

Michał Tymiński

**Teoria masowej obsługi. Przykłady zastosowania
w procesach zarządzania usługami hotelarskimi
i turystycznymi**

Klient – czas – efektywność usługi

Klient ocenia wartość i efektywność usługi jaką otrzymuje przez pryzmat jej jakości, ale także (a może przede wszystkim) poprzez czas jaki musi spędzić w kolejkach, w oczekiwaniu na obsługę. Każda minuta „przestana” w kolejkach jest czasem straconym dla konsumenta. Kolejki zaś to rzeczywistość naszego życia. Spotykamy się z nimi na każdym kroku: w życiu kulturalnym (kino, teatr itp.), w środkach komunikacji, a także w bardzo uciążliwych dziedzinach życia codziennego – w handlu i w gastronomii, w której „problem kolejek” jest szczególnie ważny (wynika to z oczywistej zasady – „konsument chciałby szybko i dobrze zjeść”). Jest to równocześnie aspekt efektywności i jakości działania organizacji usługowych nie tylko klientów, dla których „czas to pieniądz” ale także instytucji usługowych. Dla przedsiębiorstw usługowych „czas – to zysk”. Według R.C. Larson (za: Mudie, Cottam 1998) 200 mln Amerykanów spędza codziennie po pół godziny w kolejkach, co tworzy około 37 mld godzin rocznie czasu straconego w kolejkach. Czasu, który mógłby np. być wykorzystany na efektywny wypoczynek, a którego strata obniża poziom dobrobytu społeczeństwa.

Optymalne sterowanie kolejkami to nie tylko skrócenie czasu oczekiwania na obsługę (zadowolenie konsumentów), ale i wzrost efektywności zarządzania firmą, tym samym wzrost dochodowości i rentowności firmy.

Racjonalne zarządzanie przedsiębiorstwem usługowym to także, oczywiście, optymalne sterowanie kolejkami, jakie są charakterystyczne dla przedsiębiorstwa (np. transportu, obsługi hotelarskiej, czy też gastronomii itp.). Mimo specyfiki kolejek w danym przedsiębiorstwie,

musi ono uwzględnić pewne zasady, które legły u podstaw założeń rządzących przebywaniem w kolejkach i czasem oczekiwania (Mudie, Cottam 1998). Mianowicie:

- w organizacji obsługi klientów należy zachować zasadę sprawiedliwości społecznej; sprowadza się ona do podstawowego warunku obsługi: klient, który przyszedł pierwszy – pierwszy powinien być obsłużony; często bywa tak, że klienci dłuższy czas stoją w kolejce, a tutaj niespodziewanie otwiera się nowe stanowisko obsługi; klienci, którzy przyszli później (z końca kolejki) są pierwsi przy nowym stanowisku; jest to oczywisty wyraz niesprawiedliwości społecznej;

- w organizacji obsługi należy zachować zasadę uwarunkowań behawioralnych sprowadzających się do stworzenia oczekującym w kolejkach klientom sytuacji (bądź zaangażowanie dodatkowych środków) rozładowujących napięcie, umożliwiającym oczekiwanie znośniejszym, przyjemniejszym; celem stworzenia takich pozytywnych odczuć klientowi należy w organizacji obsługi klientów uwzględnić szereg uwarunkowań behawioralnych (Mudie, Cottam 1998). Do najbardziej zasadniczych należą:

- a) niepewność związana z długością czasu oczekiwania w kolejkach; likwidacja (lub ograniczenie) niepewności czekania to m.in. system rezerw stanowisk obsługi, racjonalne rozplanowanie stanowisk obsługi w czasie i przestrzeni usługowej oraz inne;

- b) informacje o zakłóceniach w systemie obsługi; należy informować w sposób komunikatywny i prawidłowy o przyczynach, zakłóceń, opóźnień w obsłudze klientów; wprowadzać udogodnienie i usprawnienie nie tylko systemu obsługi, ale także systemu informacji;

- c) niepokój, jako konsekwencja ryzyka załatwienia sprawy; pojawia się on u klienta po dłuższym oczekiwaniu w kolejce (z braku spodziewanego tempa przesuwania się kolejki bądź też z braku odpowiednio wyczerpującej informacji);

- d) wartość czasu jaka jest właściwa dla każdego klienta musi być doceniona w organizacji systemu obsługi; stąd szczególnie istotne jest dostosowanie punktów usługowych do prędkości i wagi załatwianych spraw; należy zatem uwzględnić ważność załatwianych spraw dla klienta i dostosowywać system obsługi umożliwiając przestrzeganie zasady: to co istotne dla klienta – to ma również wysoką wartość dla usługodawcy.

Wszystkie te uwarunkowania i zasady, które są podstawą prawidłowej i efektywnej obsługi klienta, są równocześnie podstawą ekonomicznej efektywności działalności przedsiębiorstwa usługowego, np. przedsiębiorstwa turystycznego czy hotelarskiego. Zachodzi zatem istotne

pytanie: jak zorganizować racjonalnie – z punktu widzenia klienta oraz efektywności zarządzania przedsiębiorstwem – system obsługi, który usprawniałby zarządzanie ekonomiką firmy, zapewniając systematyczny wzrost dochodów? Racjonalne sterowanie kolejkami jest istotnym narzędziem zwiększania efektywności działalności gospodarczej przedsiębiorstwa usługowego. W tym zakresie rozwiązaniem może być wykorzystanie teorii masowej obsługi w optymalnym sterowaniu kolejkami.

Podstawy teorii masowej obsługi (*Queueing Theory*)

Teoria masowej obsługi została opracowana przez G. Erlanga w początkach ubiegłego wieku, a źródłem jej opracowania były potrzeby modyfikacji systemów telekomunikacyjnych (Radzikowski 1997). Istotę teorii masowej obsługi (bądź teorii kolejek) można sprowadzić do następujących podstawowych założeń:

- system masowej obsługi może być jednoznacznie spełniony, jeżeli znane są: zbiór przedmiotów (bądź podmiotów) oraz zbiór aparatów obsługi,

- w dowolnie określonym odcinku czasu liczba zgłoszeń jest nieskorelowana (niezależna) z liczbą zgłoszeń w innym odcinku czasu,

- możliwość wystąpienia więcej niż jednego zgłoszenia w tym samym momencie jest wykluczone (zgłoszenia są od siebie niezależne),

- prawdopodobieństwo zaistnienia odpowiedniej liczby zgłoszeń w określonym przedziale czasu zależy jedynie od długości przedziału; nie zależy natomiast ani od początku tego przedziału ani jego końca.

Z tych założeń wynika, że jeżeli zgłoszenia napływają w niedających się z góry ustalić momentach czasu, to sposób ich napływu (pomiaru) można opisać poprzez odpowiednie rozkłady prawdopodobieństwa. Przy czym zakłada się, że jeżeli między dwoma kolejnymi zgłoszeniami upłynie czas dłuższy niż t , to rozkład prawdopodobieństwa zaistnienia takich zdarzeń można opisać funkcją wykładniczą, postaci $P_0(t) = e^{-at}$. Inaczej jest to rozkład Poissona, który charakteryzuje się również tym, że prawdopodobieństwo zdarzenia ma tę własność, iż w czasie t zaobserwujemy n zgłoszeń.

Można to wyrazić formułą:

$$P_n(t) = \frac{(at)^n}{n!} e^{-at} \quad (1)$$

Nierozłącznym składnikiem procesu Poissona jest czas trwania obsługi. Przyjmuje się go zazwyczaj także jako wartość losową. Stąd też dla czynnika czasu stawiamy podobne założenia jak dla rozkładu zgłoszeń, jakimi charakteryzuje się poissonowski rozkład (Sadowski 1973).

Przyjmujemy do analizy procesu obsługi, iż charakteryzuje się on rozkładem wykładniczym czasu obsługi oraz rozkładem Poissona liczby zgłoszeń w jednostce czasu. Jest to typowy poissonowski proces obsługi charakteryzujący się podstawowymi etapami (Sadowski 1973):

1) ciągła rejestracja częstości zgłoszeń do obsługi oraz czasów obsługi,

2) oszacowanie parametrów: λ (reprezentującego średnią liczbę napływu zgłoszeń w jednostce czasu) oraz μ (reprezentującego średnią liczbę prawdopodobnych obsług w jednostce czasu); tzn. takiego doboru parametrów λ i μ , by otrzymać możliwie najbardziej prawdopodobny model badanego zjawiska umożliwiający przyjęcie hipotezy o wykładniczym rozkładzie przerw pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami, a także wykładniczym rozkładzie czasu obsługi.

