fałszywe, podczas gdy zdanie „Herbata w pięćsetnej filiżance jest słodka" jest prawdziwe. Zgodnie z teorią epistemicyzmu, istnieje jednak takie k_0, że zdania „Herbata w k_0-tej filiżance jest słodka" oraz „Herbata w $(k_0 + 1)$-szej filiżance jest słodka" są odpowiednio zdaniem fałszywym i zdaniem prawdziwym. Wskazując na nieintuicyjność teorii epistemicyzmu, Odrowąż-Sypniewska słusznie zauważa, że powyższe stwierdzenie przeczy naszym odczuciom słodkości, gdyż nie jest możliwe, abyśmy próbując herbaty z k_0-tej filiżanki oraz $(k_0 + 1)$-szej filiżanki odczuli jakąkolwiek różnicę w smaku, mimo iż, zdaniem zwolenników epistemicyzmu, w k_0-tej filiżance jest herbata gorzka, zaś w $(k_0 + 1)$-szej słodka. Przykład ten może jednak posłużyć do wyrażenia znacznie poważniejszego zarzutu. Otóż, słodycz jest kategorią zmysłową człowieka w tym sensie, że bez człowieka nie istnieje. Mówiąc, że coś jest słodkie stwierdzamy, że to coś jest słodkie dla przeciętnego człowieka. Innymi słowy, mówiąc, że coś jest słodkie nie twierdzimy, że coś jest obiektywnie słodkie, czyli bez względu na człowieka zawsze było i zawsze będzie słodkie. Niezależna od odczuć człowieka jest natomiast ilość ziarenek cukru rozpuszczonych w herbacie. Jeśli więc mówimy, że w herbacie zostało rozpuszczonych k ziarenek cukru, to nie twierdzimy, że, w opinii przeciętnego człowieka, w herbacie zostało rozpuszczonych k ziarenek cukru, lecz właśnie, bez względu na odczucia jakiegokolwiek człowieka, w herbacie zostało rozpuszczonych k ziarenek cukru. Z jednej strony, mamy

---

[376] Przykład ten służy Odrowąż-Sypniewskiej do pokazania nieintuicyjności teorii epistemicyzmu, Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 87.

więc całą klasę obiektywnie, czyli bez odniesienia do wrażeń poszczególnych ludzi, weryfikowalnych zdań: „W herbacie zostało rozpuszczonych k ziarenek cukru", dla $k \in \{1, 2, 3, ..., 500\}$, z drugiej zaś subiektywnie weryfikowalne zdanie „Herbata jest słodka". W przypadku tego konkretnego przykładu, epistemicyzm utożsamia więc, predykat „być słodkim" z predykatem „mieć rozpuszczone co najmniej k_0+1 ziarenek cukru". Tym samym subiektywna, w pełni zależna od wrażeń człowieka własność jest więc utożsamiona z obiektywną, niezależną od wrażeń człowieka, własnością. To utożsamienie nie tylko zubaża język, lecz jest metodologicznie niedopuszczalne. Przecież, jeśli żaden człowiek nie może odróżnić słodkości herbaty z k_0-tej filiżanki od słodkości herbaty w (k_0+1)-szej filiżance, to tylko dlatego, że tak ma właśnie być, gdyż słodycz jest własnością subiektywną, nie zaś obiektywną. Odczuwanie słodkości zmienia się właśnie z tego powodu, nie zaś dlatego, że jakaś ostra granica jest niestabilna. Znaczenie predykatu „być słodkim" odpowiada odczuciom zmysłowym człowieka, które przecież są faktem. Teoria epistemicyzmu eliminuje *de facto* istnienie tych odczuć, poprzez deformację znaczenia słów je wyrażających. Człowiek wyraża subiektywną kategorię słodkości odpowiednim słowem, które z natury rzeczy jest nieostre, gdyż sama własność słodkości jest dla człowieka nieostra. Tymczasem, według epistemicystów okazuje się, że wrażenie słodkości herbaty nie jest wrażeniem subiektywnym[377], lecz czymś obiektywnym, co odpowiada dokładnie temu, iż w herbacie rozpuszczono co najmniej $k_0 + 1$ ziarenek cukru, z dokładnością do jednego ziarenka[378]. Do tego zaś, abyśmy potrafili dostrzec, iż herbata w której rozpuszczono k_0 ziarenek cukru jest gorzka brakuje nam ... wiedzy! Wydaje się, iż poglądy temu podobne zwykło nazywać się absurdalnymi.

Jak widać, epistemicyzm eliminuje ogromną ilość nieostrych własności zastępując każdą z nich, własnością, w głębokim przekonaniu swoich wyznawców, ostrą[379]. Przyjrzyjmy się, zatem, tym precyzyjnym, w opinii zwolenników epistemicyzmu, własnościom. Podobno, w przeciwieństwie do zdania „Herbata w filiżance jest słodka", zdanie „W filiżance herbaty rozpuszczono k ziarenek cukru" jest zdaniem precyzyjnym. Niewątpliwie, drugie z tych zdań jest precyzyjniejsze od pierwszego. Czy jednak drugie zdanie faktycznie jest precyzyjne, czy jedynie precyzyjniejsze od pierwszego. Powiemy, że zdanie A jest precyzyjne, gdy w każdym możliwym przypadku jesteśmy w stanie stwierdzić, czy zdanie to orzeka o tym przypadku, czy nie.

[377] Mimo oczywistości tego, iż każdy może odczuwać inaczej słodkość, np. cukrzyk.

[378] Ciekawe, że odczucie słodkości znane było zanim zaczęto produkować cukier.

[379] Williamson odróżnia fakty mentalne od faktów fizykalnych, co wydaje się pokrywać z naszym odróżnieniem własności subiektywnych od obiektywnych. Williamson proponuje zastępować zdania o faktach mentalnych zdaniami o faktach fizykalnych, Williamson, [1994], s. 204. W przypadku naszego przykładu, chodziłoby o zastąpienie zdania „Herbata jest słodka" przez zdanie „W herbacie jest rozpuszczone co najmniej $k_0 + 1$ ziarenek cukru".

Zatem, zdanie „W filiżance herbaty rozpuszczono *k* ziarenek cukru" będzie precyzyjne, gdy w przypadku każdego przedmiotu będziemy umieli rozpoznać, czy jest on filiżanką, czy nie, czy jest on ziarenkiem, czy nie, czy jest to ziarenko cukru, czy nie-cukru, czy płyn w filiżance jest herbatą, czy może nie jest. Przywołując przykład Blacka, destrukcji krzesła, łatwo zakwestionujemy ostrość nazwy „filiżanka". W podobny sposób, rozważając różnej mocy napary herbaty, od bardzo silnej, do niemalże czystej wody, pokażemy nieostrość słowa „herbata". W podobny sposób zakwestionujemy ostrość słowa cukier. Jednak najważniejsza, dla zastąpienia zdania pierwszego przez drugie wydaje się być nieostrość nazwy „ziarenko", a właściwie „ziarenko cukru". W końcu chodzi o to, aby słodkość zastąpić ilością ziarenek. Postawmy więc pytanie co to jest ziarenko cukru? Dla „ułatwienia" odpowiedzi wyobraźmy sobie, że na naszym stole leży bogata kolekcja drobinek cukru od niewątpliwego ziarenka, do pyłku. Nie ulega najmniejszej wątpliwości, że zdanie „W filiżance herbaty rozpuszczono *k* ziarenek cukru", w żadnym wypadku, nie jest precyzyjnym zdaniem, lecz jedynie trochę precyzyjniejszym od zdania „Herbata w filiżance jest słodka". Oczywiście, zwolennik epistemicyzmu może się bronić rezygnując z tego również nieprecyzyjnego zdania uciekając się do mierzonej w procentach ilości cukru w herbacie. Jeśli więc, dla przykładu, waga cukru stanowi co najmniej 3% wagi całego roztworu cukru w herbacie, to znaczy, że roztwór jest słodki. Oznacza to, że w przypadku, gdy waga cukru stanowi dokładnie 2,99998673999999% wagi całego roztworu cukru w herbacie, to znaczy, że roztwór jest niesłodki. Nie chcąc czynić problemu nierozwiązywalnym od samego początku jego analizy, przyjmijmy niezgodnie zresztą z prawdą, że nazwy „cukier" i „herbata" są ostre. Niewątpliwie, „2,99998673999999" jest nazwą ostrą. W jaki jednak sposób mamy odróżnić roztwór 3% od roztworu 2,99998673999999%? Naturalnie, w naszym przykładzie, liczbę 2,99998673999999 możemy zastąpić liczbą 2,9, a skutek będzie podobny[380]. Jak więc, stojąc przecież na gruncie epistemicyzmu, możemy stwierdzić, że zdanie „Herbata jest słodka jeśli waga cukru w niej rozpuszczona wynosi co najmniej

[380] Ta naiwna wiara w to, że fakt „mentalny" daje się zastąpić faktem „fizykalnym" leży u podstaw poglądu głoszonego w ramach epistemicyzmu, iż niedoskonałość naszych zmysłów odpowiada za naszą niewiedzę – gdybyśmy mieli miarkę w oku, to zniknęłaby nieostrość predykatów „być niskim", „być wysokim", „być średniego wzrostu", itd. Tymczasem, o tym, że pomiar nie daje żadnej precyzyjnej informacji wiedzą doskonale fizycy, którzy do wyników każdego pomiaru dodają wartość dopuszczalnego dla tego wyniku błędu. Jest więc oczywiste, że pomiar nie może być podstawą rozwiązania problemu nieostrości. Niepoważne są więc takie stwierdzenia jak np. to, że nasza wiedza na temat długości fali świetlnej jest precyzyjna. Jest to przecież problem nierozerwalnie związany z precyzją pomiarów jakie jesteśmy w stanie przeprowadzić – jeśli jakaś liczba jest niewyobrażalnie mała, to nie znaczy, że nie istnieje od niej liczba mniejsza. Pomiar umożliwia więc zastąpienie danej nieostrości, nieostrością subtelniejszą, nigdy zaś ostrością.

3% wagi całego roztworu" jest prawdziwe, skoro nie jesteśmy w stanie stwierdzić z absolutną dokładnością ilu procentowy jest dany roztwór? A co z możliwym, a nawet nieuniknionym błędem pomiaru? Przecież podstawą epistemicyzmu jest uwzględnienie faktu niedokładności naszej wiedzy.

W przypadku ilości włosów na głowie nie jest możliwa nawet ucieczka w skład procentowy. Tu sytuacja okazuje się być jeszcze bardziej beznadziejna[381]. Załóżmy, zgodnie z teorią epistemicyzmu, że człowiek jest łysy, jeśli ma na głowie co najwyżej k_0 włosów. Jasnym jest dla każdego, że włos pojawia się na głowie w wyniku procesu wzrostu, nie zaś za pomocą różdżki czarodziejskiej. Musimy więc uznać, iż w absolutnie początkowym stadium wzrostu włosa mamy oczywiste kłopoty ze stwierdzeniem, czy te parę mikrometrów kiełkujących w potężnych, z punktu widzenia rosnącego obiektu, bruzdach skóry jest włosem, czy nie. Od której długości można mówić o tym, że człowiek ma na głowie nowy włos, czyli ma o jeden włos więcej? Trudności te są oczywiste i przekreślają zupełnie sensowność zastępowania zdań uważanych za nieokreślone, zdaniami uznawanymi za określone. Poza tym, należy wciąż pamiętać, że inne znaczenie ma predykat „być łysym", inne zaś predykat „mieć co najwyżej *k* włosów na głowie". Znaczenie pierwszego predykatu dotyczy własności, o której w ogóle nie ma mowy w przypadku drugiego predykatu, a która przecież w jakiś sposób istnieje.

Na koniec, w podobny sposób, przeanalizujmy ostrość nazw, tak zwanych, gatunków naturalnych. U Odrowąż-Sypniewskiej czytamy[382]: „Wydaje się, że aby granice mogły istnieć, musi istnieć coś, co określa ich położenie. Innymi słowy, każda granica musi być przez coś wyznaczona. Ze względu na to, przez co zostały wyznaczone, granice można podzielić na naturalne i konwencjonalne. Z jednej strony, panuje powszechna zgoda, że w wypadku nieostrości granice naturalne nie istnieją. Wyrażenia nieostre nie są wyrażeniami odpowiadającymi gatunkom naturalnym. Z drugiej strony, granice konwencjonalne są wyznaczane przez użycie i dyspozycje językowe użytkowników danego języka. Jest jednak jasne, że w wypadku wyrażeń nieostrych ani sposób użycia, ani dyspozycje językowe użytkowników nie wyznaczają żadnych granic". Cytat ten uświadamia nam, iż przekonanie o wyraźności nazw gatunków naturalnych jest dość powszechne, chociaż nie jest prawdą, że pogląd ten podzielają wszyscy filozofowie. Jeszcze raz zacytujmy Chwistka[383]: „Nazwy gatunków zwierząt zawodzą z chwilą, kiedy zechcemy je stosować do mniej lub więcej rozwiniętego płodu lub też do egzemplarzy pochodzących z epok bardzo odległych. Jeśli zrobimy założenie, że każdy człowiek musi mieć matkę i że matka każdego człowieka musi być człowiekiem, to udowodnimy natychmiast

[381] O ile w ogóle możliwa jest sytuacja bardziej beznadziejna od beznadziejnej.
[382] Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 88.
[383] Chwistek, [1934], s.10–11.

zupełnie ściśle, że ludzkość trwała wiecznie, co jest sprzeczne z materiałem doświadczalnym, dostarczonym nam przez geologów". Chwistek zwraca uwagę na dwa rodzaje argumentacji. Argumentacje pierwszego rodzaju przeczą ostrości nazw gatunków naturalnych wziętych w supozycji materialnej. Nazwa gatunku naturalnego jest więc nieostra, gdyż nie jest jasne, od której chwili rozwoju danego przedstawiciela (w przypadku ssaka chodzi o etap życia płodowego) mamy do czynienia z przedstawicielem tego gatunku. Drugi rodzaj argumentacji przeczy ostrości nazw gatunków naturalnych branych w supozycji formalnej. Zatem, nazwa danego gatunku jest nieostra, gdyż nie jest jasne, od którego momentu rozwoju ewolucyjnego możemy mówić o danym gatunku. Można tu dodać, że wziąwszy pod uwagę fakt, iż ewolucja świata ożywionego trwa nadal, nie wolno zakładać, że w pewnej, odległej raczej, przyszłości gatunek ludzki będzie wyglądał dokładnie tak jak dzisiaj. Jest to kolejny argument za nieostrością nazw gatunków naturalnych w supozycji formalnej.

Jest więc dużą naiwnością przyjmować ostrość nazw gatunków naturalnych, zwłaszcza w sytuacji, gdy biolodzy, nie umiejąc wyznaczyć ostrej granicy między roślinami a zwierzętami, rezygnują z operowania takimi nazwami jak *królestwo roślin* czy *królestwo zwierząt*; gdy dostrzeżono, iż zatarta jest granica między materią nieożywioną a ożywioną; gdy odkrywa się istnienie zwierząt, dających się zaliczyć do dwóch gatunków naturalnych tradycyjnie uważanych za rozłączne; itd.. Nazwa *gatunek naturalny* jest więc myląca, jeśli pojmuje się ją jako reprezentującą zbiór swoich przedstawicieli, odseparowany od wszystkich innych obiektów naturalnymi, czyli wyznaczonymi przez przyrodę, granicami. Najwyraźniej, sama przyroda ignoruje, tak chętnie dostrzegane przez człowieka, granice rozwijając się zgodnie z procesem ewolucji, w wyniku którego jeden „naturalny" gatunek przechodzi w inny, równie „naturalny". Jasnym jest dla każdego, że człowiek nadaje nazwy wszelkim gatunkom. Niestety, wciąż jeszcze pokutuje przekonanie, że jest to wszystko co człowiek tworzy w przypadku gatunków naturalnych. Tymczasem, człowiek nie tylko wymyśla nazwy, lecz jednocześnie określa, którym obiektom nazwy te będą przypisane, tworząc w ten sposób gatunki naturalne. Gatunek naturalny jest więc naturalny, dla człowieka obserwującego rzeczywistość. Człowiek wytycza bowiem granice dzieląc obiekty na gatunki, według „naturalnego", bo narzucającego mu się w procesie obserwacji klucza podziału. Dopiero wnikliwsza analiza tych „naturalnych gatunków" pokazuje, że dokonany podział wcale nie jest dobry, a więc tym bardziej nie może być naturalny. O ile jednak można sobie wyobrazić, iż jakaś obrona pomysłu rzeczywistego, czyli niezależnego od człowieka, istnienia gatunków naturalnych jest możliwa, o tyle nie sposób przyjąć ostrość nazw tych gatunków.

Przedstawiona wyżej analiza epistemicyzmu pomija wiele stanowisk reprezentujących konkretne poglądy zgodne lub niezgodne z tym nurtem, a które dotyczą szczegółowych kwestii, takich jak chociażby: nieostrości wyższych rzędów, przypadki graniczne „specjalnego rodzaju", rodzaje niewiedzy dające się pogodzić z teorią epistemicyzmu, kwestię wszechwiedzących użytkowników języka, zgodność teorii lub jej niezgodność z tak zwanym weryfikacjonizmem, problem dozwolonej niezgody na granicach ekstensji, kwestie tak zwanych zamierzonych przybliżeń[384]. Nieuwzględnienie tych szczegółowych zagadnień wydaje się bowiem o tyle sensowne, gdyż w dyskusjach wokół nich uczestniczyli głównie, choć nie tylko, zwolennicy epistemicyzmu, teorii nadwartościowania oraz teorii podwartościowania. Ponieważ każde z tych stanowisk jest dla nas nie do zaakceptowania, gdyż wiąże się z niezgodnym z oczywistością założeniem, iż nieostrości nie ma, traci przez to sens głębsza analiza pokazująca, że któraś z tych teorii jest w jakiejś kwestii nieco lepsza od dwóch pozostałych. Co gorsza, z powodu założenia nieistnienia nieostrości, jako punktu wyjścia w rozwijaniu tych trzech teorii, toczące się dyskusje najczęściej ignorują fakt istnienia nieostrości, poruszając kwestie zastępcze lub wprost wypaczając, akceptowany od wieków sposób pojmowania nieostrości.

4.1.5. PROPOZYCJE ZACHOWUJĄCE NIEOSTROŚĆ

Omówione w poprzednim rozdziale propozycje trudno byłoby nazwać analizami nieostrości, gdyż, w rzeczywistości, traktują one o ostrości, która w tych teoriach konsekwentnie zajmuje miejsce nieostrości. Może się więc wydawać, iż najtrafniej byłoby nazwać wszystkie te propozycje teoriami ostrości. Niestety tak nie jest. Okazuje się bowiem, iż nieostrość nie daje się wyeliminować w tak prosty sposób. Nawet jeśli umówimy się, że nieostrość będziemy konsekwentnie zastępować ostrością, to i tak nie uwolnimy się od nieostrości. Łatwo bowiem zauważyć, iż wiara w zastępowalność nieostrości ostrością jest po prostu naiwna. Wystarczy przypomnieć, rozważane pod koniec paragrafu poświęconego epistemicyzmowi, ostre podobno zdania, które miałyby zastąpić inne – nieostre. Jeśli więc zwolennik bardziej czy mniej jawnego doprecyzowania zechce zastąpić zdanie „Człowiek łysy" zdaniem „Człowiek posiadający co najwyżej *k* włosów na głowie", to natychmiast i nieuchronnie natknie się na nieostrość innego rodzaju: np. od kiedy możemy mówić, że ktoś ma *k* włosów na głowie? Również pomiar nie eliminuje nieostrości, gdyż sam jest nierozerwalnie związany z błędem pomiaru. Widać więc, że koncepcje mające zastąpić nieostre terminy ostrymi, tak naprawdę, zastępują nieostre terminy być może trochę wyraźniejszymi, ale niewątpliwie również nieostrymi.

[384] Wszystkie te zagadnienia wraz z prezentacją ścierających się w ich kwestii poglądów są zawarte w Odrowąż-Sypniewska, [2000], s. 63–110.

Oznacza to, że propozycje te muszą spotkać się z zarzutem naiwności. Proponowane przez te teorie podejścia nie rozwiązują problemów nieostrości nawet w tak nieelegancki sposób jak ten udający, że nieostrości nie ma, gdyż w żaden sposób nie są w stanie uwolnić się od nieostrości. Zakładając, że nieostrości nie ma, w miejsce wyrażeń nieostrych wprowadzają inne nieostre wyrażenia, każąc uważać je za ostre. Należy więc stwierdzić, iż przedstawione w poprzednim paragrafie teorie nie zasługują nawet na miano teorii ostrości, gdyż tak naprawdę są to teorie, w których nie ma żadnej ostrości. Złożoność elementu samooszukiwania się w tych teoriach jest zaskakująca: w niemy sposób, udając, że pracuje się nad nieostrością, nieostrość zastępuje się nieostrością, którą na dodatek uważa się za ostrość. Zwolennicy tych teorii posługują się więc nieostrymi wyrażeniami, wmawiając nam jedynie, iż są to wyrażenia wyraźne, które posłużyły im do wyeliminowania wyrażeń nieostrych. Teorie te, zarówno wtedy, gdy rozumiemy je jako teorie nieostrości, jak i wtedy, gdy traktujemy je jako teorie ostrości, są najzwyklejszą fikcją. Widać więc dobitnie, iż jak najbardziej uzasadnione jest każde takie podejście do nieostrości, które nie odmawia jej realności. Można więc zaryzykować stwierdzenie, że dopiero założenie istnienia nieostrości, przynajmniej tej językowej, może stanowić punkt wyjścia w pracach nad nieostrością. Wydaje się, że innej drogi nie ma, gdyż, jak zostało to pokazane, propozycje ostrości bez nieostrości, skazane są na wewnętrzną sprzeczność.

W rozdziale tym zajmiemy się prezentacją głównych podejść do nieostrości, które wychodzą od założenia, iż nieostrość wyrażeń języka jest realnym zjawiskiem. Co ciekawe, akceptując któreś z tych stanowisk, nie musimy bać się uznania nieostrości pozajęzykowej. Sprawa ta może pozostaje tu kwestią otwartą.

4.1.5.1. PODEJŚCIE PRAGMATYCZNE

Pragmatyczna koncepcja nieostrości jest bodaj najprostszym i najbardziej naturalnym z wszystkich możliwych podejść do zjawiska nieostrości. Jej naturalność wynika z faktu, iż jest ona zgodna z naszą zwykłą, codzienną praktyką w operowaniu wyrażeniami nieostrymi – z praktyką trwającą od wieków. Jeśli więc mamy zastosować jakiś nieostry predykat, np. „być koloru czerwonego”, to używamy go na określenie tych przypadków, które nie wzbudzają naszych wątpliwości. Nie mamy w zwyczaju używać terminów nieostrych w sytuacjach wątpliwych, czyli wobec przypadków granicznych[385].

[385] To że nie mamy w zwyczaju tego czynić, nie oznacza wcale, że w ogóle tego nie czynimy. Użycie wyrażeń nieostrych poza zakresem ich ostrości może np. oznaczać żart lub złośliwość.

Doskonale zdając sobie sprawę z istnienia takich przypadków, dobieramy inne słowa, które zastosowane do nich nie powinny budzić sprzeciwu. Tak więc, zamiast upierać się przy stosowaniu wspomnianego predykatu w każdej, nawet wątpliwej sytuacji, użyjemy innych predykatów, takich jak chociażby „być koloru bladoczerwonego", „być koloru ciemnoczerwonego", „być koloru amarantowego" itd.

Pochwałę pragmatycznego podejścia do nieostrości znajdziemy w *Pragmatycznej koncepcji nieostrości* Mieszko Tałasiewicza[386]. Zauważa on słusznie, że w przypadku, gdy użytkownik języka w wypowiadanych przez siebie na serio zdaniach zawsze używa wyrażeń nieostrych w zakresach ich ostrości, wówczas nie ma żadnych problemów, ani z wartością logiczną tych zdań, ani z zachowaniem praw logiki. Skoro predykat „być koloru czerwonego" jest użyty w zakresie ostrości, to zdanie „Ten szalik jest czerwony" jest albo prawdziwe, albo fałszywe, zaś zasadność, zarówno prawa wyłączonego środka, jak i zasady niesprzeczności nie budzi wątpliwości. Tałasiewicz wskazuje również na to, iż zgodnie z pragmatycznym podejściem do nieostrości, na zdanie, w którym użycie wyrażenia nieostrego budzi wątpliwości, nie należy patrzeć jakby było ono zdaniem fałszywym, lecz jak na wypowiedź informującą o sposobie rozumienia terminu nieostrego przez nadawcę tej wypowiedzi. Jeśli więc, ktoś wypowiada zdanie „Ten szalik jest czerwony", my zaś nie możemy się z tym zdaniem zgodzić, to nie znaczy, że mamy uznać je za fałszywe. Zdanie to należy traktować jako wypowiedź, w której prawdziwość wierzy jej nadawca[387]. Zatem, zdanie to jest dla nas informacją, jak nadawca wypowiedzi rozumie predykat „być koloru czerwonego"[388]. Jeśli natomiast, podobna sytuacja staje się źródłem sporu, to rozwiązaniem tego konfliktu nie jest żadne zawieszenie przez obie strony swoich sądów, bo przecież zazwyczaj tak się nie postępuje[389]. Daleko bardziej sensowne wydaje się dotarcie do przyczyn tego sporu, a po ich rozpoznaniu wypracowanie wspólnego stanowiska. Tałasiewicz zwraca uwagę na to, iż człowiek stosujący nieostre wyrażenie poza jego zakresem ostrości, ma

---

[386] Tałasiewicz, [2002].

[387] Problem ten doskonale ilustrują dzieci, które notorycznie stosują wyrażenia nieostre poza zakresami ich ostrości. Nie jest to jednak objaw jakiegoś „niepragmatycznego" podejścia do nieostrości. Okazuje się bowiem, że swą kontrowersyjną ocenę dziecko wypowiedziało jak najbardziej serio. Ono po prostu tak właśnie rozumie dane wyrażenie. Fakt ten świadczy więc o tym, że dzieci „uczą" się trafniejszych zastosowań wyrażeń nieostrych. Dorośli zaś uczą się dziecięcego spojrzenia na świat. Dla bardzo małego dziecka, jego nauczycielka, która właśnie ukończyła studia może być osobą starą, ale ta sama pani na pewno nie jest osobą starą dla matki dziecka.

[388] Naturalnie, w zdaniu „Ten szalik jest czerwony'' jest jeszcze inne nieostre wyrażenie: „szalik". Zatem, zdanie to informuje nas nie tylko o tym jak ktoś wypowiadający je widzi kolor czerwony, lecz również jakie obiekty uważa on za szaliki.

[389] Zawieszenie sądów przez obie strony sporu i zajęcie przez nie pozycji neutralnych jest zaleceniem Wrighta, Wright, [1994], s. 158.

tego świadomość i dlatego nie musi za wszelką cenę pozostawać przy swoim wątpliwym przecież zdaniu. W takiej sytuacji, ustąpienie drugiej stronie sporu nie powinno być sprawą szczególnie trudną do osiągnięcia.

Niestety, to zdroworozsądkowe podejście Tałasiewicza do nieostrości wiąże się z pewną niezwykle trudną do zaakceptowania idealizacją. Otóż, twierdzi on, że problemy nieostrości dotyczą jedynie wypowiedzi w języku potocznym, gdyż język nauki jest wolny, lub co najmniej może być wolny od nieostrości. Tymczasem, język nauki jest notorycznie nieostry. Wspominaliśmy już wcześniej, że żadne z takich nazw jak „tygrys", „roślina", „istota ożywiona", „kamień", „człowiek" nie są nazwami ostrymi[390]. Nazwy te zaledwie są, lub wydają się być, wyraźniejszymi niż „czerwony", „łysy", „wysoki". Jednak, jak to już wcześniej wykazaliśmy, ich nieostrość jest przecież oczywista, a na domiar złego, nieusuwalna. Najciekawsze jest jednak to, jak uczeni radzą sobie z tymi powszechnymi i nieusuwalnymi problemami. Okazuje się, że ich sposobem na nieostrość jest właśnie pragmatyczna koncepcja nieostrości. I tak, dla przykładu, biolog będzie używał nazwy „istota żywa" jedynie w przypadkach nie budzących wątpliwości, a więc w zakresie ostrości tej nazwy. Jeśli natomiast będzie się on chciał wypowiedzieć na temat innych form, które, ani nie wydają się być materią nieożywioną, ani też nie spełniają norm pozwalających bez wątpienia nazwać je istotami żywymi, wówczas nazwa „istota żywa" zostanie zastąpiona przez inną, bardziej szczegółową taką jak chociażby „wirus". To właśnie konsekwentne stosowanie nazw nieostrych w zakresach ich ostrości każe biologowi powstrzymać się od odpowiedzi na pytanie, czy wirus jest istotą żywą[391].

Niestety, mimo reprezentowania zdroworozsądkowego i bardzo praktycznego stanowiska, pragmatyczna koncepcja nieostrości nie służy zgłębieniu

---

[390] Podobnie nieostre są nazwy funkcjonujące w fizyce: „sekunda", „metr" i wszystkie wyrażenia mające jakikolwiek związek z wynikami pomiarów. Nieostry jest również „brzeg" wielu rozważanych w fizyce ciał, co świadczy o nieostrości obiektów materialnych.

[391] Kwestii powszechnego, choć najczęściej jedynie intuicyjnego i nieświadomego, stosowania pragmatycznego podejścia do nieostrości, nie dostrzega Odrowąż-Sypniewska, która podejście to poddaje „miażdżącej" krytyce zupełnie nie dostrzegając, że np. w naukach przyrodniczych jest ono wręcz obowiązkowe, Odrowąż-Sypniewska, [2003]. Co więcej, podziela ona opinię, iż cechom nieostrym odpowiadają jakieś cechy rzekomo precyzyjne. Przedmiot posiada jakąś cechę nieostrą pod warunkiem, że posiada jakąś jedną lub kilka cech precyzyjnych(!), czyli takich, które nie są nieostre. I tak, dla przykładu, cechą precyzyjną jest, w opinii Ordowąż-Sypniewskiej, posiadanie k włosów na głowie, dla $k \in N$, Odrowąż-Sypniewska, [2003], s. 235. Naturalnie cecha ta, jak już wcześniej pokazaliśmy, jest nieostra, chociaż z powodu ograniczenia naszego postrzegania, może robić wrażenie wyraźnej. Jednym z argumentów Odrowąż-Sypniewskej, godzących rzekomo w podejście pragmatyczne jest to, iż zastosowanie się do niego miałoby grozić „niesłychanie rzadkim" użyciem terminów nieostrych, Odrowąż-Sypniewska, [2003], s. 236. Naturalnie, już prosta obserwacja, zarówno praktyki codziennej, jak i tej naukowej, która przecież trwa od wielu stuleci, pokazuje, że zagrożenia tego po prostu nie ma.

fenomenu nieostrości. Teoria ta, zgodnie ze swoją nazwą, nie ma innego wymiaru, jak tylko pragmatyczny. Nie dostarcza więc odpowiedzi na wiele pytań dotyczących natury nieostrości, zaś zgodna z nią propozycja rozwiązania paradoksu nieostrości, nie jest *de facto* żadnym rozwiązaniem tego odwiecznego dylematu. Teoria ta może jedynie podpowiedzieć, jak postępować, aby nie wpaść w pułapkę argumentacji stosu: należy powstrzymać się od stosowania wyrażeń nieostrych poza ich zakresami ostrości. Jednak, na gruncie tej teorii, nie może być mowy o jakimkolwiek rozwiązaniu paradoksu stosu.

Trudno jednak nie dostrzec, że, w przeciwieństwie do wcześniej omówionych, pragmatyczna koncepcja nieostrości ani nie przeczy oczywistości, ani nie jest teorią paradoksalną. Jest to więc pierwsza z tych omówionych tu propozycji, która traktuje nieostrość poważnie, przyjmując, iż zjawisko to naprawdę występuje w rzeczywistości. Niestety, zdarza się, że nawet jej zwolennicy potrafią wierzyć w możliwość zastąpienia nieostrości ostrością.

Z chronologicznego punktu widzenia, pragmatyczna koncepcja nieostrości nie jest pierwszą spośród tych, uznających istnienie nieostrości. Jest ona jednak na tyle prosta i bliska naszej codziennej oraz naukowej praktyce, że omówienie jej na samym początku tego paragrafu wydaje się być czymś naturalnym. Jednak najważniejsze jest to, że czas jej obowiązywania jest już liczony w tysiącleciach.

4.1.5.2. ZBIORY ROZMYTE I STOPNIE PRAWDY

Z dotychczasowych analiz wynika oczywistość nietrafności, między innymi, tych podejść do nieostrości, które bazują na logikach trójwartościowych. Predykaty nieostre mają w tych teoriach ekstensje o ostro wyznaczonych granicach. W przeciwieństwie do propozycji, które w trywialny sposób zamieniają nieostrość na ostrość, podejścia wykorzystujące logiki trójwartościowe zakładają jednak, że dla dowolnego nieostrego predykatu istnieją jakieś obiekty nie należące, ani do ekstensji pozytywnej, ani do negatywnej tego predykatu. Zatem, ostro wyznaczone granice dzielą uniwersum na tyle zbiorów ile jest wartości logicznych, czyli w tym przypadku na trzy. Nietrudno zauważyć, że żadna n-wartościowa logika nie będzie właściwą podstawą dla trafnej analizy nieostrości. Czy logika stu wartości wyrazi fenomen koloru czerwonego? Oczywiście, że nie. Wprowadzi jedynie w miejsce jednego nieostrego koloru, sto równie nieostrych jego odcieni, co gorsza, będzie je traktować jako wyznaczone ostro. Różnica dzieląca podejście trójwartościowe od stuwartościowego jest zaledwie różnicą stopnia, nie zaś jakości.

Każda teoria, która w jakikolwiek sposób, ustala ostrość obszaru nieostrości musi być niezgodna z samą nieostrością, godzi bowiem w definicję nieostrości. Świadomość tego, raczej oczywistego, faktu legła u podstaw nowej propozycji, która zbiór skończonej ilości wartości logicznych zamieniła na zbiór nieskończony, i to zbiór mocy kontinuum[392]. Motywacja dla takiego pomysłu wydaje się być niezwykle intuicyjna. Rozważmy pewną drogę, ciemniejącą w sposób ciągły, od bieli do czerni. Pomińmy przy tym fakt nieostrości samej bieli i czerni, tak jak gdyby istniała jedna biel i jedna czerń. Podążając tą drogą stopniowo wkraczamy w ciemność. W każdej chwili jesteśmy w obszarze ciemniejszym, od tego, w którym byliśmy chociażby jedną sekundę wcześniej. Załóżmy teraz, że idąc tą drogą stale zastanawiamy się nad wartością logiczną zdania „Droga jest ciemna". Z każdą sekundą prawdziwość tego zdania staje się coraz bardziej oczywista[393]. Można więc spróbować wyrazić liczbowo tę zwiększającą się oczywistość prawdziwości. Operując wartościami liczbowymi rzeczywistymi z przedziału obustronnie domkniętego [0,1], definiujemy rosnącą funkcję przyporządkowującą każdej liczbie rzeczywistej, wyrażającej odległość od początku drogi w jakiej jesteśmy w danym momencie, kolejną liczbę rzeczywistą z przedziału [0,1], tak, aby punktowi początkowemu drogi była przypisana wartość 0, zaś ostatniemu wartość 1 – w chwili startu zdanie „Droga jest ciemna" jest niewątpliwie fałszywe, zaś w ostatnim punkcie drogi, to samo zdanie jest niewątpliwie prawdziwe. Między punktami początkowym i końcowym drogi, zdanie to ma przypisaną wartość większą od 0 i mniejszą od 1, w zależności od tego w jakiej chwili marszu jest ono wypowiadane.

W powyższym przykładzie, przyjęliśmy założenie, że liczby z przedziału [0,1] wyrażają stopień oczywistości prawdziwości danego zdania. Trudno jest bowiem mówić o większej lub o mniejszej prawdziwości zdania: dane zdanie, albo jest prawdą, albo nie jest. Cóż miałoby oznaczać, na przykład, 3/4 prawdy? Co innego, jeśli przyjąć, wzrastanie oczywistości prawdziwości, lub wzrastanie zbliżania się danej wypowiedzi do prawdy: wypowiadając zdanie „Droga jest ciemna" w chwili marszu jesteśmy dalsi od prawdy, niż wówczas, gdy to samo zdanie wypowiadamy w późniejszej względem t_1 chwili t_2. Niestety, w teorii nieostrości bazującej na

---

[392] Założenie mocy kontinuum jest tu jedynie czysto teoretyczne, gdyż jest pewnego rodzaju idealizacją. Mówiąc wprost, jest to puste założenie. Przecież tak naprawdę, dysponujemy jedynie przeliczalną ilością liczb. Naturalnie, wykraczamy poza zbiór liczb wymiernych, operując takimi liczbami, jak chociażby, π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. Jednak rozszerzenie ciała liczb wymiernych o przeliczalną ilość dodatkowych liczb niewymiernych daje ciało liczbowe o mocy przeliczalnej. Przedstawicielom referowanego tu podejścia potrzebne jest raczej założenie gęstości zbioru, które gwarantuje, że między dowolnymi dwiema różnymi liczbami, nawet tymi różniącymi się bardzo nieznacznie, istnieje liczba różna od każdej z nich. Warunek ten, jak wiadomo, spełnia już zbiór liczb wymiernych. Zapewne, obrońca teorii zbiorów rozmytych stwierdziłby, że wcale nie chodzi o gęstość, lecz o ciągłość zbioru liczbowego. Wydaje się jednak, że ciągłość jakiegokolwiek zbioru liczbowego, w tym także zbioru liczb rzeczywistych, jest względna. Wskazuje na to definicja ciągłości zbioru wykorzystująca pojęcie luki przekroju zbioru – patrz Kuratowski, Mostowski, [1978], s. 162, 211. Zatem, każde odwołanie się do ciągłości zbioru liczb rzeczywistych jest iluzoryczne. Oznacza to, że tak naprawdę w teorii zbiorów rozmytych wystarczy jedynie to, aby między dwiema różnymi liczbami zawsze mieć trzecią, różną od nich – chodzi więc o gęstość zbioru liczbowego, a nie o jego ciągłość.

[393] Williamson, [1994], s. 113.

przedstawionym wyżej pomyśle mówi się wyraźnie o stopniu prawdziwości, co oznacza, że z dwóch zdań, z których żadne nie jest prawdziwe, jedno zdanie jest prawdziwsze od innego, w tym sensie, że stopień prawdziwości tego zdania jest większy. Teoria ta nosi nawet nazwę *teorii stopni prawdy*.

Wracając do przykładu, załóżmy, że rozważana w nim droga łączy dwa obszary: jeden utworzony przez punkty białe, oraz drugi, przez punkty czarne. Biorąc pod uwagę punkty tworzące obszar czerni, do którego droga ta prowadzi, można spróbować sformułować nowe pojęcie zbioru, którego nazwa mogłaby brzmieć następująco „zbiór punktów ciemnych". Przynależność do tego zbioru nie wyrażałaby się dwiema liczbami: 1, w przypadku, gdy punkt należy do zbioru; oraz 0, gdy punkt nie należy do zbioru. Teraz, przynależność punktu do zbioru symbolizowałyby liczby z przedziału rzeczywistego [0,1]. Każdemu punktowi, wspomnianej jednej jedynej, czerni przypisana byłaby liczba 1, każdemu zaś punktowi, jednej jedynej, bieli wartość 0[394]. Punktom o różnym stopniu szarości, odpowiednia wartość liczbowa z obustronnie otwartego przedziału (0,1) byłaby przyporządkowana w sposób taki, jak wcześniej opisany. *Zbiór punktów ciemnych* nie jest więc wyznaczony wyraźnie[395]. Nie jest bowiem tak, że każdy punkt rozważanego obszaru ma wartość 1 lub 0. Przynależność do tego zbioru niektórych punktów wyraża się liczbą 1/100, innych 1/2, jeszcze innych 800/801.

Przedstawiony wyżej przykład ilustruje ideę, tak zwanych, *zbiorów rozmytych* (*fuzzy sets*), która po raz pierwszy zaistniała dzięki Abrahamowi Kaplanowi i Hermannowi Schottowi. W 1951 roku wykorzystali oni przyporządkowywanie liczb rzeczywistych z przedziału [0,1] do określania stopnia reprezentowania wiedzy empirycznej przez zdania. Zdefiniowali również odpowiedni rachunek dla iloczynu, sumy, dopełnienia i zawierania się tez empirycznych[396]. Niestety, szczęście im nie dopisało i ich idee nie przyjęły się. Prawdziwie oszałamiająca kariera zbiorów rozmytych rozpoczęła się dopiero czternaście lat później za sprawą inżyniera elektryka Loftiego A. Zadeha, który w 1965 roku opublikował głośną pracę *Fuzzy sets*[397]. Od tamtej pory, zbiory rozmyte stawały się coraz ważniejsze i popularniejsze. Ich ogromne znaczenie ujawniły najnowsze zastosowania w zaawansowanej technologii opartej na logikach rozmytych (*fuzzy logics*), przyczyniając się do gwałtownego rozwoju informatyki i teorii sterowania. Nic więc dziwnego, że zbiory rozmyte znalazły swoje miejsce nie tylko w nowej teorii mnogości, lecz również w topologii, algebrze i w rachunku prawdopodobieństwa[398].

---

[394] Oczywiście, stoimy na stanowisku, że nie ma, ani jednej jedynej bieli, ani jednej jedynej czerni.

[395] Innymi zbiorami tego typu są: zbiór stosów, zbiór ludzi łysych, zbiór ludzi niełysych itd.

[396] Williamson, [1994], s. 120.

[397] Zadeh, [1965].

[398] Kosko i Isaka, [1993], Malinowski, [1990], s. 115.

Zbiór rozmyty A, nie jest definiowalny za pomocą dwuwartościowej funkcji charakterystycznej, określającej wyraźne należenie oraz wyraźne nienależenie do tego zbioru, lecz jest charakteryzowany przez uogólnioną funkcję charakterystyczną U_A: $U \rightarrow [0,1]$, która każdemu elementowi uniwersum U przypisuje wartość liczbową z przedziału liczb rzeczywistych $[0,1]$. $a \in U$ jest elementem zbioru A w stopniu s, jeśli $U_A(a) = s$. Zatem, $a \in U$ jest niewątpliwie elementem zbioru A, gdy $U_A(a) = 1$; niewątpliwie zaś nie jest elementem zbioru A, gdy $U_A(a) = 0$. Przedstawiając teorię zbiorów rozmytych Zadeha oraz jego logikę, Grzegorz Malinowski zauważa, że takie określenie zbioru rozmytego sprawia, że zbiór w sensie tradycyjnej matematyki jest szczególnym przypadkiem zbioru rozmytego. Wystarczy, aby funkcja U_A odwzorowywała zbiór U w $\{0,1\}$. Podobnie, zbiory określane przy pomocy trójwartościowych i ogólniej n-wartościowych charakterystyk również są szczególnymi przypadkami zbioru rozmytego[399].

Wobec nietrafności n-wartościowych podejść do wyrażeń nieostrych, szczególnego znaczenia nabiera zastosowanie teorii zbiorów rozmytych do nieostrości. Malinowski przytacza przykład podany przez Zadeha, ilustrujący to zastosowanie na predykacie „być liczbą znacznie większą niż 1", określonym na zbiorze $\boldsymbol{R}^+$ liczb rzeczywistych dodatnich. Zadeh pokazuje, że możliwe jest przyporządkowanie temu predykatowi rozmytego zbioru W przy pomocy dowolnej, w ramach pewnego marginesu swobody, niemalejącej funkcji R_w: $\boldsymbol{R}^+ \rightarrow [0,1]$. Swobodę wyboru tej funkcji, poza wskazaną już konieczną jej monotonicznością, ograniczają jedynie warunki:

– dla dowolnej liczby $r \in [0,1]$, $R_w(r) = 0$; oraz
– dla dowolnej liczby $r \geq 10^{10}$, $R_w(r) = 1$.

Naturalnie, drugi z tych warunków może być wyrażony inaczej, tzn. w miejscu 10^{10} może wystąpić inna liczba[400].

Interesujące jest to, jak Zadeh definiuje inkluzję zbiorów rozmytych oraz operacje dopełnienia, sumy i iloczynu tych zbiorów:

$A \subseteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in U$, $U_A(x) \leq U_B(x)$;
$U_{-A}(x) = 1 - U_A(x)$;
$U_{A \cup B}(x) = \max\{U_A(x), U_B(x)\}$;
$U_{A \cap B}(x) = \min\{U_A(x), U_B(x)\}$[401].

---

[399] Malinowski, [1990], s. 112.

[400] Malinowski, [1990], s. 113. Niestety, jak się okazuje, jest to poważna słabość tej teorii jako teorii nieostrości.

[401] W 1976 r. Zadeh przedstawił alternatywną, niedystrybutywną algebrę zbiorów, w której operacje sumy i iloczynu są zdefiniowane następująco: $U_{A \cup B}(x) = U_A(x) + U_B(x) - U_A(x) \cdot U_B(x)$, $U_{A \cap B}(x) = U_A(x) \cdot U_B(x)$. Algebra ta posłużyła Zadehowi do wyrażania reguł obliczania sumy i iloczynu zbiorów Borela niezależnych zdarzeń w teorii prawdopodobieństwa, Malinowski, [1990], s. 113.

Tak określona algebra generuje w naturalny sposób logikę rozmytą o nieprzeliczalnej ilości wartości logicznych. Wartości uogólnionych funkcji charakterystycznych można utożsamić z wartościami logicznymi odpowiednich zdań: $U_A(a) = s$ oznacza, że s jest wartością logiczną zdania $a \in A$. Niech, $[p]$, $[q] \in [0,1]$ są stopniami prawdziwości, odpowiednio, zdań p i q. Zdanie p jest całkowicie prawdziwe (całkowicie fałszywe), gdy $[p] = 1$ ($[p] = 0$). Zdanie p jest co najmniej tak prawdziwe, jak zdanie q, jeśli tylko $[p] \geq [q]$. Wskazując na wiele możliwości określenia logiki rozmytej, Malinowski zauważa, że najczytelniejszym sposobem określenia spójników zdaniowych jest ten, przestrzegający tradycyjnego rozumienia inkluzji zbiorów oraz operacji dopełnienia, sumy i iloczynu: $A \subseteq B$ wtw $\forall x \in U\, (x \in A \rightarrow x \in B)$; $-A = \{x \in U: \neg(x \in A)\}$; $A \cup B = \{x \in U: x \in A \vee x \in B\}$; $A \cap B = \{x \in U: x \in A \wedge x \in B\}$. Wówczas, $[\neg p] = 1 - [p]$, $[p \wedge q] = \min\{[p],[q]\}$, $[p \vee q] = \max\{[p],[q]\}$. Takie określenie wartości negacji, koniunkcji i alternatywy sprawia, że spełnione są następujące, pożądane warunki[402]:

$[p] \leq [p \wedge q]$ i $[p \vee p] \leq [p]$;
$[p \wedge q] \leq [p]$ i $[p \wedge q] \leq [q]$ i $[p] \leq [p \vee q]$ i $[q] \leq [p \vee q]$;
jeśli $[p'] \leq [p]$ i $[q'] \leq [q]$, to $[p' \# q'] \leq [p \# q]$, dla $\# \in \{\wedge, \vee\}$.

Określenie koniunkcji może zostać uogólnione tak, aby definiowało kwantyfikator ogólny. Zdanie $\forall x \in U\, F$ jest więc koniunkcją wszystkich zdań „x jest F" dla $x \in U$. Naturalnie, stopień prawdy zdania skwantyfikowanego ogólnie jest więc kresem dolnym[403] stopni prawdy wszystkich podstawień tego zdania. Podobnie, uogólnienie alternatywy prowadzi do określenia kwantyfikatora szczegółowego. Zdanie $\exists x \in U\, F$ jest więc alternatywą wszystkich zdań „x jest F" dla $x \in U$. Stopień prawdy zdania skwantyfikowanego szczegółowo jest więc kresem górnym[404] stopni prawdy wszystkich podstawień tego zdania[405]. Pewną swobodę pozostawia zdefiniowanie implikacji, równoważności i negacji. Malinowski zauważa jednak, że warunek jaki musi ona spełniać jest następujący: jeśli $[p] \leq [q]$, to $[p \rightarrow q] = 1$. Okazuje się, że warunek ten zachodzi dla dwóch ważnych implikacji: Łukasiewicza oraz Gödla. W pierwszym przypadku, $[p \rightarrow q] = \min\{1,\ 1 - [p] + [q]\}$. W drugim zaś, $[p \rightarrow q] = 1$, gdy $[p] \leq [q]$ oraz $[p \rightarrow q] = [q]$, gdy $[p] > [q]$[406]. Williamson przypomina, że dla implikacji

---

[402] Williamson, [1994], s. 114–117.

[403] a jest *kresem dolnym* zbioru A, jeśli a jest największym spośród tych elementów x takich, że dla dowolnego $y \in A$, $x \leq y$. a jest wówczas, największym ograniczeniem dolnym zbioru A.

[404] a jest *kresem górnym* zbioru A, jeśli a jest najmniejszym spośród tych elementów x takich, że dla dowolnego $y \in A$, $y \leq x$. a jest wówczas, najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A.

[405] Williamson, [1994], s. 115–116.

[406] Malinowski, [1990], s. 114.

Łukasiewicza zachodzi ponadto: jeśli $[q] \leq [p]$, to $[p \rightarrow q] = 1 + [q] - [p]$. Implikacja ta jest związana z równoważnością: $[p \leftrightarrow q] = 1 + \min\{[p],[q]\} - \max\{[p],[q]\}$; warunkiem: $[p \rightarrow q] = [p \leftrightarrow (p \wedge q)]$. Dzięki takiemu określeniu równoważności, jeśli zdania p i q mają dokładnie te same stopnie prawdy, to ich równoważność jest całkowicie prawdziwa: jeśli $[p] = [q]$, to $[p \leftrightarrow q] = 1$. Ponadto, jeśli zdanie p jest całkowicie prawdziwe, zaś q całkowicie fałszywe, to ich równoważność jest całkowicie fałszywa: jeśli $[p] = 1$ i $[q] = 0$, to $[p \leftrightarrow q] = 0$[407].