Założenia, ujęte w drugim etapie, można wyrazić w formalnym ujęciu następująco:

λ – stopa przybycia (zgłoszenia) klientów. Jest to inaczej odwrotność przeciętnego czasu dzielącego dwa kolejne zgłoszenia (dwóch kolejnych klientów), czyli:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}} \quad (\bar{t} - \text{przeciętny czas między kolejnymi zgłoszeniami/klientami}).$$

μ – stopa obsługi (rozumiana jako przeciętna liczba zgłoszeń bądź klientów obsługanych w jednostce czasu), czyli: $\mu = \frac{1}{\bar{t}}$.

W samej analizie stabilności układu obsługi wykorzystuje się parametr intensywności ρ , który wyraża relację:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (\text{por. aneks do artykułu}) - \text{stopień wykorzystania kanału obsługi.}$$

Wyprowadzone parametry służą do ostatecznej analizy stabilności systemu obsługi. I tak, np.:

$\lambda < \mu$ – układ jest w stanie równowagi (przy założeniu, że obie stopy są stałe).

$\lambda \geq \mu$ – układ jest niestabilny, a wydłużenie kolejki jest pewne.

Przykłady zastosowań elementów teorii masowej obsługi w problematyce zarządzania usługami hotelarskimi i turystycznymi

Przykład 1. Firma Turystyczno-Hotelarska „Mewa” posiada bazę konserwacyjno-naprawczą sprzętu wodnego, w której wykonuje różnego rodzaju zabiegi konserwacyjno-remontowe. Kierownictwo bazy dąży do racjonalizowania organizacji jej działania; prowadzi zatem systematycznie analizę sprawności organizacji obsługi klientów. Z tej analizy wynika, że:

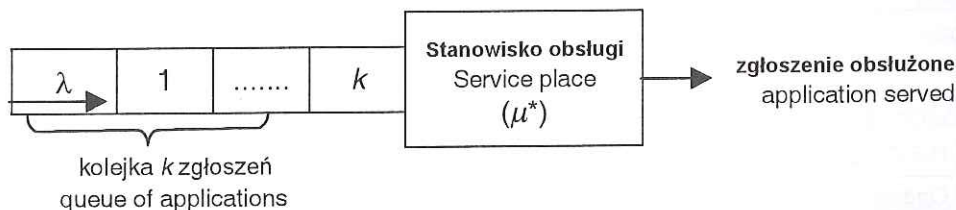
- przeciętny czas zajęcia przez jednostkę sprzętu wodnego stanowiska naprawczego w bazie wynosi 67 minut,
- baza czynna jest w sezonie 10 godzin dziennie,
- baza posiada jedno stanowisko obsługi,
- rozkład zgłoszeń do obsługi przedstawia się następująco (Tab. 1):

Tabela 1. Empiryczny rozkład strumienia zgłoszeń (napływ klientów do obsługi)
Table 1. Empirical schedule of application stream (constomers)

Dzienna liczba napływu klientów Daily number of customers	Liczba stwierdzonych przypadków Number of stating chances
0–2	2
3–6	6
7–10	52
11–14	30
15–18	7
19–22	3
>22	0
Σ	100

Źródło: Opracowanie własne.
Source: Own elaboration.

Sytuację tego przykładu można w uproszczeniu przedstawić graficznie (Ryc. 1):



Ryc. 1. Schemat systemu obsługi
Fig. 1. Scheme of serving system

Rozwiązanie problemu. Ocena strumienia zgłoszeń. Średnia dzienna liczba zgłoszeń

$$\lambda = \frac{2 \cdot 1 + 6 \cdot 4,5 + 52 \cdot 8,5 + 30 \cdot 12,5 + 6 \cdot 16,5 + 3 \cdot 20,5}{100} = 10,065 \approx 10 \text{ zgłoszeń}$$

Jeżeli przyjmiemy, że rozkład zgłoszeń ma charakter procesu Poissona, to możemy dalej przyjąć także, iż średnia tego rozkładu ma wartość 10 zgłoszeń dziennie. W takim razie prawdopodobieństwo K zgłoszeń dziennie ma postać:

$$P_K = \frac{(\lambda t)^K}{K!} e^{-\lambda t} \text{ oraz } P_K = \frac{10^K}{K!} e^{-10}. \quad (2)$$

Stąd:

$P_0 = 0,000$	$P_6 = 0,063$	$P_{12} = 0,095$	$P_{18} = 0,007$
$P_1 = 0,000$	$P_7 = 0,090$	$P_{13} = 0,073$	$P_{19} = 0,004$
$P_2 = 0,002$	$P_8 = 0,113$	$P_{14} = 0,052$	$P_{20} = 0,002$
$P_3 = 0,008$	$P_9 = 0,125$	$P_{15} = 0,035$	$P_{21} = 0,001$
$P_4 = 0,019$	$P_{10} = 0,125$	$P_{16} = 0,022$	$P_{22} = 0,000$
$P_5 = 0,038$	$P_{11} = 0,114$	$P_{17} = 0,013$	

Obliczone prawdopodobieństwo grupujemy w klasach odpowiadających rozkładowi napływu klientów. Umożliwi to porównanie liczby przypadków teoretycznych z liczbą przypadków rzeczywistych (Tab. 2).

Tabela 2. Liczba przypadków teoretycznych i rzeczywistych
Table 2. Number of theoretical and real chances

Dzienna ilość napływu klientów do systemu obsługi Daily number of customers in service system (K)	Obliczone prawdopodobieństwo teoretyczne w skumulowanych klasach napływu klienta Estimated theoretical probability in accumulated classes of customers (P_K)	Ilość przypadków teoretycznych w poszczególnych klasach Number of theoretical chances in particular classes (N_i^1)	Ilość przypadków rzeczywistych w poszczególnych klasach Number of real chances in particular classes (N_i)
0-2	0,002	0,2	2
3-6	0,128	12,8	6
7-10	0,453	45,3	52
11-14	0,334	33,4	30
15-18	0,076	7,6	7
19-22	0,007	0,7	3
Ogółem / Total	1,000	100,0	100

Źródło: Opracowanie własne.
Source: Own elaboration.

Dla ustalenia prawdziwości hipotezy o zgodności zaobserwowanych częstości (napływu klientów) z rozkładem Poissona zastosujemy test χ^2 . W tym celu dokonamy dla ułatwienia dalszych obliczeń skumulowania przedziałów na trzy klasy wartości liczbowych (Tab. 3):

Tabela 3. Liczba przypadków teoretycznych i rzeczywistych w wyróżnionych klasach

Table 3. Number of theoretical and real chances in disticting classes

Przedziały (klasy) liczbowe Numbers classes (K)	Obliczone prawdopodobieństwo teoretyczne w skumulowanych klasach Estimated theoretical probability in accumulated classes (P_K)	Ilość przypadków teoretycznych w poszczególnych klasach Number of theoretical changes in particular classes (N_i^1)	Ilość przypadków rzeczywistych w poszczególnych klasach Number of real chances in particular classes (N_i)
0–6	0,130	13,0	8
7–14	0,787	78,7	82
15–22	0,083	8,3	10
Ogółem / Total	1,000	100,0	100

Źródło: Opracowanie własne.

Source: Own elaboration.

Tabela 3 zawiera liczebności teoretyczne (N_i^1) oraz zaobserwowane (empiryczne) wartości napływu klientów. Ułatwia ona przeprowadzenie procedury określenia wartości sprawdzianu χ^2 .

Przyjmując z tablicy 4 wartości χ^2 przy poziomie istotności 0,5% oraz $V = 2$ (liczba stopni swobody) otrzymamy wartość 0,10 oraz 5,99. Obliczona wartość $\chi^2 = 3,547$ mieści się w tablicowych wartościach procentowych, zatem przyjmujemy za prawdziwą hipotezę, która nam potwierdza, iż częstości napływu klientów (częstość zgłoszenia) ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 10$. Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że rozkład napływu zgłoszeń ma rozkład Poissona.

Analiza procesu obsługi. Przyjmując zaobserwowaną wartość średniego czasu obsługi sprzętu wodnego wynoszącą 100 min/szt. mamy wydajność dzienną stanowiska obsługi: $\mu = \frac{10 \cdot 60}{67} \approx 9$ jednostek sprzętu wodnego (np. rowerów wodnych).

Tabela 4. Wyznaczenie wartości krytycznej χ^2

Table 4. Estimating of critical value χ^2

Przedziały (klasy) liczbowe Numbers classes (K)	Obliczone wartości liczbowe przypadków Estimated numbers values of chances		Wartości wyjściowe dla testu Entrance values for test χ^2		
	teoretycznych theoretical N_i'	rzeczywistych real N_i	$(N_i' - N_i)$	$(N_i' - N_i)^2$	$(N_i' - N_i)^2 / N_i$
0-6	13,0	8	5,0	25,00	3,125
7-14	78,7	82	-3,3	10,89	0,133
15-22	8,3	10	-1,7	2,89	0,289
	100,0	100	x	x	3,547

Źródło: Opracowanie własne.

Source: Own calculation.

Wykazaliśmy, że omawiany proces charakteryzuje się poissonowskim potokiem zgłoszeń (wartość parametru $\lambda = 10$). Przyjmujemy, że czas obsługi ma rozkład wykładniczy ($\mu = 9$). Stąd natężenie ruchu osiąga wartość:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{9} = 1,1 \quad (3)$$

Rozkład czasu obsługi nie był badany empirycznie. Przyjęto zgodnie z opisem modelu, że jest to rozkład wykładniczy.

Porównując wartość obu parametrów stwierdzamy, iż mamy tutaj następujące relacje: $\lambda > \mu$ – oznacza, że stopa przybyć jest wyższa od stopy obsługi. Także wartość parametru $\rho > 1$, co skłania do stwierdzenia, że badany układ jest niestabilny, tj. przy $t \rightarrow \infty$ długość kolejki rośnie w nieskończoność. Stan równowagi może być osiągnięty jedynie poprzez zmianę uwarunkowań decyzyjnych:

- skrócić przeciętny czas obsługi drogą wzrostu wydajności pracy,
- utworzyć drugie stanowisko.

Rozważmy pierwszą sytuację decyzyjną. Poprzez usprawnienie organizacji (zakup lepszego sprzętowania, lepsze wykorzystanie czasu pracy itd.) został skrócony przeciętny czas obsługi: z 67 do 48 min /

jednostkę (wtedy: $\mu = \frac{10 \cdot 60}{48} = 12,5$). Stąd: $\rho = \frac{10}{12,5} = 0,8$ co pozwala na

stwierdzenie, że w bazie naprawczej sprzętu sytuacja się polepszyła, gdyż $\lambda < \mu$ także $\rho < 1$. System jest w miarę stabilny i prawdopodobieństwo długich kolejek maleje. Wtedy otrzymujemy następujące charakterystyki procesu obsługi:

– prawdopodobieństwo, że w systemie znajdzie się k jednostek (sprzętowych) wyniesie:

$$P_K = \rho^K (1 - \rho) = \left(\frac{10}{12,5}\right)^K \left(1 - \frac{10}{12,5}\right) = \left(\frac{10}{12,5}\right)^K \cdot \frac{2,5}{12,5} \quad (4)$$

tak np.: dla dziennej liczby zgłoszeń 2 (z przedziału 0–2) prawdopodobieństwo to będzie wynosiło:

$$P_2 = (0,8)^2 (1 - 0,8) = 0,128$$

natomiast dla $k = 0$, będzie: $P_0 = 0,2$ – i oznacza, że system obsługi nie zawiera ani jednej jednostki sprzętu do obsługi (czyli zupełnie nie jest wykorzystywany). Oznacza to także, że średnio system (kanał obsługi) obsługuje: $12,5 (1 - 0,2) = 10$ jednostek sprzętu w ciągu 10 godzinnego dnia.

– oczekiwana (średnia) liczba zgłoszeń w całym systemie obsługi (tj. w kolejce i na stanowisku obsługi) będzie wynosiła:

$$E_2 = \rho / (1 - \rho) = 0,8 / 0,2 = 4 \text{ (jednostki sprzętu)} \quad (5)$$

– natomiast średnia liczba zgłoszeń oczekujących na obsługę (tj. oczekiwana długość kolejki) wynosi:

$$E_1 = \rho^2 / (1 - \rho) = 0,8^2 / 0,2 = 3,2 \text{ (jednostki sprzętu)} \quad (6)$$

– oczekiwany czas pobytu w kolejce:

$$E_3 = \frac{\rho}{1} = \frac{0,8}{1} = 0,32 \text{ (10-godz. dnia, tj. } 0,32 \times 10 = 3,2 \text{ g.)} \quad (7)$$

$$\frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{0,8}{12,5 - 10}$$

- oczekiwany czas pobytu w całym systemie obsługi

$$E_4 = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{12,5 - 10} = 0,4 \text{ dnia, tj. 4 godziny (tj. } 0,4 \times 10 \text{ godzin) (8)}$$

- prawdopodobieństwo, iż w kolejce znajdzie się co najmniej jedno zgłoszenie (tzn. że stanowisko jest zajęte) wynosi:

$$P_1 = 1 - P_0 = 0,800 \quad (9)$$

- prawdopodobieństwo tego, iż w kolejce nie będzie oczekiwało mniej aniżeli K_0 zgłoszeń (sprzętu do obsługi), wyniesie np. dla 3 zgłoszeń:

$$P(K > K_0) = \rho^{K_0+1} = (0,8)^{3+1} = 0,4096 \quad (10)$$

a dla 6 zgłoszeń:

$$P(6+1 > 6) = (0,8)^{6+1} = 0,2100 \text{ itd.} \quad (11)$$

Wynika z tego, iż są „płonne obawy”, że kolejka może rosnać w nieskończoność.

- prawdopodobieństwo tego, że klient Firmy Turystyczno-Hotelarskiej będzie oczekiwał w kolejce więcej aniżeli $t = t_0$ jednostek czasu wynosi (np. dla $t_0 = 1$ godz.):

$$P(t > t_0) = \rho e^{-t_0(\mu - \lambda)} = 0,8e^{-1(12,5 - 10)} = 0,8e^{-2,5} = 0,066 \quad (12)$$

bardzo małe jest prawdopodobieństwo, że klient firmy straci w kolejce więcej aniżeli 3,96 min ($0,066 \times 60$).

Reasumując: otrzymane charakterystyki analizowanego procesu obsługi przy wykorzystaniu elementów teorii masowej obsługi wskazują, iż optymalna organizacja bazy konserwacyjno-naprawczej będzie spełniała wymogi racjonalnej organizacji wtedy, kiedy dokonane zostaną usprawnienia gwarantujące wzrost wydajności stanowiska obsługowego, powodujące obniżenie przyjętego czasu obsługi z 67 min. do 48 min. Tworząc tym samym płynny, dość ściśle zsynchronizowany układ

systemu obsługi: $\lambda \rightarrow \mu$, racjonalizujący organizację działania bazy usługowej, zwiększając jej przepustowość, równocześnie oszczędzając czas klientów w kolejce.

Przykład II. Kierownik Biura Turystycznego prowadzącego lokal restauracyjny chce zwiększyć efektywność ekonomiczną prowadzonej placówki gastronomicznej poprzez usprawnienie jej organizacji i zarządzania w sezonie letnim. Będzie to możliwe przez racjonalne zwiększenie wydajności stanowisk obsługi i pomocniczych (kuchni). Wykorzystuje metodologię masowej obsługi. Usprawnienie organizacji powinno się sprowadzać do ustalenia optymalnego parametru obsługi konsumentów μ , by zminimalizować łączne koszty ponoszone w czasie przebywania konsumenta w systemie (tj. w kolejce i obsłudze razem). Będzie to także koszt samej obsługi konsumenta.