Malinowski wyjaśnia, iż początkowo termin *logika rozmyta* oznaczał klasę logik wielowartościowych o nieprzeliczalnie wielu wartościach, z logiką Łukasiewicza na czele[408]. Jak można było przypuszczać, argumentacja stosu nie prowadzi na gruncie tych logik do sprzeczności. W roku 1969 Joseph Goguen sprawdził jak logika Łukasiewicza rozbraja paradoks stosu, pokazując iż przyjęcie dwóch przesłanek: (z1) *Ktoś, kto ma 20000 włosów na głowie, nie jest łysy* oraz (z2) *Ten, kto ma o jeden włos mniej niż ktoś, kto nie jest łysy, również nie jest łysy*; nie musi prowadzić do wiadomej sprzeczności. Malinowski uogólnia to rozwiązanie, wskazując na jego niezależność od wyboru logiki bazowej[409]: „Paradoks zniknie, gdy wartość logiczną zdania 'Ktoś, kto ma *n* włosów, nie jest łysy' utożsamimy ze stopniem należenia osoby mającej *n* włosów do rozmytego zbioru niełysych. Wtedy też (z2), niezależnie od doboru logiki bazowej, będzie miało wartość logiczną mniejszą niż 1 np. o ε. Jeżeli więc, dla przykładu, w logice bazowej użyjemy implikacji Łukasiewicza, to w rezultacie 20000-krotnego zastosowania reguły odrywania otrzymamy zdanie o wartości logicznej 1–20000ε, a więc praktycznie fałszywe".

Dokładniejsze rachunki przeprowadza Williamson. Przyjmuje on, że p_k jest zdaniem „Człowiek mający *k* włosów na głowie jest łysy". Prowadząca do sprzeczności argumentacja stosu powinna mieć postać:

$$
\begin{array}{l}
p_0 \\
p_0 \rightarrow p_1 \\
p_1 \rightarrow p_2 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
p_{99999} \rightarrow p_{100000} \\
\hline
p_{100000}
\end{array}
$$

[407] Williamson, [1994], s. 116–118.
[408] Malinowski, [1990], s. 114.
[409] Malinowski, [1990], s. 115.

Tradycyjnie, przyjmując prawdziwość wszystkich przesłanek i stosując sto tysięcy razy regułę *Modus Ponens* dochodzimy do prawdziwości, fałszywego przecież, wniosku. Jednak, na gruncie teorii stopni prawdy nie otrzymamy prawdziwości zdania p_{100000}. Dla przykładu, przyjmijmy, że zdanie p_k jest prawdziwe w stopniu $1 - k/100\,000$, dla $0 \leq k \leq 100\,000$. W szczególności więc, p_0 jest całkowicie prawdziwe (prawdziwe w stopniu 1), p_1 jest prawdziwe w stopniu 99 999/100 000, natomiast p_{100000} jest całkowicie fałszywe (fałszywe w stopniu 1), jako prawdziwe w stopniu 0. Każda zaś implikacja jest prawdziwa w stopniu 99 999/100 000[410]. Jak widać, ta prosta interpretacja rozumowania stosu jest zaskakująco zgodna z naszymi intuicjami. Oto bowiem, okazuje się, że każda z implikacji jest prawie prawdziwa, gdyż prawdziwość w stopniu 99 999/100 000, to prawie całkowita prawdziwość. Nikt nam więc tu nie „wmawia", że fałszywe jest zdanie „Jeśli dwie osoby różnią się jednym włosem, to albo obie są łyse, albo obie są niełyse". Zdanie to jest prawie całkowicie prawdziwe. Ponadto, pierwsza przesłanka jest całkowicie prawdziwa, a mimo to ostatni wniosek jest całkowicie fałszywy. Okazuje się więc, że tak jak duża ilość nieznaczących różnic czyni w przypadku nieostrości różnicę znaczącą, tak w powyższym rozumowaniu, zupełnie nieznacząca fałszywość okresów warunkowych (fałszywość w stopniu 1/100 000) daje w wyniku całego rozumowania całkowitą fałszywość (fałszywość w stopniu 1). Williamson wysuwa pod adresem tej propozycji zarzut, iż implikacja nie jest przechodnia, gdyż fakt, iż każda implikacja $p_k \rightarrow p_{k+1}$ jest prawie prawdziwa, nie oznacza, że również implikacja $p_0 \rightarrow p_{100\,000}$ jest prawie prawdziwa. Co gorsza, twierdzi Williamson, implikacja $p_0 \rightarrow p_{100\,000}$ jest całkowicie fałszywa[411]. Należy przyznać, że faktycznie jesteśmy skłonni uważać, iż implikacja powinna spełniać prawo przechodniości. Czy jednak, również w przypadku argumentacji stosu? Przecież, jesteśmy w stanie zaakceptować prawdziwość implikacji $p_k \rightarrow p_n$ tylko wówczas, gdy liczba n jest niewiele większa od liczby k. Im mniejsza jest różnica $n-k$, tym łatwiej nam zaakceptować prawdziwość implikacji $p_k \rightarrow p_n$. Jeśli jednak $n-k = 100000$, w żadnym razie nie potrafimy zgodzić się, że implikacja ta jest prawdziwa, dokładnie tak jak ma to miejsce w wyżej przeprowadzonej analizie. Jednak z drugiej strony, założenie, iż wartość 1 nie jest jedyną wartością wyróżnioną prowadzi natychmiast do zawieszenia reguły odrywania. Istnieje więc dylemat, czy akceptować inferencję o stopniu różnym od 1, np. równym 99 999/100 000, czy nie. W pierwszym przypadku, mamy zgodność analizy argumentacji stosu z intuicjami za cenę odejścia od podstawowych reguł logiki. W drugim przypadku, również unikamy paradoksu stosu, lecz dzięki zatrzymaniu argumentacji stosu już w pierwszym kroku, co nie

---

410 Williamson, [1994], s. 123.
411 Williamson, [1994], s. 124.

wydaje się być intuicyjne. Dalszy rozwój logik rozmytych poszedł w kierunku „poluzowania" twardych reguł inferencji, przez dopuszczenie rozumowań w oparciu o rozmyte reguły[412].

Można jednak przyjąć, że spośród dotychczas analizowanych, tak zwanych, „rozwiązań" paradoksu stosu, to, bazujące na stopniach prawdziwości wydaje się wreszcie możliwe do zaakceptowania. Jednak „możliwe" wcale nie znaczy „konieczne". Tym bardziej, że teoria stopni prawdy jest bardziej metodą na uporanie się z problemami wywoływanymi przez nieostrość, aniżeli właściwą teorią samej nieostrości. O ile bowiem, w każdym konkretnym przypadku istnieje możliwość rozwiązania jakiegoś problemu związanego z danym nieostrym wyrażeniem użytym w danej sytuacji, o tyle niemożliwym wydaje się „globalne" rozwiązanie problemów wywoływanych nieostrością. Celowo, przypomnieliśmy wcześniej dwa rozwiązania paradoksu stosu, jedno w relacji Malinowskiego, drugie Williamsona. Ich zestawienie stwarza szansę dostrzeżenia, iż każde rozwiązanie paradoksu łysego nie jest rozwiązaniem problemu użycia predykatu „być łysym", lecz problemu użycia tego predykatu w pewnej konkretnej sytuacji. Inne, w swych rachunkowych szczegółach, rozwiązanie otrzymamy, gdy weźmiemy pod uwagę zbiór 20 001 ludzi, od człowieka nie posiadającego nawet jednego włosa na głowie, do człowieka posiadającego 20 000 włosów; inne zaś, gdy rozważać będziemy zbiór 100 001 ludzi od człowieka nie posiadającego ani jednego włosa, do człowieka posiadającego 100 000 włosów na głowie. Jeśli z punktu widzenia pierwszego przypadku będziemy oceniali drugi, to okaże się, że prawdziwość zdania „Człowiek posiadający k włosów na głowie jest niełysy" jest dla $k \in N \cap [20\,001, 100\,000]$ całkowita, czyli dla każdego takiego k, dokładnie taka sama. Oznacza to, że, na przykład, człowiek mający na głowie 20 001 włosów jest dokładnie tak samo niełysy jak ten, który posiada 100 000 włosów na głowie. Być może, jeszcze bardziej nieintuicyjne konsekwencje ma wyjście od przypadku drugiego. Wówczas, co prawda człowiek mający 20 001 włosów na głowie jest w innym stopniu niełysy, niż ten, który ma na głowie 100 000 włosów, lecz oznacza to, że człowiek mający 80 000 włosów na głowie nie jest w pełni niełysy. Zdanie „Człowiek mający

[412] Wczesna postać logik rozmytych, rozumianych wówczas jako logiki nieprzeliczalnie wielowartościowe, wystarczała do rozwiązania paradoksu stosu. Dlatego rozwiązanie tego paradoksu, zaproponowane przez Goguena, wyprzedziło o sześć lat pojawienie się logiki rozmytej w obecnej postaci. Dopiero w 1975 roku Zadeh przedstawił logikę, która formalizuje przybliżone rozumowania z predykatywnymi i zdaniowymi wyrażeniami nieostrymi. Podejście do współczesnych logik rozmytych jest w swym duchu klasyczne – bada się ich semantyki, aksjomatyzacje, pełność, dedukcję zachowującą prawdziwość, itd. (Hajek, [SEPh]). Pojawiły się też ważne, dla badań nad tymi logikami, monografie: Novak, [1989]; Zimmermann, [1991]; Klir-Yuan, [1996]; Hajek, [1998]; Nguyen i Walker, [1999]; Turunen, [1999]. Jednak rozwiązanie paradoksu stosu pozostaje w nowych logikach rozmytych takie, jak w dawnych. Dlatego też, w badaniach nad nieostrością pozostaje się przy przedstawionej przez nas postaci rozwiązania tego paradoksu.

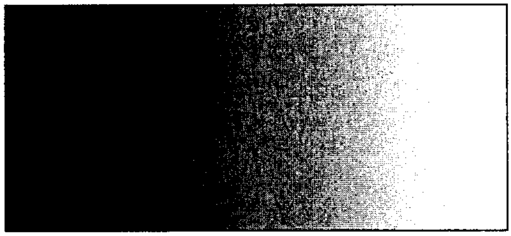
80 000 włosów na głowie jest niełysy" nie jest bowiem całkowicie prawdziwe. Jakże więc trudne do zebrania w jedną spójną całość muszą się okazać wyniki analiz paradoksu łysego, przeprowadzonych kolejno dla zbiorów 80 001 ludzi, 80 002 ludzi, 80 003 ludzi, 80 004 ludzi, 80 005 ludzi itd.[413] Cóż ma oznaczać fakt, iż człowiek mający na głowie 80 251 włosów okazuje się być za każdym razem w innym stopniu niełysym? Podobnie człowiek mający 1935 włosów na głowie, za każdym razem jest łysy w inny sposób. Nie można więc mówić o jakiejś analizie znaczenia predykatu „być łysym", gdyż analiza ta zależy w istotny sposób od tego na jakim zbiorze obiektów ją przeprowadzamy. Jasnym jest, że uniezależnienie wspomnianej analizy od konkretnych przypadków prowadziłoby do przyjęcia niemożliwych do akceptacji ustaleń. Skoro bowiem chcielibyśmy uwolnić się od konkretnych przypadków, musielibyśmy przyjąć jeden z nich za wzorcowy, do którego odnosilibyśmy każdy z pozostałych, konkretnych przypadków. Pomysł taki, jest jednak absurdalny, bo nikt nie mógłby się przecież zgodzić na to, aby raz na zawsze, ustalić, że np. człowiek mający 79 856 włosów na głowie jest łysy w stopniu s i nie łysy w stopniu $1-s$, gdzie s jest pewną liczbą wymierną, a może nawet niewymierną. Jest to niewykonalne i to nie tylko z tego powodu, że o tym czy ktoś jest łysy czy nie, nie decyduje sama ilość włosów na jego głowie. Byłaby to kolejna nieintuicyjna definicja regulująca predykatu „być łysym". Naturalnie, jej nieintuicyjność byłaby znacznie mniejsza niż tej definicji, która zamienia nieostry predykat na ostry.

Innym, poważnym problemem jest sens samego stopniowania prawdy. Tradycyjnie, przyjmuje się, że prawda jest jedna. Tymczasem, w rozważanej tu teorii, prawda jest stopniowalna. Jakieś zdanie ma stopień prawdy wyższy od innego zdania, mimo iż oba zdania orzekają o czymś w sposób, wydawać by się mogło, dość precyzyjny – jedno zdanie mówi o 79 858, a inne o 37 465 włosach na głowie[414]. Mimo iż motywacje usprawiedliwiające stopniowanie prawdy są jasne, niejasnym pozostaje sam fakt tego stopniowania. Tym bardziej, że pomysł ten, jak to już wcześniej pokazaliśmy, nie służy zgłębieniu znaczeń wyrażeń nieostrych.

To, w jaki sposób teoria stopni prawdy różni się od trafnej teorii nieostrości można wyrazić graficznie w sposób następujący. Jeśli przyjmiemy, że rysunek pierwszy ilustruje zjawisko nieostrości

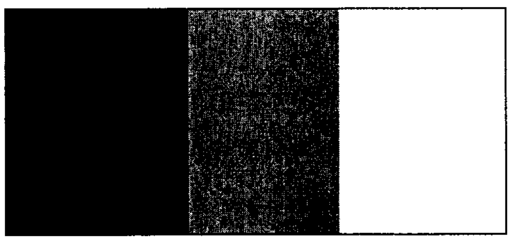
[413] Każdy z tych zbiorów jest odpowiednim zbiorem ludzi, w tym sensie, że dla każdego zbioru, ilość włosów na głowie ludzi z tego zbioru wynosi kolejno: 0, 1, 2, 3, ..., 80 000 + k, gdzie k jest daną liczbą naturalną.

[414] Naturalnie, to, że oba zdania są dość precyzyjne, nie znaczy, że są precyzyjne.



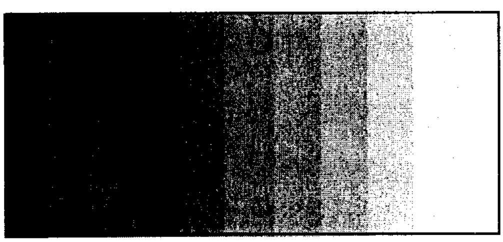
Rysunek 1

wówczas, każda z trójwartościowych propozycji sprowadza nieostrość do przypadku przedstawionego na rysunku drugim,



Rysunek 2

natomiast teoria stopni prawdy, wyraża nieostrość również skokowo, z tą różnicą, że ilość stopni jest zazwyczaj większa od trzech[415]:



Rysunek 3

[415] Komentując trzeci rysunek należy zwrócić uwagę na dwie kwestie. Pierwsza dotyczy ilości pasków. Naturalnie, ich ilość powinna być znacznie większa niż 11. Ograniczyliśmy ją jednak, aby uzyskać większą przejrzystość ilustracji. Druga kwestia dotyczy problemu, na który wskazaliśmy porównując rozwiązanie podane przez Malinowskiego i Williamsona. Chodzi tu o to, że stosowanie teorii stopni prawdy, zwłaszcza wówczas, gdy stopni tych jest szczególnie dużo, prowadzi do zrelatywizowania problemu nieostrości do danego konkretnego i nie zawsze typowego przypadku. Oznacza to, że, w jakiejś analizie, odcień szarości na pasku 3 może być uznany za czerń, zaś odcień z paska 8 za biel. W innej analizie, czernią może się okazać odcień z paska 5, zaś bielą odcień z paska 10. Możliwości tych jest bardzo wiele, zwłaszcza że stopni prawdy, zazwyczaj, jest znacznie więcej niż 11. Oznacza to, że propozycja wykorzystująca teorię stopni prawdy nie dostarcza obiektywnej analizy zjawiska nieostrości.

Oczywiście, nieskończona liczba stopni prawdy daje się zilustrować rysunkiem pierwszym. Możliwość ta jest jednak czysto teoretyczna, gdyż tak naprawdę, zawsze musimy ograniczyć się do analizy skończonej ilości przypadków, co w efekcie prowadzi do *n* stopni prawdy, przy czym, oczywiście, *n* jest znacznie większe niż 11.

Można więc uznać, iż teoria stopni prawdy również wyostrza nieostrość, lecz czyni to w sposób łatwiejszy do zaakceptowania, gdyż starający się jak najbardziej precyzyjnie naśladować zjawisko nieostrości. Wyraża się to, w założonym przynajmniej w teorii, operowaniu nieskończoną ilością stopni prawdy. Dlatego też, stanowisko wykorzystujące teorię stopni prawdy zakwalifikowaliśmy do podejść zachowujących nieostrość.

Teoria stopni prawdy pełni bardzo praktyczną rolę. Jest to faktyczna wartość tej teorii. Można przypuszczać, że obecne zastosowania logik rozmytych przeszły nawet ówczesne oczekiwania ich twórcy. Logiki te stały się bowiem podstawą opracowywania najbardziej zaawansowanych technologii. Badania nad sztuczną inteligencją w dużym stopniu zależą od rozwoju logik rozmytych.

4.1.5.3. NIHILIZM

Nihilizm jest propozycją, która wśród wymienionych dotychczas, wydaje się być najmniej popularna. Wrażenie to nasuwa się nieodparcie, gdy zwrócimy uwagę na przedstawicieli tej koncepcji. Okazuje się, że poza Peterem Ungerem, trudno jest wskazać innych, dostatecznie znanych, zwolenników nihilizmu. Co więcej, jakiś czas temu, sam Unger odwrócił się od nihilizmu i jak przyznaje, z rumieńcem na twarzy wspomina swoje prace z tamtego okresu[416]. Tymczasem, ta ważna, odróżniająca się od innych propozycja wydaje się w jakiś szczególny sposób interesująca i inspirująca. Nie mieści się ona w żadnym z istniejących podejść do nieostrości. Traktuje przy tym zjawisko nieostrości niezwykle poważnie, uznając je za jedno z największych wyzwań filozofii. Nihilizm stał się konsekwencją pewnego ciekawego spojrzenia na argumentację stosu. Unger przyjął argumentację stosu, jako bezbłędny i w pełni zgodny z zasadami logiki dowód *ad absurdum.* Z tej perspektywy pozostawało jedynie rozpoznać, jakiej tezie przeczy argumentacja stosu.

Jeśli przeprowadzamy rozumowanie, które, mimo iż kierujemy się zasadami logiki, z przyjętych przez nas założeń prowadzi nieuchronnie do sprzeczności, odrzucamy założenia tego rozumowania. Problem w tym, że należy rozpoznać co jest faktycznym założeniem argumentacji stosu. Wówczas, rozumowanie prowadzące do sprzeczności jest dowodem nie wprost na fałszywość tego

---

[416] Unger, [2004], s. 1.

właśnie założenia. Kwestię tę rozważmy na przykładzie paradoksu łysego. Proste, można by rzec, najbardziej narzucające się rozwiązanie tego problemu wskazuje, że istnieją tu dwa założenia. Pierwszym jest zdanie stwierdzające, że człowiek mający zero włosów na głowie jest łysy, drugie zaś, zdaniem głoszącym, że jeśli ktoś kto ma k włosów na głowie jest łysy, to ktoś kto ma $k+1$ włosów na głowie też jest łysy. Istnieje jednak i trzecie założenie przyjmujące poprawność zasad wnioskowania logicznego. W naszym przypadku chodzi, albo o zasadę indukcji matematycznej, albo o wielokrotnie stosowaną regułę *Modus Ponens*. Na tym, zazwyczaj kończy się lista założeń, które wzięte razem mają prowadzić do paradoksalnego wniosku. Tymczasem, Unger w serii artykułów z 1979 roku, noszących wiele mówiące tytuły: *I Do Not Exist*, *There Are No Ordinary Things* oraz *Why There Are No People*; jako bodaj jedyny, wskazuje na jeszcze jedno, zazwyczaj, żeby nie powiedzieć zawsze, przemilczane założenie. Jest nim, w przypadku paradoksu łysego, założenie istnienia kogoś, kto jest łysy. Jak zresztą sam zauważa, paradoksy typu *sorites* dotyczą wszystkich, możliwych do pomyślenia obiektów, w szczególności jego samego, czyli Petera Ungera. Dowody, mające postać argumentacji stosu, przeczą więc istnieniu tych wszystkich obiektów, dla których dają się przeprowadzić.

W *I Do Not Exist*, Unger jednoznacznie stwierdza, że jego zdaniem, odrzucenie zasad logiki nie wchodzi w grę. Są one zbyt oczywiste, aby je kwestionować. Zarówno zasada indukcji matematycznej, jak i reguła *Modus Ponens* zastosowane prawidłowo muszą gwarantować poprawność i trafność rozumowania. Nie można więc dopatrywać się w nich przyczyn wyprowadzania sprzeczności. Przede wszystkim jednak, Unger nie wierzy w istnienie alternatywnej logiki, na mocy której okazałoby się, że jego argumentacja, jak również którakolwiek, możliwa do przeprowadzenia, argumentacja stosu, nie prowadzi do paradoksu[417]. Zakładając poprawność logiki, proponuje on przeprowadzenie wnioskowania, które pokazałoby nieistnienie stołu. Chociaż jego dowód jest typowym przykładem argumentacji stosu, to jednak różni się zasadniczo, od tych znanych wcześniej z literatury. Jego dowód nie przypomina więc argumentacji Blacka, pokazującej, iż nie istnieje granica między krzesłem i nie-krzesłem w długim szeregu obiektów, wśród których sąsiadujące obiekty różnią się od siebie minimalnie. Argumentację stosu Unger wykorzystuje, aby pokazać faktyczne nieistnienie tych obiektów materialnych, które są kojarzone z doskonale znanymi nazwami. Tym samym, jego rozumowania godzą w istnienie wszelkich obiektów, posiadających nazwy. W przypadku stołu, Unger przyjmuje trzy przesłanki, tworzące, jego zdaniem niesprzeczny zbiór[418]:

[417] Unger, [1979a], s. 239.

[418] Unger, [1979a], s. 237–238. Podobne argumenty można znaleźć także w Unger, [1979b], np. s. 120.

(1-*stół*) *Istnieje przynajmniej jeden stół.*
(2-*stół*) *Cokolwiek jest stołem, składa się z ogromnej ilości atomów, lecz zawsze ilość ta jest skończona.*
(3-*stół*) *Jeśli z czegokolwiek co jest stołem, usuniemy jeden atom lub kilka atomów, w dopuszczalny i jak najbardziej nieszkodliwy sposób, to nie spowodujemy, że ten stół przestanie być stołem.*

Z dwóch pierwszych założeń wynika jedynie to, że istnieje stół złożony ze skończonej, chociaż ogromnej liczby atomów. Jeśli teraz, jak pisze Unger, bilion bilionów razy usuniemy po jednym lub po kilka najmniej istotnych dla struktury stołu atomów, to, na mocy przesłanki trzeciej, możemy stwierdzić, że zawsze otrzymamy stół. Oczywiście, po ogromnej, lecz na pewno skończonej liczbie kroków, w ten sposób unicestwiających stół, otrzymamy nic[419]. Jednak to nic będziemy musieli nazwać stołem. Zatem, obiekt zwany stołem jest niczym, więc stół nie istnieje. Dalej, Unger wymienia przykłady obiektów, a właściwie jak sam twierdzi, substancji, wobec których można z podobnym powodzeniem zastosować powyższe rozumowanie. Tak więc fikcją jest woda, złoto, sok, ziemia, powietrze, mięso, drewno, skała, ubranie, papier, itd. Jednak najistotniejszy jest dla niego dowód, który wbrew Kartezjuszowi, pokazuje, że nie istnieje podmiot przeprowadzający ten dowód. Tym razem, kluczową rolę nie odgrywa atom, lecz komórka[420].

(1-*ja*) *Ja istnieję.*
(2-*ja*) *Jeśli ja istnieję, to składam się z wielu komórek, lecz z zawsze skończonej ich ilości.*
(3-*ja*) *Jeśli ja istnieję, to usunięcie ze mnie jednej lub kilku komórek w dopuszczalny i jak najbardziej nieszkodliwy sposób, nie spowoduje, że przestanę istnieć.*

Unger dostrzega różnicę między destrukcją stołu, a destrukcją siebie. Jednak twierdzi, że ewentualne wątpliwości nie zmieniają faktu, iż tak jak w przypadku stołu rozumowanie w oparciu o (1-*ja*)–(3-*ja*) prowadzi do wniosku, że nie ma mnie, więc ja nie istnieję. Oczywiście, w przypadku organizmu

[419] Założenie Ungera, że usunięcie jednego lub kilku atomów musi być dopuszczalne i jak najbardziej nieszkodliwe (*most innocuous and favourable*) ma na celu zabezpieczenie procesu destrukcji przed taką sytuacją, w której np. stołu już nie ma, chociaż istnieje coś co zbudowane jest z wielkiej liczby atomów. Wówczas, nadal mielibyśmy obiekt złożony z atomów, który jednak nie byłby już stołem. Sytuacja taka mogłaby powstać wówczas, gdyby usuwanie atomów prowadziło do przecięcia stołu na dwie niemalże równe części. Żadna z nich nie byłaby stołem, a mimo to składałaby się z ogromnej ilości atomów. Pożądany przez Ungera wniosek nie byłby wówczas możliwy do wyprowadzenia.

[420] Unger, [1979a], s. 242–243.

żywego sytuacja nie jest tak prosta, jak w przypadku stołu. Nie jest bowiem możliwe, tak „nieszkodliwe" usuwanie komórek, które doprowadziłoby człowieka do zupełnego zniknięcia. Jeśli bowiem, usunie się wszystkie, a właściwie, nawet nie wszystkie, ale wystarczająco dużo komórek tworzących np. serce lub mózg, to organizm przestaje żyć. Nie mamy więc już do czynienia z człowiekiem w pełnym tego słowa znaczeniu. Zatem, dowód Ungera, w przypadku każdego organizmu żywego, nie prowadzi do sytuacji, w której nazwą tego organizmu trzeba nazwać nic, wręcz przeciwnie, nazwą tą należy nazwać coś, co nie jest już tym organizmem. Jest to pewna słabość tego argumentu, gdyż Ungerowi zależy na faktycznym pokazaniu, że człowiek składa się z zera komórek, tak jak stół składa się z zera atomów[421]. Dlatego też, wspiera się dodatkowo, doskonale znanym już, argumentem odwołującym się do procesu rozwoju własnej osoby z jednej komórki[422], nazywając go argumentem z akumulacji[423]. Chociaż argumenty z destrukcji i akumulacji wydają się być w pewnym sensie przeciwnymi, oba, zdaniem Ungera, dostarczają uzasadnienia dla nieistnienia jakiegokolwiek organizmu żywego.

Te budzące naturalne wątpliwości argumenty, nie mają za zadanie dowieść, iż naprawdę nic nie istnieje, lecz pokazać konieczność rewizji języka, którym operujemy myśląc i komunikując się. Świadczy o tym końcowa część artykułu[424]. Nieistnienie dotyczy bowiem obiektów w tej ich postaci, w jakiej zwykliśmy je sobie wyobrażać. Znacznie dokładniej, problem ten jest wyrażony w innej pracy z tego samego roku. W *Why There Are No People*, Unger pokazuje sprzeczność każdego wymyślonego przez człowieka wyrażenia. W tym celu przedstawia uogólnioną postać argumentu stosu dla dowolnego wyrażenia[425]:

(1*n*) *Jeśli 'wymyślone wyrażenie' dotyczy jakiegoś (aktualnego lub potencjalnego) obiektu O, to wyrażenie to dotyczy także każdego (aktualnego lub potencjalnego) obiektu, który różni się pod względem A od O mikroskopijnie.*

---

[421] W innej swojej pracy, Unger pokazuje jednak, że aby pokazać nieistnienie danego obiektu, nie trzeba dojść do nicości w serii następujących po sobie kroków rozumowania. Rozważa on bowiem przykład kamienia, określonego przez dwa warunki. Pierwszy stwierdza, że usunięcie jednego atomu z kamienia nie sprawi, że kamień przestanie być kamieniem, zgodnie zaś z drugim warunkiem, każdy kamień składa się ze skończonej ilości atomów, lecz ilość ta nie może być mniejsza niż sto, Unger, [1979c], s. 201. O nieistnieniu obiektu świadczy przecież niedorzeczność wyrażenia, przez które obiekt ten miałby być denotowany.

[422] Unger, [1979a], s. 245.

[423] Więcej uwagi Unger poświęca argumentowi z akumulacji w [1979b], s. 141–147.

[424] Unger, [1979a], s. 250–251.

[425] Unger, [1979c], s. 178–182.

(2*n*) *Jeśli 'wymyślone wyrażenie' dotyczy jakiegoś (aktualnego lub potencjalnego) obiektu O, to istnieją (aktualne lub potencjalne) obiekty różniące się pod względem A od O w sposób istotny, których wyrażenie to nie dotyczy.*

Ponieważ nieznaczące zmiany w dostatecznej swej liczbie stają się zmianami znaczącymi, przyjęte wyżej dwa zdania nieuchronnie prowadzą do sprzeczności, bez względu na to, czym jest 'wymyślone wyrażenie', jeśli tylko wyrażenie to spełnia oba warunki (1*n*) i (2*n*). Nietrudno zauważyć, że poza wyrażeniami matematycznymi, wszystkie spełniają zarówno (1*n*), jak i (2*n*), są więc logicznie sprzeczne[426]. Świadczy to o niewyobrażalnej skali problemu. Jednak sprzeczność danego wyrażenia pociąga za sobą fakt niemożności istnienia obiektu, którego to wyrażenie dotyczy. Skoro bowiem, „człowiek" jest wyrażeniem logicznie sprzecznym, to ludzie nie mogą istnieć, więc ludzi nie ma[427]. Mimo szokujących, a przez to i trudnych do zaakceptowania wniosków, metoda Ungera może się wydawać całkiem poprawną. Przecież zwykliśmy odmawiać istnienia wszystkim tym obiektom, których założenie istnienia prowadziło do sprzeczności. W ten sposób, na przykład, odmawiamy istnienia żonatemu kawalerowi, czy kwadratowemu kołu[428]. Jeśli więc, nie istnieją obiekty mające być denotacjami wyrażeń nieostrych, to wyrażenia te są puste. Zatem, puste jest nie tylko wyrażenie „żonaty kawaler", lecz również „człowiek", „krzesło", „morderstwo" itd.[429]

Jak każdy konsekwentny sceptycyzm, przedstawiony wyżej nihilizm jest poglądem sprzecznym, mimo deklarowanego przez Ungera szacunku dla logiki[430]. Sam twórca tych dowodów zdaje sobie sprawę z tego faktu. Zauważa,

[426] Zauważmy, że żadne matematyczne wyrażenie nie spełnia jednocześnie obu warunków. Jeśli bowiem jakaś figura jest kwadratem, to istnieje taka zmiana, która nawet jeśli jest minimalna, uczyni z tej figury nie-kwadrat. Zmianą tą jest np. przesunięcie położenia jednego wierzchołka kwadratu względem pozostałych wierzchołków, czyli, np. wydłużenie jedynie dwóch boków czworokąta, pierwotnie będącego kwadratem.

[427] Unger, [1979c], s. 180.

[428] Patrz rozdział poświęcony paradoksowi kamienia.

[429] Mimo iż nieostre pojęcia są, zdaniem Ungera, puste, tak jak te tradycyjnie uważane za sprzeczne, np. kwadratowe koło, to jednak Unger odróżnia jedne od drugich. Posługując się pojęciem perfekcyjnie kwadratowego trójkąta, który ma zarazem dokładnie cztery kąty i dokładnie trzy kąty, określa sprzeczność podobnych wyrażeń jako *ugruntowaną*. Sprzeczność wyrażeń nieostrych nie jest, w tym sensie, ugruntowana, a więc *bezpodstawna*. Stąd właśnie wynika oczywistość sprzeczności pierwszych i nieoczywistość sprzeczności drugich, Unger, [1979c], s. 192–196. Jednak bez względu na oczywistość lub jej brak, wyrażenia sprzeczne niczego nie desygnują: „The inconsistency of 'person' means that no people exist; they can exist no more than can perfectly square triangles", Unger, [1979c], s. 206.

[430] Interesujące a nawet anegdotyczne jest to, że w zakończeniu swojego artykułu *Why There Are No People*, Unger zamieszcza następujące podziękowanie: „In writing this paper, I have been

że skoro komórka składa się z atomów, więc, na mocy dowodu analogicznego do argumentacji opartej na przesłankach (1-*stół*)–(3-*stół*) sama nie istnieje. Można zatem stwierdzić, że w dowodzie swojego nieistnienia kluczową rolę Unger powierza komórkom, czyli obiektom nieistniejącym. Co więcej, jeśli on sam nie istnieje na mocy przeprowadzonego rozumowania, to w podobny sposób można pokazać, że żaden człowiek nie istnieje, a więc, nie istnieje również i historia, prawo, ekonomia, filozofia itd.[431] Unger twierdzi, że jego argument przypomina więc jedynie argument Eubulidesa, gdyż tamten godził zaledwie w istnienie stosu, jego natomiast stawia pod znakiem zapytania istnienie całej cywilizacji. Koło sceptycyzmu zamyka się jednak w momencie, gdy nieistnienie filozofii musi implikować nieistnienie, między innymi, samego argumentu Ungera[432]. Zatem, przyjęcie dowodu Ungera prowadzi do odrzucenia tego właśnie dowodu. Zdaniem Ungera, nie jest to jednak, żadna wada rozumowań wzorowanych na argumencie Eubulidesa[433]. Przeciwnie, uważa on, że dzięki tym rozumowaniom, mamy szansę uświadomić sobie o faktycznej sprzeczności tkwiącej w dostępnym nam języku i myśleniu. Co więcej, to właśnie te argumenty wskazują na potrzebę radykalnych rekonstrukcji naszego myślenia i wyrażania myśli. Unger przestrzega jednak przed tymi rozwiązaniami, które same się wręcz narzucają, a które przypominają pomysły polegające na zastąpieniu predykatu nieostrego ostrym[434]: skoro „być stosem" jest predykatem prowadzącym do paradoksu, to zastąpmy ten predykat innym, np. „być *stoosem*", którego rozumienie jest takie, że *stoos* tworzą co najmniej dwa wzajemnie dotykające się ziarna[435]. Rozwiązanie to mogłoby mieć rację bytu, twierdzi Unger, gdyby nie to, że na podobne zastąpienie czekają nieistniejące przecież stoły, drzewa, koty itd. Jak można sprostać potrzebie tak olbrzymiej liczby nowych definicji?

Jednak kluczowe dla zrozumienia ówczesnych poglądów Ungera są jego uwagi na temat ewentualnych nieporozumień, które mogą być spowodowane

---

fortunate in having been helped by many people, too many to thank each individually", Unger, [1979c], s. 222.

[431] Unger, [1979a], s. 249.

[432] Unger, [1979a], s. 250.

[433] Niezrozumiałe jest dla Ungera, dlaczego tak wielki filozof jak Eubulides, odkrywca dwóch największych paradoksów stosu oraz kłamcy, jest po dziś dzień lekceważony, Unger, [1979c], s. 222. To zdumienie Ungera, w pełni, podziela autor niniejszej książki.

[434] „For, if there are no heaps, we can define the word 'hoap', for example, so that a hoap may consist, minimally, of two items: for example, beans or grains of sand, touching each other", Unger, [1979a], s. 250.

[435] Wcześniej zauważyliśmy, że pomysł ten, z samego założenia, jest chybiony i jako taki nie może być żadnym rozwiązaniem problemu nieostrości, gdyż predykat nieostry jest tu zastąpiony przez inny predykat nieostry. Ilustruje to przykładowe i nie jedyne możliwe pytanie: do jakiej wielkości mamy do czynienia z pyłkiem, a od jakiej z ziarnem?

błędnym odczytaniem jego myśli. Niezrozumieniem przedstawionych przez niego argumentacji byłoby więc uznanie, że dotyczą one jedynie słów, nie zaś rzeczy. Otóż, jego dowody pokazują wprawdzie wewnętrzną sprzeczność słów, lecz prostą i natychmiastową tego konsekwencją jest fakt, iż nic w rzeczywistości nie może tym słowom odpowiadać. Zatem, nie mogą istnieć tak proste rzeczy jak te, desygnowane przez sprzeczne wyrażenia[436]. W tym też sensie, argumenty Ungera przeczą istnieniu rzeczy pojmowanych tak, jak to wynika ze znaczeń analizowanych wyrażeń. Druga uwaga Ungera przestrzega przed uznaniem, iż jego dowody godzą w istnienie wszelkich rodzajów rzeczy[437]. Podkreśla on, iż wprawdzie przedstawione przez niego argumentacje godzą w istnienie rzeczy, lecz tylko tych, które miałyby być desygnatami nieostrych nazw. Nie jest jednak przesądzone, że rzeczy nie mogą istnieć w jakiś inny sposób.

Przedstawiony przez Ungera problem wydaje się wyjątkowo poważny i niezwykle trudny do pełnego, a nie jedynie połowicznego rozwiązania. Sam Unger wyznawał wówczas, w roku 1979, że przynajmniej on nie widzi obecnie możliwości rozwiązania tego olbrzymiego problemu. Ma jednak nadzieję, że może komuś, kiedyś się to uda. Potrzeba rozwiązania tej niezwykłej trudności jest szczególnie ważna, gdyż jak zauważa, problem nieostrości jest najważniejszą ze wszystkich istniejących w filozofii kwestii.

W ciągu następnych mijających lat, Unger odszedł od nihilizmu, co wcale nie znaczy, że przestały dla niego istnieć problemy, które kiedyś pchnęły go w stronę tego radykalnego nurtu. Jego wrażliwość na problemy wiążące się z użyciem języka naturalnego i bazującego na tym języku myślenia sprawiła, że odkrył paradoks wykraczający poza nieostrość, a w związku z tym, nie będący jeszcze jedną, prostą wersją paradoksu stosu. *Paradoks wielu*, bo o ten właśnie dylemat tu chodzi, pokazał niespójność nazywania[438]. Analiza tego paradoksu wskazuje na to, iż w przeciwieństwie do dylematów nieostrości, w przypadku paradoksu wielu nie jest już raczej możliwe ignorowanie czynników pozajęzykowych. Paradoks ten najwyraźniej ujawnia pewien konflikt między nazywaniem a rzeczywistością.

Kontekst powstania paradoksu stosu, sam wydaje się być dość paradoksalny, gdyż człowiek, który kiedyś stał na stanowisku, że nic nie istnieje, teraz podał argument na rzecz mnożenia bytów ponad wszelka miarę – tam gdzie widzimy jedno krzesło, paradoks wielu każe nam widzieć ich miliony milionów.

Z wymienionych wyżej powodów, koniecznym wydaje się omówienie tego paradoksu w odrębnym od paradoksu stosu, następnym paragrafie.

---

[436] Unger, [1979b], s. 147.
[437] Unger, [1979b], s. 147–148.
[438] Unger, [1980], [2004].

4.2. PARADOKSY RÓŻNIC MINIMALNYCH – PARADOKSY WIELU

Paradoksy nieostrości są zazwyczaj kojarzone z omówionymi w rozdziale 4.1 argumentacjami typu *sorites*. Tradycyjnie, otwartą kwestią pozostaje to, czy tak rozumiana nieostrość jest skutkiem jakiejś pozajęzykowej nieostrości – nieostrości świata materialnego. Omówione w tym rozdziale paradoksy najwyraźniej rozstrzygają ten, wciąż dyskutowany, problem. Są to bowiem dylematy dotyczące nieostrości materialnej, a skoro tak, to każdy kto uznaje zasadność zajmowania się problemem wielu musi zakładać faktyczne istnienie nieostrości świata realnego.

Wydaje się, że paradoksy stosu i paradoksy wielu należą do dylematów różnic minimalnych. Jak najbardziej uzasadnionym wydaje się więc przyjęcie, iż obie te grupy paradoksów razem tworzą jedną klasę paradoksów nieostrości.

W 1980 roku opublikowane zostały dwie prace: książka Petera T. Geacha *Reference and Generality* oraz artykuł Petera Ungera *The Problem of the Many*[439]. Obaj autorzy w tych dwóch, niezależnych od siebie, choć niezbyt odkrywczych publikacjach[440], ujawnili dokładnie ten sam problem związany z rozumieniem nazw. Otóż, patrząc na dany obiekt, który wydaje się nam być dokładnie jednym obiektem, powinniśmy widzieć, a przynajmniej zdawać sobie sprawę z tego, że patrzymy na niezliczoną ilość bardzo do siebie podobnych obiektów. Jeśli więc, w naszych zamierzeniach „*u*" jest nazwą danego obiektu, to okazuje się, że ta sama nazwa pasuje do każdego obiektu, który różni się nieznacznie od tego danego. Jak się okazuje, takich obiektów jest niewyobrażalnie dużo, choć skończenie wiele.

Paradoks wielu znany jest bardziej jako *problem wielu* (*the problem of the many*). Przedstawmy go w formie zbliżonej do tej, autorstwa Davida Lewisa[441].

Paradoks wielu

Pomyślmy o jednej zaledwie chmurze otoczonej czystym błękitem nieba. Patrząc na nią z ziemi, widzimy jej wyraźnie zarysowane brzegi. Wiemy jednak doskonale, że gdybyśmy obserwowali ją z bliska, np. z lecącego przez nią samolotu, dostrzeglibyśmy, iż brzeg tej chmury wcale nie jest wyraźny. Jest ona bowiem

[439] Geach, [1980] oraz Unger, [1980]. Geach prezentuje ten problem analizując przypadek kota, a właściwie 1001 kotów. Patrz paradoks 1001 kotów, paragraf poświęcony paradoksom tożsamości.

[440] Problem poruszony przez Geacha i Ungera nie jest nowy. Ma on nawet starożytny rodowód. Właściwym autorem pomysłu będącego sednem tego paradoksu jest bowiem, cytowany już wcześniej, Chryzyp. W dalszej części, w paragrafie poświęconym paradoksom tożsamości, wspomniany jest paradoks tysiąca i jednego kota, będący zarazem paradoksem wielu, i powtórzeniem paradoksu Chryzypa. Sam paradoks Chryzypa jako dylemat tożsamości jest dokładniej omówiony w tym samym, dalszym paragrafie.

[441] Lewis, [1993]. Także Weatherson, [SEPh], 1.

skupiskiem niezliczonych, drobnych kropelek wody. Na peryferiach tego skupiska, zagęszczenie kropelek wody maleje do tego stopnia, że w przypadku niektórych drobinek mamy poważne wątpliwości, czy są one wciąż częścią chmury, czy może już są poza chmurą. Być może w przypadku niektórych kropelek, byłoby bezpieczniej przyjąć, że są blisko chmury? W którym miejscu powinniśmy przeprowadzić granicę chmury tak, aby móc powiedzieć, że te drobinki ją tworzą, tamte zaś nie? Niestety, zadanie to jest utrudnione, żeby nie powiedzieć, uniemożliwione, przez fakt, iż oddalając się od środka chmury stopień zagęszczenia kropelek wody maleje. Stajemy więc przed koniecznością uznania, iż chmurę mogą stanowić różne zbiory drobinek wody – w jednym zbiorze pewne konkretne drobinki są, w innym zaś tych samych drobinek nie ma. Co gorsza, każdy z tych możliwych zbiorów kropelek jest tak samo dobrym kandydatem do nazwania go chmurą, jak każdy inny. Oznacza to jednak, że nie mamy tu do czynienia z, tak jak pierwotnie sądziliśmy, jedną chmurą, lecz z niewyobrażalną ilością różnych chmur. Tym bardziej, że przyjęcie, iż żaden z rozważanych zbiorów nie jest chmurą oznacza, że wyjściowy obiekt również nie jest chmurą, gdyż jest przecież jednym z możliwych zbiorów. Nie możemy więc mieć jednej chmury – albo mamy ich ogromną mnogość, albo nie mamy żadnej.

Brian Weatherson, w swoim artykule *The Problem of the Many* z internetowego wydania *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, argumentację powyższego paradoksu przedstawił w precyzyjniejszej postaci ośmiu punktów[442].

(0) Istnieją różne zbiory s_k kropelek wody takie, że w przypadku każdego z tych zbiorów nie jest jasne, czy kropelki wody tego zbioru tworzą chmurę.
(1) Istnieje chmura na niebie.
(2) Istnieje co najwyżej jedna chmura na niebie.
(3) Dla każdego zbioru s_k, istnieje obiekt o_k, który tworzą kropelki z s_k.
(4) Jeśli kropelki z s_i tworzą o_i, zaś kropelki z s_j tworzą o_j, a ponadto zbiory s_i oraz s_j są różne (czyli nie są identyczne), to wtedy obiekty o_i oraz o_j również są różne (czyli nie są identyczne).
(5) Jeśli o_i jest chmurą na niebie i o_j jest chmurą na niebie, to istnieją dwie chmury na niebie.
(6) Jeśli któryś zbiór s_i jest taki, że jego kropelki tworzą chmurę, to dla każdego innego zbioru s_j, jeśli jego kropelki tworzą obiekt o_j, to o_j jest chmurą.
(7) Każda chmura jest utworzona przez jakiś zbiór kropelek wody.

Na mocy (1) i (7), istnieje chmura utworzona z kropelek wody. Załóżmy, że chmura ta jest utworzona z kropli zbioru s_i, zaś, na mocy (0), s_j jest dowolnym innym zbiorem kropelek wody, który tworzy chmurę. Wobec (3), mamy, że

[442] Weatherson, [SEPh], 1.

kropelki s_j tworzą obiekt o_j. Z (4) i z założenia wynika, że o_j nie jest identyczne z wyjściową chmurą. Jednak, na mocy (6), o_j jest chmurą, co wobec (5), gwarantuje istnienie co najmniej dwóch chmur. Jest to jednak sprzeczne z założeniem (2), iż na niebie jest co najwyżej jedna chmura[443].

Weatherson prezentuje sześć rozwiązań tego paradoksu[444]. Pierwszemu nie poświęcimy specjalnej uwagi, gdyż jest nim, omówiony już wcześniej, nihilizm. Wystarczy zauważyć, że przy założeniu, że chmur nie ma, nie ma też i powyższej sprzeczności.

Zgonie z drugim rozwiązaniem, zwanym *nad-populacją* (*over-population*), przyjmuje się, że faktycznie istnieją wszystkie możliwe chmury. Jest ich ogromna ilość i różnią się między sobą minimalnie. Zatem, nigdy nie ma jednej jedynie chmury. Istnienie tej, wydawałoby się jednej jedynej, jest bowiem tożsame z istnieniem wszystkich pozostałych. Rozwiązanie to odrzuca więc przesłankę (2). Paradoksalność tego rozwiązania jest szczególnie dobrze widoczna, gdy w przykładzie, chmurę zastąpimy człowiekiem. Załóżmy więc, tak jak czyni to Weatherson, że w pubie siedzi przy stoliku jeden zaledwie człowiek. Zgodnie z tym rozwiązaniem, przy tym stoliku, który, tak naprawdę, jest ogromną liczbą stolików, siedzi, tak naprawdę, ogromna liczba ludzi, a nie jeden zaledwie człowiek. Tak jak wszystkie stoliki różnią się między sobą otoczką cząstek elementarnych tworzących swoistą chmurę wokół stolika, tak każdy człowiek różni się od innego w podobny sposób. Jednak Hud Hudson zauważa, że wszyscy ci ludzie są w istotny sposób uzależnieni od kogoś jednego – jedynie jeden z tych ludzi jest wolny, pozostali jedynie mogą, a właściwie muszą, naśladować tego jednego wolnego człowieka. Hudson proponuje nadać człowiekowi siedzącemu przy stoliku imię Charlie. Jeśli Charlie podniesie do góry rękę, to każdy z milionów pozostałych ludzi musi uczynić podobnie, bo każdy z pozostałych ludzi różni się od Charliego jedynie cząsteczkami powierzchni skóry[445]. Jak widać, nieintuicyjność teorii nadpopulacji jest oczywista.

Trzecie podejście, będące niewątpliwie prostym rozwiązaniem paradoksu wielu, jest dość naturalne. Zakłada ono odrzucenie wiary w istnienie absolutnie dowolnych obiektów, czyli tych, które są utworzone przez dowolną, zupełnie arbitralnie wybraną mnogość innych obiektów. Można więc na przykład mówić o ręce jako o całości złożonej z ramienia, łokcia, przedramienia, nadgarstka, dłoni i palców, nie można natomiast za całość uważać tego samego zbioru obiektów, tyle że bez, na przykład, nadgarstka, czy przedramienia. Jeśli więc widzimy na niebie jedną chmurę, to dlatego, że ona faktycznie jest jedna,

[443] Oczywiście, założenie (2) może być potraktowane jako początkowe. Wówczas, z złożenia patrzymy na jedną chmurę, a z rozumowania wynika, że na wiele.

[444] Weatherson, [SEPh].

[445] Hudson, [2001], s. 39–44.

złożona ze wszystkich kropelek wody jakie się znajdują w tym obszarze nieba. Każdy podzbiór właściwy tego największego zbioru kropelek nie jest chmurą lecz jej częścią.

Okazuje się, że podejście to można skojarzyć z co najmniej dwiema teoriami. Pierwsza opiera się na następującej zasadzie: x-sy tworzą obiekt y wtedy i tylko wtedy, gdy x-sy mają pewną naturalną własność F. Druga teoria przyjmuje, że istnieją pewne bezwzględne fakty (*brute facts*), polegające na tym, że jakieś x-sy tworzą w pewnych okolicznościach jakąś całość, w innych zaś okolicznościach nie tworzą tej całości[446]. Propozycja ta, zwana też brutalizmem (*brutalism*), zakłada więc odrzucenie przesłanki (3)[447].

Terrence Horgan zarzuca brutalizmowi to, iż jest zawieszony w próżni. Niewiadomy i chwiejny jest bowiem, zarówno ontologiczny, jak i metafizyczny status faktów odpowiedzialnych za kompozycję takich a nie innych całości z tych a nie innych obiektów – chodzi tu o tzw. *compositional facts*. Uważa on, iż z metafizycznego punktu widzenia fakty te są jakimś dziwactwem. Nie dają się one wyjaśniać przy pomocy przyjętych ogólnych zasad[448].

Czwarta propozycja rozwiązania paradoksu zakłada, że istnieją co prawda wszystkie możliwe fuzje kropelek wody, lecz każda fuzja jest tą samą chmurą. Zakwestionowana jest tu przesłanka (5). Propozycja ta pochodzi od Geacha, który posłużył się tzw. względną identycznością (*relative identity*), zgodnie z którą, dwa obiekty mogą być tym samym F-em i jednocześnie nie tym samym G, chociaż każde z nich może być jakimś G[449].