Tabela 5. Obserwacje czasu przyścia klientów oraz kosztów jednostkowych obsługi i oczekiwania

Table 5. Observing reaching time customers and unit costs of service and looking forward

Tygodnie (w miesiącach) Weeks (in months)	Czas przybycia liczony od przybycia poprzedniego klienta (w minutach) Reaching time counting from reaching former customer (in minutes)	Koszty (zł / klienta) Cost (zł for customer)	
		Koszt obsługi Service cost K_{j1}	Koszt oczekiwania Awaiting time cost K_{j2}
1 tydzień (czerwiec)	2,5	80	30
2 tydzień (czerwiec)	3,0	92	30
3 tydzień (czerwiec)	3,6	100	32
4 tydzień (czerwiec)	3,4	120	29
5 tydzień (lipiec)	3,6	104	28
6 tydzień (lipiec)	2,7	102	30
7 tydzień (lipiec)	4,2	100	31
8 tydzień (lipiec)	4,5	98	32
9 tydzień (sierpień)	5,0	82	34
10 tydzień (sierpień)	5,2	70	50
11 tydzień (sierpień)	5,0	98	52
12 tydzień (sierpień)	4,7	94	60
Wielkości przeciętne	3,9	95	36,5

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z przykładu.

Source: Own elaboration according to example's dates.

W pierwszym przypadku będzie to koszt utraconych korzyści – to znaczy wartość utraconych korzyści, jakie restauracja ponosi kiedy klient (konsument) oczekuje na obsługę (np. siedzenie przy stoliku), w porównaniu z sytuacją, w której byłby obsłużony, przynosząc dochód działalności gastronomicznej. W drugim przypadku będzie to rzeczywisty koszt związany z kosztami posiłku, tzw. koszty materiałowe, robocizny, (koszty konsumenta), także związane z kosztami ogólnymi (ogólnozakładowymi) oraz inne. W jednym i drugim przypadku będą to koszty jednostkowe (obliczone na jednego konsumenta) (Tab. 5).

Kierownik restauracji dysponuje danymi za ostatni okres (poprzedni sezon turystyczny, przy czym koszty zostały skorygowane o bieżące kształtowanie się wielkości pozostałych składników kosztów).

Rozwiązanie – analiza problemu. System organizacji obsługi będzie najbardziej efektywny (finansowo optymalny), jeżeli koszt obsługi konsumentów (klientów) będzie minimalny. Stąd też należy określić wartość optymalną parametru μ , przy którym łączny koszt działania systemu byłby minimalny. Koszt całkowity można przedstawić jako sumę kosztów ponoszonych przez restaurację, kiedy konsumenci oczekują w kolejce do obsługi (K_2) oraz koszt obsługi konsumentów (K_1). A zatem koszt całkowity $K_c = K_1 + K_2$. Natomiast koszt jednostkowy: $K_{cj} = K_{j1} + K_{j2}$ (t. koszt oczekiwania i obsługi jednego konsumenta).

(1) Koszt samej obsługi konsumenta jest proporcjonalny do jej intensywności:

$$K_{j1}(\mu) = \mu K_{j1} \quad (13)$$

(2) Przy czym koszt jednostkowy konsumenta znajdującego się w kolejce systemu będzie równy iloczynowi kosztu jednostkowego oraz średniej liczby jednostek (konsumentów) w kolejce systemu:

$$K_2 = K_{j2} \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \text{ gdzie } \lambda = \frac{1}{3,9} = 0,256. \quad (14)$$

Ostatecznie kryterium minimalizacji kosztów całkowitych będzie określone wyrażeniem:

$$\min K_{cj}(\mu) = \min \left[\mu K_{j1} + \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \cdot K_{j2} \right] \quad (15)$$

Z uwagi na fakt, iż funkcja $K_{cj}(\mu)$ jest funkcją wypukłą, stosując rachunek różniczkowy, poprzez przyrównanie pierwszej pochodnej do zera, otrzymuje się warunek konieczny, przy drugim warunku wystarczającym (przy drugiej pochodnej większej od zera) otrzymuje się szukane rozwiązanie.

Zatem przyrównując funkcje kryterium do zera, mamy:

$$K'_c = \frac{dK_{cj}(\mu)}{d\mu} = K_{j1} - \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)^2} K_{j2} = 0 \quad (16)$$

oraz:

$$\frac{2K_{j2}\lambda}{(\mu - \lambda)^3} > 0 \quad \text{dla } \mu > \lambda. \quad (17)$$

Stąd:

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda K_{j2}}{K_{j1}}}. \quad (18)$$

Wprowadzając następnie dane z dokonanych obserwacji, otrzymujemy:

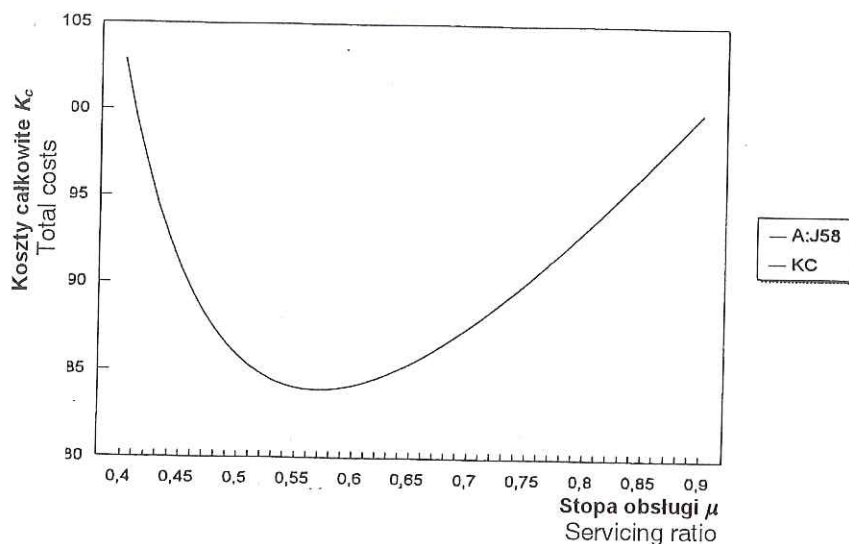
$$\mu^* = 0,256 + \sqrt{\frac{0,256 \cdot 36,5}{95}} = 0,570. \quad (19)$$

Wartość ta wskazuje, że system obsługi jest wysoce stabilny. Świadczą o tym podstawowe charakterystyki systemu obsługi. Parametry opisujące system przyjmują następujące wartości:

$$\lambda = 0,256$$

$$\mu^* = 0,570$$

$$\rho^* = \frac{0,256}{0,570} = 0,45$$



Ryc. 2. Koszt całkowity obsługi 1 klienta

Fig. 2. Total cost of servicing 1 customer

Ponieważ $\lambda < \mu$, a także $\rho < 1$ należy uznać, iż w badanym układzie (systemie) sytuacja jest poprawna. Prawdopodobieństwo długich kolejek maleje, a system jest wyraźnie stabilny.

Przeciętna liczba klientów wyczekujących na obsługę (tj. długość kolejki) wynosi:

$$E_1 = \frac{\rho^{*2}}{1 - \rho^*} = \frac{0,45^2}{1 - 0,45} = 0,368 \quad (20)$$

Wartość 0,368 oznacza praktycznie system obsługi z brakiem kolejki do obsługi (w kolejce średnio znajduje się 1/3 osoby). Potwierdza to też prawdopodobieństwo braku kolejek, które przyjmuje dość znaczącą wartość.

$$P_0 = 1 - \rho^* = 1 - 0,45 = 0,55 \quad (21)$$

Prawdopodobieństwo tego, że klient (konsument) będzie czekał dłużej niż 1 minutę jest także umiarkowane i wynosi:

$$P(t > 1) = 0,45e^{-(0,570-0,256)} = 0,45 \cdot 0,7335 = 0,33 \quad (22)$$

zatem dłuższe oczekiwanie na obsługę jest mało prawdopodobne.

Przyjmując przeciętną liczbę klientów obsługiwanych równą: $\mu^* = 0,570$ /min uzyskujemy minimum łącznych kosztów (obsługi i oczekiwania na obsługę) przy założeniu, iż przeciętny czas wejścia (przybycia) obsługi będzie wynosił 3,9. Kierownik zatem powinien wzmocnić obsadę kelnerską oraz pracowników kuchni, by konsument przy stoliku, od chwili przyjęcia zamówienia przez obsługę (kelnera) był obsługiwany w ciągu 1,75 min (1:0,570). Wtedy łączny oczekiwany czas przebywania klientów w całym systemie obsługi (czyli w kolejce i obsłudze) będzie wynosił:

$$E(t) = \frac{1}{\mu^* - \lambda} = \frac{1}{0,570 - 0,256} \cong 3,2 \text{ min} \quad (23)$$

Natomiast oczekiwana liczba klientów przebywających w całym systemie (tj. w kolejce i obsłudze) będzie wynosiła:

$$E_2 = \frac{\rho^*}{(1 - \rho^*)} = \frac{0,45}{0,55} = 0,82 \text{ osoby.} \quad (24)$$

Tak zorganizowany system obsługi restauracyjnej pozwala na wysoką efektywność finansową (minimalizacja kosztów), jak również wysoką efektywność samej obsługi klienta (krótki czas oczekiwania). W literaturze przedmiotu znana jest zasada wyrażająca optymalne dostosowanie popytu i mocy z punktu widzenia kosztów i klienta.

Literatura

- Byśko J., Cygan Z., Dziadykiewicz L., 1985, *Sterowanie i zarządzanie eksploatacją systemów technicznych*, PWN, Warszawa.
- Kapliński O., 1971, *Kierowanie procesami transportowo-montażowymi w budownictwie*, Problemy Organizacji, 4.
- Mazur T., Małek A., 1979, *Zarządzanie eksploatacją systemów technicznych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Miszczyńska D., Miszczyński M., 2000, *Wybrane metody badań operacyjnych*. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Ekonomiczno-Humanistycznej w Skierniewicach, Skierniewice.
- Mudie P., Cottam A., 1998, *Usługi. Zarządzanie i marketing*, PWN, Warszawa.

- Okręgliński W., Łopuszyński B., 1980, *Użytkowanie urządzeń mechanicznych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Ostasiewicz S., Rusnak Z., Siedlecka U., 1991, *Statystyka. Elementy teorii i zadania*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław.
- Radzikowski W., 1997, *Badanie operacyjne w zarządzaniu przedsiębiorstwem*, Toruńska Szkoła Zarządzania, Toruń.
- Sadowski W., 1969, *Teoria podejmowania decyzji*, Polskie Wydawnictwo-Ekonomiczne, Warszawa.
- Tymiński J., 2001, *Elementy teorii niezawodności budynków mieszkalnych*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Gospodarki Komunalnej, 1, Kutno.
- Tymiński J., Tymiński M., 2001, *Przebieg procesów utraty właściwości użytkowych obiektu mieszkalnego. Momenty rozpoczęcia remontu*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Gospodarki Komunalnej, 2, Kutno.

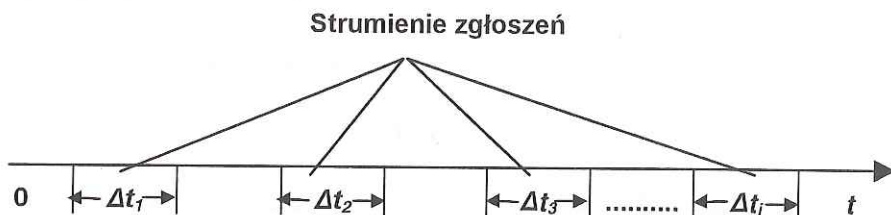
Aneks matematyczny (teoria masowej obsługi)

W teorii masowej obsługi, w praktycznych rozwiązaniach problemów, przyjmuje się, że zgłoszenia do obsługi tworzą strumień najprostszy. To znaczy takie, które są stacjonarne, zwykłe i bez następstw. Strumień nazywa się stacjonarnym, gdy:

$$P_K(\Delta t_1) = P_K(\Delta t_2) = P_K(\Delta t_s) = P_K(\Delta t_i) = P_K(\Delta t) \quad (1)$$

(K – ilość spostrzeżeń, Δt_i – i -te przyrosty przedziału czasu).

Jest to strumień stacjonarności, który pokazuje prawdopodobieństwo pojawienia się w nim K zgłoszeń. Prawdopodobieństwo to zależy tylko od długości czasu, a nie od usytuowania (położenia) na określonym odcinku (przedziale) czasu. Można to zilustrować graficznie:



Ryc. 1. Strumień zgłoszeń (opracowanie własne na podstawie: W. Okręgliński, B. Łopuszyński, 1980, s. 115)

Fig. 1. Application streams (own elaboration according to W. Okręgliński, B. Łopuszyński, 1980, p. 115)

Rycina 1 przedstawia prawdopodobieństwo pojawienia się K zgłoszenia w przedziale czasu $(0, t)$ długości t i określa się prostym strumieniem zgłoszeń, charakteryzującym się rozkładem Poissona:

$$P_K(t) = \frac{(\lambda t)^K}{K!} \cdot e^{-\lambda t} \quad (2)$$

gdzie: $K = 1, 2, \dots$; λ – parametr rozkładu określający przeciętną liczbę zgłoszeń pojawiającą się w jednostce czasu.

Należy zauważyć, iż proces napływu zgłoszeń do obsługi jest procesem stochastycznym. Zatem funkcję $X(t)$ można opisać liczbą zgłoszeń do systemu obsługi w przedziale $(0, t)$. Funkcja ta jest zmienną losową dla każdej wartości oraz przyjmuje dla każdego t całkowite wartości dodatnie; zależy od czasu t i stanowi jednoparametrową rodzinę zmiennych losowych, a ponadto przyjmuje ona (wraz ze wzrostem t) wartości niemalejące.

W procesach obsługowych (masowych), wystarczająco pełny opis tej funkcji (losowej) w rzeczywistości nie może być ściśle określony, gdyż może wystąpić nieskończona ilość jej realizacji. Praktycznie można opisać w pełni strumień zgłoszeń, jeżeli zachodzi prawdopodobieństwo:

$$P\{X(t_1) = K_1, X(t_2) = K_2, X(t_3) = K_3, \dots, X(t_n) = K_n\} \quad (3)$$

Stąd też:

$$P\{X(t_i)\} = F(t_i, K_i) \text{ dla } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4)$$

a dla:

$t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_n$ wartości K_i muszą przybierać zdarzenia

$K_1 \leq K_2 \leq K_3 \leq \dots \leq K_n$ (K_i – ilość zgłoszeń w przedziale $(0, t_i)$).

Funkcja $F(t_i, K_i)$ jest w praktyce trudna do określenia (tj. dla t_i i K_i), stąd też w przeważających przypadkach rozpatrywany jest prosty strumień pojedynczy, stacjonarny oraz bez następstw [por. ryc. 1.].

Wróćmy jeszcze do rozważań, dotyczących procesów obsługi charakteryzujących się strumieniem stacjonarnym. Można go formalnie zapisać:

$$P\{X(t) = K\} = P\{X(T + t) - X(T) = K\} \quad (5)$$

przy czym $K = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

Interpretacja jego jest następująca: prawdopodobieństwo pojawiania się K zgłoszeń w przedziale $(0, t)$ odpowiada prawdopodobieństwu pojawienia się takiej samej ilości zgłoszeń np. w przedziale $(T, T + t)$ dla dowolnej wartości T . To z kolei prowadzi do interpretacji pojedynczego strumienia zgłoszeń:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{K>1}(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \quad (6)$$

gdzie: $P_{k>1}(\Delta t)$ – prawdopodobieństwo tego, że w dowolnie małym przedziale czasu (Δt) nie może pojawić się więcej aniżeli jedno zgłoszenie; bądź inaczej: prawdopodobieństwo pojawienia się w całym rozpatrywanym przedziale czasu $(0, t)$ dwóch lub więcej zgłoszeń równa się zeru. Stąd też prawdopodobieństwo pojawienia się jednego zgłoszenia w dowolnie małym przedziale czasu Δt równa się $\lambda \Delta t$, natomiast λ jest pewną stałą. λ można poprzez analogię utożsamić ze strumieniem intensywności uszkodzeń obiektów w teorii niezawodności (Tyminiński, 2001).

Natomiast charakterystykę strumienia bez następstw można przedstawić w następującej postaci:

$$P\{X(T+t) - X(T) = K(X/T) = l\} = P\{X(T+t) - X(T) = k\} = P_K(t) \quad (7)$$

gdzie:

K – ilość zgłoszeń w przedziale $(T, T+t)$,

l – ilość zgłoszeń w przedziale $(0, T)$.