Weatherson wskazuje na następującą trudność związaną z propozycją Geacha[450]. W swoim rozumowaniu pokazuje, jakiej zasadzie przeczy idea względnej identyczności. Załóżmy więc, że w jest kropelką wody należącą do s_1 i nie należącą do s_2. Zgodnie z teorią względnej identyczności, s_1 tworzy obiekt o_1, a s_2 obiekt o_2, przy czym, o_1 i o_2 są jedną i tą samą chmurą c, mimo iż każda z nich jest różną od drugiej fuzją kropelek wody. Ponieważ o_1 jest tą samą chmurą co o_2, obie fuzje mają te same własności. Jest to jednak sprzeczne z tym, że w jest częścią o_1 i nie jest częścią o_2. Zatem, przyjęte rozwiązanie zakłada, że dwa obiekty będące tym samym F-em mogą różnić się jakąś własnością.

Oczywiście, obiekcja Weathersona nie niszczy samej idei względnej identyczności[451]. Nie jest bowiem trudne wyobrazić sobie, że dwa obiekty są pod względem F identyczne, natomiast pod względem G różne. Można wskazać

---

[446] Markosian, [1998].

[447] Nazwanie tego rozwiązania brutalizmem wydaje się być pewnym uproszczeniem, gdyż z teorią bezwzględnych faktów wiąże się jedna zaledwie teoria reprezentująca to rozwiązanie.

[448] Horgan, [1993], s. 694–695.

[449] Geach, [1980].

[450] Weatherson, [SEPh], 5.

[451] Bardziej właściwą nazwą dla omawianego zjawiska byłaby „podobieństwo pod względem...", aniżeli „względna identyczność".

liczne przykłady na podobną sytuację[452]. Trudność jednak powstaje, gdy tę intuicyjną, bądź co bądź, zasadę próbujemy zastosować do rozwiązania paradoksu wielu. W paradoksie tym widać, że dwa różne obiekty s_1 oraz s_2 mają nadaną tę samą nazwę: „chmura". Zatem, nazwa ta jest po prostu wieloznaczna, co jest jednak błędem logicznym. Nie byłoby problemu, gdyby dwa różne obiekty były chmurą w dokładnie tym samym znaczeniu słowa „chmura", lecz one mają być dokładnie tą samą chmurą.

Idea częściowej identyczności (*partial identity*) jest podstawą kolejnej, piątej już propozycji rozwiązania paradoksu wielu. Zazwyczaj, zdanie „Istnieją dwie chmury" rozumiemy jako stwierdzające istnienie dwóch obiektów x i y takich, że x jest chmurą, y jest chmurą i x nie jest tą samą chmurą co y. Idea częściowej identyczności dopuszcza możliwość, iż w pewnych kontekstach rozumienie wspomnianego zdania jest inne. Jeśli więc, o_1 i o_2 są chmurami i nie są tą samą chmurą, to nie znaczy, że mamy dwie chmury. Broniąc tego pomysłu, Lewis nieco łagodniej formułuje to rozwiązanie: obiekty o_1 i o_2 nie są tą samą chmurą, lecz są *prawie* tą samą chmurą[453]. Oznacza to, że kłopotliwe zdanie „Istnieje jedna chmura" powinno być rozumiane tak, jak zdanie „Istnieje taka chmura, że wszystkie chmury (oczywiście, wszystkie z paradoksu, a nie z całego nieba) są prawie identyczne z nią"[454].

Hudson słusznie zarzucił pomysłowi Lewisa to, iż nawet wówczas, gdy posługujemy się częściową identycznością, nadal możemy posługiwać się zwykłą identycznością, co oznacza, że problem z jedną chmurą, która jest milionem chmur pozostaje[455]. Inny zarzut sformułował sam Lewis, wzorując się na przykładzie Quine'a, z jego książki *World and Object* z 1960 roku, góry z dwoma szczytami, która okazuje się być dwiema różnymi górami. Lewis rozważa przykład domu z takim garażem, który ma z tym właśnie domem wspólną ścianę. Czy domem Freda jest budynek bez garażu, czy z garażem? „Dom Freda" rozumiany jako dom bez garażu jest czymś zdecydowanie innym niż dom z garażem. Oba „domy Freda" nie są prawie identyczne, lecz kompletnie różne, tymczasem dobrze ilustrują paradoks wielu, który tym razem nie może być rozwiązany przy pomocy pojęcia „częściowej identyczności". Podobnie, dobrymi ilustracjami paradoksu wielu są obie góry Quine'a. Weatherson zauważa, że w tym przykładzie są trzy góry: dwie pojedyncze i jedna podwójna; z tym że każda z pojedynczych nie jest wcale prawie identyczna z podwójną[456].

Przedstawiona analiza piątego podejścia do paradoksu wielu pokazuje faktyczny problem, który wiąże się z tym dylematem. Jest nim nazywanie

---

452 Patrz, Deutsch, [SEPh].
453 Lewis, [1993].
454 Weatherson, [SEPh], 6.
455 Hudson, [2001].
456 Weatherson, [SEPh], 6.

obiektów świata materialnego i wiążące się z tym, określanie właściwego znaczenia tych nazw. Pod tym właśnie względem, paradoks wielu jest bardzo bliski paradoksowi stosu.

Na koniec, Weatherson przedstawia próbę rozwiązania paradoksu wielu przez unieważnienie przesłanki (6), zgodnie z którą: *C. Każdy obiekt o_i jest chmurą*. Unger wskazał na dwa argumenty uzasadniające tę niechcianą przesłankę, zaś Geach przedstawił jeden. Pozostaje więc pokazać fałsz wszystkich tych argumentów, aby móc odrzucić tezę, iż każdy obiekt o_i jest chmurą.

Geach uważa, iż uzasadnienie dla przesłanki jest następujące[457]:

D1. Jeśli nie istnieją kropelki wody poza zbiorem s_k, to o_k jest chmurą.

D2. To, czy o_k jest chmurą, czy nie, nie zależy od tego, czy istnieją jakieś rzeczy różne od o_k.

Zatem, *C*. o_k jest chmurą.

Naturalnie, oczywistą wątpliwość musi budzić zdanie *D1*. Wyraża ono przekonanie, iż zmieniając rzeczywistość poza obiektem *o*, będącym chmurą[458], nie wpływamy na to, że *o* jest chmurą. To zaś nie jest prawdą. Jeśli bowiem, obiekt *o* otoczymy kropelkami wody o takiej samej gęstości jak ta w obiekcie *o*, to *o* przestanie być chmurą, a będzie jedynie częścią chmury[459]. W ten sposób Geach pozbawił uzasadnienia tezę, iż każdy obiekt o_i jest chmurą.

Pierwszy argument Ungera ma postać[460]:

S1. Dla pewnego *j*, o_j jest typową chmurą.

S2. Każdy obiekt różniący się nieznacznie od typowej chmury jest chmurą.

S3. o_k różni się od o_j nieznacznie.

Zatem, *C*. o_k jest chmurą.

Naturalnie, argument ten reprezentuje typowe rozumowanie stosu. Weatherson wydaje się podzielać opinię Hudsona o fałszywości tego argumentu: skoro do chmury dodam kroplę wody z mojej wanny, to fuzja kropelek tworzących chmurę z tą dodaną kroplą nie tworzy chmury mimo, iż samo dodanie do chmury tejże kropelki wprowadza nieznaczną zmianę, a tym samym, stanowi nieznaczną różnicę[461].

Niestety, jasne jest, że Hudson nie obalił argumentacji $\{S1, S2, S3\} \vdash C$, gdyż jego przykład nie wyczerpuje znamion zmiany nieznaczącej. Otóż, rozumowanie to można bronić przyjmując, iż użyty w nim zwrot „zmiana jest nieznacząca" dotyczy jedynie dodawania lub odejmowania kropelek wody typowych dla chmury. Po takim uściśleniu, kontrargument Hudsona upada.

---

[457] Weatherson, [SEPh], 7.1.

[458] Wyrażenie „poza [...] chmurą" oznacza wszystko to, co nie jest chmurą.

[459] Weatherson, [SEPh], 7.1.

[460] Weatherson, [SEPh], 7.2; Unger, [1980].

[461] Weatherson, [SEPh], 7.2.

Jednak uwaga Hudsona ma swoją wartość, gdyż pokazuje w jaki sposób paradoks wielu łączy się z paradoksem stosu.

Nawiasem mówiąc, wierząc w to, że w podobny sposób można unieważnić tę argumentację Hudson pokazał, iż nie zauważył, że jest to potężny problem paradoksu stosu.

Ostatni argument, tak jak poprzedni jest dziełem Ungera. Niestety, wbrew temu co twierdzi Weatherson, argument ten należy zakwalifikować do paradoksów stosu. Jest on bowiem jedynie inną wersją ostatnio omówionego[462]:

M1. Dla pewnego j, o_j jest chmurą.

M2. Jeśli o_j jest chmurą a o_k nie jest chmurą, to musi istnieć coś, co sprawia, że o_j jest chmurą a o_k nie jest chmurą.

M3. Nie ma niczego, co sprawiłoby że o_j jest chmurą a o_k nie jest chmurą.

Zatem, *C*. o_k jest chmurą.

Weatherson widzi w tej argumentacji zastosowanie jakiejś 'zasady selekcji' i uważa ten argument za najbardziej perswazyjny. Tymczasem, nie ma w tym rozumowaniu niczego specjalnego, poza nieco dłuższą narracją, którą można powtórzyć z powodzeniem dla predykatu „być łysym": *Jest ktoś, kto nie jest łysy. Jeśli ktoś kto ma k włosów na głowie jest łysy a ktoś kto ma k*+1 *włosów na głowie nie jest łysy, to musi istnieć coś co jest tego przyczyną. Lecz niczego takiego nie ma. Więc każdy jest łysy.* Dwie przesłanki Ungera *M1* i *M2* razem wzięte mają sens, który można wyrazić jednym, typowym dla argumentacji stosu, zdaniem: *Nie jest tak, że* o_j *jest chmurą a* o_k *nie jest chmurą*. Jest to równoważna implikacji, *Jeśli* o_j *jest chmurą, to* o_k *jest chmurą*, negacja koniunkcji, *Nieprawda, że* o_j *jest chmurą i* o_k *nie jest chmurą*. Zatem, rozumowanie $\{M1, M2, M3\} \vdash C$ jest perswazyjne w tym samym stopniu co $\{S1, S2, S3\} \vdash C$.

Podając oba argumenty Unger pokazał faktyczną siłę swojego paradoksu. Dowiódł też, że rozwiązanie tego paradoksu będzie możliwe dopiero wtedy, gdy rozwiązany zostanie paradoks stosu. Istotnie, jeśli zastosujemy argumentację stosu do dowolnej chmury, to natychmiastowym wnioskiem będzie uznanie każdego skupiska kropelek wody za chmurę. Uznając istnienie jednej jedynej chmury, wobec argumentacji stosu, w istocie godzimy się na uznanie, iż jest ona milionem różnych chmur. W ten sposób, paradoks stosu implikuje paradoks wielu.

4.3. PARADOKSY ZMIAN

Omówione dotychczas w tym rozdziale paradoksy ujawniają trudności dotyczące różnic minimalnych. Oznacza to, że właściwa, precyzyjna prezentacja

[462] Weatherson, [SEPh], 7.3; Unger, [1980].

tych dylematów nie wymaga odwołania się, ani do ruchu, ani nawet do jakiejkolwiek zmiany. Wszelkie odmiany, zarówno paradoksu stosu, jak i paradoksu wielu dotyczą przecież obiektów statycznych. Aby, dla przykładu, wyjaśnić na czym polega paradoksalność argumentacji łysego można posłużyć się, kompletnie nierealnym modelem kilkuset osób spełniających wiadome warunki dotyczące ilości włosów. Nierealność tego modelu jest skutkiem przyjętych, w tym modelu, różnych założeń. Jednym z nich jest np. to, że predykat „mieć na głowie *k* włosów" jest uważany za predykat ostry. Innym założeniem jest przemilczanie faktu nieustannego wzrostu włosów i równie nieustannego ich wypadania. Naturalnie, można wyobrazić sobie tak przerobiony paradoks stosu, czy paradoks wielu, aby nadal paradoksalne rozumowanie odwoływało się do modelu dynamicznego: rosnące dziecko najpierw jest niskie, a po jakimś czasie wysokie; starszy pan najpierw jest wysoki, a po jakimś czasie jest średniego wzrostu; płynnie zmieniające się kolory nieba; padający deszcz i zmniejszająca się w wyniku tego procesu chmura; gęsty, czarny dym u wylotu komina tym jaśniejszy i rzadszy, im bardziej oddalony od komina; itd. Prawda jest jednak taka, że chociaż uwzględnienie dynamiki zachodzących zmian nie zaszkodziłoby argumentacji stosu, czy argumentacji wielu, o tyle uwzględnienie tego czynnika jest absolutnie zbędne dla pełnego przedstawienia obu typów, wcześniej omówionych, paradoksalnych rozumowań. Dlatego też, paradoksy stosu i paradoksy wielu zostały zaliczone do klasy dylematów, których źródłem jest istnienie na pozór nieznaczących różnic, które jednak kumulując się dają różnice jak najbardziej znaczące. Te nieznaczące drobne różnice zostały przez nas nazwane różnicami minimalnymi, co, naturalnie, jest pewnym uproszczeniem. Skoro jednak uproszczenie to jest zastosowane w wiadomym, czytelnym kontekście, nie powinno więc prowadzić do nieporozumienia.

Istnieje jednak cała grupa takich paradoksów, które w pewien sposób przypominają paradoksy różnic minimalnych, są jednak dylematami ściśle związanymi z ruchem lub jakąś inną zmianą. Wyeliminowanie z nich dynamizmu prowadziłoby nieuchronnie do wypaczenia tych rozumowań do tego stopnia, że znikłaby ich paradoksalność. Trudno, na przykład, wyobrazić sobie wersję statyczną paradoksu strzały czy też paradoksu momentu śmierci. Bez uwzględnienia zmiany nie byłoby tak ważnego dylematu, jak paradoks łodzi Tezeusza. W tym rozdziale zajmiemy się zatem tymi paradoksami, z których zmiana nie daje się wyeliminować.

4.3.1. PARADOKS MOMENTU ŚMIERCI

Już samym paradoksem jest fakt, że do tego, jednego z ciekawszych, ze względu na swoje całkiem niebłahe konsekwencje, argumentu, zazwyczaj, nie przywiązuje się zbyt dużej wagi. Ma on raczej anegdotyczną reputację i jest podawany za przykład „typowej" dla filozofów manipulacji, mającej na celu uzasadnić, w rzekomo racjonalny sposób, taki pogląd, który stoi w jawnej sprzeczności z dość powszechnie uznawanym przekonaniem. Chodzi tu o sławny „dowód" Epikura, iż śmierć nie dotyczy człowieka, a zatem człowiek nie powinien się nią w ogóle przejmować. Diogenes Laertios przytacza list Epikura do Menoikeusa, w którym zawiera się ten słynny tekst[463]: „A zatem śmierć, najstraszniejsze z nieszczęść, wcale nas nie dotyczy, bo gdy my istniejemy, śmierć jest nieobecna, a gdy tylko śmierć się pojawi, wtedy nas już nie ma. Wobec tego śmierć nie ma żadnego związku ani z żywymi, ani z umarłymi; tamtych nie dotyczy, a ci już nie istnieją". Tekst ten stał się podstawą sformułowania paradoksu głoszącego, iż śmierci nie ma, gdyż nie ma momentu śmierci. Tak, oto, Szymanek relacjonuje rozumowanie, które prowadzi do sprzeczności z jawną oczywistością[464].

Paradoks momentu śmierci

Człowiek nie może, wbrew pozorom, umrzeć – gdyby bowiem umarł, to musiałby nastąpić moment jego śmierci, a w tym właśnie momencie – jak w każdym – musiałby być albo żywy, albo nieżywy. Gdyby człowiek w momencie śmierci był żywy, to nie byłby to moment śmierci, lecz moment należący do życia – umierający jeszcze by żył; gdyby zaś nie był żywy w momencie śmierci, znaczyłoby to, że umarł już wcześniej – już by nie żył, zatem także nie byłby to moment śmierci.

Paradoks ten jest jednym z tych dylematów, które mają pokazywać sprzeczność tkwiącą we wszelkiej zmianie. Ma on więc uzasadniać tezę, iż wszelka zmiana jest niemożliwa. Skoro bowiem, żyjąc nie można umrzeć, to znaczy, że z zastanego stanu *A* nie można przejść w, różny od *A*, stan *B*. Najprawdopodobniej, Epikur nie zdawał sobie sprawy z tego iż swoim rozumowaniem dotknął tak niezwykłego, ogromnego i powszechnego problemu. Proste uogólnienie rozumowania Epikura godzić będzie w każdą, możliwą do pomyślenia zmianę.

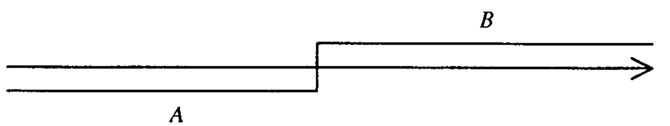
Rozumowanie paradoksu momentu śmierci opiera się na bardzo ważnym i zasadniczym założeniu, że jeśli jeden stan przechodzi w inny, to istnieje ostra granica między obydwoma stanami. Granica ta jest punktem (!) końcowym stanu pierwszego i zarazem punktem początkowym stanu drugiego. Jeśli więc, człowiek ma przejść od stanu życia do stanu nieżycia, to musi przejść przez taki właśnie punkt śmierci, z którym nie wiadomo co zrobić, czy uznać go za moment życia, czy może nieżycia. Rozumowanie paradoksu pokazuje więc to, że nie daje się tego punktu uznać, ani za moment życia, ani za moment nieżycia.

---

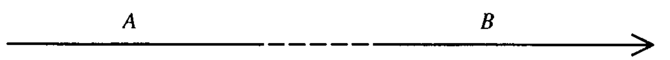
[463] Diogenes Laertios, *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, X, 125.
[464] Szymanek, [2001], s. 224.

Szymanek proponuje bardzo proste rozwiązanie tego problemu[465]. „Jeśli przyjąć rozsądną definicję 'Moment śmierci to moment, który jest ostatnim momentem życia lub pierwszym momentem nieżycia', to paradoksu nie da się sformułować: w momencie śmierci możliwe jest żyć jeszcze – ale jest to ostatni moment życia, albo możliwe jest już nie żyć – ale jest to pierwszy moment nieżycia. Niektórzy więc ludzie w momencie swojej śmierci mogą jeszcze żyć, a inni – nie żyć". Trudno jednak zgodzić się z Szymankiem. Problem przecież tkwi w tym, że wcale nie jest pewne, czy zaproponowana definicja jest rozsądna, a więc, czy stanowi ona jakąkolwiek podstawę do rozwiązania tego paradoksu. Co więcej, wydaje się raczej pewne, że definicja ta jest błędna, a to za sprawą nieostrości nazwy „śmierć". Przecież, nie tylko Russell zauważył, że śmierć nie jest żadnym „punktowym" momentem, lecz złożonym procesem, który nawet jeśli trwa bardzo krótko, to nie daje się uchwycić w jednym punkcie czasowym[466]. Nieostrość takich nazw, jak „życie" i „śmierć", czy predykatów „być żywym" i „być martwym" dowodzi, iż są, co prawda, momenty w których na pewno dany człowiek żyje, i momenty w których na pewno nie żyje, lecz są i takie, co do których nie daje się stwierdzić, czy żyje czy nie żyje. Natura dostarcza na to wielu przykładów w postaci takich przypadków, z którymi nawet lekarze nie mogą sobie poradzić, gdyż nie jest jasne, czy danego człowieka można już odłączyć od aparatury, czy nie. Poza tym, śmierć, jak się wydaje, polega na stopniowym wygaszaniu wszystkich funkcji życiowych. Jedne z nich zanikają pierwsze, inne trwają nawet w kilka dni po uznaniu człowieka za umarłego. Wiele z tych procesów umyka naszej uwadze, co nie znaczy, że wszystkie one następują jednocześnie i to w jednym punkcie czasowym. Dotyczy to również funkcji mózgu, których wyłączanie jest zapewne procesem trwającym jakiś, choćby nawet krótki, ale zawsze, przedział czasu.

Zatem, chcąc przedstawić graficznie na osi czasu proces przejścia od stanu *A* do stanu *B* powinniśmy zamiast schematu[467]:



wybrać następujący:



[465] Szymanek, [2001], s. 224.
[466] Russell, [1923].
[467] Nie ma tu żadnego znaczenia, czy punkt graniczny na schemacie jest punktem stanu *A*, czy stanu *B*.

Proponowane przez Szymanka rozwiązanie samo jest paradoksalne, gdyż nie jest zgodne z obserwacją. Przypomina jednak inne „rozwiązanie" paradoksu nieostrości, które wynika z, omówionej wcześniej, teorii epistemicyzmu. Właściwie, propozycja Szymanka nie tylko, że przypomina teorię epistemicyzmu, lecz, po prostu, jest jej częścią. To przecież Sorensen uważa, że nawet wieloletni proces nauki języka angielskiego musi kończyć się nagle (!) znajomością tego języka, podobnie, jak powolny rozwój osobniczy żaby kończy się nagłym (!) zniknięciem kijanki i jednoczesnym, równie nagłym (!), pojawieniem się żaby[468]. Najwyraźniej, szybkość przebiegu danego zjawiska może być wielkim utrudnieniem w dostrzeżeniu tego, iż wszelkie zachodzące zmiany są trwającymi w czasie procesami. Niekiedy, faktycznie, procesy wydają się krótkie, lecz krótkie dla nas ludzi, dysponujących taką a nie inną percepcją. Odczucie, czy dany proces jest długotrwały, czy może następuje gwałtownie, jest uzależnione od wielu czynników. Jednak wrażenie nagłości przebiegu procesu zmian nie jest żadnym dowodem na to, że zmiana dokonała się niby za dotknięciem różdżki czarodziejskiej, w chwili będącej bezwymiarowym punktem czasowym.

Z uwag tych wynika, smutny niestety, wniosek, iż bez najmniejszych już obaw, że popadniemy w sprzeczność, możemy bać się śmierci, gdyż umieranie jest, trwającym w czasie, procesem, którego musimy doświadczyć, zanim będziemy martwi. Może dla kogoś jakąś pociechą będzie świadomość, iż to rozstrzygnięcie rozwiązuje paradoks momentu śmierci.

Powszechność trudności na które wskazuje paradoks momentu śmierci jest oczywista i dorównuje powszechności problemów wywołanych nieostrością. Jak już zauważyliśmy, paradoks ten, z łatwością, daje się powtórzyć dla dowolnego procesu przejścia jednego stanu w inny. Dlatego też, Ajdukiewicz referując ten problem w ogóle nie wspomina o momencie śmierci, lecz uogólnia swoje rozważania, posługując się symbolami, nie precyzując przy tym, jakie stany mają te symbole oznaczać[469]: „[...] ilekroć jakieś ciało przechodzi ze stanu *A* do różnego odeń stanu *B*, tylekroć istnieć musi taka chwila *t*, późniejsza od wszystkich tych chwil, w których ciało jest jeszcze w stanie *A*, a wcześniejsza od każdej chwili, w której nasze ciało już jest w stanie *B*, i taka, że w owej chwili *t* ciało to nie jest ani w stanie *A*, ani w stanie *B*. Niezliczone przykłady przemawiają za tą zasadą. [...] Zasada [..] [ta] stwierdza, że ilekroć pewne ciało jest w pewnym czasie w stanie *A*, a w czasie późniejszym jest w różnym od *A* stanie *B*, tylekroć musiał istnieć czas, w którym to ciało przechodziło ze stanu *A*

---

[468] Patrz paragraf poświęcony epistemicyzmowi reprezentującemu stanowisko szóste tych propozycji, które rozwiązują problemy nieostrości zastępując nieostrość ostrością. Czynią to zamieniając wyrażenia nieostre na inne, które uważane są za ostre, lecz, jak to wykazaliśmy, również są nieostre.

[469] Ajdukiewicz, [1948], s. 100–101.

do stanu *B*, nie pozostając już w stanie *A* i nie znajdując się jeszcze w stanie *B*". Zasadę tą, Ajdukiewicz nazywa *postulatem przechodzenia*, który, nie tylko uważa za dobrze potwierdzony przez doświadczenie, lecz również za logiczne następstwo *zasady ciągłości zmiany*, która „wymaga, aby wszelka zmiana dokonywała się w dowolnie małych krokach, a nie skokami"[470]. Zasada ciągłości zmiany wyklucza bowiem możliwość, iż jakieś ciało poczynając od chwili *t* było w stanie *B*, a w każdej poprzedniej w, różnym od *B*, stanie *A*[471]. Ustalenia te umożliwiają Ajdukiewiczowi sformułowanie uogólnionego paradoksu momentu śmierci[472].

Paradoks zmiany

„Wszelka zmiana zakłada, iż ciało jest naprzód w jakimś stanie *A*, a później jest w stanie *non-A*. Postulat przechodzenia wymaga zaś, aby między czasem pozostawania ciała w stanie *A* a czasem pozostawania ciała w stanie *non-A* istniał czas przechodzenia z jednego stanu do drugiego, czas w którym to ciało już nie jest w stanie *A* i nie jest jeszcze w stanie *non-A*, czyli nie jest w stanie *A* i jest zarazem w stanie *A* [nie w stanie *non-A*, czyli nie nie w stanie *A*]. Wobec tego każda zmiana wymaga, by podczas jej zachodzenia przedmiot ulegający zmianie posiadał atrybuty sprzeczne".

Chcąc rozwiązać ten paradoks, Ajdukiewicz odrzuca możliwość zakwestionowania zasad logiki. Jego zdaniem odrzucenia wymaga postulat przechodzenia. Postulat ten, jak wcześniej sam pokazał, wynika z obserwacji i z zasady ciągłości zmiany. Uważa jednak, że o ile jakieś stany przejściowe między stanem *A* i stanem *B* istnieją, o tyle nie tylko, że nie istnieją, lecz są nie do pomyślenia stany przejściowe między *A* i *non-A*. Zdaniem Ajdukiewicza, odpada więc argument, iż doświadczenie potwierdza postulat przechodzenia. Problemem pozostaje jednak zasada ciągłości, która najwyraźniej implikuje postulat przechodzenia, a której Ajdukiewicz nie chciałby odrzucać. Postanowił więc wykazać, iż niespełnienie postulatu przechodzenia daje się pogodzić z obowiązywaniem zasady ciągłości zmiany. Jego rozumowanie jest następujące[473].

Załóżmy, że zmiana stanu *A* w stan *non-A* dokonuje się bez „przejścia". Wykażemy, że zasada ciągłości pozostaje zachowana. Zasada ta wyklucza, aby ciało pozostawało w stanie *A* do chwili *t*, a w każdej chwili późniejszej było już w stanie *B*. W przeciwnym razie, ciało musiałoby wykonać skok o rozpiętości *B–A*. Oczywiście, skok ten byłby tym mniejszy, im mniejsza

---

470 Ajdukiewicz, [1948], s. 101.
471 Ajdukiewicz, [1948], s. 101.
472 Ajdukiewicz, [1948], s. 102.
473 Ajdukiewicz, [1948], s. 103–105.

byłaby różnica między stanem *A* i stanem *B*. Jednak, z założenia, stanem *B* jest stan *non-A*. Zatem, zasada ciągłości zmiany będzie zachowana, jeśli różnica między stanem *A* i stanem *non-A* będzie dowolnie mała. Mówiąc dokładniej, zasada ta będzie nadal obowiązywać, jeśli tylko różnica stanu *A'–A* będzie mogła być dowolnie mała, czyli nigdy nie napotka jakiejś granicy określającej wartość minimalną zmiany. Taka granica byłaby niczym innym jak skokiem, który jest przecież wykluczony przez zasadę ciągłości[474]. Reasumując, Ajdukiewicz uważa, że zasada ciągłości zmiany implikuje postulat przechodzenia tylko wówczas, gdy dane ciało przechodzi od oznaczonego stanu *A* do oznaczonego stanu *B*. Ta sama zasada nie implikuje jednak wspomnianego postulatu, jeśli dane ciało przechodzi od oznaczonego stanu *A* do nieoznaczonego, czyli nieokreślonego jednoznacznie stanu *non-A*.

Gdyby zaakceptować to rozumowanie, należałoby przyjąć, że jest ono rozwiązaniem np. paradoksu łysego. Dowodząc bowiem, że ze stanu *A* można przejść do stanu *non-A* w jednym punkcie czasowym, Ajdukiewicz wykazałby istnienie ostrej granicy między *A* i *non-A*, czyli np. między byciem łysym i byciem niełysym. Co więcej, granica ta najwyraźniej oddzielałaby ekstensję pozytywną predykatu „być łysym” od ekstensji predykatu „być niełysym”, która wydaje się być ekstensją negatywną predykatu „być łysym”. W ten sposób, obszar nieostrości jest zbiorem pustym, a więc zarówno predykat „być łysym”, jak i „być niełysym” nie ma przypadków granicznych. Zatem, w rozumowaniu Ajdukiewicza musi się kryć jakiś, dość poważny błąd. Istotnie, przyjmując, że stan *A* jest określony jednoznacznie, w niemy sposób Ajdukiewicz założył, że analizuje stany matematyczne, np. bycia kwadratem. Nasze podejrzenie znajduje swoje potwierdzenie w jeszcze innym założeniu, a mianowicie w tym, że wyjście ze stanu *A* może mieć postać dowolnie małą. Zatem, wykluczone jest to, aby sam stan *A* dopuszczał jakieś chociażby niewielkie odchylenia, które, mimo zaistnienia, nie wyprowadzałyby poza stan *A*. Widać więc, że stan *A* nie może być, na przykład, stanem łysości, gdyż ten stan właśnie dopuszcza różne odchylenia w ramach bycia łysym – dodanie łysemu kilku, czy nawet kilkudziesięciu

---

[474] Podobne rozumowanie znajdujemy już u Arystotelesa: „Załóżmy, że przedmiot zmienia się od *A* do *B* w jakimś momencie. Otóż z pewnością moment, w którym się dokonała ta zmiana, nie był tym samym, w którym przedmiot znajdował się w chwili *A* (bo w takim wypadku przedmiot znajdowałby się równocześnie zarówno w stanie *A*, jak i *B*); a wykazaliśmy już wyżej, że to, co się już zmieniło, w tym czasie, gdy się zmieniło, nie było już w stanie wyjściowym, od którego zaczęła się zmiana. Jeżeli więc jest to moment różny od tamtego, między obydwoma będzie się znajdował czas pośredni, bo jak widzieliśmy, chwile obecne nie graniczą ze sobą. Skoro więc przedmiot zmienił się w pewnym okresie czasu, a wszelki czas jest podzielny, w połowie tego czasu dokonałaby się inna zmiana, a w czwartej jego części inna itd. w nieskończoność; a zatem, jeżeli przedmiot się zmienił, musiał się już wcześniej zmieniać.”, Arystoteles, *Fizyka*, VI.6, 237a, s. 143. Patrz także 237b, s. 144.

włosów, nie wyprowadzi tego człowieka poza stan łysości. W ogólności *A* nie może być stanem tolerującym jakąkolwiek różnicę. Stan *A* ma przechodzić w *non-A* natychmiast, gdy tylko zajdzie jakakolwiek, dowolnie mała zmiana. Potwierdza to nasze przypuszczenie, że Ajdukiewicz analizował przechodzenie od jednego stanu matematycznego do innego stanu matematycznego. Jeśli bowiem, jakaś figura jest prostą i to jest jej stan *A*, to jakakolwiek zmiana w tej figurze, choćby dowolnie mała, spowoduje, że figura ta przestanie być prostą, czyli znajdzie się w stanie *non-A*. Poza światem matematyki, argumentacja Ajdukiewicza dotyczy bardzo szczególnego w filozofii pojęcia jakim jest „bezruch". Dotyczy również innego pojęcia „Bóg", przy pewnym konkretnym jego rozumieniu. Chodzi tu o takie pojmowanie Boga, w którym Bóg nie może podlegać jakimkolwiek zmianom. Argumentacja filozofów, którzy tak właśnie rozumieją Boga[475], ma postać dowodu nie wprost i sprowadza się do następującego rozumowania. Załóżmy, że Bóg ulega zmianie. Wówczas, skoro Bóg jest największą doskonałością, to jeśli się zmieni, to jedynie w coś innego niż byt o największej doskonałości, czyli w byt o mniejszej doskonałości. W wyniku zmiany, Bóg stałby się więc bytem niedoskonałym, gdyż niepełna doskonałość, to po prostu niedoskonałość. Tymczasem, Bóg nie może nie być doskonałym. Zatem, jeśli Bóg się zmieni, to jedynie w nie-Boga. Co więcej, nawet dowolnie mała zmiana, która miałaby zajść w Bogu, uczyniłaby z Niego nie-Boga. Jak widać, argumentacja ta jest ilustracją, wyżej przypomnianego, rozumowania Ajdukiewicza. Podobnie, bezruch nie dopuszcza żadnych rozróżnialnych stanów. Jeśli stan bezruchu ulegnie jakiejkolwiek, choćby najmniejszej zmianie, stan ten przestanie być bezruchem i okaże się być ruchem. Dopełnieniem bezruchu jest ruch, który najwyraźniej także nie jest nieostry – jakakolwiek zmiana dotycząca ruchu musi prowadzić do bezruchu. Naturalnie, nie chodzi tu o takie zmiany jak zmiana prędkości poruszającego się ciała. Idzie tu, rzecz jasna, o zmianę stanu *A* będącego ruchem w stan *non-A*, który może być jedynie bezruchem. Nawet wówczas, gdy zmiana taka jest trudno dostrzegalna, musi ruch zamieniać w bezruch.

Przeprowadzana analiza pokazała, że propozycja Ajdukiewicza jest nietrafna, gdyż dotyczy najprawdopodobniej Boga, stanu bezruchu lub ruchu oraz świata matematyki, w których nie ma ani zmian, ani nieostrości. Jeśli nawet analizowany przez Ajdukiewicza świat nie jest matematyką, to i tak, z samego założenia, jest to świat absolutnie, wręcz matematycznie ostrych pojęć. O ile taka absolutna ostrość jest uzasadniona w przypadku pojęcia Boga oraz w matematyce, o tyle w innych przypadkach trudno ją w sensowny sposób uzasadnić[476].

---

[475] Począwszy od Orygenesa (pocz. III w.n.e.), niezmienność jest atrybutem Boga dla prawie wszystkich filozofów uprawiających racjonalną (tj. niemistyczną) teologię.

[476] Użycie zwrotu „absolutna ostrość" jest tu zabiegiem retorycznym, mającym na celu podkreślenie niezwykłości zjawiska ostrości. Naturalnie, zwrot ten ma dokładnie takie samo

4.3.2. PARADOKSY TOŻSAMOŚCI

Źródłem paradoksów omówionych w tym paragrafie jest, tak jak w przypadku paradoksu momentu śmierci, zmiana. Mimo wspólnego pochodzenia wskazują one jednak na inny problem, niż ten, ujawniony przez paradoks omówiony w poprzednim paragrafie. Paradoks momentu śmierci poddaje bowiem w wątpliwość możliwość samej zmiany. Tymczasem, niżej rozważane dylematy dotyczą identyczności, czy też tożsamości zmieniającego się obiektu.

Pojęcie identyczności, nie budzące wątpliwości w matematyce, poza nią jest źródłem niezliczonej liczby, wzajemnie powielających się dylematów. Przypomnijmy, że na gruncie logiki pierwszego rzędu, identyczność jest dwuargumentowym predykatem spełniającym dwa warunki:

(Id 1) $x = x$
(Id 2) $x = y \rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$,

gdzie φ jest dowolną formułą języka logiki pierwszego rzędu. Takie rozumienie identyczności czyni zadość, tak zwanemu, *prawu Leibniza*, zgodnie z którym identyczne obiekty są nierozróżnialne we wszystkich możliwych kontekstach. Identyczne obiekty nie mogą się więc różnić pod żadnym względem. Jak widać, tak rozumiana identyczność jest trywialna. Obiekt *a* jest bowiem identyczny z *b*, tylko wówczas, gdy *a* jest dokładnie tym samym co *b*[477]. Widać więc, że o ile w matematyce jest sens operować tak silnym funktorem, o tyle w języku naturalnym, jego zastosowanie musi prowadzić do niesłychanie poważnych problemów. Mamy bowiem tendencję do utożsamiania różnych obiektów, pod takim, czy innym względem, co już jest niezgodne z prawem Leibniza.

Matematyczne rozumienie identyczności kłóci się nie tylko z utożsamianiem dwóch różnych obiektów, lecz także z orzekaniem tożsamości jednego, dowolnego obiektu. Cytowany już Harry Deutsch, przypomina, że predykat identyczności powinien spełniać dwa, wzajemnie się implikujące, warunki[478]:

---

znaczenie jak wyrażenie „ostrość". Jeśli bowiem jakieś zjawisko nie jest absolutnie ostre, to z konieczności, nie jest również i ostre. Tym bardziej, jeśli nie jest ostre, to nie jest absolutnie ostre. Zatem, jest ostre wtedy i tylko wtedy, gdy jest absolutnie ostre.

[477] Ograniczając swoje rozważania do obiektów materialnych, łatwo to zauważyć. Jeśli bowiem, *a* z założenia byłoby nawet dokładnie takie samo jak *b*, lecz *a* byłoby różne od *b*, to oba obiekty musiałyby znajdować się w, choćby minimalnie, różnych położeniach (miejscach). Istniałoby więc kryterium miejsca, rozróżniające oba obiekty. Innego kryterium rozróżnienia dostarczyłyby cząstki elementarne składające się na każdy z tych dwóch pozornie identycznych obiektów.

[478] Deutsch, [SEPh], 1. Patrz także: Kripke, [1972].

(N Id) Jeśli $a = b$ jest prawdą, to jest to prawda konieczna.
(N non-Id) Jeśli $a \neq b$ jest prawdą, to jest to prawda konieczna.

Pierwsze prawo zwane jest *koniecznością identyczności* (*necessity of identity*), drugie zaś *koniecznością różności*, rozróżnialności, odrębności (*necessity of distinctness*). Interesujące jest to, że oba warunki są sformułowane przy założeniu, że „*a*" i „*b*" są sztywnymi termami (*rigid terms*), czyli takimi, których denotacje nie zmieniają się ze względu na takie parametry jak czas, czy możliwe światy. Jakie więc termy, poza matematycznymi mogą tu być brane pod uwagę? Czy istnieją niematematyczne termy sztywne? Problem jest więc podwójny. Po pierwsze, wątpliwość musi budzić samo założenie istnienia niezmiennych obiektów, które nie byłyby matematycznymi. Po drugie zaś, jaki jest sens mówienia w przypadku tych obiektów o jakiejś ich identyczności, która na dodatek ma spełniać prawo Leibniza? Harry Deutsch podaje przykład z życia jednego psa, który jako mała puszysta kulka różnił się od dużego psa z szarym pyskiem[479]. Co ma świadczyć o tożsamości obu obiektów? Zgodnie z prawem Leibniza, o identyczności dwóch obiektów musi świadczyć wszystko, czyli każda możliwa cecha i każda możliwa sytuacja.

Naturalnie, nie tylko rozważany przez Deutscha pies przeczy w oczywisty sposób stosowaniu matematycznie pojmowanego pojęcia tożsamości wobec niematematycznych obiektów. Przeczy temu każdy niematematyczny obiekt. Każdy taki obiekt podlega bowiem nieustannej zmianie. Nie ma przy tym najmniejszego znaczenia tempo zachodzących zmian – starzejący się pies jest tak samo dobrym kontrargumentem przeciwko pozamatematycznemu stosowaniu prawa Leibniza, jak wietrzejący kamień.

Z tego rodzaju problemami wiążą się paradoksy tożsamości. Przegląd tych dylematów rozpocznijmy od jednego z najbardziej znanych, paradoksu łodzi Tezeusza, który został odnotowany przez Plutarcha z Cheronei w *Żywocie Tezeusza*[480]. Plutarch podkreśla, iż łódź Tezeusza była dla filozofów modelem problemu natury logicznej, czy zmieniający się obiekt zachowuje swoją tożsamość, czy nie. Niektórzy filozofowie, jak zauważa, sądzili, że tak, inni zaś, że nie[481].

Paradoks łodzi Tezeusza

Ateny były zobowiązane do oddawania kreteńskiemu królowi Minosowi, co dziewięć lat, siedmiu młodzieńców i siedem dziewcząt na pożarcie

---

[479] Deutsch, [SEPh], 2.1.

[480] Lucius Mestrius Plutarchus (ok. 46 – ok. 120), grecki biograf i filozof. Znany przede wszystkim jako autor *Żywotów równoległych*, zbioru 46 życiorysów wybitnych Greków i Rzymian, których moralne przymioty są zilustrowane licznymi anegdotami. Dzieło to stanowiło ważne źródło inspiracji m. in. dla Szekspira, *Oksfordzki Słownik Biograficzny*, [1999], s. 352.

[481] Plutarch, [Theseus].

Minotaurowi. Gdy nadszedł czas zapłacenia kolejnego haraczu, Tezeusz przyłączył się do grupy czternastu młodych Ateńczyków i popłynął z nimi na Kretę, aby zabić Minotaura. Gdy powrócił na swej trzydziestowiosłowej łodzi do Aten wraz z grupą uratowanych młodych ludzi, pełni wdzięczności Ateńczycy postanowili zachować jego łódź po wsze czasy, aby w ten sposób uchronić od zapomnienia wspaniały, bohaterski czyn Tezeusza. Ponieważ jednak łódź Tezeusza starzejąc się ulegała powolnemu niszczeniu, Ateńczycy sukcesywnie wymieniali w niej kolejne stare, niszczejące części zastępując je nowymi, tak aby łódź nie zmieniała swego wyglądu i zawsze była jak nowa. Jak podaje Plutarch, postępując w ten właśnie sposób, Ateńczycy zdołali przechować łódź Tezeusza aż do czasów Demetriusa Phalerusa.

Chociaż łódź Tezeusza zachowała dokładnie taki sam wygląd, po pewnym czasie, nie miała już w sobie żadnej starej części[482]. Powstaje więc dylemat, czy nowa łódź jest łodzią Tezeusza? Co więcej, przyjmijmy, że odrzucone na bok części posłużyły do rekonstrukcji starej łodzi. W wyniku tej rekonstrukcji powstała druga łódź, która również ma dokładnie taki sam kształt jak łódź Tezeusza. Która z tych dwóch łodzi jest więc łodzią Tezeusza? Wcześniej wydawało się, że łódź Tezeusza może być tylko jedna. Teraz wygląda na to, że są dwie. Jeśli każda z powstałych w ten sposób łodzi jest łodzią Tezeusza, to znaczy, że łodzi Tezeusza może być dowolna skończona liczba.

Powszechność problemu ujawnionego przez ten paradoks jest oczywista zwłaszcza wówczas, gdy uświadomimy sobie, że każdy z nas jest podobną łodzią Tezeusza. Naturalnie, chodzi tu przede wszystkim o kwestię nieustannej wymiany komórek jaka zachodzi w każdym żywym organizmie. Dla przykładu, w przypadku człowieka nieustający metabolizm sprawia, że co siedem lat ulega wymianie cała materia ludzkiego organizmu. Paradoks łodzi Tezeusza, dotyczy jednak również materii nieożywionej. Biorąc pod uwagę nieustanny ruch cząstek elementarnych tworzących dane ciało oraz wymianę tych cząstek z otoczeniem, należy dojść do wniosku, że łodzią Tezeusza, w sensie wskazanym przez wyżej przedstawioną argumentację, jest wszelki, złożony obiekt materialny.

Deutsch rozpoczyna analizę możliwych rozwiązań tego problemu od przedstawienia *doktryny najlepszego kandydata* (*best candidate doctrine*): skoro każda z dwóch łodzi jest dokładnie taka jak oryginał, to żadna z nich nie jest oryginałem[483]. Istotnie, uznając obie łodzie za tożsame z oryginałem, popadamy w konflikt z warunkiem (N id). Mamy bowiem, dwa obiekty w różnych

---

[482] Łódź Tezeusza ma swoje współczesne odpowiedniki, na przykład, w postaci świątyń buddyjskich w Japonii. Jedną z najważniejszych i najstarszych jest świątynia Horyuji, wybudowana przez Shotoku-Taishi w dawnej stolicy Japonii, Narze, w 607 roku n.e. Świątynia ta istnieje dzięki sukcesywnej wymianie jej drewnianych części.

[483] Deutsch, [SEPh], 2.5. Patrz także: Nozick, [1982]; Parfit, [1984].

miejscach, a mimo to tożsame ze sobą, gdyż są tożsame z trzecim, już nieistniejącym. Nie posiadamy również żadnego kryterium, które umożliwiłoby nam wybór jednej i odrzucenie drugiej łodzi – za każdym obiektem przemawiają przecież tak samo dobre racje.

Naturalnie, tak jak przed wiekami, tak i dzisiaj, każda z dwóch łodzi ma swoich zwolenników, którzy są skłonni uznać właśnie ją za oryginał. Lista uczestników tego sporu jest długa. Dlatego też ograniczymy się do skrótowej jedynie prezentacji ciągnącej się latami dyskusji.

Za uznaniem, iż oryginałem jest łódź zbudowana ze starych, oryginalnych części przemawia intuicyjność tego, że jest to ta sama łódź, którą ktoś najpierw rozebrał, a potem złożył, posługując się dokładnie tymi samymi częściami. Co więcej, uznanie za oryginał drugiej z tych dwóch łodzi grozi koniecznością uznania za oryginał kolejnych łodzi, które w ten sam sposób można by zbudować, podczas gdy, z oryginalnych części można zbudować dokładnie jedną łódź. Mimo to, istnieją zwolennicy i tego poglądu, którzy tak jak D. Wiggins uznają, iż najlepszym gwarantem zachowania tożsamości jest ciągłość czasowo-przestrzenna[484]. Ich zdaniem łódź będąca duplikatem bardziej zasługuje na miano oryginału, aniżeli łódź odbudowana ze starych części. Poglądowi temu stanowczo przeciwstawia się Saul Kripke, który w pięć lat po Wigginsie, wykorzystując (N non-id), a więc konieczność odrębności, dowodzi, iż żaden duplikat nie może być oryginałem: jeśli stół *B* jest zrobiony w jednym świecie z materiału *A*, w drugim zaś świecie z materiału *C*, to w oczywisty sposób nie zachodzi warunek (N non-id); oba stoły nie mogą więc być identyczne[485]. Jednak, już w rok po przedstawieniu przez Kripkego swojej argumentacji, R. M. Chisholm przeprowadził stare jak świat rozumowanie stosu, aby wykazać, iż to odnowiona łódź jest oryginałem: załóżmy, że wymieniamy w starej łodzi po jednej zaledwie części dziennie; wymienienie jednej części nie czyni z oryginału nie-oryginału; stosując więc to rozumowanie odpowiednią ilość razy, dochodzimy do wniosku, że nawet wówczas, gdy wymienimy wszystkie części na nowe, nadal będziemy mieli oryginalną łódź[486]. Niestety, ile są warte wnioski otrzymane w wyniku argumentacji typu *sorites* widać z treści poprzednich paragrafów. Stosując argumentację stosu można przecież udowodnić, że wysoki człowiek jest niski, a łysy jest kudłaty. Mimo to, dyskusja trwała nadal wciągając kolejne nazwiska i rozpoczynając nowe wątki, takie jak chociażby przypuszczenie, że o oryginalności odbudowanej łodzi świadczy to, iż powstała ona po tym jak zniknął oryginał[487]. Niestety, wszystko wskazuje na to, iż paradoks łodzi Tezeusza ujawnia daleko głębszy problem, aniżeli ten, którą

---

[484] Patrz Wiggins, [1967].
[485] Kripke, [1972], s. 114.
[486] Patrz: Chisholm, [1973].
[487] Szerszą prezentację toczącej się dyskusji można znaleźć w Deutsch, [SEPh], 2.5.

łódź mamy uznać za oryginał. Z punktu widzenia tego problemu, który omówimy w końcowej części rozdziału poświęconego paradoksom ontologicznym, powyższa dyskusja wydaje się być nie na temat.

Paradoks łodzi Tezeusza interpretuje się jako dylemat wskazujący na niejasność, żeby nie powiedzieć sprzeczność, procesów zmian jakie zachodzą w każdym złożonym obiekcie. Procesy te dotyczą również rozwoju dziecka, czy starzenia się każdego człowieka. Niewątpliwie, problem ten również stanowi sedno paradoksu łodzi Tezeusza. Istnieją jednak inne dylematy, które równie dobrze, choć z innej perspektywy, wskazują na podobne trudności. Bez wątpienia, należy do nich kolejny, starożytny paradoks odkryty przez Chryzypa, a przypomniany przez Michaela Burke[488]. Przedstawmy go w wersji Deutscha[489].

Paradoks Chryzypa

Załóżmy, że w pewnej chwili *t*', która nastąpi w przyszłości, pies o imieniu Oskar traci swój ogon. Obecnie, czyli w chwili *t*, $t < t'$, część Oskara jaką jest ten pies bez swojego ogona nazwijmy Oskarem-minus.

W chwili *t*, Oskar i Oskar-minus są różnymi obiektami. Zatem, na mocy (N non-Id), oba obiekty są różne także w chwili *t*'. Istotnie, w chwili *t*' Oskar ma własność, której nie ma Oskar-minus, jest nią posiadanie w chwili *t* ogona. Zatem, także na mocy (N Id), oba obiekty są różne. Oznacza to, że po chwili *t*' istnieć będą dwa psy, które nie będą się różniły zajmowaną przestrzenią i czasem – będą miały dokładnie tę samą budowę i zawsze będą w tych samych miejscach robiły dokładnie to samo. Ponieważ, jest to wniosek nie do przyjęcia, możemy zaakceptować dwa rozwiązania: albo po chwili *t*' żyje Oskar-minus, albo po chwili *t*' żyje Oskar. Pierwsze rozwiązanie oznacza, że w chwili *t*' ginie Oskar, a przeżywa Oskar-minus. Jest ono jednak niezgodne z intuicjami, gdyż jesteśmy przekonani, że to Oskar przeżywa, tracąc jedynie swój ogon – przecież chwila *t*' tym się właśnie cechuje. Zgodnie z drugim rozwiązaniem, w chwili *t*' ginie Oskar-minus, a pozostaje przy życiu Oskar. Jest to jednak absurdalne, gdyż znaczy, że chociaż z Oskarem-minus nic się nie dzieje w przedziale między chwilą *t* a *t*', to Oskar-minus ginie.

Jak widać, żadne z tych trzech rozwiązań nie jest możliwe do zaakceptowania[490].

---

[488] Burke, [1995].

[489] Deutsch, [SEPh], 2.2.

[490] Dodatkowym problemem jest to, że rozważania dotyczą żywego psa i jego ogona. Uważa się bowiem za obiekty identyczne: psa z odciętym ogonem oraz tę część psa z ogonem, do której ogon nie należy. Tymczasem, żyjący pies bez ogona różni się zasadniczo od rozważanej tu odpowiedniej wyabstrahowanej jedynie części żyjącego psa z ogonem będącej psem bez ogona. Przecież, już sam różny krwioobieg obu psów wskazuje na istotną różnicę: wyabstrahowana część psa z ogonem, do której ogon nie należy, nie może istnieć samodzielnie, czyli bez ogona. Z tego punktu widzenia może się wydawać, że znacznie lepiej byłoby psa z ogonem zastąpić dzbanem

Powszechność i tego paradoksu jest oczywista. Jasne jest przecież, że każdy z nas, tak jak inny dowolny obiekt, jest swoistym psem Oskarem, tracącym coś, co wcześniej, bez wątpienia, było integralną częścią nas lub tego obiektu – obcięte paznokcie, czy nigdzie niezachowany pył ze startego parkietu.

Deutsch wymienia cztery możliwości zakwestionowania powyższego rozumowania. Można więc przyjąć, że nie istnieją nie oddzielone od całości, właściwe części obiektów[491] lub że części te są na tyle istotnymi dla całości, że nie ma sensu mówić o ich odrębności[492]. Trzecia możliwość zakłada, że różne rodzaje obiektów mogą wypełniać w tym samym czasie tę samą przestrzeń, lecz dwa obiekty tego samego typu nie. Zatem, ciało, jako materialna część, psa i pies mogą istnieć równolegle, wypełniając tę samą przestrzeń w tym samym czasie. Jednak dwa psy, nawet różne, nie[493]. Czwarte rozwiązanie, zakłada, że Oskar i Oskar-minus są różnymi czasowymi obiektami, które stają się jednym w chwili *t'*[494].

Kolejny paradoks, sformułowany przez Geacha i powtórzony przez Lewisa[495], jest połączeniem, omówionego już wcześniej, paradoksu wielu oraz paradoksu Chryzypa.

Paradoks tysiąca i jednego kota
Załóżmy, że mamy puszystego kota. Kot ten w pewnej, należącej do przyszłości, chwili straci któryś ze swoich włosów. Skoro tak, to na mocy (N id) lub (N non-id), już w obecnej chwili mamy dwa różne koty. Naturalnie, nasz kot ma bardzo dużo włosów, które może gubić w różnych konfiguracjach, np. po dwa lub trzy jednocześnie. Oznacza to, że na mocy jednego ze wspomnianych już dwóch warunków, mamy w obecnej chwili nie jednego lecz tysiąc i jednego kota, a tak naprawdę tak dużo kotów, że trudno je zliczyć.

W oczywisty sposób, inspiracją dla powyższego paradoksu, a więc i dla każdego paradoksu wielu jest argumentacja Chryzypa. Nie będziemy powtarzali propozycji rozwiązania tego problemu, gdyż wszystkie najważniejsze pomysły zostały już omówione w rozdziale poświęconym paradoksom wielu. Warto jedynie

---

z uchem. Jednak pies, czy to z ogonem, czy bez ogona, jest istotą pod pewnym bardzo ważnym względem tą samą. Chodzi tu o coś co można określić mianem psychizmu, a co bez wątpienia nie jest udziałem żadnego dzbana. Dlatego też, mimo pewnych niedoskonałości przykład psa z ogonem jest chyba trafniejszą ilustracją analizowanego tu problemu tożsamości niż analogiczny przykład dzbana z uchem.

491 Patrz: van Inwagen, [1981].

492 Patrz: Chisholm, [1973].

493 Patrz: Oderberg, [1996].

494 Deutsch, [SEPh], 2.2.

495 Geach, [1980], Lewis, [1993].

zauważyć, że wszystkie te propozycje są tak samo sztuczne i nieintuicyjne, jak te, mające rzekomo rozwiązać paradoks Chryzypa, czy paradoks łodzi Tezeusza.

Ostatnim, z wymienionych przez Deutscha paradoksem identyczności jest, wspomniany już wcześniej[496], paradoks Churcha[497].

Paradoks Churcha

Załóżmy, że Pierre przypuszcza, iż London i Londres są różnymi miastami. Naturalnie, Pierre doskonale wie, że London i London są tym samym miastem, tak samo jak jednym miastem jest Londres i Londres. Na mocy prawa Leibniza, otrzymujemy więc, że London i Londres faktycznie są różnymi miastami, gdyż istnieje kontekst odróżniający obiekt nazwany London od obiektu nazwanego Londres. Kontekstem tym jest myślenie o obu obiektach. Zatem, London i Londres są różne.

Paradoks Churcha w swojej własnej wersji powtórzył, także cytowany już wcześniej, Gareth Evans, który pragnął w ten sposób pokazać, że nie może istnieć nieostra, czy nieokreślona identyczność[498].

Deutsch uważa, że paradoks Churcha wskazuje na pewne ograniczenia prawa Leibniza, które powinno uzależniać identyczność obiektów od jedynie realnych kontekstów. Ujmując rzecz dokładniej, dwa obiekty winny być odróżnione, na mocy prawa Leibniza, jedynie wówczas, gdy różnice między nimi byłyby realne. Problem jednak w tym, że odrębne kryterium powinno określać, które kryteria są realne, a które nie.

Analizując trafność argumentacji Evansa, pokazaliśmy, iż wyżej przedstawiony „dowód" Churcha, wcale nie musi przeczyć prawu Leibniza. Przypomnijmy więc, że chcąc rozumować precyzyjnie, należy odróżnić miasto London od wyobrażenia miasta London. Oznacza to, że przekonania Pierra umożliwiają odróżnienie nie miast London i Londres, lecz wyobrażenia miasta London od wyobrażenia miasta Londres. Przecież odrzucenie identyczności obu tych wyobrażeń jest tak samo uzasadnione, jak uznanie identyczności obu miast. Zatem, argumentacja Churcha pokazuje, że w świadomości ludzi London i Londres nie są tym samym miastem, co wydaje się być raczej oczekiwanym wnioskiem.

Deutsch uważa, że, omówiona już przez nas wcześniej, względna identyczność (*relative identity*)[499] może być podstawą dla rozwiązań wszystkich

---

[496] Patrz, poświęcony nieostrości pozajęzykowej, paragraf 4.1.3.4.

[497] W zamierzeniach Churcha, argumentacja ta miała godzić w logikę intensjonalną Russella, a zwłaszcza w założenie, iż stałe i zmienne nie są obciążone konkretnym znaczeniem. Patrz: Church, [1982]; Deutsch,[SEPh], 2.6.

[498] Patrz, poświęcony nieostrości pozajęzykowej, paragraf 4.1.3.4.

[499] Deutsch, [SEPh], 4. Patrz, poświęcony paradoksom wielu, paragraf 4.2.

wyżej wymienionych paradoksów. Jeszcze raz przypomnijmy, że, ten zaproponowany przez Geacha, polega na przyjęciu, iż dwa obiekty mogą być tym samym *F*-em i jednocześnie nie tym samym *G*, mimo iż każde z nich może być jakimś *G*[500]. Głównym celem tego pomysłu jest możliwość pożądanego wyróżnienia w dowolnym obiekcie co najmniej dwóch stron tego obiektu. Ta dwoistość, czy nawet troistość natury każdego obiektu ma umożliwić twierdzenie, że jest on tożsamy z jakimś innym obiektem ze względu na jedną swoją naturę, zaś różny od tego samego obiektu ze względu na inną swoją naturę. Jak już wcześniej przypomnieliśmy, Weatherson dowodzi, iż akceptacja teorii względnej identyczności pociąga za sobą to, iż dwa obiekty będące tym samym *F*-em mogą różnić się jakąś własnością, co przeczy prawu Leibniza[501]. Jest to oczywiście trafna uwaga, co więcej, można przypuszczać, że skutek ten był całkowicie zamierzony przez Geacha.

To, w jaki sposób paradoksy tożsamości są rozwiązywane na gruncie teorii względnej identyczności jest czymś spodziewanym. W najbardziej ogólnym przypadku jaki stanowi, poruszony wcześniej, problem rosnącego psa, Deutsch twierdzi, że zarówno mały, jak i duży pies są tym samym psem, lecz jednocześnie są dwoma, absolutnie, różnymi obiektami logicznymi – jak widać, wykorzystana jest tu, wspomniana wyżej, arbitralnie założona dwoistość natury psa. Warunki materialne sprawiają, że młody i stary pies Deutscha są jednym i tym samym psem, gdyż są dwoma częściami trwającego w czasie rozwoju jednego psa. Jedyna różnica między młodym i starym psem jest logiczna[502]. Zdaniem Deutscha, młody pies jest całkowicie wyrażony przez czas trwania jego młodości, między innymi, przez te proste cechy, których nie posiada stary pies – np. nieposiadanie szarego pyska[503].

Rozwiązanie paradoksu Chryzypa, na gruncie teorii względnej identyczności, jest, można by rzec, standardowe: Oskar i Oskar-minus są tym samym psem, lecz różnymi obiektami logicznymi. Ten, dobrze już nam znany, pomysł znacznie lepiej pasuje do chwili czasowej *t*, niż do *t'*. W chwili *t* oba obiekty logiczne są różne, co wobec (N non-id) oznacza ich różność także w chwili *t'*. Jednak w chwili *t'* nic już obu obiektów nie różni poza tym, co działo się z każdym z nich kiedyś, w przeszłości. Deutsch uważa, że nie jest to żaden problem – fakt ten świadczy jedynie o tym, że dwa logicznie różne obiekty mogą zajmować tę samą przestrzeń w tym samym czasie[504].

---

[500] Geach, [1980].

[501] Weatherson, [SEPh], 5.

[502] Formalną analizę tego przypadku Deutsch przeprowadza w [1997], wykorzystując logikę wyposażoną w modalno-temporalną aparaturę.

[503] Por. Deutsch, [SEPh], 4.1.

[504] Deutsch, [SEPh], 4.2.

W przypadku paradoksu tysiąca i jednego kota, na gruncie teorii względnej identyczności, nie może być mowy o jakimś maksymalnym kocie. Zdaniem Deutscha, nie jest prawdą, że żadna właściwa część kota nie jest kotem, gdyż każdy kot, różniący się od innych kotów jakąś ilością włosów jest kotem. Oznacza to, że jakaś część właściwa kota może być kotem. Tak więc, w przypadku puszystego, i nie tylko puszystego, kota istnieje tysiąc i jeden, a nawet więcej, różnych kotów. Oczywiście, te różniące się obiekty są obiektami logicznymi, które naturalnie, są tym samym, jednym jedynym kotem. Jak widać, rozwiązanie to jest dokładnie takie, jak w przypadku starzejącego się psa[505].

W paradoksie Churcha, świadomość Pierra jest podstawą dla uznania, iż obiekt reprezentowany przez jedną nazwę jest różny od obiektu reprezentowanego przez drugą nazwę mimo, iż obie nazwy reprezentują ten sam obiekt. Podobnie do rozwiązania problemu starzejącego się psa, na gruncie teorii względnej identyczności, można uznać, że skoro w świadomości Pierra London i Londres są różnymi miastami, to istnieją dwa różne obiekty logiczne, każdy odpowiadający jednej z tych nazw. Jednak, każda z nazw „London" i „Londres" oznacza jedno i to samo miasto[506].

Rozwiązanie paradoksu łodzi Tezeusza napotyka jednak na pewne problemy, które uniemożliwiają proste zastosowanie identyczności względnej. Co gorsza, najwyraźniej widać, że to parokrotnie wyżej występujące, typowe dla tej identyczności zastosowanie umożliwia wyciągnięcie właśnie tego wniosku, który jest jak najbardziej niepożądany. Stwierdzenie, że obie łodzie mają inny budulec i pod tym względem się różnią, lecz są tą samą łodzią, a więc pod tym względem są identyczne, jest właśnie tym, niechcianym wnioskiem. Przecież istotą problemu jest to, jak rozstrzygnąć, która z dwóch nowopowstałych i niewątpliwie nieidentycznych łodzi jest oryginałem. Tymczasem, każda z dwóch łodzi może być uznana za oryginał. Aby ten fakt lepiej unaocznić, Deutsch proponuje interesującą analizę. Załóżmy, że mamy dwa obiekty P i Q, każdy złożony z trzech części: P z P_1, P_2, P_3, zaś Q z Q_1, Q_2, Q_3. Ponadto, przyjmijmy, że zamieniając wzajemnie miejscami jedną część z P i jedną część z Q nie zmieniamy tożsamości, ani P, ani Q. Niech P^1 jest obiektem złożonym z Q_1, P_2, P_3, zaś Q^1 jest złożony z P_1, Q_2, Q_3. Naturalnie, Q^1 jest tożsame z Q. Powtarzając jeszcze dwa razy wzajemną zamianę części P_2 i Q_2 oraz P_3 i Q_3 otrzymujemy dwa obiekty P^3 oraz Q^3, które są identyczne z odpowiednio Q i P. Jedyna różnica jaka istnieje między P^3 i Q oraz Q^3 i P, to lokalizacja obiektów tworzących te dwie pary – P^3 jest co prawda dokładnie takie samo jak Q, lecz znajduje się w innym miejscu, a mianowicie tam gdzie pierwotnie było P; podobnie jest w przypadku pary Q^3 i P. Deutsch proponuje więc trzeci krok zamiany elementów wyposażyć dodatkowo zamianę miejscami obu obiektów. Wówczas, już nic nie różni P^3 od Q oraz Q^3

[505] Deutsch, [SEPh], 4.3.
[506] Deutsch, [SEPh], 4.6.

od *P*. Tymczasem, przypomnijmy, że z założenia, każdorazowa zamiana jednego elementu nie zmienia tożsamości całego obiektu, a zatem, P^3 jest tożsame z *P*, zaś Q^3 z Q[507]. Deutsch nie zauważa jednak, że o pełnej tożsamości obiektów P^3, *P*, *Q*, jak również Q^3, *Q*, *P*, nie można mówić, gdyż tym co zawsze będzie różnić któryś z elementów każdej trójki od dwóch pozostałych z tej trójki jest wspomniana lokalizacja obiektu. Mimo to, przykład Deutscha jest bardzo trafny i pokazuje absurdalność stosowania identyczności typowej dla świata obiektów niezmiennych wobec obiektów, które podlegają zmianom.

Dlatego też, Deutsch proponuje wprowadzenie, jak sam to określa, dodatkowego poziomu względności. Wprowadza więc nową regułę, która jak widać, jest „skrojona" dokładnie pod wskazany przez niego problem: *dwa obiekty x i y są tożsame ze względu na obiekt z, jeśli każdy z nich różni się od z co najwyżej jedną pojedynczą częścią*. Zgodnie z tym kryterium, tożsame ze sobą ze względu na *P*, są *P*, P^1, Q^2, Q^3. Natomiast nie są tożsame ze względu na *P* następujące obiekty: *Q*, Q^1, P^2, P^3. Deutsch dostrzega sztuczność kryterium ze względu na różnicę co najwyżej jednej części. Twierdzi jednak, że w podanej regule, chodzi o pewnego rodzaju stopniowalność odchylenia obiektu od oryginału, który reprezentuje symbol „*z*". W ten sposób, jest możliwe opisanie procesu, polegającego na tym, że poprzez małe zmiany jakiś obiekt przekształca się w inny[508]. Naturalnie, stosując regułę Deutscha, udowodnimy wzajemną nieidentyczność obu nowopowstałych łodzi, jak również nieidentyczność odnowionej łodzi z jej pierwowzorem. Pokażemy natomiast tożsamość starej łodzi z tą, odbudowaną ze starych części.

Wymienione wyżej paradoksy ujawniają pewien fundamentalny problem dotyczący rozumienia tożsamości dowolnego, niematematycznego obiektu. Wszystkie te dylematy są bowiem skutkiem stosowania wobec nieustannie zmieniających się obiektów identyczności, która jest określona, matematycznym w swej naturze, prawem Leibniza. Zgodnie z tym prawem, obiekty *a* i *b* można utożsamić dopiero wówczas, gdy są one nierozróżnialne w dowolnym kontekście. Tymczasem, każda, choćby najmniejsza, zmiana jakiegokolwiek obiektu dostarcza kryterium odróżniające ten obiekt od niego samego – przed zmianą był obiekt o_1, a po zmianie jest obiekt o_2, przy czym o_1 nie jest obiektem o_2. Powstaje więc podstawowa trudność w uznaniu, iż dwa różne etapy w procesie zmiany danego obiektu reprezentują ten sam obiekt. Co więcej, powszechność tej trudności powinna być źródłem postawienia najbardziej fundamentalnych pytań dotyczących sposobu pojmowania zmiany i bezruchu.

Niepostawienie podobnych pytań skazuje nas na zajęcie, z góry przegranej, pozycji. Każda propozycja mająca rozwiązać problem tożsamości jest skazana na sztuczność i własną paradoksalność. Będziemy więc, zastanawiali się nad

---

[507] Deutsch, [SEPh], 4.5.
[508] Deutsch, [SEPh], 4.5.

jakimś „kotem maksymalnym”, który może istnieje, a może nie istnieje; być może jednak istnieją tysiące kotów w jednym, które jednak cechują się tym, że nie mogą samodzielnie wypić mleka, bo mleko może pić jedynie jeden z nich, ale który nie wiadomo; być może jakieś części właściwe kota są całym kotem. Podejścia te są tak niezwykłe, że dotyczące ich paradoksy wydają się znacznie bardziej intuicyjne mimo swej oczywistej paradoksalności, niż proponowane rozwiązania. Czyż nie jest czymś bardziej logicznym żyć z tymi paradoksami, aniżeli z ich rozwiązaniami?

Zazwyczaj, proponowane podejścia polegają na mnożeniu bytów ponad wszelką miarę. Jest to raczej nieuchronna konsekwencja uznania, iż, co prawda, obiekt się stale zmienia, ale tak naprawdę istnieją stany niezmienne. Każdy więc etap procesu zmiany musi być jakimś obiektem, gdyż niezmienność jest w tych podejściach prawdziwsza niż zmienność. Oznacza to, że zmienność jest postrzegana przez pryzmat niezmienności. O zmienności możemy mówić jedynie wówczas, gdy za punkt wyjścia przyjmiemy niezmienność. Z natury swej dynamiczna przecież zmienność jest przez nas rekonstruowana ze statycznych, niezmiennych stanów. Ten matematycznie niezmienny fundament wszelkiej zmiany jest źródłem, wskazanych przez paradoksy tożsamości, problemów, które okazują się być jawnymi sprzecznościi.

W przypadku teorii względnej identyczności mamy cale mnóstwo obiektów zwanych logicznymi, które mają służyć rekonstrukcji zmiany z niezmienności. Przecież, w przypadku psa Deutscha nie mamy dwóch różnych obiektów logicznych: młodego psa i starego psa. Mamy niezliczoną ilość różnych obiektów logicznych, które mogłyby być młodym psem i podobnie wiele różnych obiektów logicznych, które mogłyby być starym psem. Jak więc można i należy rozumieć obiekt logiczny? Wydaje się, że istnieje jedyna odpowiedź na to pytanie: obiektem logicznym jest taki obiekt, który nie wykazuje żadnej zmiany, czyli obiekt który sam jest stałością. Dopiero taki obiekt ma jakieś precyzyjne, bo ściśle określone własności. Gorzej, gdy zadamy sobie pytanie o to, jakie te własności naprawdę są. Wówczas, o ile nie są to własności matematyczne, napotykamy natychmiast na problem nieostrości, który jawnie przeczy rzekomo ścisłemu opisowi stałego, sztucznie wyrwanego z dokonującego się procesu zmiany, obiektu abstrakcyjnego, zwanego obiektem logicznym, jakim jest np. pies Deutscha w chwili *t*. Oczywiście, chwila *t* musi być rozumiana także matematycznie, czyli jako punkt czasowy, a nie, choćby niewyobrażalnie mały, lecz niezerowy przedział czasu. Przecież, w każdym przedziale o niezerowej długości zachodzi jakaś zmiana, którą trzeba zastąpić ciągiem, choćby nie wiadomo jak długim, stanów niezmiennych. Zatem, punkt czasowy, który nie posiada żadnych wymiarów wydaje się być idealną podstawą do wyabstrahowania stanów niezmiennych.

Wyróżnienie przy pomocy jakiegoś kryterium F dwóch różnych obiektów logicznych w jednym kocie nie jest jednak końcem tworzenia różnych obiektów logicznych w jednym zwierzęciu. Mamy przecież świadomość, że nie istnieje jedno zaledwie kryterium F, lecz pewna ich ilość: F_1, F_2, F_3, ..., F_k. Co więcej, dla dowolnej k-tej ilości „podstawowych" kryteriów, istnieje 2^k „wypadkowych" kryteriów umożliwiających dokonanie analizowanego tu rozróżnienia. Każde z tych kryteriów, zarówno „podstawowe", jak i „wypadkowe", wyróżnia własne obiekty logiczne. Lecz jakie obiekty logiczne są wyznaczone przez cały zespół wszelkich możliwych kryteriów? Czy po uwzględnieniu zbioru kryteriów nie okaże się, że można wyznaczyć kolejne? Przecież, jeśli jakiś obiekt ma być logiczny, powinien być w pewien sposób obiektywnie wyznaczony. Ponadto, każde niematematyczne kryterium jest w oczywisty sposób nieostre. Zatem, najprawdopodobniej same obiekty logiczne również są nieostre, co ostatecznie pozbawia sensowności teorię posługującą się obiektami logicznymi.

Jednak nie tylko różność stanów zmieniającego się obiektu jest miarą ilości tych różnych stanów, czyli różnych obiektów logicznych. Przecież, jak to zostało pokazane w przypadku rozwiązania paradoksu Chryzypa, różne obiekty logiczne mogą być przecież nierozróżnialne. Jeśli kot traci włos i staje się kotem bez włosa, to już wcześniej kot bez tego włosa istniał (warto byłoby postawić pytanie: od kiedy istniał kot bez tego włosa) zatem, po chwili w której wspomniany włos wypada, istnieją dokładnie dwa takie same a jednak różne obiekty logiczne – a to dopiero jeden włos. Jeśli ten stan rzeczy wydaje się skomplikowany, to co powiedzieć, o tym, że przedstawioną wyżej analizę winniśmy zacząć od jakiegoś rozwiązania kwestii nieostrości tego włosa, czy też nieostrości nazwy „włos".

Widać więc, jak ogromna ilość takich, wzajemnie różnych i tożsamo-różnych (!), logicznych obiektów jest potrzebna dla wyrażenia nawet najprostszej, banalnej zmiany. Poza nielicznymi przypadkami niektórych myślicieli, problem ten nie budzi jednak żadnych wątpliwości, bo przecież zwykliśmy widzieć paradoksalność właśnie w zmienności, a nie w niezmienności. To niezmienność jest pierwotna, a zmienność wtórna. Realna jest przecież niezmienność podczas, gdy zmienność jest iluzją. To niezmienność jest podstawą zmienności, a nie zmienność podstawą niezmienności. Nasze naukowe, racjonalne postrzeganie rzeczywistości musi być przecież ścisłe, czyli oparte na matematyce, a w matematyce nie ma zmienności, nawet tej najmniejszej. Oczywiście, daje się w matematyce zrekonstruować procesy dynamiczne, jednak zawsze wychodząc od tych, z matematycznego punktu widzenia, „jedynie realnych", stanów niezmienności.

Warto zwrócić uwagę na jeszcze jeden, raczej niepożądany, aspekt teorii względnej identyczności. Ta ogromna ilość różnych obiektów logicznych dla danego jednego, realnego obiektu, którego „A" jest nazwą, czyni z tej nazwy wyrażenie wieloznaczne i to w stopniu tak nieprawdopodobnie ogromnym, że trudnym do ogarnięcia. Wygląda na to, że ta niewyobrażalnie wielka skala wieloznaczności jest skutkiem tego, że, tak naprawdę, nazwa „*A*" nie jest wieloznaczna, lecz po prostu nieostra. Oznacza to, że analizowane tu podejście, prowadzi do błędnego pomieszania wieloznaczności z nieostrością.

To mnożenie bytów abstrakcyjnych nie jest jednak całkowicie bezkarne, bo jak się okazuje proponowane rozwiązania załamują się na paradoksie łodzi Tezeusza. Tym razem, chcemy bowiem, aby te różne obiekty logiczne nie były jednak tą samą łodzią, jak to było np. z naszym psem, czy kotem. Po prostu, czasami różne obiekty logiczne mają być jednym obiektem (tym „nie--logicznym"), a czasami mają być różnymi obiektami. Jeśli więc chcemy rozróżnić dwa obiekty, wystarczy przyjąć, że istnieje pewna dopuszczalnie mała zmiana, która nawet jeśli zajdzie, to i tak nie spowoduje, że doznający tej zmiany obiekt utraci swoją tożsamość, czyli przestanie być sobą. Każda większa zmiana sprawi jednak, że obiekt staje się innym obiektem, mamy więc upragnione rozróżnienie. Oczywiście, nie jest prostą odpowiedź na pytanie: jak duża może być zmiana, aby z obiektu *A* nie uczynić obiekt *nie-A*. Odpowiedź ta odsyła nas, bowiem, do problemu nieostrości.

Przedstawiona w tym paragrafie analiza paradoksów tożsamości wskazuje na ich niezwykle ważny status oraz wciąż bolesną aktualność. Te, niezbyt doceniane, dylematy nie dają się bowiem rozwiązać w sposób szanujący dość powszechnie uznany porządek widzenia świata. W bezlitosny sposób, obnażają słabe punkty tego, przez wieki uznawanego porządku.

Zanim przedstawiona zostanie propozycja ujednoliconego, wspólnego podejścia do paradoksów nieostrości, paradoksów wielu oraz paradoksów zmiany i tożsamości, przypomnijmy niezwykle stare paradoksy rzekomo godzące w szczególnego rodzaju zmianę, jaką jest ruch.

4.3.3. PARADOKSY RUCHU (DYCHOTOMII, ACHILLESA I ŻÓŁWIA, STRZAŁY, STADIONU)

Bodaj najsławniejszymi w historii filozofii paradoksami dotykającymi pojęcia nieskończoności są te, autorstwa Zenona z Elei, a więc: *paradoks dychotomii*, *Achillesa i żółwia*, *stadionu* oraz *ziarna zboża*. Zdaniem Diogenesa Laertiosa[509], Zenon z Elei był wybitnym filozofem i mężem stanu, człowiekiem odważnym, wyniosłym wobec możnych, nie znoszącym krytyki. Do historii przeszedł dzięki wymyślonym, najprawdopodobniej przez samego siebie, dylematom, które miały uzasadniać tezę o jedności i niezmienności bytu, głoszoną przez jego ukochanego mistrza, Parmenidesa z Elei. Radykalne

---

[509] Diogenes, *Żywoty...*, księga IX 25–29.

poglądy eleatów były narażone na łatwą krytykę[510]. Prawdopodobnie, z tego właśnie powodu, Zenon bronił je stosując atak na poglądy przeciwne. Zwalczał więc, zarówno wielość, jak i zmienność bytu. Dość niezwykły przekaz na temat konfrontacji poglądów Parmenidesa i Zenona z filozofią platońską przekazał nam Platon w jednym ze swoich późniejszych dialogów, zatytułowanym *Parmenides*. W dziele tym, widać nie tylko dystans autora do nauki eleatów, lecz również do własnych poglądów[511].

Paradoks worka zboża, uważany za argument przeciw wielości, w rzeczywistości jest paradoksem nieostrości i to nieostrości pozajęzykowej. Jako taki, dylemat ten został więc omówiony w pierwszym paragrafie obecnego rozdziału. Trzy pozostałe paradoksy są argumentacjami mającymi dowodzić nierealności ruchu. Wśród nich, bodaj najprostszym do wyjaśnienia, wydaje się być paradoks stadionu, chociaż niejasna a nawet mętna relacja Arystotelesa zawarta w *Fizyce* sprawia, że nie można być bezwzględnie pewnym, iż dylemat ten znamy w postaci takiej jaką faktycznie nadał mu Zenon. Podobne zresztą kłopoty nastręczają przedstawione przez Arystotelesa prezentacje pozostałych paradoksów Zenona.

Analizę tych niezwykle popularnych i ważnych dylematów rozpoczynamy od tego, którego znaczenie wydaje się być najmniejsze, już chociażby z tego powodu, iż nie ujawniając żadnego ważnego problemu filozoficznego, dylemat ten jest chyba dość prostą zagadką dotycząca względności prędkości poruszających się ciał. Innego zdania jest Tomasz Placek, który w interesującej, dwuczęściowej publikacji poświęconej paradoksom Zenona z Elei[512], przedstawiającej te dylematy w szerszym, filozoficzno-matematycznym, kontekście, doszukuje się w paradoksie stadionu argumentu przeciwko, omówionemu w dalszej części, atomizmowi[513], czyli poglądowi przyjmującemu istnienie niepodzielnych porcji materii, zwanych właśnie atomami. Wydaje się jednak, że jest to pewna nadinterpretacja[514].

---

[510] Prekursorem eleatów był Ksenofanes z Kolofonu, zaś właściwym twórcą tej szkoły filozoficznej, działającej w Elei w VI–V w., jest Parmenides z Elei. Eleaci odrzucali świadectwo zmysłów, pokładając zaufanie w rozumie i dedukcji. Negowali wielość rzeczy i ruch. Głosili istnienie jednego niezmiennego i nieruchomego bytu. Eleatami byli, m.in., Zenon z Elei i Melissos z Samos.

[511] Witwicki, *Wstęp tłumacza* do dialogu *Parmenides*, Platon, Dialogi, t. II, s. 245–247. Interesujące jest to, że w dialogu tym Platon stawia pod znakiem zapytania szczerość poglądów Zenona, którego podejrzewa o zwykłą chęć przypodobania się ukochanemu mistrzowi Parmenidesowi. Jedynie miłość do nauczyciela każe Zenonowi wymyślać i głosić poglądy, w które, zdaniem Platona, nie sposób naprawdę wierzyć, Platon, *Dialogi*, t. II, *Parmenides*, 128 E, s. 256.

[512] Placek, [1989], [1997].

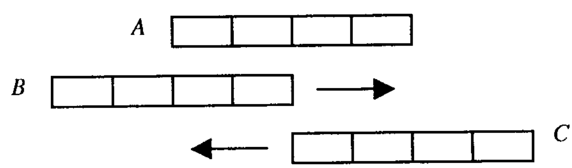
[513] Placek, [1997], s. 74–77.

[514] Patrz paragraf poświęcony paradoksowi dychotomii.

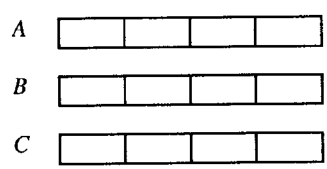
4.3.3.1. PARADOKS STADIONU

Paradoks stadionu jest czwartym, przytoczonym przez Arystotelesa w jego *Fizyce*[515], argumentem Zenona z Elei mającym dowodzić niemożliwości ruchu. Argument ten bywa pomijany nawet w literaturze dotyczącej paradoksów Zenona, prawdopodobnie ze względu na szczególnie niejasną postać rozumowania przekazanego nam przez Arystotelesa. Poniższa wersja paradoksu stadionu jest próbą odtworzenia relacji Arystotelesa.

Paradoks stadionu
Wyobraźmy sobie że na bieżni stadionu znajdują się trzy jednakowe obiekty. Każdy składa się z czterech jednakowych segmentów. Ich początkowe położenie przedstawia pierwszy rysunek. Obiekt *A* pozostaje w spoczynku. Obiekty *B* i *C* w chwili t_1 zaczynają się poruszać z tą samą stałą prędkością ale w przeciwnych kierunkach wskazywanych przez strzałki.



Poruszające się obiekty zatrzymują się w chwili t_2 wraz z osiągnięciem następujących pozycji:



Od chwili t_1 do chwili t_2 początek obiektu *C* pokonał drogę równą dwóm segmentom obiektu *A* i czterem segmentom obiektu *B*. Oznacza to, że początek obiektu *C* pokonał długość każdego z dwóch segmentów obiektu *A* w czasie $t = 0{,}5(t_2 - t_1)$, zaś długość każdego z czterech segmentów obiektu *B* w czasie $0{,}5t = 0{,}25(t_2 - t_1)$. Zatem, skoro czas potrzebny na pokonanie dwóch równych odległości przez obiekty poruszające się z tą samą prędkością jest ten sam, przedział czasu t jest równy swojej połowie: $t - 0{,}5t$.

---

[515] Arystoteles, *Fizyka*, 239b–240a.

Powyższa rekonstrukcja paradoksu stadionu jest zgodna z tekstem Fredericka Coplestona[516]. Odpowiedni fragment *Fizyki* Arystotelesa jest bowiem zbyt skrótowy, aby w jasny i przejrzysty sposób przedstawić omawiany tu problem[517]: „Czwarty argument odnosi się do ciał poruszających się na stadionie z jednakową szybkością w przeciwnych kierunkach, w szeregach utworzonych z równej ilości tych ciał o jednakowych rozmiarach; jeden z tych szeregów zajmuje przestrzeń od końca stadionu do punktu środkowego, a drugi od punktu środkowego do początku stadionu. Sądzi [Zenon, przyp. autora], iż z tego wynika wniosek, że połowa danego czasu jest równa jego podwójnemu okresowi".

Oczywista fałszywość tego paradoksu została pokazana już przez samego Arystotelesa[518]: „Paralogizm ten opiera się na założeniu, że ciało w tym samym czasie i z tą samą szybkością mija zarówno ciało będące w ruchu, jak i o takich samych rozmiarach ciało spoczywające. To jednak jest fałsz". Z pism, które dotrwały do naszych czasów trudno jest odtworzyć oryginalną postać tej, czwartej, argumentacji Zenona. Wydaje się jednak, że, zaproponowana przez nas wcześniej, rekonstrukcja paradoksalnego rozumowania odtwarza wnioskowanie prowadzące do pożądanej przez Zenona, a wyraźnie podanej przez Arystotelesa tezy, iż „połowa danego czasu jest równa jego podwójnemu okresowi". Gwoli ścisłości, zauważmy, że w zrekonstruowanym rozumowaniu problem pojawia się wraz z przyjęciem tezy pomocniczej, według której „czas potrzebny na pokonanie dwóch równych odległości przez obiekty poruszające się z tą samą prędkością jest ten sam". Teza ta w jawny sposób przeczy temu, że jedno i to samo ciało porusza się względem ciał spoczywających z inną prędkością aniżeli względem ciał poruszających się. Gdyby nie szokujący wniosek, tekst opisujący paradoks stadionu przypominałby prosty, szkolny przykład wzięty żywcem z lekcji fizyki, w którym stadion wraz z trzema obiektami są zastąpione rosnącym przy kolejowych torach drzewem, jadącym pociągiem i pasażerem idącym w środku pociągu albo w kierunku jazdy, albo w kierunku przeciwnym.

Trudno sobie wyobrazić, że skądinąd wyjątkowo błyskotliwy i inteligentny Zenon nie zdawał sobie sprawy z tego, że sam z różną prędkością mija obiekty spoczywające oraz te, będące w ruchu. Przecież nieraz musiał zauważyć, że idąc obok swojego mistrza i przyjaciela Parmenidesa porusza się względem niego z prędkością bliską zeru, zaś wobec mijanych na rynku straganów z prędkością zbliżoną do tej, właściwej dla poruszającego się Parmenidesa. Czyżby problem względności prędkości został przez Zenona postawiony błędnie po to, aby dostarczyć jeszcze jednego argumentu pokazującego niemożliwość ruchu? Czy

---

[516] Copleston, [1998], tom 1, s. 73.
[517] Arystoteles, *Fizyka*, 240a, s. 149.
[518] Arystoteles, *Fizyka*, 240a, s. 149.

podejrzenia Platona, iż Zenon sam nie wierzył w swoje „argumenty" są kompletnie bezpodstawne?[519]

4.3.3.2. PARADOKS DYCHOTOMII

Gdyby Zenon był autorem jedynie paradoksu stadionu, najprawdopodobniej, jego imię nie miałoby obecnego znaczenia. Jednak, poza tym, raczej prostym do rozwiązania paradoksem, odkrył on trzy inne, nie wspominając o paradoksie worka zboża, które stały się problemami logiki na długie wieki. Dylematy te, do chwili obecnej, wciąż są źródłem całkiem uzasadnionych wątpliwości.

Pierwszym z czterech, przytaczanych przez Arystotelesa w *Fizyce* paradoksów Zenona jest paradoks dychotomii, czyli nieskończenie krotnego podziału dwudzielnego. Argumentację prezentującą dostrzeżoną przez Zenona trudność przypomnijmy cytując fragment artykułu Ajdukiewicza *Paradoksy starożytnych* opublikowanego w 1931 roku[520].

Paradoks dychotomii – pierwsza postać

Powiada tedy Zenon: każdy się zapewne zgodzi na to, że suma nieskończenie wielu liczb, z których każda jest różna od 0, musi być liczbą nieskończenie wielką[521]. Zatem i suma nieskończenie wielu odstępów czasu, z których każdy ma trwanie większe od 0, będzie okresem czasu nieskończenie długim. Skoro Zenon uzyska zgodę na tę przesłankę, nietrudno przyjdzie mu dowieść, że żadne ciało nie może się z miejsca poruszyć. Gdyby bowiem mogło choćby o centymetr oddalić się od swego pierwotnego położenia, to musiałby wpierw upłynąć jakiś okres czasu potrzebny dla przebycia pierwszej połowy tej drogi, potem jakiś okres czasu na przebycie połowy pozostałej połowy drogi, dalej znowu jakiś okres czasu potrzebny dla przebycia połowy pozostałej ćwierci itd. w nieskończoność. Zatem na czas potrzebny do tego, aby jakieś ciało przebyło drogę 1 *cm*, złożyć by się musiał nieskończony szereg odstępów czasu, z których każdy miałby trwanie większe od 0. Czas zaś złożony z nieskończonej ilości czasów, z których każdy ma jakieś trwanie różne od 0, jest czasem nieskończenie długim. Zatem czas nieskończenie długi musiałby upłynąć, zanimby ciało przesunęło się choć o 1 centymetr od swego pierwotnego położenia. Powiedzieć zaś, że coś nastąpi po nieskończenie długim czasie, to tyle, co powiedzieć, że to nigdy nie nastąpi. Nigdy więc nie nastąpi taki moment, w którym jakieś ciało zmieni swe położenie, nigdy ruchu nie będzie.

---

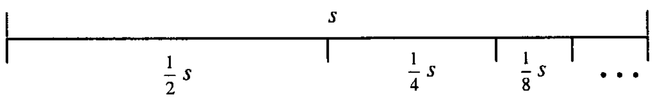
[519] Platon, *Dialogi*, tom II, *Parmenides*, 128 E, s. 256.

[520] Ajdukiewicz, [1931], s. 140.

[521] Stwierdzenie, iż nieskończona suma liczb różnych od zera jest nieskończona, jest w tym kontekście w pełni uprawnione, gdyż starożytni Grecy nie znali liczb ujemnych.

Fragment, w którym Ajdukiewicz referuje paradoks dychotomii, jest przytoczony w dłuższej wersji po to, aby wyraźnym stało się „zmatematyzowane" podejście do tego paradoksu. Podobną postawę reprezentuje Whitehead w opublikowanej dwa lata wcześniej książce *Process and Reality*[522]. To wspólne dla Whiteheada i Ajdukiewicza rozwiązanie sprowadza się do stwierdzenia, że problem dychotomii powstaje jedynie wówczas, gdy nie jest znana metoda sumowania wyrazów nieskończonego zbieżnego ciągu geometrycznego. Wystarczy bowiem przyjąć, iż nieskończona suma dodatnich wielkości zawsze musi być wielkością nieskończoną, aby argumentacja Zenona stała się paradoksalną. Ich zdaniem, rozwiązanie tego paradoksu polega więc na udowodnieniu fałszywości tej kluczowej dla całej argumentacji tezy poprzez pokazanie, iż zastosowany w paradoksie podział generuje klasę nieskończenie wielu wielkości dodatnich, których suma jest jednak wielkością skończoną.

Rozważamy więc jeszcze raz opisaną w argumentacji paradoksu sytuację. Droga o skończonej długości s jest podzielona na połowę, poczym druga z dwóch połówek jest ponownie podzielona na połowy itd.



Powstaje w ten sposób nieskończony ciąg wielkości dodatnich $\frac{1}{2}s$, $\frac{1}{4}s$, $\frac{1}{8}s$, $\frac{1}{16}s$,..., które tworzą ciąg geometryczny. Pierwszym elementem tego ciągu jest $a_1 = 0{,}5 \cdot s$, zaś ilorazem $q = 0{,}5$. Ponieważ iloraz tego ciągu spełnia warunek $|q| < 1$, ciąg ten jest zbieżny, zaś suma nieskończona wszystkich jego wyrazów dana jest wzorem $\Sigma = a_1/(1-q)$, co w naszym przypadku oznacza, że $\Sigma = s$:

$$\Sigma = \frac{1}{2}\,s + \frac{1}{4}s + \frac{1}{8}s + \frac{1}{16}s + \ldots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right) \cdot s =$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots\right) \cdot s = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \cdot s = 1 \cdot s = s < \infty.$$

Nie jest zatem możliwe, wykorzystując argumentację paradoksu dychotomii, dowieść, że jakakolwiek skończona odległość jest równa nieskończoności. W szczególności, nie jest możliwe, aby wspomnianą argumentację zastosować w celu udowodnienia niemożliwości ruchu.

---

[522] Whitehead, [1929], s. 95.

Ajdukiewicz w swym artykule *Zmiana i sprzeczność* wskazuje na to, iż rozwiązanie tego paradoksu, chociaż nie oparte na teorii nieskończonych ciągów geometrycznych podał już sam Arystoteles[523]. Istotnie, w swym dość długim wywodzie, Arystoteles odróżnił „nieskończoność ze względu na podział" od „nieskończoności ze względu na krańce", co umożliwiło mu przyjęcie, iż pewne wielkości mogą być nieskończone ze względu na podział mimo, iż są skończone ze względu na krańce. Warunkiem zajścia takiego przypadku jest ciągłość dzielonej wielkości. Ponieważ, zarówno czas jak i przestrzeń są zdaniem Arystotelesa ciągłe, może być tak, i tak właśnie jest w przypadku dychotomii, że skończone wielkości wyrażające czas lub długość są podzielne w nieskończoność, czyli mogą składać się z nieskończonej ilości niezerowych części[524]. Przy takim podejściu, wydaje się, że rozwiązaniem może być już sam powyższy rysunek, ilustrujący analizowany tu problem. Rysunek ten przedstawia przecież odcinek o skończonej długości, który dzielimy na nieskończenie wiele odcinków z konieczności o skończonych długościach. Suma długości tych odcinków, mimo, iż powstaje w wyniku dodania do siebie nieskończonej ilości dodatnich wartości, jest skończona ze względu na wartość, bo dzieleniu podlegała przecież właśnie skończona wartość. Jeśli więc złożymy w całość wszystkie otrzymane w wyniku nieskończenie wielokrotnego podziału odcinki, to mimo, iż są one niezerowe a ich ilość jest nieskończona, nie zbudujemy niczego większego jak wyjściowy odcinek o skończonej długości równej *s*.

To proste rozwiązanie musi jednak budzić pewne istotne wątpliwości. Problem, na który wskazał Zenon dotyczy ruchu. Jest więc problemem świata realnego, nie zaś matematyki, w której ruch nie istnieje. Rozwiązanie Whiteheada i Ajdukiewicza byłoby poprawne, gdyby Zenon twierdził, że nie jest możliwe, aby skończona linia geometryczna składała się z nieskończonej ilości skończonych linii. Tymczasem, Zenonowi najwyraźniej chodziło nie o geometryczną linię, lecz o ruch. Poddał w wątpliwość możliwość zajścia nieskończonej ilości zdarzeń w skończonym czasie. Paradoksem dychotomii Zenona nie jest więc wyżej przedstawione rozumowanie, lecz raczej następująca argumentacja:

Paradoks dychotomii – druga postać

Aby pokonać drogę o skończonej długości *s* musimy najpierw pokonać jej połowę, następnie połowę pozostałej połowy, następnie połowę kolejnej pozostałej połowy, itd. w nieskończoność. Przebycie drogi o długości *s* jest więc tożsame z przebyciem nieskończonej liczby dróg, których długości są niezerowe i tworzą ciąg: $(1/2)s$, $(1/4)s$, $(1/8)s$, $(1/16)s$, ... Oznacza to, że pokonanie dowolnie krótkiego odcinka drogi jest więc wykonaniem nieskończonej liczby działań w skończonym czasie. To zaś jest niemożliwe.

523 Ajdukiewicz, [1931], s. 93.

524 Arystoteles, *Fizyka*, 232b–234a, s. 133–136.

Przy takim rozumieniu paradoksu dychotomii widać, jak bardzo matematyczne rozwiązanie Whiteheada i Ajdukiewicza mija się z problemem Zenona. Można przecież w precyzyjny, bo matematyczny, sposób określić podział dowolnego odcinka na nieskończoną liczbę odcinków o niezerowej długości – taki podział, jako że jest konstrukcją matematyczną, jest już w pełni dokonany, gdyż jest pozaczasowy. Niepodobna jednak, w skończonym czasie wykonać działania polegającego na pokrojeniu nitki makaronu o skończonej długości na nieskończoną ilość odcinków[525].

W interesującej, dwuczęściowej publikacji poświęconej paradoksom Zenona z Elei[526], przedstawiającej te dylematy w szerszym, filozoficzno-matematycznym, kontekście, Tomasz Placek dostrzega ten problem i zwraca uwagę na to, iż paradoksy Zenona przeciw ruchowi dotyczą kwestii istnienia tzw. *maszyny nieskończonościowej*, czyli takiej maszyny, która w skończonym czasie może wykonać nieskończenie wiele operacji[527]. Cytowany przez Placka, matematyk intuicjonista, Hermann Weyl tak oto przedstawia ten problem[528]: „Jeśli jednak odcinek o długości 1 rzeczywiście składa się z nieskończenie wielu mniejszych, będących oddzielnymi całościami pododcinków o długościach 1/2, 1/4, 1/8, ..., wówczas to, że Achilles mógłby je wszystkie przebiec, jest niezgodne z naturą nieskończoności jako czegoś, co nie da się ukończyć. Jeśli przyjąć taką możliwość, to nie ma powodu, aby jakaś maszyna nie była w stanie ukończyć procesu podjęcia nieskończenie wielu różnych aktów decyzji w skończonym czasie, dając na przykład pierwszy wynik po 1/2 minuty, drugi po następnej 1/4 minuty, trzeci po kolejnej 1/8 minuty itd. W ten sposób byłoby możliwe, o ile zdolności mózgu byłyby podobne do działania takiej maszyny, przeglądać wszystkie liczby naturalne, uzyskując pewną decyzję typu 'albo tak, albo nie' w sprawie dowolnego pytania o istnienie, dotyczącego liczb naturalnych". Mimo więc, coraz to krótszych odcinków jakie ma do pokonania poruszający się obiekt, ruch, rozumiany jako proces mający umożliwiać pokonanie wszystkich tych odcinków, jest nieskończony, gdyż po każdym jego stadium następuje kolejne. Może się więc wydawać, że ruch jest maszyną nieskończonościową. Naturalne podejrzenie, iż ruch nie jest jedyną taką maszyną okazuje się jednak błędne. Placek przypomina o trwających blisko pięćdziesiąt lat poszukiwaniach innych, poza ruchem, maszyn nieskończonościowych. I tak, dla przykładu, wymyślono dzwonek brzęczący nieskończenie wiele razy w ciągu minuty,

---

[525] Naturalnie, dochodzi tu dodatkowa trudność: nie każdy kawałek makaronu da się przekroić danym nożem, na mniejsze kawałki. My jednak pomijamy ten problem, gdyż już samo wykonanie nieskończonej ilości jakiejkolwiek czynności w skończonym czasie musi wydawać się działaniem niemożliwym.

[526] Placek, [1989], [1997].

[527] Placek, [1997], s. 67.

[528] Placek cytuje własne tłumaczenie fragmentu, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, H. Weyl, Atheneum, New York, 1963, s. 42; Placek, [1997], s. 67.

migotającą w podobny sposób żarówkę, maszynę drukującą w skończonym czasie pełne, czyli nieskończone rozwinięcie dziesiętne liczby π i wiele innych podobnych automatów[529]. Problem w tym, że maszyn tych nie da się zbudować, gdyż ich działanie wymaga innych niż znane obecnie praw fizycznych lub aktualnie nieskończonych wielkości fizycznych[530]. Konstrukcja tych maszyn może też przeczyć prawom logiki[531]. Można więc przypuszczać, że ruch jest jedyną realnie istniejącą maszyną, która może uchodzić za nieskończonościową[532].

Podobną analizę można powtórzyć koncentrując swoją uwagę nie na ruchu, lecz na czasie. Wówczas, dochodzimy do wniosku, że to płynący czas powinien być maszyną nieskończonościową. Wydaje się jednak, iż postrzeganiu zarówno ruchu, jak i czasu jako maszyn nieskończonościowych przeczy współczesna fizyka. Fizyka kwantowa wyraźnie sugeruje niemożność nieskończonej podzielności czasu i ruchu[533].

Placek wskazuje, na dwa możliwe stanowiska: albo ruch jest maszyną nieskończonościową, albo w przyrodzie nie ma maszyn nieskończonościowych. Odrzucając drugie z tych stanowisk, Placek kojarzy pierwsze z nich z dwiema postawami. Jedna zakłada konieczność rewizji matematyki, druga zaś proponuje weryfikację zastosowań matematyki w fizyce[534]. Placek przypomina, że

---

[529] Placek, [1997], s. 68; także, Grünbaum, [1967], s. 78.

[530] Placek, [1997], s. 68.