Mamy tutaj do czynienia z warunkowym prawdopodobieństwem Bayes'a, które oznacza, że warunkowe pojawienie się K zgłoszeń w przedziale $(T, T+t)$ jest niezależne od liczby i charakteru pojawienia się ilości zgłoszeń i jest równe prawdopodobieństwu bezwarunkowemu tego zdarzenia. Te rozważania oznaczają, iż istnieje wzajemna niezależność wpływu ustalonej liczby zgłoszeń do procesu obsługi w różnych od siebie przedziałach czasu. Inaczej: pojawienie się w określonym przedziale czasu liczby zgłoszeń nie zależy od liczby zgłoszeń, jakie miały miejsce w przeszłości.

Należy jednakże zwrócić uwagę na fakt iż strumienie zgłoszeń mogą nie mieć tych własności we względnie długich odcinkach czasu. Stąd też przyjęcie dla strumieni zgłoszeń rozkładu procesu Poissona, w praktyce musi być poprzedzone podziałem rozpatrywanego przedziału czasu na krótsze odcinki czasowe. To powoduje, że jeżeli występuje jednak niestacjonarność strumienia, to po takim zabiegu staje się ona słabsza (Okreglicki, Łopuszyński 1980). Pozwala to w konsekwencji na wykorzystanie w praktyce sprawdzonych i stosunkowo prostych systemów masowej obsługi. Takim stosunkowo prostym systemem obsługi jest rozkład Poissona, którym można objaśniać liczbę zgłoszeń nadchodzących do tego systemu. Rozkład ten objaśniany jest – poza K -tą ilością zgłoszeń – parametrem λ (intensywności zgłoszeń bądź przybyć) określającym przeciętną liczbę zgłoszeń w jednostce czasu.

Przeciętną liczbę zgłoszeń, które pojawiły się w przedziale $(0, t)$, oblicza się w następującej procedurze matematycznej: można przyjąć, poprzez analogię do formalnej postaci funkcji niezawodności (ściśle intensywności uszkodzeń) (Tyminiński 2001), że $F_0(t) = P(X \leq t)$ oznacza prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch kolejnych zgłoszeń w czasie nie dłuższym aniżeli t . Jest to inaczej dystrybuenta pojawienia się zgłoszeń bądź przybyć (Sadowski 1969).

Stąd także funkcja: $R_0(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia pojawienia się dwóch kolejnych zgłoszeń w czasie dłuższym aniżeli t .

Przyjmując dalej, że gęstość prawdopodobieństwa przybyć $f(t)$ jest określona poprzez:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \quad (8)$$

także:

$$\frac{dR_0(t)}{dt} = -f(t) \quad (9)$$

Dystrybuanta zaś będzie równa:

$$F_0(t) = \int_0^t f(t) dt \quad (10)$$

W związku z tym że: $1 - F(t) = R_0(t)$, to:

$$R_0(t) = 1 - \int_0^t f(t) dt \quad (11)$$

Z reguł rachunku całkowego wynika dalej, że

$$1 - \int_0^1 f(t) dt = \int_t^\infty f(x) dx \quad (12)$$

co prowadzi do zależności

$$T_0 = \int_0^\infty R_0(t) dt \quad (13)$$

Tutaj należy pamiętać, że prawdopodobieństwo $R_0(t)$ dotyczy zdarzenia pojawienia się dwóch zgłoszeń w czasie dłuższym aniżeli t

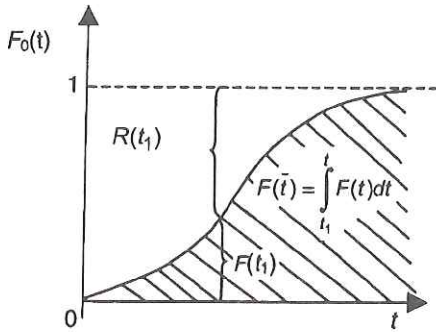
$$\text{a } R_0(t) = e^{-\lambda t} \quad (14)$$

(dla wykładniczego strumienia intensywności λ przy równoczesnym $K = 0$, co prowadzi ostatecznie do:

$$T_0 = \frac{1}{\lambda}, \text{ bądź } \bar{t} = \frac{1}{\lambda} \quad (15)$$

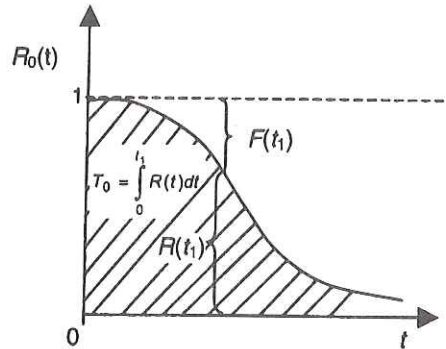
Zatem średni czas pojawienia się dwóch kolejnych zgłoszeń jest całką funkcji $R(t)$. $\lambda = 1/\bar{t}$ można też interpretować jako częstość powrotu do systemu obsługi.

Funkcję $R(t)$ oraz dystrybuantę $F(t)$ można przedstawić graficznie (Sadowski 1973) :



Ryc. 2a. Funkcja dystrybuanty $F(t)$

Fig. 2a. Distribution function $F(t)$



Ryc. 2a. Funkcja niezawodności

Fig. 2b. Infallibility function

Opracowanie własne na podstawie: W. Sadowski (1973)

Own elaboration according to: W. Sadowski (1973)

Interpretacja jest następująca: pole pod krzywą $F(t_1)$ odpowiada wartości $1 - R(t_1)$, natomiast pod krzywą $R(t_1)$ jest całką funkcji $R(t_1)$ i oznacza średni czas pomiędzy dwoma kolejnymi przybyciami (tj. T_0).

Stąd

$$\lambda = \frac{1}{T_0} \quad (16)$$

Zauważyć należy, że postać:

$$P_K(t) = \frac{(\lambda t)^K}{K!} e^{-\lambda t} \text{ jest iloczynem } R_0(t) \text{ i } \frac{(\lambda t)^K}{K!}; \quad (17)$$

$P_K(t) = \frac{(\lambda t)^K}{K!} R_0(t)$, co wprost implikuje, iż wartość przeciętna zgłoszeń, które wpłynęły w przedziale czasu $(0, t)$ jest równa dla przypadku $K = 0$:

$$P_K(t) = R_0(t) \quad (18)$$

Stąd też w przypadku zależności według ryc. 2a i 2b wartość przeciętna liczby zgłoszeń, które wpłynęły w przedziale $(0, t)$ będzie równa (dla $t_1 = 1$)

$$E_{(K)} = \frac{1}{T_0} = \lambda \quad (19)$$

Ten sam wynik uzyskuje się wykorzystując analogię z jednorodnym procesem Markowa (co wynika również z istoty rachunku prawdopodobieństwa i z graniczne prawdopodobieństwa są zawsze równe zero) (Kapliński 1971):

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t} = \lambda \quad (20)$$

Dla pełności rozważań nad strumieniem intensywności zgłoszenia podać należy jeszcze inną procedurę obliczeń λ . Stosując znaną już symbolikę, przeciętną wartość liczby zgłoszeń (tj. $E_t(K)$) można obliczyć, wychodząc z następującej zależności (Mazur, Małek 1979):

$$E_t(K) = \sum_{K=1}^{\infty} K P_K(t) \quad (21)$$

Następnie

$$P_K(t) = \frac{(\lambda t)^K}{K!} e^{-\lambda t}, \quad (22)$$

mamy dalej:

$$E_t(K) = \sum_{K=1}^{\infty} K \frac{(\lambda t)^K}{K!} e^{-\lambda t} \quad (23)$$

oraz

$$E_t(K) = \lambda t + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\lambda t} \quad (\text{dla } K-1) \quad (24)$$

W związku z tym, iż zachodzi oczywista zależność:

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{K-1}}{(K-1)!} = e^{\lambda t} \quad (25)$$

Stąd też:

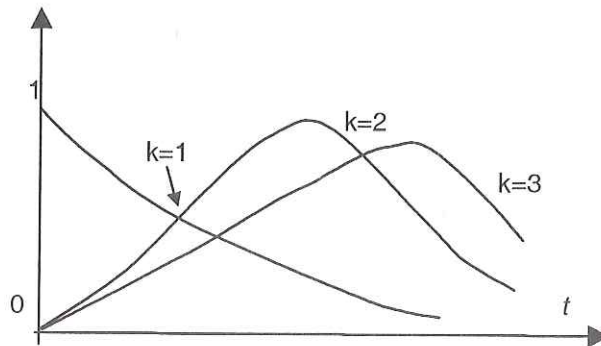
$$E_t(K) = \lambda \cdot t \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} = \lambda t \quad (26)$$

oraz wariancja:

$$D^2(K) = (\lambda t)^2. \quad (27)$$

Możemy to zinterpretować, iż liczba zgłoszeń (K) napływających w systemie obsługi w jednostce czasu (t) jest zmienną losową o rozkładzie Poissona (Miszczyńska, Miszczyński 2000).