[531] Interesujący problem rozważa Priest, [1999], s. 1–2. Nazywa go *paradoksem Bernadete*, od nazwiska, twórcy tej konstrukcji, José Bernadete, [1964], s. 259. W rzeczywistości, paradoks ten jest przykładem konstrukcji maszyny nieskończonościowej, która zawiesza prawa logiki. Załóżmy, że osoba *A* porusza się ruchem ciągłym po linii prostej od $-\infty$, przez 0, do $+\infty$. Jednak, każdy jej ruch poza punkt 0 powoduje pojawienie się w dwukrotnym oddaleniu od punktu 0, niemożliwej do przebycia dla *A*, przeszkody. Tak więc, jeśli *A* dotarł do punktu *x*, to w punkcie 2*x* powstała przeszkoda. Priest proponuje następującą formalizację tej konstrukcji: (1) $(Rx \wedge y < x) \rightarrow Ry$, (2) $(By \wedge y < x) \rightarrow \neg Rx$, (3) $\neg\exists x(x < y \wedge Bx) \rightarrow Ry$, (4) $x \leq 0 \rightarrow \neg Bx$, (5) $x > 0 \rightarrow (Bx \leftrightarrow Rx/2)$; gdzie *Rx* i *Bx* oznaczają odpowiednio: 'osoba *A* dotarła do punktu *x*' oraz 'w punkcie *x* powstała przeszkoda'. Zauważa też niesprzeczność zbioru przesłanek {1,2,3}. Prawdę mówiąc, niesprzeczny jest również zbiór {1,2,3,4}. Jednak już ze zbioru {1,2,3,4,5} wynika sprzeczność: osoba *A* nie może przekroczyć punktu 0 o żadną niezerową wielkość *a* (oczywiście, punkt *a* jest tu utożsamiony z jego odległością od 0, która wynosi *a*), bo gdyby to uczyniła, to znacznie wcześniej musiałaby pokonać np. odległość *a*/4; lecz to oznaczałoby, że w punkcie *a*/2 powstałaby zapora, której *A* nie mogłaby przecież pokonać; zatem, *A* nie mogłaby dotrzeć do punktu *a*. Zatem, osoba *A* nie może przekroczyć punktu 0, co oznacza, że żadna zapora nie powstanie – sprzeczność. Naturalnie, maszynę nieskończonościową definiuje przesłanka (5). Widać wyraźnie, że paradoks Bernadete jest inspirowany paradoksem dychotomii Zenona z Elei. Jest w nim podjęta próba zdefiniowania maszyny nieskończonościowej na wzór ruchu. Oba paradoksy dzieli jednak poważna różnica. O ile bowiem maszyna Bernadete jest sprzeczna, o tyle ruch nie.

[532] Taki pogląd reprezentuje Placek, [1997], s. 68.

[533] Ferris, [1997], s. 305.

[534] Placek, [1997], s. 68.

zwolennikami przebudowy klasycznie pojmowanego kontinuum, a więc przebudowy tego kontinuum, które jest utożsamiane ze zbiorem liczb rzeczywistych, byli tak wybitni matematycy jak Hermann Weyl (1885–1955), Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966), i Arend Heyting (1898–1980). Placek wybiera jednak zmianę sposobu matematycznego opisywania ruchu. Mówiąc ściślej, chodzi mu o odrzucenie założenia, iż klasycznie pojmowanemu kontinuum liczb rzeczywistych odpowiada jakieś realnie istniejące kontinuum fizyczne[535]: „Można [...] argumentować, że [...] pomyłka leży w zastosowaniu matematyki do opisu ruchu, a nie w matematyce. Zakładaliśmy bowiem, powyżej, że w takim opisie istnieje wzajemna jednoznaczność między terminami matematycznymi (liczba rzeczywista) a terminami fizycznymi (punkt przestrzeni fizycznej) desygnującymi przedmioty fizyczne. Taka jednoznaczność nie ma miejsca, a przynajmniej jest wątpliwa, na gruncie bardziej zaawansowanych teorii. [...] Idąc więc tym tropem, można by argumentować, że adekwatny opis nie zakłada wzajemnej jednoznaczności terminów matematycznych i terminów denotujących obiekty czy stany fizyczne. Zwolennik takiego podejścia odpowiedziałby, że ruch odbywa się po prostej, którą parametryzujemy jako kontinuum liczbowe, nie pytaj jednak, co w przestrzeni fizycznej odpowiada danej liczbie rzeczywistej".

Okazuje się jednak, że przytoczony i analizowany wyżej paradoks dychotomii w drugiej postaci nie musi być oryginalnym, czyli zgodnym z intencjami Zenona, dylematem. Placek zwraca uwagę na to, że wyżej przedstawiona postać paradoksu dychotomii nie jest jedyną możliwą[536]. Tradycyjnie, paradoks ten uważa się za argument pokazujący, iż ruch jest niemożliwy, gdyż nie jest możliwe pokonanie drogi o dowolnej długości, a to dlatego, że droga ta musiałaby być nieskończoną sumą dróg o niezerowych długościach, co daje, bądź nieskończoną długość (w postaci pierwszej), bądź procedurę złożoną z nieskończonej ilości działań (w postaci drugiej). Wydaje się, że sam Arystoteles sugeruje takie właśnie rozumienie tego dylematu, zwłaszcza gdy weźmiemy pod uwagę proponowane przez niego rozwiązanie tego paradoksu, jak również sposób przedstawienia innego paradoksu, zwanego Achillesem i żółwiem[537]. Jednak Placek słusznie wskazuje na inny fragment *Fizyki*, w którym czytamy[538]: „Istnieją cztery argumenty Zenona dotyczące ruchu, a będące źródłem udręki dla tych, którzy je pragną rozgryźć. Pierwszy stwierdza, że ruch nie istnieje wskutek tego, że to, co się znajduje w ruchu, musi wpierw przebyć połowę drogi, zanim osiągnie cel". Uważa więc, że możliwe jest takie rozumienie argumentacji Zenona, które w sposób bardziej konsekwentny pokazywałoby niemożliwość ruchu. Istotnie, w wyżej przedsta-

---

[535] Placek, [1997], s. 70.
[536] Placek, [1989], [1997].
[537] Arystoteles, *Fizyka*, 233a–233b, s. 135–136; 239b, s. 148–149; 263a–263b, s. 194–195.
[538] Arystoteles, *Fizyka*, 239b, s. 148.

wionej wersji Ajdukiewicza, dochodzimy do wniosku, że ruch jest niemożliwy dopiero po symulacji tego ruchu, czyli po założeniu, że poruszająca się osoba musiałaby najpierw pokonać połowę drogi, potem połowę połowy, itd. W tym też sensie jest to argumentacja niezbyt konsekwentna, chociaż z logicznego punktu widzenia, jej struktura mająca postać dowodu nie wprost jest jak najbardziej poprawna – chcąc udowodnić nieistnienie ruchu, zakładamy, że istnieje i dochodzimy do sprzeczności. Innego zdania jest Placek, który wersję podaną przez Ajdukiewicza uważa za paradoks bezruchu[539]: „Nic nie może być w bezruchu – bo co rozpoczęło się poruszać, nie może się zatrzymać. Bowiem zanim osiągnie swój cel, musi przebyć połowę drogi, potem połowę tej, co pozostała..." Chcąc więc udowodnić niemożliwość ruchu, jest całkiem prawdopodobne, że Zenon przedstawiał inną argumentację.

Paradoks dychotomii – trzecia postać

Załóżmy, że możemy przebyć drogę o skończonej długości s. Zanim dotarlibyśmy do końca tej drogi, musielibyśmy najpierw przebyć połowę drogi s. Zanim jednak przebylibyśmy połowę drogi s, najpierw musielibyśmy przebyć połowę tej połowy, czyli jedną czwartą drogi s. Zanim jednak przebylibyśmy jedną czwartą drogi s, najpierw musielibyśmy przebyć połowę tej drogi, czyli jedną ósmą drogi s. Itd. Ponieważ, podział drogi o długości s możemy prowadzić w nieskończoność, zatem nigdy nie wyruszymy z punktu będącego początkiem drogi o długości s.

W zaproponowanej przez Placka interpretacji dychotomii Zenona, podział w nieskończoność jest przeprowadzany do początku odcinka będącego drogą, a nie, jak to jest u Whiteheada i Ajdukiewicza, do końca drogi. Zmienia to zupełnie sens paradoksu, co sprawia, że problem na który wskazuje ten dylemat również jest inny. Nie mamy tu już do czynienia z brakiem umiejętności dodawania sum nieskończonych ciągów geometrycznych, czy też istnieniem jakiejś maszyny nieskończonościowej. Tym razem, mamy do czynienia z problem ciągłości materii. Placek uważa, że problemem, na który wskazuje Zenon w dychotomii, jest brak pierwszego elementu wspomnianego nieskończonego podziału drogi prowadzonego w kierunku początku drogi: $\ldots, \frac{1}{16}s, \frac{1}{8}s, \frac{1}{4}s, \frac{1}{2}s, s$. Wyruszenie z punktu początkowego byłoby możliwe dopiero wówczas, gdyby podział na kolejne połowy coraz to mniejszych dróg musiał się skończyć na pewnej wartości, która byłaby przez to, nie tylko wartością pierwszą w ciągu, lecz przede wszystkim wartością niepodzielną. Tak jednak nie jest, gdyż materia jest ciągła, a przez to podzielna w nieskończoność. Zdaniem Zenona, coś co nie ma rozmiaru, nie istnieje. Nie można więc odtworzyć kontinuum przez składanie dowolnej liczby takich elementów. Z drugiej strony, kontinuum nie może się

[539] Placek, [1989], s. 64.

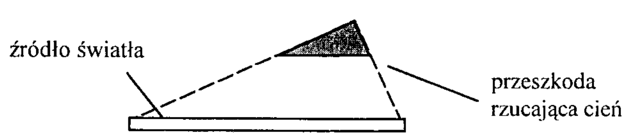
składać z obiektów rozciągłych, gdyż one dają się dzielić na mniejsze obiekty, same więc nie są elementami lecz kolekcjami elementów. Oznacza to, że kontinuum nie jest zbiorem elementów pierwszych[540].

Paradoks dychotomii, bez względu na to, w której postaci sformułowany, może mieć jeszcze inne, wspólne, dla obu postaci, rozwiązanie. Polega ono na założeniu, że kontinuum składa się z niepodzielnych części, tradycyjnie zwanych atomami. Wówczas, skończona ilość atomów materii wymuszałaby skokowy charakter ruchu. Oczywiście, ta skończona ilość pewnych niezerowych porcji ruchu do jakiej sprowadzałoby się pokonywanie drogi o skończonej długości w skończonym czasie, gwarantowałoby możliwość ruchu. Jeśli bowiem ruch nie daje się dzielić w nieskończoność, czyli nie może dokonywać się w dowolnie małych porcjach, gdyż istnieją swoiste „atomy ruchu", wówczas ruch przestaje być maszyną nieskończonościową. Oznacza to, że poruszające się ciało może pokonać skończoną odległość w skończonym czasie, ponieważ wyabstrahowane odcinki drogi tworzące ciąg nieskończony nie odzwierciedlają natury ruchu. Podobnie, możliwe staje się ruszenie ciała z miejsca, gdyż ruch tego ciała rozpoczyna się od pewnej, odpowiednio dużej, choć bardzo małej, niezerowej sekwencji. Sekwencja ta, chociaż bardzo mała, nie może być przecież dowolnie mała.

Świadomość takiego właśnie rozwiązania paradoksu dychotomii przyczyniła się do spojrzenia na ten dylemat jak na argument uzasadniający pogląd, iż materia składa się z niepodzielnych atomów. Starożytność jak i wieki średnie były czasem sporu na temat istnienia niepodzielnych atomów materii. Jak wiemy, atomistycznej wizji rzeczywistości przeciwstawiał się Arystoteles w księdze szóstej *Fizyki*, zatytułowanej *Klasyfikacja ruchów*, z której pochodzi przytoczona już wcześniej argumentacja[541]. Dylematem podobnym do omawianej tu dychotomii jest argumentacja zafascynowanego matematyką, a zwłaszcza jej technikami i możliwościami, średniowiecznego filozofa Ryszarda Kilvingtona (1302–1361)[542]:

Paradoks Kilvingtona

Rozważmy sytuację, w której za jakąś nieprzezroczystą przeszkodą powstaje stożek cienia, gdyż źródło światła padającego na tę przeszkodę jest od niej szersze.



[540] Placek, [1989], s. 65.
[541] Patrz Arystoteles, *Fizyka*, 231a–235b, s. 131–139.
[542] Podkoński, [manuskrypt].

Naturalnie, im krótsza jest przeszkoda, tym mniejszy jest stożek cienia. Czy stożek cienia może jednak zniknąć zupełnie, gdy długość przeszkody zmniejszy się do zera, skoro między jakąś, dowolnie małą wielkością stożka cienia, a jego zupełnym zanikiem zawsze jest jakiś stożek mniejszy. A przecież stożek cienia znika. Skoro więc znika, muszą istnieć niepodzielne części świata, które sprawiają, że proces zmniejszania się cienia zachodzi skokowo. Ciągłe zmniejszanie się cienia byłoby procesem nieskończonym, nigdy więc, nie mogłoby doprowadzić do zupełnego zniknięcia cienia.

Jak widać, Kilvington rozważał problem, do złudzenia przypominający paradoks dychotomii w postaci drugiej i trzeciej. Wykorzystał go do uzasadnienia swojej wiary w istnienie niepodzielnych części rzeczywistości. Gdyby bowiem, odrzucić możliwość zniknięcia cienia, źródło światła wraz ze zmniejszającą się przeszkodą tworzyłyby układ będący maszyną nieskończonościową. Tym samym, paradoks Zenona w swej nowej postaci, ponownie stał się argumentem za atomistyczną wizją świata.

Podobnie proste, a może nawet prostsze od dychotomii i paradoksu Kilvingtona były argumenty przeczące istnieniu atomów, poprzez pokazanie, iż podział materii może być dokonywany w nieskończoność. Swój pogląd Arystoteles wyraża w *Fizyce* w następujący sposób[543]: „Nie może być również mowy o kolejności dwóch punktów czy dwóch chwil w takim znaczeniu, że z punktów mogłaby powstać długość, a z chwil czas, bo rzeczy znajdują się w kolejności wówczas, gdy nic tego samego rodzaju nie znajduje się między nimi, a przecież między punktami zawsze się znajduje jakaś linia, a między momentami zawsze jakiś okres czasu. A znowu, gdyby długość i czas mogły się składać z części niepodzielnych, to mogłyby się też dzielić na części niepodzielne, ponieważ z czego się coś składa, na to się też i dzieli. Ale, jak widzieliśmy, żadne kontinuum nie dzieli się na rzeczy bez części".

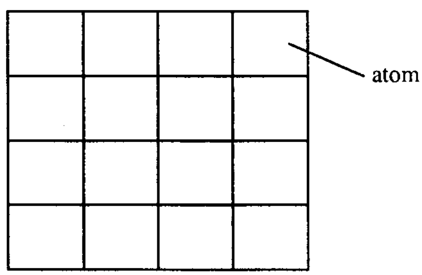
Ta argumentacja Arystotelesa znalazła swoją geometryczną ilustrację w dowodach Roberta Grosseteste (1175–1253), Henry'ego Harcleya, Thomasa Bradwardine'a, Rogera Bacona (ok. 1214–1294), Jana Dunsa Szkota (1265–1308), Williama Ockhama (1285–1349). Ich dowody godzą w sensowność atomistycznego postrzegania świata. Te matematyczne konstrukcje wykazują bardzo daleko idące podobieństwa, które mogą świadczyć o wzajemnym inspirowaniu się ich autorów. Dlatego też, na szczególną uwagę zasługują dowody przedstawione przez arabskiego filozofa pochodzenia perskiego Al-Ghazaliego (1059–1111), a to z tego powodu, iż można przypuszczać, że wśród znanych w literaturze średniowiecznej, należą one do jednych z wcześniejszych, chociaż oczywiście, w niektórych przypadkach można wskazać na ich antyczne źródła.

---

[543] Arystoteles, Fizyka, VI.6, 231b, s. 132.

W tej części swej *Summy*, która nazywana jest dzisiaj *Metafizyką Al-Ghazaliego*, a ściślej, w jej rozdziale zatytułowanym *De diversitate senciendi de composicione corporis*, Al-Ghazali prezentuje sześć argumentów przeciwstawiających się poglądowi, zgodnie z którym, każde ciało zbudowane jest z pewnej ilości niepodzielnych części, zwanych atomami. Pierwsze trzy argumenty przypominają, przytoczony w paragrafie 1.4.1 dowód Arystotelesa znany z szóstej księgi *Fizyki*. Analizując strukturę kontinuum, Arystoteles tłumaczy, iż zarówno ciągła linia geometryczna nie może się składać z niepodzielnych części, jak również czas i ruch nie mogą mieć struktury niepodzielnej[544]. Robert Podkoński referuje kolejne argumenty z *Metafizyki* Al-Ghazaliego[545]:

Autorem pierwotnej postaci czwartego argumentu jest Juwaynī, nauczyciel Al-Ghazaliego. Konstrukcja złożona z szesnastu kwadratów, z których każdy jest właśnie niepodzielną cząstką, czyli atomem, jest prototypem tych średniowiecznych argumentów, które najbardziej przypominają dowód równoliczności dwóch odcinków, rozumianych jako nieskończone zbiory punktów:



Jeśli prawdą jest, że istnieją atomy, to znaczy, że długość boku tej konstrukcji wynosi cztery długości atomu, przekątna zaś również powinna być równa czterem długościom atomów. Tymczasem, tak nie jest. Długość przekątnej jest bowiem większa nawet od pięciu długości atomu[546].

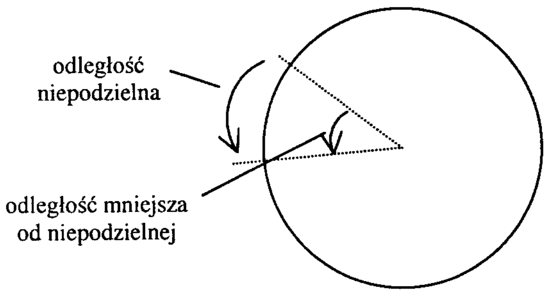
Piąty argument wykorzystuje cień pręta wbitego w ziemię. Ruch Słońca po nieboskłonie powoduje ruch cienia, rzucanego przez pręt. Jeśli istnieją atomy, to ruch Słońca składa się z maleńkich przesunięć o długość atomu. Załóżmy więc, że Słońce poruszyło się o długość atomu. Wówczas, cień poruszył się o długość znacznie krótszą niż długość atomu, co na gruncie atomizmu jest niemożliwe.

[544] Arystoteles, Fizyka, VI.1–4, 231b–235b, , s. 131–139. Ponieważ te argumenty Arystotelesa nie mają postaci rozumowań tworzących konkretne paradoksy, lecz są całymi wykładami na rzecz antyatomizmu, nie są tu omówione.

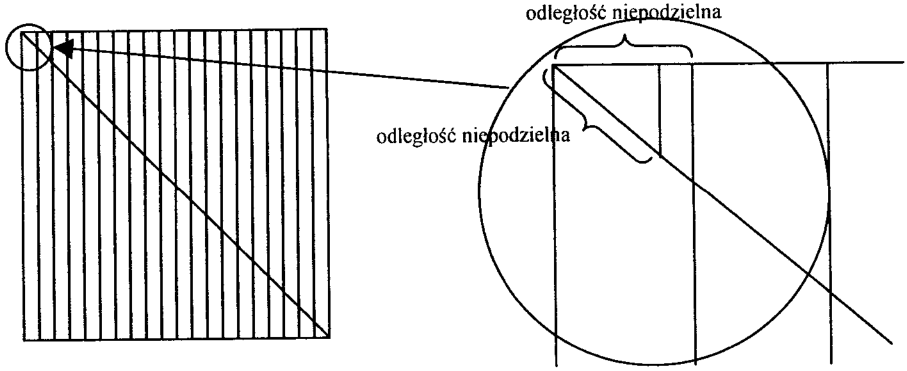
[545] Podkoński, [2004].

[546] Jak widać, w argumencie tym zakłada się, iż atomy tworzące materię są „upakowane" ciasno, bez jakichkolwiek wolnych przestrzeni, a ponadto są kwadratami, względnie sześcianami.

Szósty argument przypomina ten, który wykorzystał Sextus Empiryk w swoim dziele *Przeciw matematykom.* Jeśli punkt leżący na brzegu obracającego się koła wykona ruch o długość jednego atomu, to o jaką długość wykona ruch punkt leżący wewnątrz koła? Naturalnie o długość mniejszą od atomowej, lecz właśnie takiej, zgodnie z koncepcją atomizu, ma przecież nie być.



Geometryczną inspirację ujawniają również argumenty Jana Dunsa Szkota. Nie ma w tym fakcie niczego zadziwiającego. Przecież Szkot cieszył się opinią znawcy geometrii, w szczególności zaś sławnego dzieła Euklidesa, *Elementów.* Podkoński przytacza dwa argumenty Szkota. W pierwszym wykorzystane są dwa współśrodkowe okręgi. Prowadząc promień większego z nich zaznaczamy dwa punkty, po jednym na każdym z okręgów. Gdy punkt na większym okręgu pokona odległość niepodzielną, wówczas punkt na mniejszym okręgu musi pokonać odległość mniejszą od niepodzielnej, co powinno być przecież niemożliwe. W innej swojej argumentacji, przypominającej czwarty argument Al-Ghazaliego, Szkot wykorzystuje podział kwadratu równoległymi liniami oddalonymi od siebie o odległość atomu. Następnie prowadzi przekątną kwadratu i poczynając od wierzchołka odkłada na niej odległość atomu. Prowadząc kolejną linię równoległą do uprzednio narysowanych, otrzymuje na boku kwadratu odległość mniejszą od niepodzielnej, co przecież z założenia ma być niemożliwe.



Ten ostatni argument, chociaż w uproszczonej postaci, powtórzyli Roger Bacon w swoim *Opus Maius* oraz William Ockham w *Quodlibet I, Utrum linea componatur ex punctis*. Natomiast Thomas Bradwardine w *Tractatus de continuo* oraz Ockham w przytoczonym już dziele przypomnieli pierwszy z dwóch, wspomnianych wyżej, argumentów Szkota. Ponadto, Bradwardine przedstawił dodatkowy argument dzieląc równoległymi, oddalonymi od siebie o niepodzielną odległość, liniami nie kwadrat, lecz koło[547].

Argumenty przeciwko atomizmowi wykorzystują ten sam motyw: przyjmuje się istnienie pewnej wielkości, jako atomowej i w taki czy inny sposób dokonuje się jej podziału, co ma dowodzić niesłuszności przyjętego założenia[548].

Jak widać, zarówno idea podzielności materii w nieskończoność, jak również idea zakładająca istnienie niepodzielnych wielkości, napotykają na argumentacje wskazujące paradoksalność każdej z nich. W zasadę podzielności w nieskończoność wymierzony jest paradoks Zenona nieskończonego podziału dwudzielnego a także paradoks Kilvingtona. Przeciw zasadzie atomizu argumentów dostarczają, m. in., wyżej przypomniane średniowieczne argumentacje, niektóre o starożytnych korzeniach. Nie znaczy to jednak wcale, że istnieje pewna równowaga argumentów na rzecz atomizmu i przeciwko istnieniu niepodzielnych cząstek materii. Koniecznym jest bowiem dostrzec, iż o ile argumenty za istnieniem atomów zawsze mają charakter fizykalny, o tyle kontrargumenty dowodzące nieistnienia atomów tworzą dwie klasy. Pierwszą stanowią rozumowania mające charakter czysto matematyczny, a dokładniej geometryczny, drugą zaś, rozumowania odwołujące się do konkretnych układów świata materialnego.

W rozumowaniu, zarówno paradoksu Zenona, jak i paradoksu Kilvingtona kluczową rolę odgrywają elementy świata materialnego. W jednym przypadku, elementem tym jest poruszające się ciało, w drugim, zmniejszająca się przeszkoda, rzucająca coraz to mniejszy cień. Oba rozumowania opierają się na założeniu, że w świecie realnym nie mogą istnieć maszyny nieskończonościowe. Skuteczne przeprowadzanie nieskończonych podziałów materii dowodziłoby bowiem tego, iż dany układ materii jest taką właśnie maszyną – istnienie takich maszyn jest jednak wykluczone. Widać więc, że geometryczne argumenty przeciwników atomizmu w ogóle nie godzą w rozumowania tego typu. Przeprowadzanie geometrycznej argumentacji na rzecz atomizmu odwołuje się do podzielności przestrzeni geometrycznej, nie zaś podzielności materii.

---

547 Podkoński, [2004].

548 Tego motywu nie widać w przypadku paradoksu stadionu. W tym dylemacie Zenon próbuje pokazać, że jeśli ruch jest możliwy, to jest taki sam względem każdego obiektu, bez względu na to, czy obiekt ten się porusza, czy nie. Ma to świadczyć o niemożności ruchu. Jeśli więc przyjąć interpretację Placka, to należałoby uznać, że paradoks stadionu nie jest argumentem przeciwko ruchowi, lecz przeciwko atomizmowi. Placek, [1997], s. 74–77.

Wygląda więc na to, że dialog przeciwników atomizmu, posługujących się argumentacją geometryczną, z atomistami jest kompletnie chybiony – każda ze stron mówi swoje, bez jakiegokolwiek związku z argumentacją strony przeciwnej[549]. Sytuacja ta przypomina „rozmowę" dwóch osób, z których każda mówi w języku niezrozumiałym dla drugiej. Argumenty matematyczne, z natury swej nie mogą przecież dotyczyć układów będących maszynami nieskończonościowymi, gdyż w matematyce wszystko jest już dokonane. Widać to wyraźnie w innym rozumowaniu Kilvingtona, w którym analizuje on możliwość zbudowania takiej maszyny[550]. Proponuje on rozważyć stożek o pewnej skończonej wysokości h oraz jego przecięcie na dwie części płaszczyzną równoległą do podstawy stożka przechodzącą przez połowę jego wysokości. Jasnym jest, że tak otrzymany mniejszy stożek ma wysokość $h/2$. Przetnijmy go płaszczyzną równoległą do podstawy stożka przechodzącą przez połowę jego wysokości. Wysokość kolejnego stożka to $h/4$. Kilvington zastanawia się nad możliwością kontynuowania w nieskończoność cięć powstających sukcesywnie stożków. Dochodzi do wniosku, że z przyczyn technicznych cięcia te staną się w pewnym momencie niemożliwe do przeprowadzenia. Mimo to zauważa, że teoretycznie, tych nieskończenie wiele cięć powinno dać się przeprowadzić w skończonym czasie, gdyż przeprowadzenie każdego następnego cięcia zajmuje coraz mniej czasu. Najwyraźniej, ten rozważany przez Kilvingtona układ jest typowym przykładem maszyny nieskończonościowej. Jeśli jednak zrezygnujemy z czysto fizycznego elementu, jakim jest czas trwania każdego cięcia, to powstały w ten sposób układ staje się czysto matematycznym problemem. Mamy wówczas, nieskończoną klasę stożków, których wysokości tworzą ciąg $a_n = \{h/2^n\}_{n\in N}$. Klasa ta jest określona przez same warunki zadania, a zatem nie potrzebuje czasu na swoje powstanie, lecz tak jak każda matematyczna konstrukcja jest pozaczasowa, a więc dokonana i niezmienna.

Powyższy przykład stożków Kilvingtona pokazuje wyraźnie, że dialog prowadzony przy pomocy, z jednej strony argumentów matematycznych, z drugiej zaś argumentów natury fizycznej jest błędny z metodologicznego punktu widzenia. Nie może więc mieć większego znaczenia. Przejdźmy, zatem, do tej klasy argumentów skierowanych przeciwko atomizmowi, które nie mają wyłącznie geometrycznej natury, lecz odwołują się do jakichś układów świata materialnego. Przykładami tego typu argumentacji są tu czwarty, piąty i szósty argument Al-Ghazaliego, czyli rozumowania analizujące fragmenty materii złożonej odpowiednio z: kwadratowych atomów, ruchu cienia jaki rzuca wbity w ziemię pręt oraz obracających się dwóch współśrodkowych, sztywno ze sobą połączonych kół.

---

[549] Podobnie, jak chybiony jest wspomniany wcześniej „dialog" Whiteheada i Ajdukiewicza z Zenonem.

[550] Podkoński, [manuskrypt]. Oczywiście, Kilvington nie operuje nazwą „maszyna nieskończonościowa".

Niestety, fizyczne argumenty przeciwko atomizmowi nie są trafne, gdyż są niezgodne z odkryciami fizyki. O ile bowiem, teorie fizyki mogą nie być uwzględniane w rozważaniach filozoficznych i matematycznych, o tyle wszelkie rozumowania odwołujące się w pewien konkretny sposób do natury materii winny brać pod uwagę ustalenia fizyki. Z perspektywy współczesnej nauki przełomu XX i XXI wieku, widać wyraźnie, że te stare antyatomistyczne argumenty posługują się obiektami materialnymi, należącymi do świata makroskopowego. Tymczasem, teorie fizyczne zakładające istnienie, przynajmniej na razie uznanych za niepodzielne, porcji energii/materii dotyczą świata cząstek elementarnych, w którym wyżej przedstawione rozumowania ruchu cienia rzucanego przez pręt, czy dwóch obracających się kół, tracą sens. Można przyjąć, że argumenty fizycznej natury dowodzą jedynie tego, co i tak nie budzi raczej wątpliwości, a mianowicie, iż w świecie makroskopowym nie mogą istnieć niepodzielne cząstki materii. Tak więc, dla przykładu, rozważane wcześniej dwa połączone ze sobą koła stanowią układ, który w świecie cząstek elementarnych traci swój „makroskopowy" sens. Mieszanie świata makroskopowego ze światem kwantów grozi możliwością wprowadzenia do teorii sprzeczności, na co wskazuje np. argumentacja znana jako paradoks kota Schrödingera[551]. Czysto matematyczne argumenty polegające na dowolnym dzieleniu wielkości atomowych są, z punktu widzenia fizyki współczesnej, raczej niepoważne. To, że założymy istnienie kwantu energii, czy też istnienie jakiejś cząstki elementarnej, wcale nie oznacza, że musimy uznać możliwość pozamatematycznego istnienia 1/32, czy 1/64 tego kwantu, czy tej cząstki. Tak więc, wbrew opinii Placka, wydaje się, że atomizm nie jest „tylko kuszącym pomysłem"[552]. Argumenty przeciw atomizmowi dowodzą bowiem jedynie tego, że materia nie składa się z niepodzielnych, „makroskopowych" części. Teza ta nie jest jednak niczym niezwykłym.

Na koniec rozważań nad dychotomią przypomnijmy sławną reakcję Diogenesa z Synopy, barwnej postaci reprezentującej, zarówno w filozofii, jak i w życiu, daleko posunięty zdrowy rozsądek. Otóż, z relacji Diogenesa Laertiosa wiemy, że ten, znienawidzony przez Platona, filozof usłyszawszy argumentację paradoksu dychotomii wstał i zaczął się przechadzać. W ten naoczny sposób miał on odrzucić trudny do zaakceptowania wniosek[553]. Przytoczona anegdota uświadamia nam, że podobna, wydawać by się mogło,

---

[551] Jednym z popularniejszych rozwiązań tego paradoksu jest to, zakładające, iż kot jest zbyt złożonym układem, aby stosować wobec niego teorię kwantową. Patrz Penrose, [1989], s. 325–328. Paradoks kota Schrödingera jako problem fizyki kwantowej nie jest tu omówiony, tak jak nie są omówione inne paradoksy fizyki, np. dość powszechnie znany paradoks Olbersa, dowodzący, iż nasz wszechświat nie może być odwiecznym i zarazem nieskończonym układem.

[552] Placek, [1997], s. 77.

[553] W podobny sposób miał Diogenes z Synopy zareagować na argumentację paradoksu rogacza. Patrz, Diogenes Laertios, Vi.2, 39, s. 330; także rozdział poświęcony paradoksom wieloznaczności.

w pełni uzasadniona reakcja może zabić w zarodku refleksję filozoficzną prowadzącą do ważnych, niebanalnych wniosków. Widać więc, że odwołanie się do zdrowego rozsądku nie zawsze zasługuje na miano poważnego argumentu.

4.3.3.3. PARADOKS ACHILLESA I ŻÓŁWIA

Następny paradoks Zenona, znany pod nazwą „Achilles i żółw" uważa się za pewną odmianę paradoksu dychotomii[554]. Tak oto Arystoteles opisuje kolejny argument Zenona[555]:

Paradoks Achillesa i żółwia
„Drugi argument, tzw. „Achilles", sprowadza się do tego, że w wyścigu najszybszy biegacz nie może nigdy prześcignąć najpowolniejszego, bo ścigający musi najpierw osiągnąć punkt, z którego ścigany już wyruszył, tak że powolniejszy ma zawsze pewne wyprzedzenie. Argument w gruncie rzeczy ten sam, co i poprzedni dotyczący dychotomii, z tą tylko różnicą, że kolejno dodawane odcinki przestrzeni nie są dzielone na połowę. Wniosek wynikający z tego rozumowania jest taki, że powolniejszy biegacz nie może być prześcignięty, i jest podobny do tego z dychotomii (w obydwu mianowicie wypadkach podział przestrzeni w pewien sposób prowadzi do wniosku, że kres nie został osiągnięty, chociaż argument „Achilles" idzie dalej w tym, iż stwierdza, że nawet najszybszy biegacz musi być pokonany w wyścigu przez najpowolniejszego), tak że i rozwiązanie musi być to samo"

Dalej, Arystoteles referuje swoje rozwiązanie, które może jednak wydawać się nie dość satysfakcjonujące[556]: „Twierdzenie, że to, co jest na przedzie, nie może być nigdy wyprzedzone, jest zgoła fałszywe. To, co jest na przedzie, nie jest wyprzedzone tak długo, jak długo jest na przedzie, ale zostanie wyprzedzone, gdy tylko się przyjmie, że droga, która ma być przebyta, jest skończona".

Podobieństwo paradoksu dychotomii do Achillesa i żółwia jest szczególnie wyraźnie widoczne, gdy zauważymy, iż propozycje rozwiązań pierwszego z nich, mogą być z powodzeniem zastosowane wobec drugiego. Dotyczy to zarówno rozwiązania matematycznego jak i refleksji nad fizyczną naturą

---

[554] Argumentacja Achillesa i żółwia jest powszechnie przypisywana Zenonowi z Elei. Również Diogenes Laertios uważa Zenona za autora tego dylematu, dodaje jednak, że według opinii Favorinusa, wyrażonej w jego *Historiach rozmaitych*, odkrywcą tego paradoksu jest Parmenides, Diogenes Laertios, *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, IX.5, 28, s. 532.

[555] Arystoteles, *Fizyka*, 239b, s. 148–149.

[556] Arystoteles, *Fizyka*, 239b, s. 149.

rzeczywistości. Jednak, istotnym warunkiem zajścia podobieństwa obu paradoksów jest założenie, iż dychotomia jest wzięta w postaci pierwszej lub drugiej. Postać trzecia paradoksu dychotomii, dzieląca niezerowy odcinek ku jego początkowi, wskazuje na problem różny od tego, będącego sednem paradoksu Achillesa i żółwia. Jest to poważny argument na rzecz tezy, iż postać trzecia dychotomii jest zgodna z intencjami samego Zenona. Trudno bowiem zakładać, że Zenon sformułował dwa, pozornie różne, argumenty na wyrażenie jednego problemu, skoro mógł przedstawić dwie istotnie różne argumentacje dotyczące dwóch różnych kwestii.

Najpierw, spróbujmy przeanalizować paradoks Achillesa i żółwia, nie odwołując się do matematyki. Problem jaki ujawnia ten dylemat polega na tym, iż wydaje się być wątpliwym to, że w skończonym czasie można pokonać drogę utworzoną przez nieskończoną ilość niezerowych odcinków. Widać więc, że paradoks Achillesa i żółwia odpowiada paradoksowi dychotomii danemu w drugiej postaci. Zatem, istotny tu problem można wyrazić następująco: Jak to jest możliwe, że Achilles w ogóle dogoni żółwia (na razie, nie myślimy nawet o tym, że Achilles może przegonić żółwia) skoro, zawsze odległość między żółwiem i Achillesem jest niezerowa? Przecież precyzyjne rozumowanie prowadzi niewątpliwie do takiego właśnie wniosku. Powtarzając w nieskończoność tę samą sekwencję zawsze mamy jakiś niezerowy dystans dzielący położenie Achillesa od położenia żółwia. Naturalnie, użycie słowa „zawsze" ma wyrażać fakt, iż niezerowe odległości dzielące obu uczestników biegu tworzą ciąg nieskończony.

Można zaryzykować stwierdzenie, że paradoks Achillesa i żółwia, dobitniej niż omówiona wcześniej dychotomia w postaci drugiej, wskazuje na konsekwencje odrzucenia istnienia niepodzielnych porcji materii. Nie jest trudno zauważyć, iż przyjęcie atomistycznej struktury rzeczywistości oznacza, iż za którymś, oczywiście skończonym razem, Achilles dogoni żółwia. Przy tym założeniu, musi przecież istnieć najmniejszy wyraz ciągu, który jednak nie jest mniejszy od wielkości niepodzielnej. Oczywiście, jest to najmniejsza z tych odległości jakie mogą dzielić obu uczestników wyścigu. Dzięki istnieniu niepodzielnych wielkości, ruch ma charakter skokowy, a zatem, ten najmniejszy z możliwych dystansów zostanie przez Achillesa pokonany w jednej sekwencji jego ruchu. Widać więc wyraźnie, że Achilles nie tylko dogoni żółwia, lecz że nawet go przegoni. Jeśli wyścig będzie trwał dostatecznie długo Achilles musi go wygrać. Naturalnie, przy takim podejściu, nie trzeba zakładać tego, że ruch jest maszyną nieskończonościową. Można jednak przyjąć rozwiązanie Placka, który wskazuje na brak zachodzenia wzajemnej jednoznaczności między klasycznie pojętym matematycznym kontinuum, a światem realnym. Widać bowiem jasno, że uwagi, dotyczące relacji między kontinuum liczb rzeczywistych a światem fizycznym, ustalone w wyniku analizy paradoksu dychotomii w postaci drugiej mogą zostać powtórzone w przypadku paradoksu Achillesa i żółwia. Rozważmy więc jedynie matematyczną propozycję rozwiązania tego dylematu, która chociaż podobna, do tej zaproponowanej przez Whiteheada i Ajdukiewicza dla dychotomii w postaci pierwszej, różni się jednak pewnymi technicznymi szczegółami[557].

Tak jak w przypadku poprzedniego dylematu tak i tutaj mamy do czynienia z nieskończoną sumą zbieżnego ciągu geometrycznego, z tą jednak różnicą, że kolejne wyrazy tego ciągu nie mają już tak prostej postaci jak w przypadku paradoksu dychotomii.

Tradycyjnie, przyjmuje się, że szybszego biegacza reprezentuje Achilles, wolniejszego zaś żółw. Załóżmy więc, zgodnie ze zdrowym rozsądkiem i z warunkami argumentacji paradoksu, że prędkość V_1 poruszania się Achillesa jest większa od prędkości V_2 poruszania się żółwia. Sytuację wynikającą z argumentacji ilustruje poniższy rysunek:

Achilles i żółw rozpoczynają swój bieg w tym samym momencie, przy czym Achilles startuje z punktu A podczas, gdy punktem startu dla żółwia jest B. Zanim Achilles dogoni żółwia musi najpierw dobiec do punktu B. Drogę długości $AB = s_1$ Achilles przebywa w czasie t_1. W tym samym czasie żółw osiąga jednak punkt C, pokonując tym samym niezerową odległość $BC = s_2$. Zatem po upływie czasu t_1, Achilles znajduje się w punkcie B, zaś żółw w punkcie C. Kolejna sekwencja biegu jest więc kopią poprzedniej: w czasie t_2 Achilles pokonuje odległość s_2 dobiegając do punktu C podczas, gdy żółw w tym samym czasie osiąga punkt D pokonując odległość s_3. Jak widać, rozumowanie to generuje nieskończoną ilość sekwencji, gdyż zakładamy, że w żadnym momencie żółw nie zatrzyma się. Zatem, faktycznie Achilles goniąc żółwia musi pokonać nieskończoną ilość odcinków o długościach s_n, dla $n \in \{1, 2, 3,...\}$. Aby podobieństwo do paradoksu dychotomii stało się jeszcze lepiej widoczne, powiemy, że Achilles dogoniłby żółwia, gdyby tylko mógł pokonać nieskończoną ilość niezerowych odcinków w skończonym czasie. Zdaniem Zenona, takiego wyczynu nikt, a więc i nawet sam Achilles nie jest w stanie dokonać. Prosty rachunek pokazuje jednak, że liczby s_n, dla $n \in \{1, 2, 3,...\}$ tworzą ciąg geometryczny o wyrazie pierwszym $a_1 = s_1$ i ilorazie $q = V_2/V_1$. Zatem, dla $n \geq 1$, $s_n = s_1 \cdot (V_2/V_1)^{n-1}$. Naturalnie, $|q| < 1$, gdyż z założenia $V_2 < V_1$. Zatem ciąg $\{s_n\}_{n\in\{1,2,3,...\}}$ jest ciągiem zbieżnym, którego suma wszystkich wyrazów określona jest wzorem $\Sigma = a_1/(1-q)$. Oznacza to, że Achilles dogoni żółwia pokonując drogę s, której skończona długość, tak jak się

[557] Ajdukiewicz traktuje paradoks Achillesa i żółwia za jedynie inną wersję paradoksu dychotomii. Dlatego też, nie uważa nawet za stosowne omówienie tego dylematu, patrz Ajdukiewicz, [1948], s. 93.

tego mogliśmy spodziewać, jest zależna jedynie od trzech czynników. Czynnikami tymi są początkowy dystans dzielący Achillesa od żółwia oraz prędkości obu uczestników biegu:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n + \ldots = s_1 + s_1 \cdot (V_2/V_1) + s_1 \cdot (V_2/V_1)^2 + \ldots + s_1 \cdot (V_2/V_1)^{n-1} + \ldots =$$
$$s_1 \cdot (1 + (V_2/V_1) + (V_2/V_1)^2 + \ldots + (V_2/V_1)^{n-1} + \ldots) = s_1 \cdot V_1/(V_1 - V_2) < \infty.$$

Zatem, podobnie do przypadku paradoksu dychotomii, rozwiązanie wykorzystujące matematykę klasyczną wyraźnie pokazuje, że suma nieskończenie wielu, niezerowych odcinków odpowiadających drogom, które musi kolejno pokonać Achilles, aby dogonić żółwia, nie jest równa drodze o nieskończonej długości.

Wydaje się jednak, że to matematyczne rozwiązanie nie dotyka sedna, ani paradoksu dychotomii, ani paradoksu Achillesa i żółwia. Istota żadnego z tych dylematów nie jest przecież czysto matematyczna, nie daje się więc sprowadzić do prostego problemu sumowania wyrazów nieskończonego, zbieżnego ciągu geometrycznego.

4.3.3.4. PARADOKS STRZAŁY

Paradoks strzały zasługuje na miano jednego z najbardziej eleganckich paradoksów i to nie tylko wśród tych odkrytych przez Zenona. Ten piękny dylemat łączy w sobie niezwykłą prostotę formy z wyjątkową głębią treści. W prosty, można by rzec banalny, sposób dotyka on bowiem bardzo podstawowego problemu jakim jest związek między ruchem a bezruchem.

Ajdukiewicz w swym artykule *Zmiana i sprzeczność* tak oto przedstawia ten wyjątkowy argument[558]:

Paradoks strzały

„Lecąca strzała jest w każdej chwili swego lotu w pewnym określonym miejscu. To jednak, co w każdej chwili należącej do pewnego okresu czasu jest w jakimś określonym, a więc jednym i tym samym miejscu, to przez cały ten czas spoczywa. Zatem, lecąca strzała przez cały czas swego lotu spoczywa".

Arystoteles uważa, iż rozwiązanie tego problemu jest nader proste[559]: „Rozumowanie Zenona jest błędne; twierdzi on mianowicie, że skoro wszystko albo zawsze znajduje się w stanie spoczynku, albo w ruchu, i że jest w spoczynku, gdy zajmuje równą sobie przestrzeń, a to, co jest w ruchu, znajduje się

---

[558] Ajdukiewicz, [1948], s. 93–94.
[559] Arystoteles, *Fizyka*, VI, 239b, s. 148.

zawsze w jakimś 'teraz', wobec tego strzała wypuszczona z łuku stoi w miejscu. To nieprawda, bo czas bynajmniej nie składa się z niepodzielnych 'teraz', tak jak i żadna inna wielkość". Nieco dalej, Arystoteles jeszcze raz wraca do paradoksu strzały[560]: „Trzeci argument był już wyżej wspomniany, że mianowicie wypuszczona strzała stoi w miejscu. Wynika to z supozycji, że czas składa się z szeregu 'teraz'. Jeżeli się tego nie założy, wniosek nie wyniknie". Sedno paradoksu strzały wiąże się ze słowem „teraz", które zazwyczaj jest zastępowane przez „moment" lub „chwilę". Lecąca strzała w każdym momencie, czyli w każdej chwili, gdzieś spoczywa. W jednym momencie spoczywa w miejscu w_s, w innym zaś momencie w jakimś w_r. Naturalnie, $w_s \neq w_r$. Skoro jednak strzała zawsze spoczywa, to nie może się poruszać. Zatem, ruch strzały implikuje jej spoczynek. W ten właśnie sposób otrzymujemy sprzeczność. Istnieje jednak pewien istotny warunek, który musi zostać spełniony, aby rozumowanie to można było zaakceptować. Warunkiem tym jest, jak pokazuje to Ajdukiewicz, rozumienie momentu czasowego (chwili) tak jak punktu w geometrii, czyli jak obiektu bez wymiaru[561]. Tylko pod takim warunkiem można mówić o tym, że poruszająca się strzała spoczywa w danym momencie. Czy jednak naprawdę można mówić o spoczywaniu jakiegokolwiek ciała odnosząc ten spoczynek do tak pojmowanego punktu czasowego? Czy o spoczynku nie można mówić dopiero wówczas, gdy stwierdzimy stałość miejsca w pewnym niezerowym przedziale czasu? Naturalnie, przedział ten może być dowolnie mały, ale nie może być przedziałem zdegenerowanym, czyli punktem bez wymiaru.

Widać więc, że naturalnym wydaje się takie rozwiązanie tego paradoksu, które uściśla pojęcie spoczynku. Ajdukiewicz proponuje następujące definicje, zaznaczając, że nie są one jedynymi możliwymi[562]:

A. DEFINICJA SPOCZYNKU. *Ciało C spoczywa w chwili t – to znaczy – istnieje taki przedział czasowy* (t_1, t_2) *zawierający w sobie punkt t (tzn. taki, że* $t_1 \leq t \leq t_2$*) i taki, że w dowolnych dwu chwilach wziętych z tego przedziału ciało C znajduje się w tym samym miejscu*[563].

A. DEFINICJA RUCHU. *Ciało C porusza się w chwili t – to znaczy – istnieje taki przedział czasowy* (t_1, t_2)*, że* $t_l < t < t_2$ *i w każdych dwu chwilach z tego przedziału ciało C znajduje się w różnych miejscach.*

Ajdukiewicz dodaje, że z definicji tych wynika, że istnieje zawsze pierwsza i ostatnia chwila spoczynku, nie ma natomiast, ani pierwszej, ani ostatniej chwili

---

560 Arystoteles, *Fizyka*, VI, 239b, s. 149.

561 Ajdukiewicz, [1948], s. 95–98.

562 Ajdukiewicz, [1948], s. 98.

563 Mimo iż nie jest to wyraźnie w tej definicji powiedziane, to jednak wynika z niej założenie niezerowości przedziału czasowego (t_1, t_2).

ruchu[564]. Najwyraźniej, uwagą tą, Ajdukiewicz, raczej niechcący, nawiązał do paradoksu dychotomii w wersji drugiej oraz do paradoksu Achillesa i żółwia. Mimo, iż sam nie rozważał dychotomii w drugiej postaci, a paradoks Achillesa sprowadził do prostego sumowania wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, to i tak doszedł do tego problemu, który jest faktyczną trudnością obu tych paradoksów. Jak bowiem ruch jest możliwy, skoro ciało spoczywa w jakimś momencie, a w nieco późniejszej chwili, tak bliskiej chwili spoczynku, że aż niemożliwej nawet do wskazania, ciało jest już w ruchu? Biorąc pod uwagę fakt, iż Ajdukiewicz zakłada nieskończony podział przedziału czasowego[565], natychmiast popadamy we wskazaną przez Zenona, a obszernie omówioną wcześniej, trudność. Ajdukiewicz dopuszcza możliwość alternatywnego zdefiniowania ruchu i spoczynku, tak, aby przedział czasowy (t_1, t_2) był w przypadku definicji spoczynku domknięty, zaś w definicji ruchu otwarty[566]. Mamy wówczas, trudność dualną do tej, właśnie wspomnianej.

Bez względu na sposób domknięcia przedziału czasowego, definicje Ajdukiewicza są o tyle niezwykłe, że określają spoczynek i ruch ciała w punkcie czasowym, a nie w niezerowym przedziale. Naturalnie, w obu definicjach, z konieczności, kluczową rolę odgrywa niezerowy przedział czasu. Obie definicje, wbrew intuicjom, umożliwiają jednak mówienie o spoczynku i o ruchu w punkcie czasowym. Prowadzi to do nieuniknionych problemów, na które wskazuje sam Ajdukiewicz. Nie potrafimy np. orzec, czy w punkcie największego wychylenia się wahadła, wahadło to porusza się czy może spoczywa. Operując tymi definicjami, nie możemy stwierdzić, ani ruchu wahadła, ani jego spoczynku. Chcąc rozwiązać ten problem, Ajdukiewicz proponuje rozważenie możliwości operowania znaną z fizyki prędkością chwilową – jeśli prędkość chwilowa jest równa zeru, to ciało w danej chwili spoczywa, w przeciwnym razie jest w tej chwili w ruchu. Warto jednak zauważyć, że prędkość chwilowa nie jest prędkością w punkcie, lecz w przedziale o nieskończenie małej długości – w przedziale o infinitezymalnej długości[567]. Tak więc, nieuniknionym wydaje

---

[564] Ajdukiewicz, [1948], s. 98.

[565] Ajdukiewicz, [1948], s. 104.

[566] Ajdukiewicz dopuszcza też możliwość pozostałych kombinacji domknięcia i otwarcia tego przedziału, Ajdukiewicz, [1948], s. 98.