Przypomnijmy tutaj iż funkcję gęstości postaci (por. wzór 8): $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ (dla $t \geq 0$) posiadającą wartość oczekiwaną $E(t) = \frac{1}{\lambda}$ i wariancję $D(t) = (\frac{1}{\lambda})^2$ można interpretować jako wyrażającą zmienną losową (t), będącą odstępem czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami, określoną przez ujemny rozkład wykładniczy (Miszczyńska, Miszczyński 2000) lub ogólnie rozkład Erlanga rzędu K (przykładowe funkcje gęstości tego rozkładu przedstawia rycina 3. Graficznie przebieg prawdopodobieństwa uzyskania K zgłoszeń w strumieniu Poissona ($K = 0, 1, 2$) można przedstawić graficznie (Ryc. 3):



Ryc. 3. Prawdopodobieństwo uzyskania k zgłoszeń w systemie obsługi (według T. Mazur, A. Małek 1979)

Fig. 3. Probability obtaining k application in service system (see T. Mazur, A. Małek 1979)

Należy zauważyć, iż rozkład Erlanga o funkcji gęstości:

$$f(t) = \frac{(\lambda K)(\lambda K t)^{K-1} \cdot e^{-\lambda K t}}{(K-1)!}. \quad (28)$$

Przy parametrach λ, K przy $K=1$ przechodzi w rozkład wykładniczy. Charakteryzuje się wartością oczekiwaną

$$E(t) = \frac{1}{\lambda} \quad (29)$$

oraz wariancją

$$v^2(t) = \frac{1}{K\lambda^2}. \quad (30)$$

Proces obsługi (czas trwania usługi)

Na wstępie rozważań przyjęliśmy, że czas procesu obsługi (τ) jest także zmienną losową. Stąd można go opisać za pomocą dystrybuanty $F(x)$, w postaci:

$$F(t) = P\{\tau < t\}, \quad t \geq 0 \quad (31)$$

gdzie: $F(t)$ – prawdopodobieństwo tego, że czas obsługi τ będzie mniejszy od pewnego z góry ustalonego t .

Zarówno w teorii, jak i praktyce przyjmuje się, że czas trwania obsługi jest zmienną losową o ujemnym rozkładzie wykładniczym o dystrybuancie:

$$F(x) = 1 - e^{-\mu t} \quad (32)$$

gdzie: μ – intensywność obsługi, zwaną inaczej średnią częstością obsługi jednostek (zgłoszeń). Wyraża liczbę zgłoszeń obsługiwanych w jednostce czasu.

Odwrotność $\frac{1}{\mu}$ jest wartością przeciętną trwania obsługi. Wynika to z następującego procesu algebraicznego (Mazur, Małek 1979):

$$E(\tau) = \int_0^{\infty} t dF(t) = \left[-te^{-\mu t} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt = 0 - \frac{1}{\mu} \left[e^{-\mu t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\mu} = \tau \quad (33)$$

Zastosowany rozkład wykładniczy ma odniesienie do objaśnienia czasu obsługi, a nie liczby zgłoszeń jaka została obsłużona w określonej jednostce czasu (Miszczyńska, Miszczyński 2000). Poza tym ma jeszcze i takie specyficzne własności (Kapliński 1971):

- długość czasu obsługi nie determinuje przebiegu dystrybuanty pozostałego czasu obsługi (czyli tego czasu, jaki już upłynął),

- z istoty dystrybuanty rozkładu wykładniczego czasu obsługi istnieje duże prawdopodobieństwo tego, iż obsługa zakończy się niezwłocznie po jej rozpoczęciu. Najczęściej rozpatrywany w praktyce jest system obsługi z oczekiwaniem, tj. takim systemem, w którym strumień zgłoszeń nieobsłużonych tworzy kolejkę. Inaczej jest to sytuacja, w której jednostka (zgłoszenie) napływająca do systemu znajdzie się w nim do chwili, kiedy usługa nie będzie zakończona. Jest to typowy system obsługowy najczęściej spotykany w usługach hotelarskich i gastronomicznych, a także turystycznych.

System ten można podzielić na system z ograniczonym i nieograniczonym strumieniem zgłoszeń.

Przejdźmy do charakterystyki tego drugiego systemu. Można go określić poprzez zbiór istotnych uwarunkowań (Kapliński 1971):

- 1) system obsługi ma n stanowisk; przy czym jedno zgłoszenie może być tylko obsłużone na jednym stanowisku,

2) jeżeli liczba zgłoszeń przekroczy liczbę stanowisk obsługi ($> n$), to utworzy się kolejka,

3) proces realizacji systemu obsługi będzie sprawny, gdy strumień spełnia warunki strumienia najprostszego, natomiast czas obsługi jednego zgłoszenia jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym,

4) stabilność systemu jest określona wartością intensywności strumienia wejścia λ , także intensywności obsługi μ ; będą tutaj zachodziły następujące przypadki:

– jeżeli wystąpią zależności: $\lambda < \mu$ (przy stałych λ i n), to system ustali się na określonym stałym poziomie, stąd prawdopodobieństwo ukształtowania się długości kolejki będzie niezmienna w każdym czasie. Zakłada się zatem, że system zmierza do stabilności kiedy:

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1. \quad (34)$$

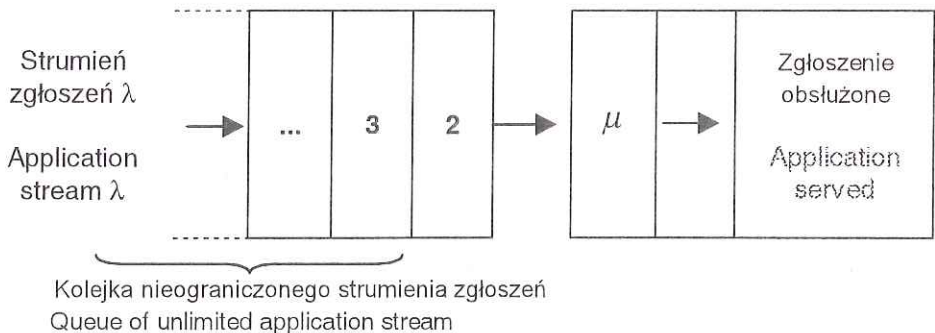
natomiast kiedy występuje sytuacja odwrotna, tj.

$$\frac{\lambda}{\mu} > 1 \text{ (bądź też } \frac{\lambda}{\mu} = 1), \quad (35)$$

system jest niestabilny, a prawdopodobieństwo wydłużenia się kolejki zwiększa się.

Konstrukcja systemu obsługi z jednym kanałem obsługi i nieograniczoną kolejką przyjmuje następującą postać (Okręgliński, Łopuszyński 1980, Miszczyńska, Miszczyński, 2000) (Ryc. 4):

(1) schemat przebiegu systemu obsługi



Ryc. 4. Schemat przebiegu systemu obsługi (za W. Okręgliński, B. Łopuszyński 1980)

Fig. 4. Scheme of servicing systems course (see W. Okręgliński, B. Łopuszyński 1980)

(2) intensywność ruchu (stała Erlanga)

$$\rho = \lambda / \mu \quad (36)$$

ρ – oznacza parametr natężenia określający relację liczby klientów przybywających do systemu obsługi do klientów obsłużonych w jednostce czasu.