[567] Co prawda, prędkość chwilową uważa się za prędkość w punkcie początkowym tego przedziału, lecz wzór na jej wyliczenie (pochodna drogi od czasu) pokazuje wyraźnie, że takie rozumienie jest pewnego rodzaju idealizacją. Dana prędkość chwilowa jest bowiem prędkością w całym infinitezymalnym przedziale czasu. Zatem, równie dobrze mogłaby być uważana za prędkość w punkcie środkowym, czy też końcowym tego przedziału. Powiemy, że niezerowa liczba x jest *infinitezymalna* (ang. *infinitesimal number*) wtedy i tylko wtedy, gdy jej wartość bezwzględna jest większa od zera i mniejsza od dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej. Równoważnie: $x \neq 0$ jest liczbą infinitezymalną wtedy i tylko wtedy, gdy każda, skończenie krotna suma $|x| + \ldots + |x|$ jest mniejsza od 1, patrz, Wikipedia, [a]. Łatwo zauważyć, że odwrotności liczb infinitezymalnych są większe od dowolnej liczby rzeczywistej. Liczby infinitezymalne należą do

się zdefiniowanie spoczynku i ruchu w przedziale czasu, a nie w jakimś bezwymiarowym punkcie.

Placek proponuje dwa sposoby alternatywnego zdefiniowania spoczynku i ruchu. Pierwszy sposób jest następujący[568]:

B. DEFINICJA SPOCZYNKU. *Punkt materialny spoczywa w okresie* $[t_1, t_2]$ *zawsze i tylko wtedy, gdy w każdym momencie t z przedziału* $[t_1, t_2]$, $x(t) = x(t_1)$[569].

B. DEFINICJA RUCHU. *Punkt materialny porusza się w okresie* $[t_1, t_2]$ *zawsze i tylko wtedy, gdy dla każdego momentu t z przedziału* $[t_1, t_2]$, *istnieje moment* t_0 *z tegoż przedziału, taki że* $x(t) \neq x(t_0)$.

Niestety, obie definicje wysławiają paradoks strzały w sposób bardzo precyzyjny, nie usuwając w ogóle jego paradoksalnych konsekwencji. Przecież, z definicji *B* ruchu wynika, iż można mówić o spoczynku ciała w punkcie czasowym. Mamy więc, natychmiast dokładnie to, co chciał pokazać Zenon: ciało spoczywa w każdym punkcie czasowym pewnego przedziału, a w całym tym przedziale się porusza – zatem ruch jest spoczynkiem – tak jak chciał tego Zenon. Trudno jest więc upierać się przy wersji *B* definicji ruchu i spoczynku. Placek zauważa, że definicje te są niezgodne z poglądami Arystotelesa, który wyraźnie przecież twierdzi, że *„czas bynajmniej nie składa się z niepodzielnych ‘teraz’, tak jak i żadna inna wielkość”*[570]. Dlatego też, proponuje inną postać obu definicji[571]:

C. DEFINICJA SPOCZYNKU. *Punkt materialny spoczywa w okresie* $[t_1, t_2]$, *gdzie* $t_1 < t_2$, *zawsze i tylko wtedy, gdy dla każdego momentu t z przedziału* $[t_1, t_2]$, $x(t) = x(t_1)$.

C. DEFINICJA RUCHU. *Punkt materialny porusza się w okresie* $[t_1, t_2]$, *gdzie* $t_1 < t_2$, *zawsze i tylko wtedy, gdy dla każdego momentu t z przedziału* $[t_1, t_2]$, *istnieje moment* t_0 *z tegoż przedziału, taki że* $x(t) \neq x(t_0)$.

Definicje *C* nie pozwalają już określić, ani spoczynku, ani ruchu w punkcie czasowym. Jest to zgodne z wytyczną Arystotelesa, który uważał, że w nieroz-

---

tak zwanych liczb nadrzeczywistych. Mimo, iż niewątpliwie John Conway jest twórcą teorii liczb nadrzeczywistych, wskazuje się na to, iż miał on prekursorów, którzy na wieki przez nim wskazywali na istnienie liczb infinitezymalnych. Do najważniejszych należą: Archimedes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Leonhard Euler, Augustin Louis Cauchy, patrz, Wikipedia, [a], [c], [d]. Teoria liczb nadrzeczywistych jest przedstawiona, między innymi, w Conway, [1976], Conway i Guy, [1996], Wikipedia [c], Robinson, [1996].

568 Placek, [1997], s. 73.

569 $x(t)$ jest miejscem, w którym znajduje się punkt materialny w chwili t.

570 Arystoteles, *Fizyka*, VI, 239b, s. 148.

571 Placek, [1997], s. 73.

ciągłym momencie czasu nie ma, ani spoczynku, ani ruchu. Nie trzeba zaznaczać, że na gruncie definicji *C*, nie ma żadnej szansy na utrzymanie paradoksalnej argumentacji strzały. Lecąca strzała jest w ruchu w każdym podprzedziale całego przedziału, którego początkiem jest chwila wystrzelenia strzały, a końcem moment jej zatrzymania. Zatem, strzała ta porusza się w całym tym przedziale. Co więcej, w granicach tego przedziału czasowego, nie ma mowy o jakimkolwiek spoczynku strzały, gdyż nie ma mowy o jakichś bezwymiarowych momentach czasowych.

Podobne stanowisko zajmuje Henri Bergson[572]. Jego pogląd, omówiony dokładniej w następnym paragrafie reprezentuje wspólne podejście do wszystkich, znanych paradoksów Zenona. Zdaniem Bergsona, istnieje jedynie ruch, bezruch jest natomiast sztucznie wyabstrahowywany przy użyciu, powiedzielibyśmy bezwymiarowych, punktów czasowych. Ruch jest „odzyskiwany" z momentów bezruchu, dzięki założeniu, że istnieją punkty czasowe. Chwile, czy momenty czasowe nie są jednak punktami, które nie mają wymiaru, lecz są niezwykle krótkimi przedziałami, powiedzielibyśmy, przedziałami o infinitezymalnych długościach. Jeśli jednak chwila czasowa będzie dla nas przedziałem, to bez wątpienia, niezależnie od tego jak krótka jest długość trwania tej chwili, nigdy nie będziemy mogli powiedzieć, że strzała w którejkolwiek chwili spoczywa. Dlatego też, odrzucenie operowania punktem czasowym rozumianym jako cięcie Dedekinda uwalnia nas od paradoksu strzały. Jeśli będziemy operowali punktami rozumianymi jako przedziały o infinitezymalnych długościach, paradoks strzały nie da się nawet wypowiedzieć w sposób wiarygodny.

Ta niemożność wyabstrahowania bezruchu z ruchu nie jest jedyną zaletą właściwego spojrzenia na paradoks strzały. Istnieje tu bowiem jeszcze jeden problem, który wynika z operowania bezwymiarowym punktem czasu. Trudność ta może zniknąć, jeśli tylko przestaniemy tworzyć bezruch tam, gdzie go najwyraźniej nie ma. Przecież punkt czasu, który nie ma wymiaru nie może „reprezentować" jakiegokolwiek zdarzenia. Twierdzenie, że w jakimś, tak właśnie rozumianym, punkcie czasowym strzała spoczywa jest zwykłym mitem. Bezwymiarowy punkt czasu jest przedziałem czasu o zerowej długości a w takim przedziale o zerowej długości nie ma niczego, gdyż czas nie zaczął nawet płynąć. Wobec tego nie ma też i bezruchu. Zatem, dostrzeganie bezruchu w lecącej strzale jest szkodliwą, bo prowadzącą do naiwnych wniosków, fikcją. Tak jak ruchu nie da się złożyć ze stanów bezruchu, tak i bezruchu nie ma w ruchu. Uwagę tę można potraktować jako wprowadzenie do rozważań następnego paragrafu, prezentującego propozycję wspólnego rozwiązania paradoksów analizowanych w całym rozdziale czwartym.

---

[572] Bergson, [1963], s. 113–117.

4.4. PROPOZYCJA ROZWIĄZANIA PARADOKSÓW ONTOLOGICZNYCH

Ten ostatni paragraf ostatniego rozdziału poświęcimy przedstawieniu propozycji rozwiązania paradoksów nieostrości, w tym paradoksów wielu, oraz paradoksów zmiany, w tym ruchu. Co więcej, nasza propozycja ma charakter ogólny w tym sensie, że stanowi wspólne i całościowe podejście do wszystkich tych dylematów. Nie tylko pod tym względem jest ona zbieżna z poglądami reprezentowanymi przez Henri'ego Bergsona (1859–1941). Problemy, którym poświęcony jest ten rozdział wskazują na to, iż dylematy nieostrości i zmiany mają wspólną przyczynę. Jest nią matematyzacja rzeczywistości, a właściwie matematyzacja obrazu rzeczywistości. Ten specyficzny, zmatematyzowany obraz świata spisuje się dość dobrze tak długo, jak długo unikamy kwestii będących istotą analizowanych w całym tym rozdziale paradoksów. W powstającym, w matematycznej konwencji, obrazie rzeczywistości, naturalnym zjawiskiem jest wszystko to, co charakteryzuje świat matematyki, a zatem precyzja i niezmienność, w szczególności więc i bezruch. W tym sztucznym świecie istnieją bowiem obiekty precyzyjnie opisywalne, gdyż obiekty te posiadają precyzyjnie opisywalne własności – przecież matematyczne własności nie podlegają żadnym zmianom, a przez to dają się precyzyjnie pojmować. Wiemy więc, czym jest dany obiekt *o*, gdy wiemy jakie są jego własności. Tak jest w matematyce, lecz tak nie jest w rzeczywistości. Chcąc postępować naukowo, czyli możliwie jak najbardziej ściśle, próbujemy odkrywać w świecie matematyczne struktury, których najwyraźniej nasz realny świat nie posiada. Widzimy więc jakiś obiekt, a zatem opisujemy go. Przecież, w naszym najgłębszym przekonaniu, ma on jakieś łatwo przez nas dostrzegalne własności. Niestety, własności te nie przysługują temu obiektowi, lecz jedynie jego „zamrożonemu", sprowadzonemu do jednego, bezwymiarowego punktu czasowego, obrazowi.

Aby bardziej intuicyjnie wyrazić ten problem przedstawmy następującą anegdotę.

Przypadek fotografa

Zachwycony przesuwającą się po niebie, niezwykłą chmurą, fotograf niezwłocznie wyjął z pokrowca swój aparat i zrobił jej zdjęcie. Po chwili, chmura zmieniła nieco swój kształt i kolory. Fotograf zrobił więc kolejne zdjęcie. Ponieważ chmura wciąż ulegała nieustannym zmianom, fotograf uważał za konieczne robienie kolejnych zdjęć. Potem, gdy je wywołał, zauważył z prawdziwym zachwytem, że gdyby nie wiedział że robił zdjęcia jednej i tej samej chmurze byłby przekonany, że przedstawiają one różne chmury.

Gdy tę serię zdjęć, jednej i tej samej chmury, obserwowali jego przyjaciele-filozofowie, długo spierali się nad tożsamością sfotografowanej chmury.

Z ogromnym zdumieniem fotograf przysłuchiwał się dyskusji, z której wynikały przeróżne wnioski dotyczące rozumienia, czym jest sfotografowana przez niego chmura. Raz okazywało się, że chmura, którą sfotografował, jest jedyną w specyficzny sposób uprzywilejowaną z miliona innych różnych, choć będących jedną chmurą, chmur. Ktoś inny przekonywał, że na pewno są to różne chmury – przecież każda różni się od pozostałych w istotny sposób, czyli pod względem takich chociażby własności jak kształt i kolor. Jeszcze ktoś argumentował, że mamy oto przypadek jawnej sprzeczności, gdyż coś jest czymś i zarazem tym czymś nie jest – zatem rzeczywistość jest realizowaniem się sprzeczności. Znalazł się też i ktoś taki, kto stwierdził, że jest tylko chwila obecna, i w związku z tym, nie ma ani przeszłości, ani przyszłości – nie myśląc zapewne o tym, że coś powinno łączyć chociażby wszystkie te chwile, które były konieczne dla wypowiedzenia jego cennej uwagi.

I tylko fotograf, przysłuchujący się tej dyskusji, ze zdumieniem uświadomił sobie, że jego przyjaciele nie rozmawiają o chmurze, lecz o jej obrazach, utrwalonych przez niego na zdjęciach. Najwyraźniej obrazy te zostały przez nich utożsamione z rzeczywistą chmurą. Dyskutując o obrazach chmury sądzą oni, iż dyskutują o samej chmurze. Zauważył, że w tej głośnej i burzliwej dyskusji zabrakło głosu stwierdzającego, że zdjęcia te przedstawiają różne fazy jednego i tego samego procesu zmian jakim jest bezpodstawnie przez wszystkich urzeczowiona, przez zrzutowanie na szereg kolejnych punktów czasowych, chmura. Dla każdego z jego przyjaciół, chmura jest bowiem rzeczą przedstawioną przez którąś z fotografii.

W istocie, poza matematyką i chyba teologią, która wydaje się być matematyce najbliższą, wszelkie byty podlegają nieustannym zmianom, w tym nieustannemu ruchowi. Zachodzące zmiany sprawiają, że staje się niemożliwością ustalenie jakiejkolwiek precyzyjnej własności danego, wziętego pod uwagę, bytu. Każda bowiem próba ustalenia pozamatematycznej własności nieuchronnie prowadzi do trudności wskazanych przez paradoksy stosu, łysego, koloru czerwonego itd. Na tę wszechobecną, notoryczną i w żaden sposób nieusuwalną nieostrość skazany jest prawie każdy język, mający dostarczyć opisu pozamatematycznego świata[573]. Pojawia się więc naturalna pokusa sprowadzenia zmieniających się bytów do pewnych ich dość typowych „fotografii", które wreszcie ustalą to, co w przypadku samych bytów nie da się

---

[573] Istnieją języki naturalne, do których należą języki niektórych grup etnicznych Indian północnej Kanady, nie zakładające konieczności urzeczowiania zachodzących zmian. Pierwotne dla tych języków nie są bowiem wyrażenia oznaczające rzeczy (tak jak ma to miejsce w językach europejskich) lecz wyrażenia oznaczające sytuacje. W naszych językach sowa siedzi na sośnie, w tamtych zaś jest siedzenie sowy na sośnie, zaś sama sowa jest dopiero tym czymś, co w tym zdarzeniu uczestniczy.

żadnym sposobem ustalić. Naturalnie, ustalenia te mają umożliwić określenie precyzyjnych własności. Chociaż więc nie potrafimy opisać kształtu samej chmury, którą obserwujemy przez 15 minut, a to z oczywistego powodu jej ciągłych transformacji, nie mamy już najmniejszych trudności z opisem kształtu obrazu z fotografii tejże chmury. Na fotografii widzimy przecież coś co ma konkretny, ustalony, dający się geometrycznie analizować kształt. Ponadto, to coś ma konkretne, ustalone barwy. Istnieje więc możliwość bardzo ścisłego, precyzyjnego opisu nie samej chmury, lecz jej sztucznie wyabstrahowanego, „zamrożonego" na fotografii obrazu. Naturalnie, wyraz „zamrożony" odwołuje się do naszych intuicji. Jednak znacznie precyzyjniej i trafniej jest zastąpić go obrazem chmury w jej punktowym rzucie na oś czasu. „Chwytając" chmurę w jednym ułamku sekundy jej trwania, tworzymy precyzyjnie już opisywalny obraz tej chmury. Możemy nadać nazwę nie tylko temu obrazowi, lecz każdej dostrzeżonej i, z natury swej, precyzyjnej własności tego obrazu. Potem wierzymy mocno, że nazwy te mają precyzyjne znaczenia. Tymczasem, nadanie tych nazw ma mniej lub bardziej jawny, lecz zawsze ostensywny w swych podstawach, charakter[574]. Ta ostensywność określania własności nieuchronnie prowadzi do tego, że jedyne, sensowne definicje, zarówno rzeczy, jak i ich własności są definicjami warunkowymi. Każdorazowa próba przerobienia tych definicji na definicje zupełne musi kończyć się popadnięciem w konflikt z intuicyjnym rozumieniem danej rzeczy, czy danej własności.

Tak więc, proces patrzenia na chmurę, z perspektywy jednego punktu czasowego, daje nam wrażenie, że jest ona rzeczą. Naturalnie, musi to prowadzić do powstawania paradoksów wielu, paradoksów tożsamości, jak również wszelkich innych paradoksów szeroko pojętej nieostrości. Mamy bowiem świadomość, że skoro chmura na danej fotografii ma kolor różowy, na innej zaś błękitny, a zmiana barwy zachodziła (prawie) płynnie, to, najwidoczniej, w jakimś momencie kolor różowy przestał być różem, a w innej chwili nie-błękitny zaczął być błękitem? Podobna trudność powstanie, gdy uświadomimy sobie, że chmura z jednej fotografii przypomina kształtem baranka, a na innej górala z fajką w ustach. Jednocześnie, nieustanny przepływ cząsteczek wody z chmury do otoczenia i z otoczenia do chmury jest przyczyną paradoksu wielu. Przecież tak bardzo przywykliśmy do „dobrych" i ostrych fotografii, że chmurę musimy utożsamić z jej fotografią. Musimy więc ustalić wyraźną granicę tej chmury. Przecież, nie po to robimy fotografię, aby potem nie móc określić własności powstałego obrazu, a więc w szczególności jego kształtu. To uparte dążenie do określenia nieistniejących przecież w realnym świecie własności, musi w efekcie doprowadzić do pojawienia się paradoksów wielu.

---

[574] Definiowanie ostensywne, to definiowanie przez wskazanie. Przykładem ostensywnej definicji ściany może być wskazanie palcem na jakąś konkretną ścianę wraz z towarzyszącą mu wypowiedzią „to jest ściana".

Nieruchome obrazy chmury są dla nas bardziej realne niż sama chmura. Nie myślimy, bo nie potrafimy już myśleć o prawdziwej chmurze, i nawet wówczas o niej sobie nie przypominamy, gdy jakaś inna fotografia uświadomi nam, że jedna i ta sama chmura może wyglądać zupełnie inaczej. Tkwiąc w silnym przywiązaniu do punktowych obrazów, które urzeczawiają chmurę, będziemy tworzyli przedziwne konstrukcje mające ustalić, iż obrazy te mają wspólną tożsamość. Jednak, na przeszkodzie w osiągnięciu tego celu, stać nam będą takie narzędzia matematyczne, jak identyczność. Przecież, w oczywisty sposób, jeden obraz chmury nie jest identyczny z innym. Tymczasem, potrzebujemy udowodnić, że tak właśnie jest. Najzwyklejsza obserwacja podpowiada nam bowiem, że kolejne zdjęcia przedstawiają następujące po sobie niektóre fazy nieustannego procesu przekształcania się chmury. Powstają więc przedziwne, żeby nie powiedzieć dziwaczne, trudności, które są rozwiązywane przez co najmniej równie przedziwne a niekiedy jeszcze bardziej dziwaczne konstrukcje dowodzące tożsamości tych obiektów, które najwyraźniej nie są ze sobą tożsame. Przecież żadna konkretna fotografia nie jest tożsama z inną równie konkretną fotografią. Ich pochodzenie jest podobne, lecz one same, jako zupełnie odrębne rzeczy, są w oczywisty sposób różne. Stosując matematyczne narzędzie próbuje się jednak pokazać, że jeden wykonany w punkcie czasowym t_1 obraz chmury jest tożsamy z innym wykonanym w punkcie t_2 obrazem. Tymczasem, posługując się różnowartościową funkcją $f\colon A \to B$, nigdy nie dowiedziemy równości $f(x_1) = f(x_2)$, dla jakichkolwiek $x_1, x_2 \in A$, jeśli tylko $x_1 \neq x_2$. Widoczna jest więc prosta niemożność stosowania narzędzi matematycznych do opisu zjawisk świata realnego. Unikając odwołania się do takich pojęć jak „proces", nie jest możliwe udowodnienie, że obraz błękitnego górala z fajką w ustach, widziany przez krótką chwilę na niebie, tworzy jedno, z podobnie krótkotrwałym, obrazem różowego baranka.

To, że w tworzonym na wzór matematyczny statycznym obrazie świata nie dają się stosować podstawowe matematyczne narzędzia nie jest niczym dziwnym. Przecież ten zmatematyzowany, martwy obraz świata ma mieć jakiś związek z notorycznie dynamiczną rzeczywistością. Każda więc weryfikacja statycznego obrazu dynamicznej rzeczywistości musi ujawnić nieodpowiedniość tego pierwszego. Jak bowiem można sensownie połączyć badany fragment rzeczywistości z jego sztywnym, nieudolnym, bo uproszczonym, zmatematyzowanym opisem? Fakt, iż fizycy radzą sobie z tym problemem, nie jest żadnym wyjaśnieniem dla filozofa. Techniczne problemy fizyka są przecież rozwiązywane w techniczny sposób[575]. Tymczasem, refleksja filozoficzna stawia jak najbardziej nietechniczne pytania. Pytania te mają charakter logiczny, a odpowiedzią na nie, nie może być stwierdzenie, że przecież lepiej i tak nie da się rzeczywistości opisać. Taka odpowiedź jest niepoważna i w żaden sposób nie

---

[575] Patrz uwagi Bergsona na ten temat, zamieszczone w dalszej części tego paragrafu.

usprawiedliwia naiwności tej ontologii i metafizyki, które zakładają istnienie precyzyjnych własności opisujących rzeczy, rzeczy które nie podlegają zmianie tak długo, jak długo dane własności można im przypisać. Logiczna analiza nieostrości pokazuje, że poza matematyką nie ma ani takich własności, ani tym bardziej, takich rzeczy. W tym też sensie, paradoksy nieostrości są jak najbardziej poprawnymi dowodami nie wprost na nieistnienie, zarówno precyzyjnie opisywanych, czyli ujmowanych w punkcie czasowym, niematematycznych własności, jak i definiowanych przy ich pomocy obiektów.

Jak to zostało już wcześniej pokazane, niektórzy filozofowie przyjmują, że w językach naturalnych pewne predykaty, czy nazwy są nieostre. Czasami, podają nawet ich przykłady. To „łaskawe" przyznanie, że przypadek języka naturalnego wiąże się z „pewnymi" problemami wywoływanymi przez te szczególne wyrażenia, może jednak wprowadzać w błąd. Ma bowiem świadczyć o marginalności problemu nieostrości: *Owszem, nieostrość istnieje, jednak, na szczęście, daje się ją ominąć dzięki zastosowaniu wyrażeń ostrych.* Te lepsze, bo ostre wyrażenia mają należeć do jakiegoś mitycznego, bo idealnie precyzyjnego języka. Tymczasem, poza matematycznymi pojęciami, również występującymi w języku naturalnym, niemalże nie ma takich, które nie byłyby nieostre[576]. Jest tak dlatego, że wyrażenia języka naturalnego, z założenia, mają mieć jakiś związek z dynamiczną, stale zmieniającą się rzeczywistością. Nie jest więc prawdą, że wspomniane wyżej kłopoty możemy mieć jedynie z chmurami i rzekami. Przecież każdy istniejący w rzeczywistości byt jest swoistą chmurą. Nie mamy co do tego żadnych wątpliwości, jeśli np. myślimy o organizmach żywych. Jednak nawet najtwardszy kamień, choć wolny od procesów metabolizmu właściwym żywym organizmom, sam podlega ciągłym zmianom. Jedynie tempo zachodzenia tych zmian różni dynamikę kamienia od dynamiki chmury. Prędkość zachodzenia zmian nie może mieć jednak najmniejszego wpływu na stwierdzenie, że jakieś zmiany w ogóle zachodzą. Sposób w jaki postrzegamy dane zjawisko nie może przecież wpływać na jego naturę. Jeśli więc mamy uzasadnione wątpliwości, czy można rzekę lub chmurę uznać za rzecz, czemu podobnych, a nawet dokładnie tych samych, wątpliwości nie mamy w przypadku kamienia? Przecież najdobitniej wskazują na to paradoksy nieostrości, w tym również paradoksy wielu. Jedyną przyczyną różniącą chmurę od kamienia jest prędkość zmian, jakie zachodzą w chmurze i w kamieniu. Jedne zmiany są dostrzegalne gołym okiem w każdej ich sekundzie, inne zmiany również zachodzą w każdej sekundzie, lecz ich dostrzeżenie staje się możliwe dopiero wówczas, gdy użyjemy mikroskopu elektronowego, w przeciwnym razie do zaobserwowania jakichś łatwiej dostrzegalnych zmian potrzebujemy stuleci.

---

[576] Zwrot „niemalże nie ma takich" ma wyrażać pewną wątpliwość, czy wyrażenia dotyczące obiektów świata cząstek elementarnych są nieostre, ostre, czy może dopiero kiedyś okażą się nieostre.

Poza prędkością zmian istnieją jeszcze inne czynniki tłumaczące urzeczowianie wszystkiego tego, co rzeczą nie jest. Brak możliwości zaobserwowania wyraźnych form przejściowych może powodować, iż uważamy za zupełnie uzasadnione nazwanie pewnej klasy obiektów np. gatunkiem naturalnym. To, co obecnie obserwujemy jest przecież sprowadzeniem do punktu czasowego procesu wielowiekowej, a przede wszystkim, niezwykle dynamicznej ewolucji. Ten nasz obecny obraz świata ożywionego jest swoistą fotografią dynamicznie rozwijającej się, nieustannie ewoluującej przyrody. Tylko dzięki temu możemy mówić z przekonaniem o jakichś gatunkach naturalnych. Przecież, z punktu widzenia procesu ewolucji, okres czasu w jakim człowiek obserwuje i bada przyrodę jest zaledwie krótką chwilą. Jeśli mielibyśmy natomiast możliwość spojrzenia na cały ten proces zmian, niejako z boku, jasnym by się okazało, że nie istnieją żadne granice gatunków naturalnych, że pewne formy przekształciły się stopniowo w kilka innych, obecnie znacząco różniących się między sobą, lub też, równie stopniowo, wykształciły formy bardzo od siebie odległe. Mielibyśmy więc poważny kłopot, aby za przedstawiciela jakiegoś „gatunku naturalnego" uznać tego właśnie, a nie innego osobnika. Jednak, tego kłopotu nie odczuwamy, gdyż powolność zmian ewolucyjnych sprawia, że parę ostatnich stuleci jest swoistym punktowym obrazem przyrody. Łatwo sobie wyobrazić, że podobny, punktowy obraz przyrody poczyniony w innych epokach sprowokowałby nas do uznania za gatunki naturalne zupełnie innych form życia. Zapewne, ewolucja „gatunku naturalnego" człowieka nie zakończyła się, można więc jedynie przypuszczać, jak w odległej przyszłości wyglądać będzie człowiek. Czy w tym odległym czasie „gatunek człowieka" będzie miał coś wspólnego z człowiekiem dzisiejszym, czy może ratując istnienie gatunków naturalnych lepiej będzie wprowadzić nazwę „gatunku nadczłowieka"? Gdzie jednak postawić ostrą przecież granicę między człowiekiem, a nadczłowiekiem? Jaką karkołomną teorią logiczną da się udowodnić tożsamość człowieka współczesnego z człowiekiem odległej przyszłości?

Z perspektywy procesu ewolucji widać wyraźnie, jak bardzo nienaturalny jest podział na gatunki naturalne[577].

Niestosowalność matematycznych narzędzi wobec obrazu świata, mającego mieć jakiś istotny związek z samym światem, tak dobrze widoczny w przypadku predykatu identyczności, dotyczy również najbardziej podstawowych praw logiki, która jest przecież stworzona dla świata pojmowanego w matematyczny sposób. Wykorzystując predykat „być bogatym" Paul Horwich zaproponował

---

[577] Oczywiście, aby zakwestionować naturalność gatunków naturalnych nie trzeba odwoływać się do procesu ewolucji. Istnieją bowiem formy życia kwestionujące istniejącą klasyfikację istot ożywionych. Zapewne, w przypadku każdej klasyfikacji można znaleźć formy ujawniające nietrafność tejże klasyfikacji.

pewne znamienne, ze względu na swoje konkluzje, rozumowanie[578]. Wprowadźmy oznaczenie: $R(x)$ – „człowiek posiadający x dolarów jest bogaty". Zatem, $R(10^6)$ jest zdaniem „Człowiek posiadający milion dolarów jest bogaty". Następnie, Horwich proponuje przystać na prawdziwość następujących dwóch zdań: $R(10^9)$ oraz $\neg R(3)$; którym faktycznie nie sposób odmówić prawdziwości. Jeśli teraz założymy prawdziwość praw logiki klasycznej, w szczególności zaś prawa wyłączonego środka, to powinniśmy uznać prawdziwość następującej, wielokrotnej koniunkcji:

$$R(10^9) \wedge (R(10^9-1) \vee \neg R(10^9-1)) \wedge \ldots \wedge (R(4) \vee \neg R(4)) \wedge \neg R(3).$$

Wydaje się, że prawdziwość tego zdania jest oczywista. Tymczasem, stosując odpowiednią ilość razy prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy, oraz porządkując całe wyrażenie, otrzymujemy, równoważną wyjściowej koniunkcji, następującą wielokrotną alternatywę, którą również powinniśmy uznać za prawdziwą:

$$\begin{array}{llllllll}
[R(10^9) & \wedge \neg R(10^9-1) & \wedge \neg R(10^9-2) & \ldots \wedge & \neg R(5) & \wedge \ \neg R(4) & \wedge \ \neg R(3)] & \vee \\
[R(10^9) & \wedge R(10^9-1) & \wedge \neg R(10^9-2) & \ldots \wedge & \neg R(5) & \wedge \ \neg R(4) & \wedge \ \neg R(3)] & \vee \\
[R(10^9) & \wedge R(10^9-1) & \wedge R(10^9-2) & \ldots \wedge & \neg R(5) & \wedge \ \neg R(4) & \wedge \ \neg R(3)] & \vee \\
\ldots & & & & & & & \\
[R(10^9) & \wedge R(10^9-1) & \wedge R(10^9-2) & \ldots \wedge & R(5) & \wedge \ \neg R(4) & \wedge \ \neg R(3)] & \vee \\
[R(10^9) & \wedge R(10^9-1) & \wedge R(10^9-2) & \ldots \wedge & R(5) & \wedge \ R(4) & \wedge \ \neg R(3)] &
\end{array}$$

Dostrzegając, że w całym przedstawionym wyżej rozumowaniu alternatywa zwykła „...lub..." może być, bez uszczerbku dla jego poprawności, w każdym swoim wystąpieniu zastąpiona przez alternatywę rozłączną „...albo...albo", zauważamy, iż wniosek staje się trudny do zaakceptowania. Prawdą ma być bowiem to, że:

albo $[R(10^9) \wedge \neg R(10^9-1) \wedge \neg R(10^9-2) \wedge \ldots \wedge \neg R(5) \wedge \neg R(4) \wedge \neg R(3)]$,
albo $[R(10^9) \wedge R(10^9-1) \wedge \neg R(10^9-2) \wedge \ldots \wedge \neg R(5) \wedge \neg R(4) \wedge \neg R(3)]$,
...
albo $[R(10^9) \wedge R(10^9-1) \wedge R(10^9-2) \wedge \ldots \wedge \neg R(5) \wedge \neg R(4) \wedge \neg R(3)]$,
albo $[R(10^9) \wedge R(10^9-1) \wedge R(10^9-2) \wedge \ldots \wedge R(5) \wedge \neg R(4) \wedge \neg R(3)]$,
albo $[R(10^9) \wedge R(10^9-1) \wedge R(10^9-2) \wedge \ldots \wedge R(5) \wedge R(4) \wedge \neg R(3)]$.

---

[578] Horwich, [manuskrypt]. Horwich podkreśla, że sam nie wierzy w istnienie ostrych granic nieostrych predykatów, a jego argumentacja ma jedynie pokazać niestosowalność logiki klasycznej do zdań z wyrażeniami nieostrymi.

Zatem, analiza oparta na logice klasycznej dowodzi czegoś sprzecznego z samą istotą nieostrości, a mianowicie istnienia ostrej granicy nieostrego predykatu. Fakt, iż stosując tę analizę nie potrafimy wskazać między którymi przypadkami granica ta przebiega, nie może być żadnym usprawiedliwieniem dla podobnych wniosków. Najwyraźniej, logika klasyczna jest stworzona dla świata obiektów zdefiniowanych zupełnie. Nie jest żadnym zaskoczeniem to, iż logika klasyczna jest narzędziem matematyki. Okazuje się jednak, że jest ona narzędziem wyłącznie matematyki i dziwacznego, bo niezgodnego z samą rzeczywistością, zmatematyzowanego obrazu tejże rzeczywistości.

Z tego też punktu widzenia, tradycyjnie rozważane przypadki możliwych rozwiązań paradoksu stosu tracą swój sens. Zazwyczaj, uważa się bowiem, iż prowadzące do paradoksalnego wniosku rozumowanie typu *sorites*, wyrażone w schemacie:

$$\textit{kategoryczna przesłanka} + \textit{przesłanka indukcyjna} \Longrightarrow \textit{wniosek}$$

jest błędne, albo ze względu na fałszywość przesłanki kategorycznej, albo ze względu na fałszywość przesłanki indukcyjnej, albo ze względu na jakąś wadliwość zasady indukcji matematycznej lub, wielokrotnie stosowanej, reguły *Modus Ponens*. Wszystkie te przypadki mieszczą się jednak w ramach logiki klasycznej, która najwyraźniej nie jest logiką terminów nieostrych. Dlatego też, rozważania wskazujące na to, iż któreś z tych trzech „klasycznych rozwiązań" jest lepsze od pozostałych są przez nas pominięte milczeniem, jako te rozważania, które analizują jakiś problem zastępczy nie mający związku z kwestią nieostrości. Analizy te nie dotykają bowiem sedna problemu jakim jest nieostrość i próbują go „na siłę" sprowadzić na grunt logiki klasycznej.

Zastąpienie logiki klasycznej dowolną trójwartościową, a nawet, dowolną n-wartościową logiką, nie jest żadnym rozwiązaniem tego problemu. Powstają bowiem wówczas kolejne granice, których istnienie nie daje się wytłumaczyć w żaden rozsądny sposób. Co więcej, granice te mają wymiar przestrzenny – w przypadku logiki trójwartościowej są one płaszczyznami. W przypadku trójwartościowym mamy bowiem „przestrzennie" wyrażoną alternatywę, której jednym z „plastrów" jest następująca pod-alternatywa[579]:

[579] W tej wielokrotnej alternatywie jest użyty jednoargumentowy spójnik „*I*" służący wyrażeniu tego, że zdanie p ma trzecią wartość logiczną: $v(Ip) = 1$, gdy $v(p) = 1/2$; $v(Ip) = 0$, gdy $v(p) \in \{1,2\}$. Ponadto, założone jest, że odpowiednie formuły są tautologiami trójwartościowej logiki. Wówczas, prawo wyłączonego środka oraz zasada niesprzeczności mają odpowiednio postać: $p \vee Ip \vee \neg p$ oraz $\neg(p \wedge Ip \wedge \neg p)$, Malinowski, [1990], s. 31.

$$[R(10^9) \wedge IR(10^9{-}1) \wedge IR(10^9{-}2) \dots \wedge IR(5) \wedge IR(4) \wedge \neg R(3)] \vee$$
$$[R(10^9) \wedge IR(10^9{-}1) \wedge IR(10^9{-}2) \dots \wedge IR(5) \wedge \neg R(4) \wedge \neg R(3)] \vee$$
$$[R(10^9) \wedge IR(10^9{-}1) \wedge IR(10^9{-}2) \dots \wedge \neg R(5) \wedge \neg R(4) \wedge \neg R(3)] \vee$$
$$\dots$$
$$[R(10^9) \wedge IR(10^9{-}1) \wedge \neg R(10^9{-}2) \dots \wedge \neg R(5) \wedge \neg R(4) \wedge \neg R(3)] \vee$$
$$[R(10^9) \wedge \neg R(10^9{-}1) \wedge \neg R(10^9{-}2) \dots \wedge \neg R(5) \wedge \neg R(4) \wedge \neg R(3)]$$

Należy zauważyć, że zastąpienie logiki skończenie-wartościowej przez dowolną logikę nieskończenie-wartościową prowadzi nie tylko do dziwacznych i nieintuicyjnych, lecz wręcz trudnych do zrozumienia i wyobrażenia wniosków.

Rzutowanie na punkt osi czasu, będące przyczyną urzeczawiania bytów, które nie są rzeczami, ma jeszcze inne, również wprowadzające w błąd konsekwencje. Jedynie operowanie tym nieuprawnionym przecież rzutowaniem umożliwia wprowadzenie do rozważań, nieobserwowanego w świecie zjawiska stałości i niezmienności. O bezruchu możemy przecież mówić dopiero wtedy, gdy zrzutujemy na punkt osi czasu poruszający się obiekt. Podobnie uzyskamy niezmienność zmiennego bytu. Zabieg ten wydaje się jednak możliwym, przy bardzo specyficznym pojmowaniu punktu czasowego. Naturalnie, aby z ruchu uzyskać bezruch musimy chwilę czasową rozumieć jako obiekt bez wymiarów. I tu pojawia się prawdziwy problem, gdyż takie rozumienie punktu jest typowe dla zabiegu zwanego cięciem Dedekinda. Jak to już wcześniej przypomnieliśmy, cięcie Dedekinda ma dzielić linię na dwie linie, bez najmniejszych strat. Oznacza to, że samo cięcie nie wykorzystuje żadnej części osi czasu. Wymiar tego cięcia wynosi zero. Tylko dzięki temu, powstałe w wyniku cięcia Dedekinda linie są swoimi wzajemnymi lustrzanymi obrazami, a ponadto połączone ze sobą dają pierwotną linię. Takie geometryczne rozumienie chwili czasowej ma jednak swoje konsekwencje. Zerowy punkt czasowy jest zdegenerowanym, czyli o zerowej długości, przedziałem czasowym, takim przedziałem, w którym czas nie zaczął jeszcze płynąć. Zatem, w punktowej chwili czasowej nie tylko nie mamy ruchu, lecz nie mamy również i bezruchu, a to dlatego, że, po prostu, nie mamy niczego. W zerowym przedziale czasu wcale nie mamy nieruchomego obrazu wycinka rzeczywistości, lecz mamy kompletny brak jakiegokolwiek obrazu. Poważnym błędem jest więc przekonanie, że lecąca w lesie między drzewami strzała w jakiejś danej chwili *t* gdzieś spoczywa. Strzała ta nie spoczywa w tej chwili nigdzie, gdyż w chwili będącej punktem czasowym nie tylko nie ma strzały, ale nie ma też, ani lasu, ani świata, gdyż czas jest zredukowany do nicości, zaś w chwili będącej nicością może być jedynie nicość.

Zatem, rzutowanie rzeczywistości, czy też pewnych jej fragmentów na oś czasu jest szkodliwe nie tylko dlatego, że deformuje postrzeganie rzeczywistości prowokując nas do tworzenia pojęć bytów nieistniejących, lecz przede wszystkim dlatego, że samo w sobie jest oszustwem, które zakłada, że posługując się nicością można uchwycić coś, co nie jest nicością[580].

Jeśli więc wykluczamy to, aby niezerowy przedział czasu mógł się składać z zerowych chwil czasowych, czyli z chwil rozumianych jako zerowe przedziały czasu, ciągłość czasu oznaczać będzie, że w każdym przedziale czasu można wyróżnić jedynie inne przedziały. Co więcej, tak początek, jak i koniec każdego przedziału czasu również jest przedziałem tyle, że o infinitezymalnej długości, krócej infinitezymalnym przedziałem. Ta infinitezymalna długość umożliwia rozsądne określenie chwili czasu jako infinitezymalnego punktu czasowego. Zatem, zerowy punkt czasowy, czyli zerowy przedział czasu został tu zastąpiony przez niezerowy punkt czasowy, czyli przez infinitezymalny przedział czasu.

Naturalnie, takie rozumienie chwili czasu wyklucza twierdzenie, że lecąca strzała w każdej chwili czasowej gdzieś spoczywa. Infinitezymalny punkt czasowy, jest przecież przedziałem czasu o niezwykle małej, lecz zawsze niezerowej długości. W takim przedziale czasu nie może być jednak mowy o jakimkolwiek spoczywaniu strzały. Przy przyjętym przez nas rozumieniu wyrażenia „chwila czasowa", strzała nie spoczywa w żadnej chwili swojego lotu. Takie rozumienie chwili uniemożliwia wyabstrahowanie bezruchu z ruchu. Co więcej, przy tym rozumieniu, paradoks strzały staje się argumentem przeciwko bezruchowi: *Załóżmy, że istnieje chwila w czasie trwania lotu strzały, w której to strzała spoczywa w jakimś miejscu. Ponieważ chwila ta jest niezerowym przedziałem czasu, założenie to oznacza, że lecąca strzała na początku tego przedziału zatrzymała się, a na końcu tego przedziału znowu zaczęła lecieć.* Oczywiście rozumowanie to jest absurdalne. Jeszcze gorzej przedstawia się przypuszczenie, że lecąca strzała w każdej chwili swojego lotu spoczywa w jakimś miejscu. Spoczynek jest przecież rozumiany jako niezmienianie swojego położenia w pewnym niezerowym przedziale czasu. Zatem, strzała nie poruszając się w każdym przedziale czasu zmienia swoje położenie – daje to oczywistą sprzeczność. Jednak sprzeczność ta nie wynika już z założenia istnienia ruchu lecz właśnie bezruchu.

Jak widać, nasza propozycja rozwiązania paradoksów nieostrości oraz zmiany opiera się na odrzuceniu rzutowania fragmentów rzeczywistości na oś czasu złożoną z bezwymiarowych chwil. Zgodnie z poglądami Arystotelesa, ani ruch, ani czas, ani rozciągłość nie składają się z bezwymiarowych punktów. Założenie ich istnienia, poza przypadkiem cięcia Dedekinda, jest absurdem, tak jak absurdem jest założenie, że coś co nie jest niczym może się składać z samych nicości, np. prosta zbudowana z samych cięć Dedekinda. Cięcie Dede-

---

[580] Interesujące jest to, że funkcjonująca w fizyce tzw. prędkość chwilowa jest *de facto* prędkością w infinitezymalnym przedziale czasu. Mimo tej mylącej nazwy, nie ma więc w fizyce mowy o jakiejkolwiek prędkości w bezwymiarowym punkcie czasowym.

kinda jest wyznaczeniem idealnie ostrej granicy rozdzielającej to co jest, przy pomocy tego czego nie ma – samo cięcie, z założenia, nie „zużywa" przecież żadnej części prostej. Jak więc prosta ma się składać z podobnych cięć? Odrzucenie bezwymiarowych punktów czasu, ruchu i przestrzeni prowadzi do niezaistnienia paradoksów zwanych, w tym rozdziale, ontologicznymi. Przestaje być bowiem możliwe rzutowanie fragmentu rzeczywistości na bezwymiarowy punkt czasu. Możliwe jest jedynie analizowanie fragmentów rzeczywistości w danym przedziale czasu. Przedział ten w skrajnych przypadkach może mieć infinitezymalną długość, lecz nigdy nie jest przedziałem zerowym. Odrzucenie istnienia bezwymiarowych punktów czasu i przestrzeni czyni niemożliwym wprowadzenie do rozważań, zarówno bezruchu, jak również jakiejkolwiek precyzyjnie określonej własności. Nie mogąc operować stanami bezruchu, nie możemy nawet udawać, że z natury swej zmienne byty zachowują się pod jakimś względem tak, jak gdyby były niezmiennymi. W pozamatematycznych bytach niezmienna może być jedynie ich zmienność. Oznacza to, że paradoksy nieostrości nie dają się nawet sformułować. Ich sformułowanie wymagałoby bowiem uprzedniego, precyzyjnego określenia danej własności, a to jest już niemożliwe. Mamy tu do czynienia z wyraźnym odejściem od matematycznego pojmowania rzeczywistości, na którą nie nakładamy już matematyczno-podobnej siatki pojęć. Odrzuceniu ulega więc matematyczne, a więc, w szczególności, statyczne postrzeganie niematematycznej, dynamicznej rzeczywistości.

Chcąc metaforycznie wyrazić zaproponowaną przez nas diagnozę przyczyn paradoksów nieostrości, a zwłaszcza paradoksów zmian w tym ruchu, sformułujmy następującą, wzorowaną na platońskiej metaforze jaskini, anegdotę o widzach siedzących w ciemnym kinie i oglądających przedstawiany na ekranie film[581]. Anegdota ta wyraźnie nawiązuje do tego fragmentu *Ewolucji twórczej* Bergsona, książki opublikowanej w 1907 roku, w którym umysł człowieka jest porównany do kinematografu[582].

Metafora kina

Każdy z nas, niejeden raz był w kinie. Bez trudu, więc, wyobrazimy sobie ciemną salę, w której ma miejsce projekcja filmu przedstawiającego biegnącego sportowca. Obserwując nieustannie zmieniające się na ekranie obrazy, widzowie mają wrażenie ich realności. Przecież wyraźnie widzą biegacza w ruchu. Nie mają więc najmniejszego powodu wątpić w to, że ruch jest realny. Jednak wśród

---

[581] Platon w siódmej księdze *Państwa* (Platon, *Państwo. Prawa*, *Państwo*, VII, 514–515, s. 220–221) prezentuje sławną metaforę jaskini, która jest dla nas inspiracją dla podsumowania wyrażonej wyżej propozycji ontologicznego rozwiązania paradoksów zmiany, wielu oraz nieostrości.

[582] Bergson, [1913], s. 257–260.

widzów znaleźli się tacy, którzy pragnęli zgłębić tajemnicę obserwowanego zjawiska. Swą dociekliwością znacznie przewyższali pozostałych. Wkrótce więc odkryli kabinę projekcyjną, a w niej aparat wraz z emitowanym przy jego pomocy filmem. Było to niezwykłe odkrycie: ruch okazał się zwykłą ułudą, gdyż powstawał z wielu sekwencji, z których każda wyrażała bezruch. Dumni ze swego odkrycia powrócili na salę i obwieścili wszystkim swą wielką nowinę. Odtąd, każdy widz na sali wiedział, że ruch jest wtórny wobec bezruchu. Podstawą do opisu dynamicznego obrazu biegnącego sportowca jest przecież seria kadrów. Każdy zaś kadr cechuje absolutny bezruch. Ten bezruch daje możliwość dokładnego, matematycznego opisu nieruchomego obrazu. Od tamtej pory, ilekroć widzowie oglądali jakiś film, ci, którzy górowali nad pozostałymi swą dociekliwością byli już w stanie „naukowo" przeanalizować obserwowane na ekranie zjawisko. Każdy film był więc precyzyjnie rozpracowany. I tak, odkryto na przykład, że ruch może się w danym momencie rozpoczynać, potem trwa przez jakiś czas, aby nagle wygasnąć. Niekiedy ruch przechodzi w ruch innego rodzaju. Opracowano wiele rodzajów ruchu, sumiennie je klasyfikując. Jednak zawsze kluczowym dla analiz był bezruch. Powstające analizy były niezwykle precyzyjne – przecież przeprowadzano je w kabinie projekcyjnej. Ci wnikliwi, nie potrzebowali już ekranu. Ekran był dla pospólstwa. Oni, chcąc być bliżej prawdy nie wychodzili już nawet z kabiny. Wiedzieli przecież, że prawda tkwi w długich taśmach, których tysiące kadrów wyrażało kolejne stany bezruchu. To oni odkryli prawdziwą naturę zachodzących na ekranie zmian.

Mimo swego geniuszu nie zauważyli jednak, że wyświetlane na ekranie filmy nie są rzeczywistością, lecz jedynie obrazem rzeczywistości. Nie dostrzegli prawdy, że ktoś te filmy musiał gdzieś, poza kinem, nakręcić. Każdy film prezentował się tym wyraźniej, im ciemniej było w kinie. Należało więc przestrzegać zasad dobrej projekcji, uniemożliwiając przedarcie się do wnętrza kina jakiegokolwiek promienia światła z zewnątrz. W panujących ciemnościach trudno było pamiętać o, rozświetlonym prawdziwym, słonecznym światłem, świecie spoza sali kinowej. Trudno też było znaleźć drzwi prowadzące na zewnątrz. Znacznie łatwiej było dostać się do kabiny projekcyjnej – wystarczyło tylko podążać za słupem światła padającego na ekran. Naturalnie, należało być jeszcze bardzo pracowitym, aby precyzyjnie i sumiennie analizować kolejne kadry, kolejnego filmu. Tymczasem, już samo wyjście z kina natychmiast uświadomiłoby widzom to, że obserwowane na ekranie filmy są tworem człowieka, że są to jedynie obrazy rzeczywistości przecież dostępnej każdemu, kto tylko odważy się na wyjście z kina. Odkryliby wówczas, że nie ruch, jako wtórny, powstaje z pierwotnego bezruchu, lecz że jest dokładnie na odwrót. To bezruch jest wyabstrahowany z ruchu, który realnie istnieje. W rzeczywistości zaś bezruch nie istnieje. Analizowane z uporem godnym lepszej sprawy kadry są zaś jedynie tworem człowieka i mają tyle wspólnego z faktycznym ruchem, że są z niego „wypreparowane". Czy szczególna biegłość w analizowaniu nieruchomych obrazków zaklętych w kadrach filmu ma jakieś rzeczywiste filozoficzne znaczenie?

Może więc najwyższa już pora, aby wyjść z ciemnego kina, a przede wszystkim opuścić ukochaną, dostępną tylko dla nielicznych, kabinę projekcyjną. Może warto uświadomić sobie, że żmudna analiza kadrów z kolejnych filmów jest dobra dla tych, którzy zamierzają analizować tylko te właśnie kadry, a nie prawdziwą rzeczywistość. Może tkwienie w kabinie projekcyjnej nie jest żadnym powodem do dumy? Czy nie nadszedł już czas, aby przestać być filozofem kabiny projekcyjnej? Czy prawdziwym wyzwaniem dla filozofa nie jest świat, który znajduje się poza murami kina?

Całościowa propozycja rozwiązania paradoksów nieostrości oraz zmiany, zwanych w tym rozdziale paradoksami ontologicznymi, powinna zatem polegać na zmianie perspektywy patrzenia na rzeczywistość. Ruch nie jest, ani wtórny wobec bezruchu, ani tym bardziej nie jest żadnym złudzeniem. Podobnie zmiana nie jest wtórna wobec stałości, lecz to stałość jest wtórna wobec zmiany. Realny jest tylko ruch, złudzeniem jest natomiast bezruch. Bezruch i stałość są wyabstrahowane, odpowiednio, z ruchu i ze zmiany. Rzeczy pojmowane jako niezmienne obiekty nie istnieją. Stałe, choćby przez małą chwilę, niezmienne rzeczy są złudzeniem i powstają jako kolekcje precyzyjnych, bo niezmiennych własności. Stałe ze swej natury własności rzeczy są zaś wyabstrahowane z nieustannie zmieniających się bytów. Podstawą wszystkich wspomnianych tu procesów abstrahowania jest założenie istnienia bezwymiarowych punktów czasu. Abstrahowanie polega bowiem na rzutowaniu dynamicznych fragmentów rzeczywistości na oś czasu, co daje wrażenie uchwycenia dynamicznej rzeczywistości w postaci statycznego, niezmiennego obrazu. Punkty ruchu i przestrzeni są skutkiem tego rzutowania. Powstały w wyniku tego właśnie procesu obraz składa się ze statycznych rzeczy, które pozostają do siebie w pewnych statycznych relacjach. Aby w tym sztucznym świecie można było odtworzyć zmianę i ruch koniecznym jest posłużenie się serią takich pozbawionych ruchu i zmian, punktowych obrazów rzeczywistości, układając je w uporządkowany zgodnie z osią czasu zbiór. Ponadto, zakłada się, że zbiór ten jest ciągły. Zmienność i ruch w naszym obrazie rzeczywistości są więc skutkiem „sklejenia" niezmiennych, stałych obrazów. Odtworzenie występujących w rzeczywistości ruchu i zmienności jest więc procesem, którego etap przejściowy polega na zastąpieniu zmiany przez stałość, a w szczególności ruchu przez bezruch. Takie sklejanie dynamicznego obrazu rzeczywistości z obrazów statycznych, grozi popadnięciem w błąd utożsamienia dynamicznego fragmentu rzeczywistości będącego nieustającym procesem zmian z którymś z jego punktowych rzutów lub, w najlepszym razie, z serią takich rzutów. Mamy tu do czynienia z urzeczowianiem tego co rzeczą nie jest. Błąd ten objawia się więc wiarą w istnienie rzeczy posiadających jakieś określone własności, które mogą się co prawda zmieniać, czyli mogą być zastępowane przez inne własności, jednak same są dość precyzyjne, nawet wówczas, gdy sami nie jesteśmy w stanie, z jakichś powodów, precyzyjnie je opisać. Paradoksy nieostrości i zmian są naturalną i nieuniknioną konsekwencją tego błędu. Skoro człowiek jest zbiorem punktowych obrazów; każdy zaś obraz precyzyjnie określa własności tego człowieka, którym to własnościom możemy nadać jakieś z natury sztywne nazwy; skoro na jednym zdjęciu człowiek jest niełysy, a na innym jest łysy, to w którym miejscu człowiek ten przestał być niełysym? Co więcej, utożsamienie człowieka z jego punktowym obrazem sprawia, że powstaje problem tożsamości tego człowieka – przecież każdy obraz będący tym samym człowiekiem jest inny, zwłaszcza wtedy, gdy punkty czasowe, na które realny, będący procesem zmian człowiek był rzutowany, są od siebie bardzo odległe. Uświadamiając sobie popełniony błąd widzimy żenującą sztuczność tych problemów. Z przyjętego przez nas punktu widzenia, nie dotykające sedna sprawy analizy problemów nieostrości i zmiany wydają się wręcz niepoważne. Dyskusja nad sprzecznością ruchu jest niczym nieuzasadniona, gdyż nie jest w niej analizowany ruch, lecz coś co ma go zaledwie imitować, a co jest tak naprawdę jedynie sklejeniem serii pozbawionych ruchu obrazów. Podobnie, niepoważnie wygląda dyskusja nad tym, czy nieostrość jest zjawiskiem jedynie językowym, czy może dotyczyć także rzeczywistości. Tymczasem w tych rozważaniach to co jest brane za rzeczywistość jest jedynie serią jej statycznych, sztucznych obrazów.

Wszystko to sprawia, że paradoksy nieostrości oraz zmiany są przez nas rozpoznane jako paradoksy ontologiczne, gdyż wynikają z błędnego, w podanym wyżej sensie, postrzegania bytu. Ta naiwność obowiązującej dość powszechnie ontologii polega właśnie na tym, że sztuczny, statyczny obraz rzeczywistości jest brany za samą rzeczywistość. Sądząc, że analizujemy byt, tak naprawdę, analizujemy jedynie jego przedziwny obraz, wierząc mocno w to, że jest on rzeczywistością. Takie wyjaśnienie paradoksów Zenona z Elei proponuje wspomniany już wcześniej, Henri Bergson. Wykorzystana wyżej metafora kinematografu, w jego *Ewolucji twórczej* tłumaczy potrzebę operowania przez umysł człowieka bezruchem. Zastanawiając się nad tym, w jaki sposób można by odtworzyć scenę ożywioną, np. maszerującego pułku wojska, Bergson dochodzi do wniosku, że najprościej byłoby[583]: „zdjęcie z przechodzącego pułku szeregu obrazów migawkowych, i rzutowanie tych zdjęć na ekran tak, aby następowały po sobie bardzo szybko. Tak robi kinematograf. Za pomocą fotografii, z których każda przedstawia pułk w pewnej postawie nieruchomej, odtwarza on ruchomość pułku przechodzącego." Takie rekonstruowanie ruchu z bezruchu jest jednak czymś sztucznym, a ponadto mylącym – nie jest bowiem możliwe, aby prawdziwy ruch odtworzyć z bezruchu[584]: „Prawda, że gdybyśmy

[583] Bergson, [1913], s. 258.
[584] Bergson, [1913], s. 258.

mieli do czynienia z samemi tylko fotografiami, próżnobyśmy im się przyglądali, nie ożywiłyby się one w naszych oczach: z nieruchomości, nawet nieograniczenie dodawanej do siebie, nigdy nie zrobimy ruchu. Aby się obrazy ożywiły, musi gdzieś zachodzić ruch. Ruch istnieje tu rzeczywiście: jest on w przyrządzie. Ponieważ filma kinematograficzna rozwija się, powodując to, że różne fotografie danej sceny, z których każda stanowi dalszy ciąg poprzedniej, następują po sobie kolejno, więc każdy z aktorów tej sceny odzyskuje swą ruchomość: nawleka wszystkie swe kolejne postawy na niewidzialny ruch filmy kinematograficznej. [...] Taki jest wybieg kinematografu. Taki jest również wybieg naszego poznania. Zamiast przywiązywać się do wewnętrznego stawania się rzeczy, umieszczamy się na zewnątrz nich, aby sztucznie odbudować ich trwanie. Zdejmujemy widoki niemal migawkowe z przechodzącej rzeczywistości, a ponieważ są one charakterystyczne dla tej rzeczywistości, wystarczy, gdy je nawleczemy wzdłuż stawania się oderwanego, jednostajnego, niewidzialnego, umieszczonego w głębi przyrządu poznania, aby naśladować to, co jest charakterystyczne w tem stawaniu się samem. Postrzeganie, pojmowanie, mowa na ogół tak postępują. Czy chodzi o myślenie o stawaniu się, czy też o jego wyrażenie, czy nawet o postrzeżenie, nie czynimy zgoła nic innego, tylko wprowadzamy w ruch rodzaj kinematografu wewnętrznego. Można by więc streścić wszystko poprzedzające, mówiąc, że *mechanizm naszego potocznego poznania jest natury kinematograficznej*." Nie można więc zrekonstruować prawdziwego ruchu ze stanów bezruchu. To co powstanie, będzie jedynie namiastką ruchu, w rzeczywistości będąc jednak wciąż, jedynie bezruchem. Tymczasem, jak czytamy we *Wstępie do Metafizyki* z 1903 roku[585]: „Rzeczywistość [...] jest ruchomością[586]. Nie ma rzeczy gotowych, są jedynie rzeczy, które się stają, nie ma stanów trwałych, są tylko stany, które się zmieniają. Spoczynek zawsze jest tylko pozorny albo raczej względny. Nasza świadomość własnej osobowości w jej ciągłym przepływaniu wprowadza nas do wnętrza rzeczywistości, na podobieństwo której powinniśmy sobie wyobrażać inne. *Wszelka rzeczywistość jest więc dążeniem, jeśli się umówimy, że nazywamy*

---

[585] Bergson, [1963], s. 51–52. Na wartość filozofii Bergsona dla rozwiązania paradoksów nieostrości wskazuje Jacek Janas-Kaszczyk. W swym artykule *Zmiana struktur ontycznych a nieostrość. Próba ugruntowania ontologicznego aspektu nieostrości na przykładzie poglądów H. Bergsona* z 1988 r., zwraca uwagę na ontologiczne pochodzenie problemów nieostrości. Jego zdaniem problemy te wynikają z faktu, iż rzeczywistość językowa ma charakter stały, pozajęzykowa zaś, zmienny. Janas-Kaszczyk zauważa, że ta właśnie kwestia ma swoje istotne rozwinięcie w filozofii Bergsona, w której paradoksy nieostrości, zmiany, tożsamości przestają być problemami, Janas-Kaszczyk, [1988].

[586] Zdanie to Bergson uzupełnia przypisem: „Powtarzam, że mówiąc tak nie odrzucamy bynajmniej *substancji*. Stwierdzamy, przeciwnie, substancjalne istnienie egzystencyj (*la persistance des existences*). I sądzimy, żeśmy przez to ułatwili wyobrażenie substancji. Jak można więc porównywać tę doktrynę z doktryną Heraklita?", Bergson, [1963], s. 51.

dążeniem zmianę kierunku statu nascendi." Podobnie, w swoich dwóch wykładach pod wspólnym tytułem *Postrzeżenie zmiany*, wygłoszonych na Uniwersytecie Oxfordzkim w 1911 roku, Bergson odrzuca rekonstruowanie ruchu z następujących po sobie, niezliczonych stanów bezruchu. Kwestionuje, w ten sposób, możliwość nieskończonego dzielenia ruchu na wzór nieskończonego dzielenia geometrycznie pojmowanej przestrzeni[587]: „Jak coś, co się porusza, miałoby być zbieżne z czymś, co jest nieruchome? Jak przedmiot w ruchu *miałby* być w jednym punkcie swej drogi? On ją *przebywa* albo, innymi słowy, *mógłby tam być*. Byłby tam, gdyby się zatrzymał: lecz gdyby się zatrzymał, nie mielibyśmy do czynienia z tym samym ruchem. Gdy na drodze nie ma przerw, przebywana jest zawsze jednym skokiem. Skok ten może trwać kilka sekund, ale może także trwać wiele dni, miesięcy, lat: mniejsza o to. Z chwilą gdy jest jedyny, nie może się dzielić na części." Przenoszenie założonej w matematyce nieskończonej podzielności przestrzeni geometrycznej, na ruch, czy czas jest dla Bergsona nieuprawnione[588]: „Ponieważ jednak tor drogi raz przebytej jest przestrzenią, a przestrzeń jest nieskończenie podzielna, wyobrażamy sobie, że ruch także jest nieskończenie podzielny. Jesteśmy skłonni tak sobie wyobrażać, ponieważ w ruchu nie interesuje nas zmiana pozycji, lecz same pozycje, ta, którą poruszający się przedmiot opuścił, ta, którą zajmie, ta, którą zająłby, gdyby zatrzymał się w drodze. Potrzebny nam jest bezruch; w im większym stopniu zdołamy sobie przedstawić ruch jako zbieżny z nieruchomymi punktami przestrzeni, którą przebywa, tym lepiej w naszym mniemaniu go rozumiemy. W gruncie rzeczy, prawdziwy bezruch nie istnieje, jeśli rozumiemy przez to brak ruchu. Ruch jest samą rzeczywistością, a to, co nazywamy bezruchem, jest pewnym stanem rzeczy analogicznym do tego, jaki powstaje, kiedy dwa pociągi jadą z tą samą szybkością w tym samym kierunku po dwóch równoległych torach: każdy z tych pociągów jest nieruchomy dla pasażerów siedzących w drugim. [...] Rozumować tak, jak Zenon, to przypuszczać, że bieg może być dowolnie rozłożony, tak jak przebyta przestrzeń, to sądzić, że bieg realnie odnosi się do toru; to zakładać zbieżność, a w konsekwencji mieszać razem ruch i bezruch. A na tym właśnie polega metoda, którą zazwyczaj stosujemy. Rozważamy ruch tak, jak gdyby się składał z bezruchów, a gdy go oglądamy, odtwarzamy go z bezruchów. Ruch jest dla nas jedną pozycją, później inną, i tak w nieskończoność. Powiadamy sobie co prawda, że musi tu być i coś innego i że między jedną a drugą pozycją istnieje *przejście*, w którym przebyty zostaje interwał. Z chwilą jednak, gdy skierowujemy uwagę na to przejście, czynimy z niego szybko szereg pozycji, skłonni do uznania, iż między dwiema następującymi po sobie pozycjami trzeba oczywiście założyć przejście. I nieskończenie odsuwamy moment wzięcia pod uwagę tego przejścia.

---

[587] Bergson, [1963], s. 114–115.
[588] Bergson, [1963], s. 115–117.

Zakładamy, że istnieje, nadajemy mu nazwę i to nam wystarcza: załatwiwszy tę sprawę zwracamy się w stronę pozycji i wolimy z nimi tylko mieć do czynienia. Instynktownie boimy się trudności, jakie wywołałaby w naszej myśli wizja ruchu w tym, co ma on ruchomego; i mamy rację, skoro obciążyliśmy ruch momentami bezruchu. Jeśli ruch nie jest wszystkim, jest niczym; i jeśli z góry założymy, że bezruch może być rzeczywistością, ruch prześliźnie się nam między palcami wtedy właśnie, gdy będziemy przekonani, że go trzymamy. Mówiłem o ruchu, ale mógłbym powiedzieć to samo o każdej innej zmianie. Wszelka rzeczywista zmiana jest niepodzielna." Już z tych jedynie słów Bergsona, wynika nieuchronność dojścia do sprzeczności w wyniku argumentacji typowej dla paradoksów nieostrości i paradoksów zmian. Przeciwstawienie się Bergsona istnieniu niezmiennych rzeczy posiadających konkretne własności jest wyraźne[589]: *Istnieją zmiany, ale nie ma pod zmianą rzeczy, które się zmieniają; zmiana nie potrzebuje substratu. Istnieją ruchy, ale nie ma przedmiotu bezwładnego, niezmiennego, który by się poruszał: ruch nie implikuje czegoś, co się porusza*".

To co my nazywamy rzutowaniem na oś czasu, Bergson, w swej pierwszej, ważnej rozprawie *O bezpośrednich danych świadomości* z roku 1889, określa mianem *myślenia w przestrzeni*[590]. To odnoszenie całej rzeczywistości do siatki przestrzennej jest przyczyną zarówno wprowadzania bezruchu tam gdzie jest jedynie ruch, jak również dostrzegania rzeczy, tam gdzie ich nie ma. Bergson, wyjaśnia przyczynę popełnianych przez nas błędów[591]: „W życiu codziennym główna część czynności naszego umysłu szukającego stałych punktów oparcia polega na wyobrażaniu sobie stanów oraz rzeczy. Od czasu do czasu robi on niejako migawkowe zdjęcia z niepodzielnej ruchomości rzeczywistego bytu. W ten sposób otrzymuje *wrażenia* i *idee*. Przez to wprowadza zamiast ciągłości – nieciągłość, zamiast ruchomości – stałość, zamiast dążenia ciągle się zmieniającego – punkty stałe, wskazujące kierunek zmiany i dążenia. To zastępowanie jest konieczne dla zdrowego rozsądku, dla języka, dla życia praktycznego i nawet w pewnym stopniu, [...] dla nauk pozytywnych. *Idąc za swą naturalną skłonnością nasz intelekt posługuje się z jednej strony postrzeżeniami stałymi, z drugiej stałymi pojęciami.* Wychodzi z tego, co nieruchome, ujmuje i wyraża ruch tylko jako funkcję nieruchomości. Umieszcza się wśród pojęć gotowych i usiłuje w nie schwytać jak w sieć coś z rzeczywistości, która płynie. Nie ulega wątpliwości, że nie stawia sobie za cel

---

[589] Bergson, [1963], s. 119.

[590] Termin ten, jak zauważa Barbara Skarga, jest dość powszechnie kojarzony z psychologiczną interpretacją, co jej zdaniem, nie jest trafnym odczytaniem myśli Bergsona. Wydaje się, że znacznie bardziej zgodne z intencjami Bergsona, zwłaszcza w kontekście przytoczonych wyżej cytatów, jest rozumienie zwrotu *myślenie w przestrzeni* jako *poznawanie w przestrzeni*. Patrz, Skarga, [1982], 31–33.

[591] Bergson, [1963], s. 52.

wewnętrznego i metafizycznego poznania rzeczywistości, ale po prostu posługuje się nią: każde pojęcie (podobnie zresztą jak każde wyrażenie) jest *pytaniem praktycznym*, które działalność nasza stawia rzeczywistości i na które rzeczywistość, jak przystało w interesach, odpowie „tak" albo „nie". Ale przez to wymyka mu się z rzeczywistości to, co stanowi samą jej istotę." W innej zaś pracy dodaje[592]: „Taki sposób wyobrażania sobie rzeczy przychodzi nam z trudem, ponieważ zmysłem *par excellence* jest zmysł wzroku, a oko ma zwyczaj wycinania z całości pola widzenia figur względnie niezmiennych, które mają rzekomo się przemieszczać nie zniekształcając się: ruch miałby się dołączać do przedmiotu ruchomego jako coś akcydentalnego".

Można przypuszczać, że statyczne ujmowanie dynamicznego świata jest nie tyle „dla języka" którym operujemy, lecz właśnie z powodu tego języka. Jak już wcześniej wspomnieliśmy, już sama składnia języka wraz z jego funkcją semantyczną wymuszają na nas pewien specyficzny, statyczny obraz rzeczywistości rojącej się od rzeczy, z konieczności opisywanych „precyzyjnymi" własnościami. Nawet proces jest w naszym języku urzeczowiony, podobnie jak trwanie, czy zmiana. Jednak pozostałe uwagi Bergsona wyraźnie wskazują na daleko posuniętą zbieżność z proponowanym przez nas spojrzeniem na paradoksy nieostrości i zmiany.

W tej samej pracy, Bergson zwraca również naszą uwagę na wypomnianą już wyżej, niestosowność przenoszenia metod sprawdzających się na gruncie nauk przyrodniczych na grunt refleksji filozoficznej[593]: „Trudności immanentnie tkwiące w metafizyce, antynomie, którym daje ona początek, sprzeczności, w które popada, podział na szkoły antagonistyczne i nieuniknione przeciwieństwa między systemami – wszystko to w znacznej mierze wynika stąd, że do bezinteresownego poznania rzeczywistości, stosujemy metody, którymi posługujemy się zazwyczaj w celach użytku praktycznego. Stąd przede wszystkim, że obieramy sobie stanowisko w nieruchomości, aby śledzić ruch w przepływie, zamiast zająć stanowisko w tym, co ruchome, aby wraz z nim przechodzić przez pozycje nieruchome. Stąd, że pretendujemy do rekonstruowania rzeczywistości będącej dążeniem, a więc ruchomością, za pomocą postrzeżeń i pojęć, których zadaniem jest ją unieruchomić. Z momentów spoczynku, nawet najliczniejszych niepodobna otrzymać ruchomości, gdy tymczasem wziąwszy za punkt wyjścia ruchomość można w myśli wydobyć z niej tyle momentów spoczynku, ile się zapragnie. Innymi słowy, łatwo zrozumieć, że *pojęcia stałe mogą być przez naszą myśl wysnute z rzeczywistości ruchomej; nie ma jednak sposobu, aby za pomocą pojęć stałych zrekonstruować ruchomość rzeczywistości*. A przecież dogmatyzm, jako budowniczy systemów, kusił się zawsze o taką rekonstrukcję. Nie mogło mu się to udać". Tą

[592] Bergson, [1963], s. 119–120.
[593] Bergson, [1963], s. 52–53.

niemożliwą do przezwyciężenia trudnością, tłumaczy Bergson pojawienie się w filozofii niektórych jej nurtów[594]: „Tę właśnie niemożność, i tylko tę niemożność, stwierdzają takie doktryny jak sceptycyzm, idealizm, krytycyzm, słowem wszystkie te, które odmawiają naszemu umysłowi zdolności dotarcia do absolutu. Ale stąd, że daremne są nasze usiłowania zrekonstruowania żywej rzeczywistości za pomocą sztywnych i gotowych pojęć, nie wynika bynajmniej, abyśmy nie mogli uchwycić jej w jakiś sposób. *Wszystkie więc dotychczasowe dowody względności naszego poznania są obarczone tym samym grzechem pierworodnym: podobnie jak dogmatyzm, przeciw któremu występują, zakładają, że wszelkie poznanie musi koniecznie wychodzić z pojęć o stałych konturach, aby w nich zawrzeć rzeczywistość, która przepływa*".

Bergson nie tylko dostrzega ten podstawowy błąd naszego poznania, lecz próbuje wskazać sposób jego uniknięcia[595]: „Prawdą jest natomiast, że umysł nasz może iść drogą odwrotną. Może zająć stanowisko w rzeczywistości ruchomej, przybierać jej kierunek wciąż się zmieniający, i wreszcie ująć ją w sposób intuicyjny. W tym celu umysł musi zadać sobie gwałt, musi odwrócić kierunek czynności, za pomocą której zazwyczaj myśli, musi zmieniać bez przerwy albo raczej przerabiać wszystkie swoje kategorie. Ale w ten sposób dojdzie w końcu do pojęć płynnych, zdolnych podążać za rzeczywistością we wszystkich jej falowaniach i przybierać ruch samego życia wewnętrznego rzeczy. Tylko w ten sposób powstać może filozofia postępowa, uwolniona od sporów toczących się między szkołami i mogąca rozwiązywać zagadnienia w sposób naturalny, ponieważ wyzwoli się ona z więzów sztucznych terminów, które wybrano przy stawianiu tych zagadnień. *Filozofowanie polega na odwróceniu zwykłego kierunku pracy myśli.*" Niestety, Bergson nie podaje przykładu podjęcia przez kogokolwiek podobnego wysiłku. Co więcej, sam zauważa, że „Odwracanie to nie było dotąd nigdy uprawiane metodycznie". Ma jednak nadzieję, na to, że któregoś dnia cel ten zostanie osiągnięty[596].

Do wskazanych wcześniej, raczej drobnych i nieznaczących, różnic, dzielących filozofię Bergsona od proponowanego przez nas podejścia do paradoksów ontologicznych należy dodać różne sposoby postrzegania matematyki. W przeciwieństwie do, pełnego zachwytu i uwielbienia, spojrzenia Bergsona na matematykę, należy chyba dostrzec, iż matematyka w swym klasycznym kształcie służy raczej statycznemu odwzorowywaniu dynamicznej rzeczywistości, że to właśnie matematyka i specyficzny język naturalny są odpowiedzialne za naszą skłonność do unieruchamiania tego co dynamiczne, i tworzenia rzeczy z czegoś co rzeczami nie są. Dlatego też, problem wyjścia z metaforycznego kina, wydaje się być dużo trudniejszy niż mogłoby to

[594] Bergson, [1963], s. 53–54.
[595] Bergson, [1963], s. 54.
[596] Bergson, [1963], s. 54.

wyglądać na pierwszy rzut oka. Najprawdopodobniej, pełna realizacja tej „postępowej" Bergsonowskiej filozofii wymaga nie tylko nowego języka, lecz również zupełnie nowych, dynamicznych, struktur myślowych, które mogłyby być ustalone w ramach nowej matematyki posługującej się nową logiką, w jakiś sposób, odpowiadającą klasycznej. Wydaje się, że ta nowa matematyka powinna być wolna od tak bardzo podstawowego, lecz chyba zgubnego dla dotychczas rozwijanych w filozofii europejskiej ontologii, pojęcia zbioru.

Pewnym, nie posiadającym swojej własnej nazwy paradoksem jest to, że filozofia Bergsona była atakowana za operowanie nieścisłymi pojęciami, a właściwie, za łatwo dostrzegalny brak ścisłych pojęć, pojęć, których określenie byłoby zagwarantowane przez precyzyjne definicje. Dlatego też, pojawiła się pewna skłonność od lekceważenia idei Bergsona i postrzegania ich twórcy jako poety czy mistyka, nie zaś jako filozofa[597]. Doceniająca znaczenie filozofii Bergsona Barbara Skarga, w swej monografii *Czas i trwanie. Studia o Bergsonie* wydanej w 1982 roku, przedstawia te dość powszechne opinie w następujących słowach[598]: „Niejednokrotnie się powtarza, że styl ten urąga wymogom języka naukowego. Dla wielu historyków filozofii Bergson jest tylko poetą. Literackość jego dzieł wydaje się wykluczać to, co w oczach każdego uczonego jest najbardziej cenne, a więc precyzję myśli, jej ścisłość. Cóż z tego, że pisał językiem pięknym, który został nagrodzony przez Akademię Literatury, język ten przeczy regułom filozoficznego dyskursu. Bergson nie potrafił podać ani jednej porządnej definicji podstawowych dla jego dzieła pojęć takich, jak „trwanie", „obraz", „pęd witalny", „intuicja" itd. Niekiedy wręcz odmawiał ich definiowania. Stąd terminy, których używał, są wieloznaczne, przesycone metaforycznością właściwą literaturze, a nie nauce. Z literaturą zaś dyskutować nie można." Sama jednak zdecydowanie odrzuca te poglądy, twierdząc, że[599]: „Trudno byłoby się zgodzić z powyższą opinią, która zaczyna nas razić w świetle ostatnich badań nad językiem filozoficznym i językiem nauki. Na ogół spotyka się ją dzisiaj ze strony tych, którzy dzieło Bergsona mało znają. Jest ono na pewno czymś więcej niż literaturą, a jego język nie jest bynajmniej dyktowany wyłącznie regułami estetyki, lecz pewnym świadomym wyborem. Mało tego, Bergson zachęcał, byśmy w podobnym stylu myśleli i pisali".

Brak ścisłych pojęć w filozofii Bergsona wydaje się być jak najbardziej uzasadniony samą jego filozofią. W rozdziale tym, poświęconym paradoksom ontologicznym, wyszliśmy od analizy prostych, znanych od wieków, dylematów nieostrości i zmiany, aby dojść do wniosków zbieżnych z pewnymi, podstawowymi poglądami Bergsona. Wnioski te są jasne i wyraźne: *statyczny,*

[597] Copleston, [1998], tom IX, s. 180–181.
[598] Skarga, [1982], s. 30.
[599] Skarga, [1982], s. 31.

zmatematyzowany język nie ma szans, na to, aby w niesprzeczny, spójny sposób wyrazić dynamiczną rzeczywistość. Tak oto, w niewątpliwie uproszczonej formie, odtworzyliśmy drogę, którą przebył sam Bergson zmagający się z paradoksami Zenona z Elei. Wyszedł on bowiem od, powszechnie znanych, paradoksów ruchu i doszedł do zakwestionowania ścisłości języka którym się posługujemy, tak w codziennym życiu, jak i w badaniach naukowych. W podobny sposób, wychodząc już nie tylko od paradoksów Zenona, lecz od wszelkich paradoksów, zwanych tu ontologicznymi, doszliśmy do uznania, iż wszystkie[600], niematematyczne pojęcia są nieostre. Nie mogą więc być podstawą ścisłych analiz, w tym analiz filozoficznych. Zapewne, widząc ten sam problem, Bergson zaproponował swoją, znaną ocenę, opartej na „ścisłych" i „dobrze" zdefiniowanych pojęciach, praktyki poznawczej człowieka. Paradoksem jest więc to, iż poglądy Bergsona, będące swoistym protestem przeciwko tej notorycznej nieścisłości funkcjonujących w filozofii pojęć, są atakowane i odrzucane właśnie za operowanie nieścisłymi pojęciami.

Tymczasem, już prosta analiza paradoksów ontologicznych pokazuje nam, jak precyzyjnymi pojęciami operują filozofowie. Weźmy pod uwagę, uznawaną do dzisiaj za dość poprawną, Arystotelesową definicję człowieka: *Człowiek jest to zwierzę rozumne*. Nieścisłość tej definicji jest uderzająca. Fakt ten wynika z nieostrości dwóch nazw „zwierzę" oraz „rozumność". O ile nieostrość słowa zwierzę nie odgrywa tu większej roli, a to z tego prostego powodu, iż o rozumności możemy mówić raczej w przypadkach tych istot, których zwierzęcość nie budzi wątpliwości, o tyle problemy trudne, żeby nie powiedzieć niemożliwe do rozwiązania wiążą się z rozumieniem słowa „rozumność". Naturalnie, rozumność może być różnie pojmowana. Nie istnieje jednak takie znaczenie, aby nie wynikała z niego wadliwość wspomnianej definicji. Załóżmy bowiem, że rozumnym jest każdy, kto potrafi wyciągać choćby najprostsze, zupełnie elementarne wnioski z danych przesłanek. Bez trudu można wyobrazić sobie sytuację, w której niewątpliwie rozumna, w przyjętym wyżej sensie, osoba zapadła na zdrowiu do tego stopnia, że temperatura jej ciała osiągnęła niebezpieczny poziom. Skutkiem tego stanu jest niemożność nie tylko logicznego myślenia, lecz również niemożność formułowania prostych sensownych zdań. W tej sytuacji, „ścisłe" stosowanie naszej definicji prowadzi do prostego wniosku, że na pewien czas, nasz chory przestał być istotą rozumną, co oznacza, że ktoś, kto niewątpliwie jest człowiekiem, na pewien czas przestał być człowiekiem. Jest to oczywista niedorzeczność. Ścisłe stosowanie tej definicji sprawia, że wielu upośledzonym osobom musielibyśmy odmówić człowieczeństwa, co jest nie tylko niedorzecznością, lecz również nieprzy-

---

[600] Wszystkie poza takimi nazwami i predykatami jak „ruch", „bezruch", „być w ruchu", być w spoczynku" itp.

zwoitością. Oczywiste kłopoty wiążą się także z zakwalifikowaniem istot uważanych za naszych przodków. Słowo „przodek” nie jest tu rozumiane jako „przodek człowieka”, bo z samej nazwy, przodek człowieka najwyraźniej nie jest człowiekiem. Przyjmijmy, że znaczenie tego słowa jest ogólniejsze, a więc słowo to oznacza kogoś, kto zajmuje jakieś miejsce w szeregu istot, które pozostają wobec siebie w relacji dziecko-rodzic, zaś na początku tego, cofającego się w czasie, szeregu jest istota, która bez wątpienia jest człowiekiem. Wówczas, biorąc pod uwagę proces ewolucji, musimy przyjąć, że cofając się w czasie w szeregu przodków, prędzej czy później natrafimy na kogoś, kto na pewno nie jest rozumny w jakimkolwiek sensie tego słowa. Nierozumnym przodkiem człowieka musi przecież być chociażby jakiś organizm pierwotniaka. W którym jednak miejscu możemy z pewnością wyznaczyć granicę rozumności? Pojawia się tu dodatkowy problem: czy wyznaczenie tej granicy nie prowadziłoby do niechcianego rozszerzenia zakresu słowa „człowiek”? Przecież, mogłoby się okazać, że jakieś zwierzę, którego nie chcielibyśmy nazwać człowiekiem jest w jakimś sensie rozumne.

Problem tej definicji, jak i każdej innej, która nie definiuje obiektu matematycznego, polega bowiem na tym, że tak naprawdę, człowiek jest definiowany ostensywnie – ten konkretny obiekt stojący po mojej prawej stronie, jest człowiekiem, tamten też jest, jednak ten po lewo ode mnie już nie jest. Przypadki, które bierzemy pod uwagę są typowe, w tym sensie, że dotyczą obiektów, które bez trudności możemy rozpoznać jako człowieka lub jako nie-człowieka. Ta typowość rozpoznawanych przez nas przypadków sprawia, że mamy wrażenie wyraźności pojęcia człowiek. Z tej zaś wiary wynika przekonanie o istnieniu precyzyjnej definicji człowieka, definicji, która byłaby zupełną. Tymczasem, tak właśnie nie jest i nigdy nie było. Definicja człowieka jest warunkowa. Gdy obiekt o spełnia warunki K_1, to bez wątpienia jest człowiekiem, gdy obiekt o spełnia warunki K_2, to bez wątpienia nie jest człowiekiem[601]. Oczywiście, zarówno warunki K_1, jak i K_2 są opisane bardzo precyzyjnie – tak precyzyjnie, jak to tylko umożliwia nam współczesna nauka. Okazuje się jednak, że po pierwsze warunki K_1 i K_2 nie wyczerpują wszystkich stanów, w jakim może pozostawać obiekt o, a po drugie stany opisane tymi warunkami wcale nie są wyraźne – człowieczeństwo obiektu, który tylko nieznacznie nie spełnia warunków K_1 może być niewątpliwe, jak również nie budzące wątpliwości może być nie-człowieczeństwo obiektu, który tylko nieznacznie nie spełnia warunków K_2. Oczywiście, chodzi tu o doskonale znaną nam nieostrość obu klas warunków.

[601] Zazwyczaj koncentrujemy się na warunkach K_1, które pozytywnie opisują dane pojęcie. Niekiedy, bywa jednak i tak, że warunki K_2, opisujące negatywnie jakieś pojęcie, okazują się nie mniej ważne.

Arystotelesowa definicja człowieka jest jedynie przykładem, skazanego na nieścisłość, definiowania dowolnego, pozamatematycznego obiektu. Każda taka definicja pokazuje nam nieusuwalną nieścisłość definiowanego wyrażenia. W istocie, poza matematyką, nie mamy wyrażeń precyzyjnych, lecz wyłącznie nieostre, pojmowane w sposób przybliżony zgodny z pragmatycznym podejściem do nieostrości. Opisane wcześniej podejście pragmatyczne, zabrania nam stosowania nieostrych wyrażeń w przypadkach budzących wątpliwości, czyli w obszarach nieostrości tychże wyrażeń. Ta, przestrzegana z żelazną konsekwencją, zasada sprawia, że potrafimy sobie radzić, zarówno na co dzień, jak i w nauce, z terminami notorycznie nieostrymi. Ta, stosowana od wieków, praktyka stała się dla nas tak bardzo naturalna, iż niekiedy, dostrzeżenie nieostrości niektórych terminów przychodzi nam z wielkim trudem. Samo zaś, oczywiste przecież, spostrzeżenie przyjmujemy z prawdziwym niedowierzaniem.

Uświadamiając sobie wszechobecną i nieusuwalną nieostrość pojęć i stanów, trudno zrozumieć, że ktoś może wierzyć w istnienie precyzyjnego opisu niematematycznych zjawisk. W części trzeciej *Filozofii i składni logicznej* z 1935 roku, zatytułowanej *Składnia jako metoda filozofii*, Rudolf Carnap (1891–1970) wyjaśnia istotę fizykalizmu w sposób następujący[602]: „W naszych dyskusjach w Kole Wiedeńskim doszliśmy do wniosku, że język fizykalny jest podstawowym językiem całej nauki, że jest on językiem uniwersalnym, w którym można wyrazić treść wszystkich innych języków naukowych. Innymi słowy, każde zdanie z zakresu jakiegokolwiek języka naukowego posiada odpowiadające mu zdanie języka fizykalnego, a zatem może być przetłumaczone na ten język bez zmiany jego treści. Dr Neurath, który był jednym z twórców tej koncepcji, proponował nazwać ją *fizykalizmem*. Dla wyjaśnienia rozważmy następujące zdanie psychologiczne: „O godz. 10 pan *A* był zły”. Odpowiadające mu zdanie w języku fizykalnym brzmi: „O godz. 10 pan *A* znajdował się w stanie cielesnym charakteryzującym się przyspieszonym oddychaniem i pulsem, napięciem pewnych mięśni, tendencją do gwałtownego zachowania się etc.” Oznaczmy stan złości przez „Q_1”, a odpowiadające mu cechy fizyczne ciała przez „Q_2” oraz godzinę 10 przez „t”. Możemy wtedy zapisać oba zdania symbolicznie w sposób następujący: (psychologicznie) $Q_1(A,t)$, (fizykalnie) $Q_2(A,t)$. Przedstawimy teraz prawo nauki, czyli uniwersalne zdanie należące do prawdziwych zdań naukowego systemu językowego, które mówi, że jeśli ktokolwiek jest zły, to jego ciało znajduje się w określonym stanie fizycznym i *vice versa*. Jego symboliczna postać wygląda następująco: $\forall x\ \forall t\ [Q_1(x,t) \equiv Q_2(x,t)]$. (Znak równoważności $\equiv$ oznacza implikację dwukierunkową.) Dodajmy, że charakterystyka Q_2 jest tak dobrana, żeby powyżej sformułowane

[602] Carnap, *Filozofia i Składnia Logiczna*, (fragm.) tłumaczenie H. Buczyńska, [w:] Buczyńska, [1960], s. 160–161.

prawo było obowiązującym prawem nauki, czyli albo żeby samo było regułą transformacji, albo żeby było wyprowadzone przy pomocy takich reguł. Nie musi ono być analityczne, jedynym założeniem jest, aby było prawdziwe. [...] Może powstać pytanie, czy zawsze dla pewnego stanu psychicznego Q_1 można znaleźć odpowiadający mu stan fizyczny Q_2, tak aby można było uznać za prawdziwą ogólną równoważność. Jeśli będzie istniała cecha Q_1, która nie będzie miała odpowiadającej jej cechy Q_2, to psychologiczne zdanie „$Q_1(A,t_1)$" nie będzie mogło zostać przetłumaczone na język fizykalny i teza fizykalizmu zostanie podważona. Twierdzę, że w języku psychologicznym nie może być takiej nieprzekładalnej cechy czy predykatu. Jeżeli w tym języku istnieje sensowny predykat „Q_1", to wtedy zdanie „$Q_1(A,t_1)$" musi być empirycznie weryfikowalne." Dalej Carnap wyznaje, iż sam zdaje sobie sprawę z tego, iż jego teza może wzbudzić wątpliwość, gdyż pewne stany psychiczne mogą nie dawać się wyrażać w języku fizykalnym. W dalszym ciągu swojego wywodu pokazuje jednak, że fizykalizm zdaje egzamin w przypadku dowolnego wyrażalnego stanu. Najwyraźniej Carnap nie dostrzega tego, że żaden (!) stan psychiczny, i nie tylko psychiczny, w jakim znaleźć się może obiekt *o*, nie jest równoważnościowo, czyli w sposób zupełny, definiowalny. Przecież, podana przez Carnapa charakterystyka predykatu Q_2 nie jest żadną definicją stanu złości, w jakim ma się znajdować hipotetyczna osoba *A*. Powodów jest kilka. Po pierwsze, wymienianie takich stanów, jak przyspieszone oddychanie i puls, napięcie pewnych mięśni, tendencja do gwałtownego zachowania się, mogą cechować osobę w stanie niepohamowanej radości, w stanie koncentracji typowej dla sportowca itd. Oczywiście, należy zauważyć, że podaną przez siebie, przykładową listę stanów Carnap kończy skrótem „etc.", co ma oznaczać, że nie skończył wyliczania elementów koniecznych do pełnego scharakteryzowania stanu złości. Tymczasem, spora część problemu tkwi właśnie w tym „etc.". Jak należy tę listę rozszerzyć, aby definiowany przy jej pomocy stan nie był stanem strachu, radości, zdenerwowania, jakimś stanem lękowym, stanem podniecenia, itd.? Przykład Carnapa potwierdza jedynie naszą tezę, iż złość można definiować częściowo, czyli warunkowo. Co gorsza, potwierdza się również teza o niezastępowalności nieostrości przez ostrość. Od jakiej wartości mamy bowiem do czynienia z przyśpieszonym oddychaniem i pulsem? Jak silne napięcie i których mięśni jest charakterystyczne dla stanu złości? Co dokładnie oznacza zwrot „tendencja do gwałtownego zachowania się"? Jakie zachowanie już jest, a jakie jeszcze nie jest gwałtownym? Z tego punktu widzenia stwierdzenie Carnapa, iż „zdanie $\forall x\ \forall t\ [Q_1(x,t) \equiv Q_2(x,t)]$ nie musi być analityczne, jedynym założeniem jest to, aby było prawdziwe" brzmi jak, zapewne niezamierzona, autoironia.

Jak widać, zarzuty stosowania niejasnych pojęć wysuwane przeciwko Bergsonowi można, a nawet trzeba powtórzyć przede wszystkim pod adresem zwolenników ścisłego sposobu wysławiania się. Co gorsza, o ile Bergson doskonale zdawał sobie sprawę z faktu nieścisłości pojęć, którymi się posługiwał, o tyle orędownicy stosowania niematematycznych pojęć o matematycznej ścisłości wyznają naiwną wiarę w istnienie takiej mitologicznej precyzji. Ta niczym nieuzasadniona wiara jest możliwa jedynie dzięki powstrzymaniu się od logicznych analiz, znanych od wieków, powszechnych i z zewsząd narzucających się dylematów nieostrości i zmiany. Jedynie udawanie, iż paradoksy, zwane tu ontologicznymi, są mało znaczącymi problemami umożliwia dalszy, „dynamiczny" rozwój badań nad obowiązującą od wieków mitologią. Co prawda, nie jest to już mitologia starożytnej Grecji, więc Pegaz, centaury, hydra, harpie, herosi są tu zastąpieni innymi, jednak podobnie nieistniejącymi obiektami, których mnogość i złożoność, zaiste jest imponująca.

Lekceważone przez wieki paradoksy nieostrości i nieco mniej lekceważone paradoksy ruchu, ujawniają naiwność naszego myślenia, opartego na tworzeniu sztucznych pojęć, które nie odzwierciedlają niczego realnego. Podjęta przez nas analiza tego problemu nie ma na celu wyjaśnienia źródeł tej naiwności, chociaż wydaje się, że jest ona skutkiem składni języków, którymi się posługujemy oraz sposobu percepcji uzależnionej głównie od zmysłu wzroku. Ten głęboko naiwny opis rzeczywistości jest dla nas tym wartościowszy, im bardziej jest on zbliżony do matematycznego. Pozaczasowa, niedynamiczna, niewyrażająca zmian matematyka stała się bowiem, koniecznym do naśladowania, idealnym wzorcem tworzenia konstrukcji myślowych. Dostarczyła ona najważniejszego pojęcia, którego znaczenie dla tworzenia „naukowych" opisów rzeczywistości okazało się absolutnie fundamentalne. Pojęciem tym jest „bezwymiarowy punkt". Kiedyś funkcjonujący jako cięcie, zwane później cięciem Dedekinda, niepostrzeżenie stał się podstawowym budulcem obiektów geometrycznych. Jak widać, sama matematyka również padła ofiarą nieuprawnionych konstrukcji myślowych – dopuściła do tworzenia czegoś z niczego. O ile jednak, zabieg ten nie unicestwia samej matematyki, o tyle operowanie bezwymiarowym punktem, prowadzi w filozofii do żenujących konsekwencji. Zamiast dociekać istoty świata, człowiek, z uporem godniejszym lepszej sprawy, analizuje własne, a co gorsza, naiwne wyobrażenia o tymże świecie, wmawiając sobie, że bada samą rzeczywistość. Paradoksalnie, to pójście na łatwiznę wiąże się niekiedy z faktycznie ciężką i żmudną pracą, która jak się okazuje niczemu szczególnie doniosłemu nie służy. Słowa mające przecież wyrażać rzeczywistość, wyrażają jedynie jej skrzywiony, skrajnie uproszczony obraz – są puste, gdyż nie reprezentują żadnych pojęć. Obraz ten, który od wyobrażenia świata jakim dysponuje bawiące się w piaskownicy dziecko różni jedynie stopień skomplikowania, cechuje, rozwinięty do bólu, zdrowy rozsądek. Proces docierania do prawdy, który powinien wyprowadzać nas z piaskownicy, polega jedynie na tym, że zaczynamy operować słowami, których nie zna dziecko. Jednak proces nazywania nowych zjawisk jest dokładnie ten sam, co u małego dziecka. Ono, wskazując palcem nadaje nazwę zaobserwowanemu zjawisku, niekiedy będąc nawet w stanie zjawisko to nieco dokładniej opisać. Dorosły człowiek, widząc to samo lub inne zjawisko, również nadaje mu nazwę, niekiedy nadając mu dodatkowo rangę gatunku naturalnego. Oczywiście, dorosły człowiek potrafi ukryć ostensywność swoich definicji analizując coś, co określa mianem własności obserwowanych i nazywanych przez siebie zjawisk. Jak widać, proces samookłamywania się jest złożony i powinien zadowolić nawet tych najbardziej wybrednych. Sposoby tuszowania ostensywności definicji mogą być przeprowadzane na różne sposoby, które same również dają się analizować i klasyfikować. Tylko, od czasu do czasu, ktoś dostrzeże jakąś trudność wyrażającą się, w znanych od wieków rozumowaniach paradoksów nieostrości i paradoksów zmian. Jednak, porównując ich argumentacje z oczywistością zdroworozsądkowego obrazu świata natychmiast nabiera pewności, iż paradoksy te są wydumanymi, niewartymi większej uwagi argumentacjami. Owszem, wydają się one nawet interesującymi i błyskotliwymi „chwytami" logicznymi, trudno jest jednak brać je na serio, gdyż musiałoby to doprowadzić do poddania w wątpliwość sensowności niejednego, uznanego systemu filozoficznego. Odrzucając nieubłagane wnioski płynące z tych prostych, a nawet, banalnie prostych rozumowań, musimy jednak mieć świadomość, iż paradoksy te są starsze od cenionych dziś, najważniejszych systemów filozoficznych.

Podążając za Bergsonem, porównajmy nieustannie zmieniającą się rzeczywistość do utworu muzycznego. Wówczas, rzutowanie „punktowych" obrazów tej rzeczywistości na oś czasu jest swoistym wychwytywaniem pojedynczych dźwięków. Niewątpliwie, czysty pięknie brzmiący dźwięk może budzić zachwyt i jest zapewne jakąś wartością samą w sobie, lecz zawsze jest to zaledwie jeden, pojedynczy, wyrwany z większej i niewątpliwie piękniejszej całości, dźwięk. Jakiż więc muszą budzić zachwyt i jaką wartość muszą sobą przedstawiać, nie te pojedyncze, wysłuchiwane oddzielnie dźwięki, lecz przechodzące w siebie nawzajem serie całych fraz i melodii.

Niechaj przestrogą będzie dla nas wiersz Zbigniewa Herberta, *Uprawa filozofii*[603]:

Posiałem na gładkiej roli
drewnianego stołka
ideę nieskończoności
patrzcie jak mi ona rośnie
– mówi filozof zacierając ręce
    Rzeczywiście rośnie
    jak groch
    Za trzy a może cztery

---

[603] Herbert, [1982], s. 34–36.

kwadranse wieczności
przerośnie nawet
jego głowę

Zmajstrowałem także walec
– mówi filozof
u szczytu walca wahadło
rozumiecie już o co idzie
walec to przestrzeń
wahadło to czas
tik – tik – tik
– mówi filozof i śmiejąc się głośno
macha małymi rączkami

wymyśliłem w końcu słowo byt
słowo twarde i bezbarwne

trzeba długo żywymi rękami rozgarniać ciepłe liście
trzeba podeptać obrazy

zachód słońca nazwać zjawiskiem
by pod tym wszystkim odkryć
martwy biały
filozoficzny kamień

oczekujemy teraz
że filozof zapłacze nad swoją mądrością
ale nie płacze
przecież byt się nie wzrusza
przestrzeń nie rozpływa
a czas nie stanie w zatraconym biegu

* * *

Pryśnie klepsydra
w twardych rękach
spiętrzy się w oczach
płaska przestrzeń

poukładane posłusznie
stożki kule sześciany
formy z których wybiegło
nieposłuszne ciało

– leżą jak garnki rozbite
napój uszedł w obłoki –

optymistyczne kule
promień astrologiczny
atomów klocki

szpalerem mądrych dialogów
suchym krokiem mierniczych
chodzą filozofowie
absolut mylą i liczą

niżej na jakiejś cyfrze
może 3 może 1

nieruchomieje ostyga –
uniwersum

w powietrzu ciężkim jak szkło
śpią spętane żywioły

ogień ziemię i wodę
zażegna rozum

ZAKOŃCZENIE

Pierwszym z dwóch celów niniejszej książki było zaproponowanie nowego, niewystępującego dotychczas w literaturze, podziału paradoksów, który by sięgał do ich najgłębszej istoty, zupełnie pomijając ich powierzchowną formę. Właściwa analiza danego paradoksu zależy w zasadniczy sposób od dotarcia do jego sedna. I tu napotykamy na istotną trudność. Polega ona na trafnym rozpoznaniu problemu, będącego istotą rozważanego paradoksu. Jedynie w takiej sytuacji można bowiem mieć uprawnioną nadzieję na rozwiązanie danego dylematu. Analizowanie paradoksalnej argumentacji, wówczas gdy jej istota wciąż nie jest rozpoznana, nieuchronnie prowadzi do dziwnych, nieuzasadnionych spekulacji, które nie mają nic wspólnego z tkwiącym w paradoksie problemem. Niestety, zwłaszcza dwudziestowieczna logika obfituje w tego typu podejścia do paradoksów. Niedostrzeżenie właściwego problemu danego dylematu może więc prowadzić do „rozwiązywania" jakiejś zupełnie drugorzędnej lub wręcz nieistniejącej trudności. Może też być przyczyną forsowania „na siłę" wydumanej, dziwacznej konstrukcji logicznej. W niektórych przypadkach, konstrukcja ta może przybrać postać jakiegoś nieklasycznego rachunku logicznego. Zaproponowane przez nas podejście do paradoksów jest swoistą pochwałą logiki klasycznej. Wszystkie paradoksy, poza rzecz jasna ontologicznymi, są bowiem rozwiązywane na gruncie logiki klasycznej, a w najgorszym razie, czyli w przypadku antynomii kłamcy, w oparciu o jakieś jej proste rozszerzenie. Wszystkie nieontologiczne paradoksy, uwzględnione w niniejszej książce, zostały bowiem rozpoznane jako:

– problemy wynikające z niedostatecznego poziomu wiedzy, który to poziom w konfrontacji z najnowszymi ustaleniami nauk rozwijanych w konwencji matematycznego pojmowania świata wykazuje pewne, zupełnie usprawiedliwione braki; lub

– problemy wynikające z nieuświadomionego popełnienia błędu wieloznaczności; lub

– problemy będące konsekwencją samozwrotnych konstrukcji myślowych.