(3) prawdopodobieństwo (P_0) tego, że w systemie brak zgłoszeń (dla $n < k \leq N$) oznacza, że liczba zgłoszeń N znajdujących się w systemie nie przekracza n kanałów obsługi;

$$P_0 = \left[\sum_{K=0}^n \frac{N!}{(K-1)!} \rho^K + \sum_{K=n+1}^N \frac{N!}{n^{K-n} n! (N-K)!} \rho^K \right]^{-1} \quad (37)$$

co prowadzi po odpowiednich przekształceniach do postaci (przy $n = 1$):

$$P_0 = (1 - \rho) \quad (38)$$

(4) prawdopodobieństwo tego, że w systemie znajduje się K jednostek (zgłoszeń) ma postać:

$$P_K = \frac{N!}{K!(N-K)!} \rho^K P_0, \quad (39)$$

co prowadzi także (przy $n = 1$) do postaci

$$P_n = \rho^K (1 - \rho) \quad (40)$$

wynika to z zależności (Sadowski 1969)

$$P_K = P_1^K \cdot P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \quad (\text{gd}y\acute{z}: P_0 = (1 - \frac{\lambda}{\mu}), \text{ za} \acute{s} P_1^K = \rho^K) \quad (41)$$

(5) średnia liczba zgłoszeń oczekujących na obsługę (tj. oczekiwaną długość kolejki);

$$E_1 = \sum_{K=n+1}^N \frac{(K-n)N!}{n^{K-n} (N-K)!} \cdot \rho^K P_0 \quad (42)$$

co prowadzi w przypadku jednego kanału obsługi do postaci:

$$E_1 = \rho^2 / (1 - \rho) \quad (43)$$

(6) oczekiwana liczba jednostek (zgłoszeń) znajdujących się w systemie obsługi

$$E_2 = \left[\sum_{K=1}^n \frac{N!}{(K-1)!(N-K)!} \cdot \rho^K + \sum_{K=n+1}^N \frac{K \cdot N!}{n^{K-n} \cdot n!(N-K)!} \cdot \rho^K \right] \cdot P_0 \quad (44)$$

co prowadzi do wzoru:

$$\sum_{K=1}^N K \cdot P_K \quad (45)$$

i dalej ostatecznie:

$$E_2 = \frac{\rho}{(1-\rho)} \quad (46)$$

(7) oczekiwany czas pobytu w kolejce;

$$E_3 = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \quad (47)$$

(8) oczekiwany czas pobytu w całym systemie obsługi;

$$E_4 = 1/(\mu - \lambda) \quad (48)$$

(9) prawdopodobieństwo tego (P_1), że kanał jest zajęty (czyli, że w kanale znajduje się co najmniej jedno zgłoszenie), ma postać:

$$P_1 = 1 - P_0 \quad (49)$$

(10) prawdopodobieństwo tego, że czas oczekiwania w kolejce jest większy od t , ma postać:

$$P_K(>t) = \rho e^{[t(\mu - \lambda)]} \quad (50)$$

Wyjściową formułą służącą do wyprowadzenia tej postaci prawdopodobieństwa czasu oczekiwania ($> T$) jest prawdopodobieństwo tego, że w czasie t zajdzie K zdarzeń, tj.

$$P_K(t) = \frac{(\mu t)^K}{K!} e^{-\mu t} \quad (51)$$

Wprowadzając do ogólnego wzoru na prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia ($P\{\tau > t\}$), po odpowiednich przekształceniach prowadzi do znanej postaci:

$$P\{\tau > t\} = \frac{(\mu t)^K}{K!} e^{-\mu t} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} \quad (52)$$

oraz ostatecznie:

$$P\{\tau > t\} = \rho e^{-(\mu - \lambda)t}, \quad (53)$$

dystrybuanta zaś przyjmie postać:

$$P\{\tau < t\} = 1 - \rho \cdot e^{-(\mu - \lambda)t} = F(t). \quad (54)$$

Przyjmuje ona wartości:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 - \rho e^{-(\mu - \lambda)t} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases} \quad (55)$$

Średni czas oczekiwania w kolejce obliczamy:

$$\begin{aligned} E(\tau) &= \int_0^{\infty} t dF(t) = \left[-t \cdot \rho \cdot e^{-(\mu - \lambda)t} \right]_0^{\infty} + \rho \int_0^{\infty} e^{-(\mu - \lambda)t} dt = \\ &= 0 - \rho \frac{1}{\mu - \lambda} \left[e^{-(\mu - \lambda)t} \right]_0^{\infty} = \rho(\mu - \lambda)^{-1} = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \end{aligned} \quad (56)$$

bądź też, wprowadzając: $\mu = \frac{\lambda}{\rho}$, otrzymamy:

$$E(\tau) = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)} \quad (57)$$

Oznacza to, że średni czas oczekiwania na obsługę zależy od intensywności procesu obsługi oraz stopnia wykorzystania kanału obsługi. Należy zauważyć, iż jeżeli $\rho \rightarrow 1$, to $E(\tau) \rightarrow \infty$.

Weryfikacja hipotezy o zgodności rozkładu zgłoszeń z rozkładem Poissona

Weryfikację przeprowadza się w kilku etapach:

1) obliczenie średniej liczby zgłoszeń nadchodzących do systemu w jednostce czasu.

2) określenie teoretycznej liczby pomiarów (N'_t), która jest określona zależnością:

$$N'_t = N \cdot P_K(t = 1) \quad (58)$$

3) liczebności teoretyczne N'_t (dla wartości $P_K(1)$ i dla kolejnych K) porównujemy z liczebnościami empirycznymi N_i , wykorzystując test zgodności χ^2 (Ostasiewicz, Rusnak, Siedlecka 1991),

4) stosując kryterium hipotezy:

– jeżeli założona hipoteza (o rozkładzie Poissona) nie zostanie odrzucona to wtedy obliczona wartość χ^2 mieści się w przedziale wartości granicznych, przy założonym przez nas poziomie istotności oraz określonych stopniach swobody,

– jeżeli nie jest spełniony powyższy warunek, to takie badania analityczne nie są możliwe do przeprowadzenia (konieczne są metody symulacyjne).

The theory of mass service. Examples of its application in the process of management of services in hotels and tourism

Summary

The most significant aspects while evaluating the effectiveness of services both in hotels and in tourism, are quality but also (first of all, perhaps) the time which customers have to spend queuing. For service firms the time is responsible for maintaining high standards of services, low costs and what follows low prices. All this results in the necessity of raising the standards of efficiency of services, cutting down on the time of services, and in consequence in effective management of services. Such a tool, which enables rational organization and management in the services, is the theory of mass service.

Optimal controlling of queues brings about not only shortening the awaiting time for the service (satisfaction of customers), but also the increase in effective management of the company (the increase in income and remunerativeness). The research process in the theory of mass service based on the probability of arising of events (e.g. queuing customers, tourists to be serviced) comprises three stages:

The first is linked with setting the flow of applications in the given time units, while the way of their flow can be described by appropriate probability distributions. It is assumed that if the time longer than t passes between two applications, probability distribution of these events can be described by the exponential function form: $P(t) = e$.

It is Poisson distribution which is characterised by the fact that the probability of event has this property that in t time k applications are observed.

It is expressed by the formula: $(P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t})$, λ – rate of customers' applications).

The second deals with the system of service (with awaiting time), that is such as system, in which the amount of customers who were not serviced forms a queue. It is a situation where the unit (a customer) coming into the system remains in it until the service is completed.

It is a typical servicing system to be observed in hotel and catering services but also in tourism.

Servicing system can be characterized by the following features:

- 1) it has n posts,
- 2) if the number of applications exceeds the number of posts ($> n$) a queue is formed,
- 3) servicing time is a random variable of exponential distribution,
- 4) stability of the whole servicing system is determined both by the value of intensity of entering flow and intensity of service.

Generally, if there is a relationship $\lambda < \mu$ (with constant λ and μ) the system stabilizes on the given, constant level. Hence, probability of forming the length of the queue is invariable in any time.

The system reaches stability when $\lambda / \mu < 1$.

With $\lambda / \mu > 1$ (or $\lambda / \mu = 1$), the system is unstable.

The third is a stage, which is directly linked to the first stage and is related to the verification of hypothesis of compatibility of application distribution with Poisson distribution. A popular test χ^2 is used to verify this.

The paper presents two typical examples in which the theory of mass service was applied in managing services in hotels and tourism:

The first example – concerns rationalization in organizing accommodation establishment run by „Mewa” Tourist- Hotel Firm (maintenance and renovation services). As a result of applying theory of mass service the increase in efficiency (improving the organization of the servicing post) and decrease in the average service time from 67 to 48 minutes were notified.

The second example – concerns the rationalization of service in a restaurant run by the Tourist Office with the application of mass service theory. Achieved results – minimalization of costs of the whole process of servicing customers of the restaurant by shortening the awaiting time – significant reduction of the queue (probability of the lack of a queue).

Translated by Elżbieta Lubińska