Dylematy mieszczące się w którejkolwiek z tych trzech kategorii winny, naszym zdaniem, być rozwiązywane przy pełnym poszanowaniu logiki klasycznej. Logika ta jest bowiem stworzona do wnioskowań przeprowadzanych na zdaniach języka matematycznego. Jeśli więc dana teoria, rozumiana jako zbiór zdań, opisuje jakąś, nawet bliżej nieokreśloną, choćby nieistniejącą rzeczywistość, jednak w matematyczny, a więc w pełni ścisły sposób, operując wyrażeniami, tak jak gdyby były one w pełni wyraźne i dobrze zdefiniowane, to jedyną logiką umożliwiającą przeprowadzanie poprawnych wnioskowań jest właśnie logika klasyczna. Mamy nadzieję, że zamieszczone w książce analizy paradoksów zaliczonych tu do jednej z trzech wymienionych wyżej grup, dobitnie pokazują jak bardzo pogląd ten jest uzasadniony. Nie wydaje się, aby w przypadku któregokolwiek z tych paradoksów istniała jakakolwiek potrzeba zastępowania logiki klasycznej, przez inną nieklasyczną. Pewien wyjątek stanowi tu paradoks kłamcy, do którego rozwiązania została zaproponowana logika klasyczna poszerzona o nowy binarny, intensjonalny spójnik. Spójnik ten ma na celu umożliwienie rozważania tych kwestii, których subtelność przekracza możliwości prostego klasycznego rachunku zdaniowego. Należy jednak podkreślić, że zaproponowane rozwiązanie jako, że wykorzystuje pewną teorię klasycznego rachunku zdań, w pełni zasługuje na miano „szanującego logikę klasyczną".

Reasumując, paradoksy zaliczone do jednej z trzech wyżej wymienionych grup zostały tu uznane za problemy matematycznie pojmowanej rzeczywistości, a mówiąc ściślej, za kwestie matematycznego obrazu świata. Żaden z tych paradoksów nie wymaga rozwiązania, które pociągałoby za sobą konieczność rewizji logiki klasycznej, języka, czy też pojęć reprezentowanych przez wyrażenia tegoż języka. Świat tych paradoksów jest prosty i wymaga przestrzegania prostych reguł. Należą do nich: unikanie popełniania błędów logicznych oraz uświadomienia sobie jakie konsekwencje mogą pociągnąć za sobą samozwrotne konstrukcje myślowe.

Niestety, a może na szczęście, istnieją jeszcze inne paradoksy, które nie dają się wyjaśnić w kategoriach tego prostego, ścisłego, matematycznego pojmowania rzeczywistości. Nie jest więc możliwe, zaliczenie tych paradoksów do którejś z trzech wymienionych wyżej kategorii. W przypadku tych dylematów, logika klasyczna okazuje się być bezsilna. Wszelkie rozumowania typowe dla paradoksów ontologicznych, a zwłaszcza paradoksów nieostrości, pokazują załamywanie się praw i reguł klasycznego wnioskowania. Można stwierdzić, że paradoksy ontologiczne są z innego świata, a kolejnym paradoksem jest to, iż tym innym, niezwykłym światem jest świat realny. Niewyrażalne, w powszechnie wykorzystywanych w filozofii językach, bogactwo realnego świata uniemożliwia ujęcie tego świata, a nawet dowolnie małego jego fragmentu, w ramy precyzyjnego, ścisłego, pozbawionego dynamiki, matematycznie pojmowanego opisu. Uporanie się z tą grupą paradoksów jest więc potężnym wyzwaniem dla logiki i filozofii, gdyż wiąże się z koniecznością nowych dynamicznych, a mimo to matematycznych, choć najwyraźniej nieklasycznych, struktur myślowych. Poszukiwanie takich właśnie matematycznych, konstrukcji jest wielkim zadaniem jakie przed logiką stawiają paradoksy ontologiczne. Wydaje się jednak, że już sama świadomość istnienia potrzeby podobnych konstrukcji jest wartością samą w sobie. To uświadomienie sobie konieczności rozpoczęcia nowych poszukiwań jakiejś, bliżej nieokreślonej, nieklasycznej matematyki i związanej z nią logiki było drugim, z dwóch wspomnianych celów, niniejszej książki. Być może przedstawiona w niej analiza kwestii nieostrości oraz zmian stanowi pewien, miejmy nadzieję, że trudny do zbicia, argument za uznaniem konieczności podjęcia ryzyka podobnych poszukiwań. Niezwykły rozwój nauk empirycznych, zwłaszcza fizyki i biologii, pokazuje dobitnie, iż w naukach tych dostrzeżono już kres możliwości statycznego pojmowania rzeczywistości. Okazuje się, że to właśnie dynamizm, chociaż w nieunikniony sposób wiążący się z częściową przynajmniej rezygnacją ze ścisłości, wyznacza kierunek rozwoju tych nauk. Najwyraźniej, ten dynamizm w pojmowaniu świata, rozumiany jako zaprzeczenie statyczności i określoności, nieuchronnie stanowić będzie kontekst przyszłych badań prowadzonych w naukach empirycznych. Trudno sobie wyobrazić, aby w podobnej sytuacji filozofia tkwiła przy swoim statycznym w oczywisty sposób anachronicznym już pojmowaniu rzeczywistości.

BIBLIOGRAFIA

Aczel, A. D. (2000), *Tajemnica alefów. Matematyka, Kabała i poszukiwanie nieskończoności*, tłum. T. Hornowski, Dom Wydawniczy Rebis, Poznań, 2002.
Ajdukiewicz, K. (1931), *Paradoksy starożytnych*, [w:] *Język i Poznanie*, t. 1, PWN, Warszawa 1985, s. 135–144.
Ajdukiewicz, K. (1938), *Propedeutyka filozofii*, Książnica Atlas, Lwów–Warszawa.
Ajdukiewicz, K. (1948), *Zmiana i sprzeczność*, [w:] *Język i poznanie*, t. 2, PWN, Warszawa 1985, s. 90–106.
Ajdukiewicz, K. (1965), *Logika pragmatyczna*, PWN, Warszawa.
Akiba, K. [manuskrypt], *Vagueness in the World*, to appear in Noûs.
Alquié, F. (1989), *Kartezjusz*, Instytut Wydawniczy Pax, Warszawa.
Anzelm z Canterbury, *Monologion*, Biblioteka Klasyków Filozofii, PWN, Warszawa 1992. *Proslogion*, Biblioteka Klasyków Filozofii, PWN, Warszawa 1992.
Åqvist, L. (1981), *The Protagoras Case: An Exercise in Elementary Logic for Lawyers*, [w:] *Tankar och tankefel tillägnade Zalma Puterman*, Filosofiska Studier utgivna av Filosofiska Föreningen och Filosofiska Institutionen vid Uppsala Universitet, Uppsala, s. 211–224.
Åqvist, L. [1984], *Deontic logic*, [w:] D. Gabbay and F. Guenthner (eds), *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 2, D. Reidel Publishing Company, Londyn, s. 605–714.
Arystoteles, *Etyka nikomachejska*, [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 5, PWN, Warszawa 2000.
Arystoteles, *Fizyka*, [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 2, PWN, Warszawa 1990.
Arystoteles, *Mechanika*, [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 4, PWN, Warszawa 1993.
Arystoteles, *O świecie*, [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 2, PWN, Warszawa 1990.
Arystoteles, *Topiki*, [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 1, PWN, Warszawa 1990.
Arystoteles, *O dowodach sofistycznych*, [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 1, PWN, Warszawa 1990.
Ayer, A. J. (2000), *Filozofia XX wieku*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa. Oryginał: Alfred J. Ayer, *Philosophy in the Twentieth Century*, George Weidenfeld and Nicolson, 1982.
Baldwin, J. M. (1902), (ed.) *Dictionary of Philosophy and Psychology*, Thoemmes Continuum, t. 2 (b.m.w.).
Barnes, J. (1982), *Medicine, experience and logic*, [w:] J. Barnes, J. Brunschwig, M. F. Burnyeat, M.Schofield (eds), *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, Dortrecht, Reidel.
Barwise, J. i **Etchemendy, J.** (1987), *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, Oxford University Press, New York–Oxford.
Bergson, H. (1913), *Ewolucya Twórcza*, tłum. F. Znaniecki, Wydawnictwo Towarzystwa Literatów i Dziennikarzy Polskich w Warszawie, Warszawa.
Bergson, H. (1963), *Myśl i ruch (Wstęp do metafizyki, Intuicja filozoficzna, Postrzeżenie zmiany). Dusza i ciało*, tłum. P. Beylin i K. Bleszczyński, PWN, Warszawa.
Bernadete, J. (1964), *Infinity: an Essey in Methaphisics*, Clarendon Press, Oxford.
Bernays, P. (1937–1954), *A system of axiomatic set theory*, Journal of Symbolic Logic, II, 1937, s. 65–77; VI, 1941, s. 1–17; VII, 1942, s. 65–99, 133–145; VIII, 1943, s. 89–106; XIII, 1948, s. 65–79; XIX, 1954, s. 81–96.

Black, M. (1937), *Vagueness: an exercise in logical analysis*, „Philosophy of Science" 4, s. 427–455, także [w:] *Language and Philosophy. Studies in Method*, Cornell University Press, Ithaca, New York 1949, s. 23–58.

Black, M. (1944), *Russell's philosophy of language*, [w:] P. A. Schilpp (red.), *The Philosophy of Bertrand Russell*, Tudor Publications, Evanston.

Black, M. (1949), *Language and Philosophy. Studies in Method*, Cornell University Press, Ithaca–New York.

Black, M. (1963), *Reasoning with loose concepts*, [w:] *Margins of Precision*, Cornell University Press, Itaca 1970, s. 1–12.

Bocheński, J. M. (1954), *Współczesne metody myślenia*, Wydawnictwo „W drodze", Poznań 1992.

Bocheński, J. M. (1961), *A History of Formal Logic*, translated and edited by I. Thomas, University of Notre Dame Press, Notre Dame.

Boczwar, D. A. (1938), *Ob odnom tréhznačnom isčislénii i égo priménémii k analizu paradoksov klassičéskogo raširennogo funkcjonal'nogo isčislénia*, „Matématičéskij Sbornik" 4, s. 287–308.

Bolzano, B. (1851), *Paradoksy nieskończoności*, tłum. Ł. Pakalska, Biblioteka Klasyków Filozofii, PWN, Warszawa 1966.

Borkowski, L. (1991), *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Towarzystwo Naukowe Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin.

Brogaard, B. i **Sarelno, J.** (2004), [SEPh), *Fitch's Paradox of Knowability*, hasło w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. E. N. Zalta, 2004, URL = <http://plato.stanford.edu/entries/fitch-paradox/>. Stanford University Press, Stanford.

Broome, J. (1984), *Indefiniteness in Identity*, „Analysis" 44, s. 6–12.

Buczyńska, H. (1960), *Koło Wiedeńskie. Początek neopozytywizmu*, Wiedza Powszechna, Warszawa.

Burali-Forti, C. (1897), *Una questione sui numeri transfiniti*, Rend. Circ. Mat. Palermo 11, s. 154–164. *A question on transfinite numbers and On well-ordered classes* (angielska wersja językowa) [w:] van Heijenoort [1967], s. 104–112.

Burge, T. (1979), *Semantical Paradox*, „The Journal of Philosophy" 76, s. 169–198. Cytaty z reedycji [w:] Martin, [1984] s. 83–117.

Buridan, J. (1966), *Sophisms on Meaning and Truth*, trans. Kermit Scott, Meredith, New York. Także [w:] G. E. Hughes, *John Buridan on Self-Reference*, Cambridge University Press, Cambridge & New York, [1982], s. 73–79.

Burke, M. (1995), *Dion and Theon: An Essentialist Solution to an Ancient Problem*, „The Journal of Philosophy" 91, s. 129–139.

Cantor, G. (1882), *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 20, s. 113–121.

Carnap, R. (1936), *Testability and Meaning*, „Philosophy and Science" III/IV, 1936/37.

Carnap, R. (1937), *The logical syntax of language*, Routledge and Kegan Paul Ltd., London. Wydanie polskie w tłumaczeniu B. Stanosz, *Logiczna składnia języka*, Biblioteka Współczesnych Filozofów, PWN, Warszawa 1995.

Chibeni, S. S. [manuskrypt], *Ontic vagueness in microphisics*; http://www.unicamp.br/~chibeni/public/onticvaguenessinmicrophisics.pdf

Chisholm, R. M. (1973), *Parts as Essential to their Wholes*, „Review of Metaphysics" 26, s. 581–603.

Church, A. (1940), *A formalisation of the simple theory of types*, „Journal of Symbolic Logic V", s. 56–68.

Church, A. (1976), *Comparison of Russell's Resolution of the Semantical Antinomies with That of Tarski*, „Journal of Symbolic Logic" 41, [1976], s. 747–760. Cytaty z reedycji [w:] Martin, [1984], s. 289–306.

Church, A. (1982), *A Remark Concerning Quine's Paradox About Modality*, „Analisis Filosophico" 2, [hiszpańska wersja]. Angielska wersja [w:] N. Salmon i S. Soames, *Propositions and Attitudes*, Oxford University Press, Oxford 1988.

Chwistek, L. (1924), *The theory of constructive types*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego", Kraków 1923–1924, t. 2, s. 9–48, t. 3, s. 92–141.

Chwistek, L. (1934), *Granice zdrowego rozsądku*, [w:] *Pisma filozoficzne i logiczne*, t. 2, PWN, Warszawa 1963.

Conway, J. H. (1976), *On Numbers and Games*, Academic Press, New York.

Conway, J. H. i **Guy, R. K.** (1996), *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, New York. Polskie wydanie w tłumaczeniu W. Bartola, *Księga liczb*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.

Copleston, F. (1998), *Historia filozofii*, t. 1–9, Instytut Wydawniczy PAX, Warszawa.

Davies, B. (2000), Philosophy of Religion, A Guide and Anthology, Oxford University Press.

Deutsch, H. (1997), *Identity and General Similarity*, „Philosophical Perspectives" 12, s. 177–200.

Deutsch, H. [SEPh], *Relative Identity*, hasło w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. E. N. Zalta, URL = <http://plato.stanford.edu/entries/identity-relative/>.Stanford: University Press, Stanford.

Devlin, K. (1997), *Żegnaj Kartezjuszu. Rozstanie z logiką w poszukiwaniu nowej kosmologii umysłu*, tłum. B. Skarga, Prószyński i Spółka, Warszawa 1999.

Diogenes Laertios, *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, PWN, Warszawa 1982.

Dubois, D. i **Prade, H.** (1990), *Putting rough sets and fuzzy sets together*, „International Journal of General Systems" 17, s. 203–232.

Dummett, M. A. E. (1975), *Wang's Paradox*, „Synthese" 30, s. 301–324.

Dummett, M. A. E. (1981), *The Interpretation of Frege's Philosophy*, Duckworth, London.

Edgington, D. (1993), *Wright and Sainsbury on higher-order vagueness*, „Analysis" 53, s. 193–200.

Engelking, R G. i **Sieklucki**, K. (1986), *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa.

Evans, G. (1978), *Can There be Vague Objects?*, „Analysis" 38, s. 308.

Feferman, S. (1982), *Towards Useful Type-Free Theories, I*, „Journal of Symbolic Logic" 49, s. 75–111. Cytaty z reedycji [w:] Martin, [1984], s. 237–287.

Ferris T. (1997), *Cały ten kram. Raport o stanie wszechświata(ów)*, tłum. M. Kubicki, Dom Wydawniczy Rebis, Poznań 1999.

Field, H. (1972), *Tarski's Theory of Truth*, „Journal of Philosphy" 69/13, s. 347–375.

Fine, K. (1975), *Vagueness, truth and logic*, „Synthese" 30, s. 265–300.

Fitch, F. (1963), *A Logical Analysis of Some Value Concepts*, „The Journal of Symbolic Logic" 28, s. 135–142.

Fodor, J. A. i **Lepore, E.** (1996), *What Cannot Be Evaluated Cannot Be Evaluated, And It Cannot Be Supervalued Either*, „The Journal of Philosophy" 93, s. 516–535.

Frankfurt, H. G. (1964), *The Logic of Omnipotence*, „Philosophical Review" 73, s. 262–263.

Frege, G. (1879), *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachbildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle. *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought*, (angielska wersja językowa) [w:] van Heijenoort [1967], s. 1–82.

Frege, G. (1891), *Funkcja i pojęcie*, tłum. B. Wolniewicz, [w:] G. **Frege**, *Pisma semantyczne*, PWN, Warszawa 1977, s. 18–44.

Gardner, M. (1982), *Aha! Gotcha. Paradoxes to puzzle and delight*, Freeman & Co, San Francisco.

Geach, P. T. (1972), *Logic Matters*, Basil Blackwell, Oxford.

Geach, P. T. (1980), *Reference and Generality*, Cornell University Press, Ithaca.

Gödel, K. (1940), *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Annales of Math. Studies 3.

Grelling, K. i **Nelson, L.** (1908), *Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti*, Abh. der Friesschen Schule II, s. 301–324.
Grodziński, E. (1981), *Zarys teorii nonsensu*, IFiS PAN, Zakład Narodowy im. Ossolińskich we Wrocławiu, Wrocław.
Grodziński, E. (1983), *Paradoksy semantyczne*, IFiS PAN, Zakład Narodowy im. Ossolińskich we Wrocławiu, Wrocław.
Grünbaum, A. (1967), *Modern Science and Zeno's Paradoxes*, Allen and Unwin, London.
Grzegorczyk, A. (1955), *The systems of Leśniewski in relation to contemporary logical research*, „Studia Logica" III, s. 77–95.
Grzegorczyk, A. (1960), *Logika popularna*, PWN, Warszawa.
Gumański, L. (1992), *Logical and semantical antinomies*, „Ruch Filozoficzny" 49/1, s. 21–30.
Gupta, A. (1982), *Truth and Paradox*, „Journal of Philosophical Logic" 11, s. 1–60. Cytaty z reedycji [w:] Martin [1984], s. 175–235.
Hajek, P. (1998), *Metamathematics of fuzzy logic*, Kluwer, Boston–London.
Hajek, P. [SEPh], *Fuzzy Logic*, hasło w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. E. N. Zalta, URL = <http://plato.stanford.edu/entries/logic-fuzzy/>. Stanford University Press, Stanford.
Halldén, S. (1949), *The Logic of Nonsense*, Uppsala, Uppsala Universitets Arsskrift.
Hegel, G. W. F. (1994), *Wykłady z historii filozofii*, t. I, Biblioteka Klasyków Filozofii, PWN, Warszawa.
Hempel, C. G. (1939), *Vagueness and logic*, „Philosophy of Science" 6, s. 163–180.
Herbert, Z. (1982), *Wiersze zebrane*, Czytelnik, Warszawa.
Herzberger, H. R. (1982), *Notes on Naive Semantics*, „Journal of Philosophical Logic" 11, s. 61–102. Także [w:] **Martin** (1984) s. 133–174.
Hill, E. (1985), *The Mystery of the Trinity*, Geoffrey Chapman, London.
Hilpinen, R. (1971), ed., *Deontic logic: introductory and systematic readings*, Synthese Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
Hilpinen, R. (1981), ed., *New studies in deontic logic*, Synthese Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
Horgan, T. (1993), *On What There Isn't*, „Philosophy and Phenomenological Research", 53, s. 693–700.
Horwich, P. [manuskrypt], *The sharpness of vague terms* (manuskrypt b.r.w.).
Hudson, H. (2001), *A Materialist Metaphysics of the Human Person*, Cornell University Press, Ithaca.
Hunter, G. (1982), *Metalogika. Wstęp do metateorii standardowej logiki pierwszego rzędu*, PWN, Warszawa.
Hurley, S. L. (1994), *A new take from Nozick on Newcomb's Problem and Prisoners' Dilemma*, „Analysis" 54/2, s. 65–72.
Hyde, D. (1994), *Why Higher-Order Vagueness is a Pseudo-Problem*, „Mind" 103, s. 35–41.
Hyde, D. (1997), *From heaps and gaps to heaps of gluts*, „Mind" 106, s. 641–660.
Hyde, D. (2003), *Higher-Orders of Vagueness Reinstated*, „Mind" 112, s. 301–305.
Janas-Kaszczyk, J. (1988), *Zmiana struktur ontycznych a nieostrość. Próba ugruntowania ontologicznego aspektu nieostrości na przykładzie poglądów H. Bergsona*, [w:] *O nieostrości*, red. Z. Muszyński, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin, s. 87–116.
Jaśkowski, S. (1948), *Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*, „Studia Societatis Scientiarum Torunensis" I, 5, s. 57–77.
Jaśkowski, S. (1949), *O koniunkcji w rachunkach zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*, „Studia Societatis Scientiarum Torunensis" I, 8, s. 171–172.
Jaśkowski, S. (1969), *Propositional calculus for contradictory deductive systems*, „Studia Logica" 24, s. 143–157.

Johnston, M. (1992), *Constitution Is Not Identity*, „Mind" 101, s. 89–105.

Katechizm Kościoła Katolickiego, (1994), Wydawnictwo Pallottinum.

Keene, G. B. (1960), *A Simpler Solution to the Paradox of Omnipotence*, „Mind" 69, s. 74–75.

Kiekeben, F. (1996), *Newcomb's Paradox*, http://members.aol.com/kiekeben/home.html.

Kleene, S. C. (1938), *On a notation for ordinal numbers*, „The Journal of Symbolic Logic" 3, s. 150–155.

Kleene, S. C. (1952), *Introduction to Methamatematics*, North-Holland, Amsterdam.

Klir, G. J. i **Yuan, B.** (eds) (1996), *Fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy system: Selected papers by Lotfi A. Zadeh*. World Scientific, Singapore.

Kneale, W., i **Kneale, M.** (1962), *„The development of logic"*, Clarendon Press, Oxford.

Knuth, D. (1974), *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness*, Addison-Wesley, Reading MA.

Kosko, B. i **Isaka, S.** (1993), *Logika rozmyta*, „Świat Nauki", nr 9, s. 60–66.

Körner, S. (1955), *Conceptual Thinking*, Cambridge University Press, Cambridge.

Körner, S. (1959), *On determinables and resemblance*, „Aristotelian Society", Supplementary Volume 33, s. 125–140.

Körner, S. (1960), *The Philosophy of Mathematics*, Hutchinson, London.

Körner, S. (1968), *Reply to Mr Kumar*, „British Journal for the Philosophy of Science" 18, s. 323–324.

Kotarbiński, T. (1929), *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, PWN, Warszawa, 1986.

Kotarbiński, T. (1957), *Paradoksy starożytne i antynomie nowoczesne u podstaw semantyki, logiki formalnej, teorii mnogości i kinematyki (teorii ruchu)*, [w:] *Wykłady z Dziejów Logiki*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich we Wrocławiu, Łódzkie Towarzystwo Naukowe, Łódź, s. 186–192.

Kripke, S. (1972), *Nazywanie a konieczność*, tłum. B. Chwedeńczuk, Instytut Wydawniczy Pax, Warszawa, 1988.

Kripke, S. (1975), *Outline of a Theory of Truth*, „The Journal of Philosophy" 72, s. 690–716. Cytaty z reedycji [w:] Martin, [1984] s. 53–81.

Kubiński, T. (1958), *Nazwy nieostre*, „Studia Logica" VII, s. 115–179.

Kuratowski, K. i **Mostowski, A.** (1978), *Teoria mnogości wraz ze wstępem do opisowej teorii mnogości*, Monografie Matematyczne Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk, PWN, Warszawa.

Legowicz, J. (1986a), *Historia filozofii starożytnej Grecji i Rzymu*, PWN, Warszawa.

Legowicz, J. (1986b), *Historia filozofii średniowiecznej*, PWN, Warszawa.

Leibniz, G. W. (1955), *Nowe rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*, t. 2, Biblioteka Klasyków Filozofii, PWN, Warszawa.

Lenzen, W. (1977), *Protagoras versus Euathlus: Reflections on a so-called Paradox*, „Ratio" XIX, s. 176–180.

Leśniewski, S. (1929), *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, „Fundamenta Mathematicae" XIV, s. 1–81.

Leśniewski, S. (1930), *Über die Grundlagen der Ontologie*, „Comptes Rendus des Sciences de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie" XXIII, 3, s. 111–132.

Leśniewski, S. (1931), *Über Definitionen in der sogenannten Theorie der Deduktion*, „Comptes Rendus des Sciences de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie" Cl. III, XXIV, s. 289–309.

Leśniewski, S. (1938), *Einleitende Bemerkungen zur Fortsetzung meiner Mitteilung u. d. T. Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, „Collectanea Logica" I.

Lewis, D. K. (1970), *General semantics*, „Synthese" 22, s. 18–67.

Lewis, D. K. (1986), *On the Plurality of Worlds*, Oxford, Blackwell.

Lewis, D. K. (1993), *Many, but Almost One*, [w:] *Ontology, Causality and Mind: Essays in Honour of D. M. Armstrong*, John Bacon (ed.), Cambridge University Press, New York.

Lindström, S. (1996), *Situations, truth and knowability*, [w:] E. Ejerhed, S. Lindström (eds), *Logic, Action and Cognition*, Kluwer, Dordrecht.

Locke, J. (1955), *Rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*, t. II, Biblioteka Klasyków Filozofii, PWN, Warszawa.

Lowe, E. J. (1982), *The Paradox of the 1,001 Cats*, „Analysis" 48, s. 128–130.

Lowe, E. J. (1995), *The Problem of the Many and the Vagueness of Constitution*, „Analysis" 55, s. 179–182.

Luschei, E. C. (1962), *The Logical Systems of Leśniewski*, North-Holland Publishing, Amsterdam.

Łukasiewicz, J. (1910), *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*, PWN, Warszawa, 1987.

Łukowski, P. (1997), *An approach to the liar paradox*, [w:] *New Aspects in Non-Classical Logics and Their Kripke Semantics, RIMS*, Kyoto University, Kyoto, s. 68–80.

Łukowski, P. (2001), *Paradoks kamienia*, „Principia" 30–31, s. 59–66.

Łukowski, P. (2003a), *Analiza dwóch paradoksów starożytnych: Euathlosa oraz krokodyla*, Principia, 34, Kraków, s. 169–184.

Łukowski, P. (2003b), *Jedno zdanie Epimenidesa z Knossos*, „Ruch Filozoficzny", 60/4, s. 601–612.

Łukowski, P. (2003c), *Paradoks kata*, „Ruch Filozoficzny", 60/4, s. 613–622.

MacInerny, R. (1986), *Aquinas on Divine Omnipotence*, [w:] *L'homme et son univers au Moyen--Âge*. Actes 7ème congrès international de philosophie médiévale (1982), Louvain-la-Neuve, s. 440–444.

Mackie, J. L. (1955), *Evil and Omnipotence*, „Mind" 64, s. 200–213. Polskie tłum. T. Baszniaka: *Zło a wszechmoc*, [w:] *Filozofia religii*, red. B. Chwedeńczuk, Wydawnictwo SPACJA – Fundacja Aletheia, Warszawa 1997.

Malinowski, G. (1990), *Logiki wielowartościowe*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Mała encyklopedia logiki, (1970), Ossolineum, Wrocław–Warszawa–Kraków.

Marciszewski, W. (1987), *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, red., PWN, Warszawa.

Marciszewski, W. (red.) (1988), *Mała encyklopedia logiki*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich we Wrocławiu, Wrocław.

Markosian, N. (1998), *Brutal Composition*, „Philosophical Studies", Vol. 92, s. 211–249.

Markosian, N. (2000), *Sorensen's Argument Against Vague Objects*, „Philosophical Studies" 97, s. 1–9.

Martin, R. L. (ed.) (1984), *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox*, Clarendon Press, Oxford.

Martin, R. L. (1984a) *Introduction*, [w:] Martin, [1984], s. 1–8.

Martin R. L. i **Woodruff P. W.** (1975), *"Truth-in-L" in L*, „Philosophia" 5, s. 213–217. Cytaty z reedycji [w:] Martin, (1984), s. 47–51.

Martinich, A. P. (1987), *Identity and Trinity*, „The Journal of Religion" 58, s. 169–181.

Mathworld, [a], http://mathworld.wolfram.com/BottleImpParadox.html

Mavrodes, G. I. (1963), *Some Puzzles Concerning Omnipotence*, „Philosophical Review" LXXII, s. 221–223.

Mayo, B. (1961), *Mr Keene on Omnipotence*, „Mind" 70, s. 249–250.

Mehlberg, H. (1958), *The Reach of Science*, University of Toronto Press, Toronto.

Morris, Ch. W. (1938), *Foundations of the Theory of Signs, International Encyclopedia of Unified Science*, tom 1, numer 2, University of Chicago Press, Chicago, Ill.

Morris, Ch. W. (1963), *Pragmaticism and logical empiricism*, [w:] P. A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Rudolf Carnap*, Open Court, La Salle III, 1963.

Morris, R. (1997), *Krótka historia nieskończoności. Achilles i żółw w kwantowym Wszechświecie*, tłum. J. Kowalski-Glikman, Wydawnictwo CiS, Warszawa, 1999.

Mostowski, A. (1948), *Logika matematyczna*, Ossolineum, Warszawa–Wrocław.

Murdoch, J. E. (1982), *William of Ockham and the Logic of Infinity and Continuity*, [w:] *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought*, ed. Norman Kretzmann, New York, s. 165–206.

Nguyen, H. T. i **Walker, A.** (1999), *First course in fuzzy logic*, CRC Press, Boca-Raton, Florida.

Novak, V. (1989), *Fuzzy sets and their applications*. Adam Hilger, Bristol.

Nowaczyk, A., Żołnowski, Z. (1974), *Logika i metodologia badań naukowych dla lekarzy*, Państwowy Zakład Wydawnictw Lekarskich, Warszawa.

Nozick, R. (1982), *Philosophical Explanations*, Harvard University Press, Cambridge MA.

Oderberg, D. (1996), *Coincidence under a Sortal*, „The Philosophical Review" 105, s. 145–171.

Odrowąż-Sypniewska, J. (2000), *Zagadnienie nieostrości*, Filozofia Nauki 2.

Odrowąż-Sypniewska, J. (2003), *O pragmatycznej koncepcji nieostrości – krytycznie*, „Przegląd Filozoficzny" 1(45), s. 233–239.

Oksfordzki Słownik Biograficzny, (1999), Świat Książki, Warszawa.

Orłowska, E. (1985), *Semantics of vague concepts*, [w:] *Foundation of logic and linguistics. Problems and solutions. Selected contributions to the 7th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, eds G. Dorn I P. Weingartner, Plenum Press, Salzburg, s. 465–482.

Parfit, D. (1984), *Reasons and Persons*, Oxford University Press, Oxford.

Parsons, Ch. (1972), *The Liar Paradox*, „Journal of Philosophical Logic" 3, s. 381–412. Cytaty z reedycji [w:] Martin, [1984] s. 9–51.

Pawlak, Z. (1982), *Rough sets*, „International Journal of Computer and Information Science" 11, Nr. 5, s. 341–356.

Pawlak, Z. (1983), *Systemy informacyjne. Podstawy teoretyczne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Pawlak, Z. (1983), *Rough classification*, ICS PAS Reports 506, IPI PAN Warszawa, s. 7–8. [RS], *Rough Sets*, http://pizarro.fll.urv.es/continguts/linguistica/proyecto/reports/rep29.doc, s. 51.

Pawlak, Z. (1991), *Rough sets. Theoretical aspects of reasoning about data*, Kluwer, Boston, Academic Publishers, Dordrecht.

Pawłowski, T. (1978), *Tworzenie pojęć i definiowanie w naukach humanistycznych*, PWN, Warszawa.

Peirce, C. S. (1987), *In Contradiction: A study of the Transconsistent*, Kluwer Academic Publishers, Boston–Dordrecht.

Peirce, C. S. (1994), The electronic edition of *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, ed. J. Deely, zawierające Vols. I–VI, ed. Ch. Hartshorne, P. Weiss (Cambridge MA, Harvard University Press, 1931–1935), Vols. VII–VIII, ed. A. W. Burks (Cambridge MA, Harvard University Press, 1958).

Pelc, J. (1984), *Wstęp do semiotyki*, Biblioteka Wiedzy Współczesnej Omega, Wiedza Powszechna, Warszawa.

Penrose, R. (1989), *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, tłum. P. Amsterdamski, PWN, Warszawa 2000.

Pietruszczak, A. (2000), *Metamereologia*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.

Pietruszczak, A. (2000a), *O teoriach pierwszego rzędu związanych z elementarnym fragmentem ontologii Leśniewskiego*, [w:] J. Perzanowski i A. Pietruszczak (red.), *Logika & filozofia logiczna: FLFL 1996–1998*, Wydawnictwo UMK, Toruń, s. 127–168.

Pietruszczak, A. (2002), *Paradoks Russella a początki mereologii*, „Ruch Filozoficzny" LIX/1, s. 123–129.

Pismo Święte Starego i Nowego Testamentu, Biblia Warszawsko-Praska, oprac. przekładów z języków oryginalnych bp K. Romaniuk, Towarzystwo Biblijne w Polsce, Warszawa 1997.

Placek, T. (1989), *Paradoksy ruchu Zenona z Elei a problem continuum*, dychotomia, „Studia Filozoficzne" 4(281), s. 57–73.

Placek, T. (1997), *Paradoksy ruchu Zenona z Elei a labirynt kontinuum: 'Achilles i żółw', 'Strzała', 'Stadion'*, „Filozofia Nauki" 1(17), s. 65–77.

Platon, *Dialogi*, tom 1 i 2, tłum. W. Witwicki, Wydawnictwo Antyk, Kęty 1999. *Państwo. Prawa*, tłum. W. Witwicki, Wydawnictwo Antyk, Kęty 2001.

Plautus, (1961), *Plautus with an English translation by Paul Nixon in five volumes*, t. 1, Loeb Classical Library, Harvard University Press, Cambridge Massachusetts, William Heinemann Ltd., London.

Plutarch, [Theseus], Theseus by Plutarch, written 75 A.C.E., transl. John Dryden, URL = <http://classics.mit.edu/Plutarch/theseus.html/>

Podkoński, R. (2000a), *Infinitas mathematicorum et theologorum. Ujęcia nieskończoności w komentarzu do Sentencji Ryszarda Kilvingtona*, „Studia Warmińskie" XXXVII, s. 157–164.

Podkoński, R. (2000b), *Summula infinitatum. Ryszarda Kilvingtona koncepcja nieskończoności na podstawie kwestii: Utrum unum infinitum potest esse maius alio*, Księga pamiątkowa ku czci Profesora Zdzisława Kuksewicza, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, s. 161–179.

Podkoński, R. (2004), *Al-Ghazali's "Metaphysics" as a Source of Anti-atomistic Proofs in John Duns Scotus "Sentences' Commentary"*, manuskrypt.

Poincaré, H. (1905), *Les mathématiques et la logique*, „Revue de Métaphysique et de Morale" XIII, s. 815–835.

Poincaré, H. (1908), *Nauka i metoda*, tłumaczenie L. Silberstein, J. Mortkowicz, 1911.

Priest, G. (1993), *Can Contradictions be True? II*, Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volume 67, s. 35–54.

Priest, G. (1999), On a version of one of Zeno's paradoxes, „Analysis" 59/1 (261), s. 1–2.

Priest, G. (2000), *Logic, A Very Short Introduction*, Oxford University Press, Oxford.

Priest, G. [SEPh], *Dialetheism*, hasło w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. E. N. Zalta, URL = <http://plato.stanford.edu/entries/dialetheism/>. Stanford University Press, Stanford.

Priest, G. (2004), *Odrzucanie: Przeczenie a dylematy*, tłum. P. Łukowski i D. Rybarkiewicz, Folia Philosophica (w druku).

Priest, G. i **Routley, R.** (1989), *Paraconsistent logic. Essays on the inconsistent*, Philosophia Verlag, Monachium.

Priest, G. i **Tanaka, K.** (), *Paraconsistent Logic*, hasło w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. E. N. Zalta, Stanford University Press, Stanford, URL = <http://plato.stanford.edu/entries/logic-paraconsistent/>..

Prior, A. N. (1967), *Correspondence Theory of Truth*, [w:] P. Edwards (ed.) *The Encyclopedia of Philosophy*, vol. 2, s. 223–232.

Przełęcki, M. (1958), *W sprawie terminów nieostrych*, „Filozofia Nauki" 1993, 1/2–3, s. 79–83. Pierwsza publikacja w „Studia Logica" 1958, 8, s. 313–317.

Przełęcki, M. (1964), *Z semantyki pojęć otwartych*, „Filozofia Nauki" 1993, 1/2–3, s. 85–113. Pierwsza publikacja w „Studia Logica" 1964, 15, s. 189–218.

Pszczołowski, T. (1962), *Umiejętność przekonywania i dyskusji*, Wiedza Powszechna, Warszawa.

Quine, W. Van O. (1937), *New foundations for mathematical logic*, „American Math. Monthly" XLIV, s. 70–80.

Quine, W. Van O. (1970), *Filozofia logiki*, tłum. H. Mortimer, PWN, Warszawa 1977.

Quine, W. Van O. (1987), *Różności. Słownik prawie filozoficzny*, tłum. C. Cieśliński, Fundacja Aletheia, Warszawa 2000.

Ramsey, F. P. (1926), *The foundations of mathematics*, Proceedings of London Math. Society XXV, s. 338–384.

Ramsey, F. P. (1931), *The foundations of mathematics and other logical essays*, London.

Rasiowa, H. (1979), *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa.

Reale, G. (1999), *Historia filozofii starożytnej*, t. 1–5, Redakcja Wydawnictw KUL, Lublin.

Richard, J. A. (1905), *Les Principles de mathématiques et le problème des ensembles*, Revue générale des sciences XVI, s. 541. *The principles of mathematics and the problem of sets* (angielska wersja językowa) [w:] van Heijenoort [1967], s. 142–144.

Robinson, A. (1996), *Nonstandard Analysis*, Princeton University Press, Princeton.

Russell, B. (1902), *Letter to Frege*, [w:] van Heijenoort [1967], s. 124–125.

Russell, B. (1903), *Principles of Mathematics*, London.

Russell, B. (1906), *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and other types*, „Proceedings of London Math. Society" IV, s. 29–53.

Russell, B. (1908), *Mathematical logic as based on the theory of types*, „American Journal of Math". XXX, s. 222–262.

Russell, B. (1923), *Vagueness*, „The Australasian Journal of Psychology and Philosophy" 1, s. 84–92. Źródło internetowe: URL = <http://cscs.umich.edu/~crshalizi/Russell/vagueness/>.

Russell, B. (1995), *Mądrość Zachodu*, Wydawnictwo „Penta", Warszawa.

Rzymska krytyka i teoria literatury, (1983), wybór i oprac. S. Stabryła, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław.

Sainsbury, R. M. (1988), *Paradoxes*, Cambridge University Press, Cambridge 1991.

Sainsbury, R. M. (1990), *Concepts Without Boundaries*, An inaugural lecture delivered at King's College London 6 November 1990, published by the King's College London Department of Philosophy, The Strand, London.

Sainsbury, R. M. (1991), *Is There Higher-Order Vagueness?* „The Philosophical Quarterly" 41, 163, s. 167–182.

Savage, C. Wade (1967), *The paradox of the stone*, „Philosophical Reviev" 76, s. 74–79. Polskie tłum. T. Baszniaka: *Paradoks kamienia*, [w:] *Filozofia religii*, red. B. Chwedeńczuk, Wydawnictwo SPACJA – Fundacja Aletheia, Warszawa, 1997.

Schrader, D. E. (1979), *A solution to the stone paradox*, „Synthese" 42, s. 255–264.

Simons, P. (1992), *Vagueness and ignorance*, „Proceedings of the Aristotelian Society", Supplementary Volume 66, s. 163–177.

Skarga, B. (1982), *Czas i trwanie. Studia o Bergsonie*, PWN, Warszawa.

Skyrms, B. (1982), *Intensional Aspects of Semantical Self-Reference*, [w:] Martin, [1984] s. 119–131.

Słupecki, J. (1953), *St. Leśniewski's protothetics*, „Studia Logica" I, s. 44–111.

Słupecki, J. (1955), *St. Leśniewski's calculus of names*, „Studia Logica" III, s. 7–70.

Słupecki, J. (1958), *Towards a generalised mereology of Leśniewski*, „Studia Logica" VIII, s. 131–154.

Smullyan, R. M. (1978), *What is the Name of This Book? – The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall. Wydanie polskie: *Jaki jest tytuł tej książki? Tajemnica Drakuli, zabawy i łamigłówki logiczne*, tłum. B. Chwedeńczuk, Książka i Wiedza, Warszawa 1998.

Sobociński, B. (1954), *Studies in Leśniewski's mereology*, „Rocznik Polskiego Towarzystwa Naukowego na Obczyźnie" V, s. 34–43.

Sobociński, B. (1960), *On the single axioms of protothetics*, „Notre Dame Journal of Formal Logic" I, s. 52–73.

Sorensen, R. A. (1985), *An Argument for the Vagueness of „Vague"*, „Analysis" 27, s. 134–137.

Sorensen, R. A. (1990), *Vagueness implies cognitivism*, „The American Philosophical Quarterly" 27/1, URL = <http://www.dartmouth.edu/~rasoren/papers/vaguenessimpliescog.pdf>.

Sorensen, R. A. (1994), *A Thousand Clones, Symposium: Vagueness and Sharp Boundaries*, „Mind" 103, s. 47–54.

Sorensen, R. A. (1998), *Sharp Boundaries for Blobs*, „Philosophical Studies" 91, s. 275–295.

Sorensen, R. A. (2003), [SEPh], *Vagueness*, hasło w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. E. N. Zalta, Stanford University Press, Stanford , URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2003/entries/vagueness/>.

Swinburne, R. (1977), *Spójność teizmu*, tłum. T. Szubka, Wydawnictwo „Znak", Kraków, 1995.

Szkoly.edu [a], http://www.szkoly.edu.pl/gim.margonin/artykuly/par_sof.html

Szymanek, K. (2001), *Sztuka argumentacji. Słownik terminologiczny*, PWN, Warszawa.

Tałasiewicz, M. (2002), *Pragmatyczna koncepcja nieostrości*, „Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria" 1 (41), s. 101–113.

Tarski, A. (1933), *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, „Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-Fizycznych" 34, s. VII+116. Cytaty z: A. Tarski, *Pisma logiczno-filozoficzne*, red. J. Zygmunt, t. 1, Biblioteka Współczesnych Filozofów, PWN, Warszawa, 1995, s. 13–172.

Tomasz z Akwinu. *Traktat o Bogu, Summa teologii, kwestie 1–26*, Wydawnictwo „Znak", Kraków 1999.

Turunen, E. (1999), *Mathematics behind fuzzy logic*, Physica Verlag, Heidelberg.

Twardowski, K. (1901), *Zasadnicze pojęcia dydaktyki i logiki*, Towarzystwo Pedagogiczne Lwów.

Tye, M. (1990), *Vague Objects*, „Mind" 99, s. 535–557.

Tye, M. (1994), *Why the Vague Need Not be Higher-Order Vague*, „Mind" 103, s. 43–45.

Tye, M. (1998), *Vagueness*, hasło w: *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, t. 9, ed. E. Craig, London, New York, s. 563–566.

Tye, M. (2003), *Higher-Orders of Vagueness Reinstated*, „Mind" 112, s. 301–305.

Unger, P. (1979a) *I Do Not Exist*, [w:] *Perception and Identity*, ed. G. F. MacDonald, Macmillan, London, s. 235–251.

Unger, P. (1979b), *There Are No Ordinary Things*, „Synthese" 41, s. 117–154.

Unger, P. (1979c), *Why There Are No People*, „Midwest Studies in Philosophy" 4: Studies in Metaphisics, s. 177–222.

Unger, P. (1980), *The Problem of the Many*, „Midwest Studies in Philosophy" 5: Studies in Metaphisics, s. 411–467.

Unger, P. (2004), *The Mental Problems of the Many*, „Oxford Studies in Metaphisics" 1. Źródło internetowe: http://www.nyu.edu/gsas/dept/philo/faculty/unger/papers/mentalproblem.pdf, s. 27.

Van Fraassen, B. C. (1966), *Singular terms, tryth-value gaps and free logic*, „Journal of Philosophy" 63, s. 481–495.

Van Fraassen, B. C. (1968), *Presupposition, implication and self-reference*, „Journal of Philosophy" 65, s. 136–152.

Van Fraassen, B. C. (1972), *Formal Semantics and Logic*, Macmillan, London.

Van Heijenoort, J. (1967), *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard University Press, Cambridge MA.

Van Inwagen, P. (1981), *The Doctrine of Arbitrary Undetached Parts*, „Pacific Philosophical Quarterly" 62, s. 123–137.

Van Inwagen, *P.* (1988), *And Yet They Are Not Three Gods But One God*, [w:] T. V. Morris (ed.), *Philosophy and the Christian Faith*, University of Notre Dame Press, Notre Dame Press, Indiana, s. 241–278.

Varzi, A. C. (2003a), *Higher-Order Vagueness and the Vagueness of „Vague"*, „Mind" 112, s. 295–299.

Varzi, A. C. (2003b), *Vagueness*, hasło w: *Encyclopedia of Cognitive Science*, ed. L. Nadel, Macmillan and Nature Publishing Group, London, s. 459–464. URL = <http://www.columbia.edu/~av72/papers/ECS_2002.pdf>.

Visser, A. (1989), *Semantics and the liar paradox*, [w:] *Handbook of Philozophical Logic*, eds D. Gabbay, I F. Guenthne, D. Reidel Publishing Company, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Vol. 4, s. 617–706.

Wallace, J. (1972), *On the Grame of Reference*, [w:] D. Davidson and G. Herman (eds) *Semantics of Natural Language*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht–Bostons, s. 219–252.

Weatherson, B. [SEPh], *The Problem of the Many*, hasło w: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. E. N. Zalta, Stanford University Press, Stanford, URL = <http://plato.stanford.edu/entries/problem-of-many/>.

Wells, H. G. (1908), *First and Last Things*.

Whitehead, A. N. (1929), *Process and Reality*, Cambridge University Press, Cambridge.

Whitehead, A. N. i **Russell, B.** (1913), *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge.

Wiggins, D. (1967), *Identity and Spatio-Temporal Continuity*, Blackwell, Oxford.

Wikipedia:

[a], http://www.campusprogram.com/reference/en/wikipedia/i/in/infinitesimal.html

[b], http://www.campusprogram.com/reference/en/wikipedia/s/su/surreal_number.html

[c], http://www.campusprogram.com/reference/en/wikipedia/h/hy/hyperreal_number.html

[d], http://www.campusprogram.com/reference/en/wikipedia/h/ho/how_archimedes_used_infinite simals.html

[e], http://pl.wikipedia.org/wiki/Paradox_czarnego_kruka

[f], http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Bayesa

[g], http://pl.wikipedia.org/wiki/Paradoks_koni

[h], http://pl.wikipedia.org/wiki/Paradoks_Newcomba

Williams, C. J. F. (1994), *Neither Confronting the Persons nor Dividing the Substance*, [w:] A. G. Padgett (ed.), *Reason and the Christian Religion. Essays in honour of Richard Swinburne*, Clarendon Press, Oxfrod, s. 227–243.

Williamson, T. (1992a), *Inexact Knowledge*, „Mind" 101, s. 217–242.

Williamson, T. (1992b), *Vagueness and Ignorance*, „Proceedings of the Aristotelian Society", Supplementary Volume 66, s. 163–177.

Williamson, T. (1994), *Vagueness*, Routledge, London and New York.

Williamson, T. [manuskrypt], *Vagueness in Reality*, forthcoming in M. Loux and D. Zimmerman, (eds), *The Oxford Handbook of Metaphisics*, Oxford University Press, Oxford.

Witkowiak, A. (1971), *Propedeutyka teologii katolickiej*, Księgarnia Św. Wojciecha, Poznań–Warszawa–Lublin.

Wojnar, I. (1985), *Bergson*, Wiedza Powszechna, Warszawa.

Woleński, J. (1992), *Konsekwencje odrzuceniowe i porównywanie teorii*, „Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Opolu", Matematyka 28, s. 107–111.

Woleński, J. (1993), *Samozwrotność i odrzucanie*, „Filozofia Nauki" 1, s. 89–102.

Wright, C. (1994), *The epistemic conception of vagueness*, [w:] *Vagueness*, (ed.) T. Horgan, „The Southern Journal of Philosophy", s. 133–160.

Wybraniec-Skardowska, U. (1996), *O konceptualizacji wiedzy nieostrej*, „Filozofia Nauki" 3.

Zadeh, L. A. (1965), *Fuzzy sets*, „Information and Control" 8, s. 338–353.

Zadeh, L. A. (1975), *Fuzzy logic and approximate reasoning*, „Synthese" 30, s. 407–428.

Zermelo, E. (1904), *Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Math. Annalen LIX, s. 514–516.

Zermelo, E. (1908), *Neuer Beweis für die Grundlagen der Mengenlehre*, Math. Annalen LXV, s. 261–281.

Ziembiński, Z. (1959), *Logika praktyczna*, PWN, Warszawa, 1984.

Ziemiński, I. (1999), *Spójność chrześcijańskiego pojęcia Boga*, [w:] K. Mech (red.), *Człowiek wobec religii*, Zakład Wydawniczy Nomos, Kraków, s. 200–213.

Zimmermann, H.-J. (1991), *Fuzzy set theory and its applications*, Kluwer, Boston.

INDEKS OSÓB

INDEKS RZECZOWY

OD REDAKCJI

Piotr Łukowski jest matematykiem z wykształcenia, zatrudnionym w Katedrze Logiki i Metodologii Nauk Uniwersytetu Łódzkiego od 1987 roku. Doktorat z filozofii uzyskał w 1993 roku. W roku 1993 przebywał na stażu naukowym w Anglii: w Imperial College w Londynie oraz w University of Warwick w Coventry. W latach 1995–1997 odbył naukowy staż w Japan Institute of Science and Technology (JAIST) w Hokuriku w Japonii. W roku 1994 w Hadze, w Holandii zdobył certyfikat specjalisty marketingu i logistyki w ramach Menagement Nederlands Cooperative Programme. W latach 1993–1994 był współredaktorem międzynarodowego kwartalnika „Bulletin of the Section of Logic. University of Lodz". Od roku 1998 jest redaktorem internetowego wydania tego kwartalnika. Opublikował przeszło 20 prac z zakresu logiki formalnej i filozoficznej. Specjalizuje się w zagadnieniach ogólnie rozumianej logiki formalnej, a w szczególności zajmował się logikami niefregowskimi, intuicjonistycznymi systemami modalnymi, dualizacjami logik, logikami odrzuceniowymi, procedurami niemonotonicznych rozumowań oraz paradoksami. Zajmuje się także erystyką, ogólnymi metodami walki oraz technikami perswazyjnymi.