Stanisław Jaśkowski

Elementy logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych

$K\Pi xax\Pi xbx$

Πxax

Πxbx

ax

bx

$Kaxbx$

$\Pi xKaxbx$

$\forall xax \wedge \forall xbx$

$\forall xax$

$\forall xbx$

ax

bx

$ax \wedge bx$

$\forall x(ax \wedge bx)$

Wstęp i opracowanie naukowe
Andrzej Indrzejczak

Elementy logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Stanisław Jaśkowski

Elementy logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych

Wstęp i opracowanie naukowe
Andrzej Indrzejczak

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO
Łódź 2018

Andrzej Indrzejczak – Uniwersytet Łódzki, Wydział Filozoficzno-Historyczny
Katedra Logiki i Metodologii Nauk, 90-131 Łódź, ul. Lindleya 3/5

RECENZENT
Andrzej Pietruszczak

REDAKTOR INICJUJĄCY
Magdalena Skoneczna

KOREKTA
Anna Sońta

SKŁAD I ŁAMANIE
Michał Zawidzki

PROJEKT OKŁADKI
Katarzyna Turkowska

Wydrukowano z gotowych materiałów dostarczonych do Wydawnictwa UŁ

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie I. W.08718.18.0.M

Ark. druk. 8,375

ISBN 978-83-8142-299-4
e-ISBN 978-83-8142-300-7
https://doi.org/10.18778/8142-299-4
Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63

Spis treści

Wprowadzenie

Prezentowany tom zawiera reedycję skryptu wykładów z logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych autorstwa Stanisława Jaśkowskiego, wybitnego polskiego logika i matematyka, reprezentanta Szkoły Lwowsko-Warszawskiej, ucznia Stanisława Leśniewskiego i Jana Łukasiewicza. Sylwetka autora skryptu i Jego dokonania zostaną szerzej przedstawione w następnym paragrafie. Zaczniemy natomiast od udzielenia odpowiedzi na pytanie, dlaczego warto wznowić tę publikację?

Skrypt został wydany w 1947 r. na potrzeby studentów matematyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, minęła zatem 70. rocznica jego powstania. Logika w ciągu tylu lat, podobnie jak inne dyscypliny naukowe, uległa gruntownym zmianom, a lista podręczników logiki dostępnych obecnie na polskim rynku jest niemała i nie brakuje wśród nich pozycji wybitnych, prezentujących nowoczesne ujęcie przedmiotu. Jest jednak kilka ważnych powodów, aby tę właśnie pozycję, po 70-ciu latach zapomnienia, polecić uwadze wszystkich zainteresowanych logiką i jej historią.

Zacząć należy od tego, że wydanie skryptu Jaśkowskiego jest jednym z możliwych sposobów uratowania tego podręcznika od fizycznego zniszczenia. Skrypt został wydany na prawach rękopisu, w niewielkiej liczbie egzemplarzy (nie udało się ustalić w jakiej) nakładem Akademickiej Księgarni Spółdzielni „SKRYPT". Zawiera 105 stron maszynopisu, z ręcznymi dopiskami. Redakcja dokonana została na podstawie egzemplarza znajdującego się w posiadaniu Biblioteki Instytutu Matematyki UMK, który jest w bardzo złym stanie i prawdopodobnie za 10–20 lat większość stron będzie tak wyblakła, że ich odczytanie stanie się niemożliwe – przynajmniej bez użycia specjalistycznego sprzętu. Wiadomo o istnieniu jeszcze dwóch innych egzemplarzy tej pracy w Polsce i – jak można podejrzewać – ich stan nie jest lepszy. Dlatego wydaje się, że to ostatni moment na „reanimację" skryptu Jaśkowskiego.

Jednak obawa przed fizycznym unicestwieniem książki sama w sobie nie stanowi racji do podjęcia wysiłku jej reedycji. Takiej racji dostarcza wysoka wartość ratowanej pracy. Skrypt Jaśkowskiego jest oryginalnym, autorskim, niezwykle nowoczesnym – jak na czas powstania – ujęciem przedmiotu, w znaczący sposób różniącym się od innych podręczników logiki dostępnych zarówno w chwili jego ukazania, jak i później. Tę oryginalność, o której więcej informacji znajdzie się w paragrafie poświęconym dedukcji naturalnej, z pewnością docenią logicy i historycy logiki.

Na koniec. Nie od rzeczy jest też fakt, że skrypt Jaśkowskiego ma wybitne walory dydaktyczne i również dzisiaj w pełni nadaje się do wykorzystania jako pozycja dydaktyczna. Dlatego publikacja ta może zainteresować nie tylko specjalistów, ale być nadal przydatna jako podręcznik logiki, pomimo siedemdziesięciu lat, które upłynęły od jej wydania.

I Sylwetka Stanisława Jaśkowskiego

Stanisław Jaśkowski urodził się 22 kwietnia 1906 r. w Warszawie jako syn ziemianina Feliksa Jaśkowskiego i Kazimiery Dzierżbickiej. Wychował się w rodzinie, która reprezentowała wysokie standardy wykształcenia humanistycznego. W szczególności, jego dziadek – Jan Nepomucen Jaśkowski – był poetą i pisarzem, a ojciec muzykiem. Rodzina oczekiwała, że Stanisław będzie kontynuował te humanistyczne tradycje, ale on zdecydował się w 1924 r. na studia na wydziale matematycznym w Uniwersytecie Warszawskim. Nauczycielami Jaśkowskiego byli m.in. Stanisław Leśniewski, Alfred Tarski i Jan Łukasiewicz, który wywarł na niego największy wpływ. To Łukasiewicz w 1925 r. postawił na swoim seminarium problem sformułowania formalnego ujęcia metod dowodzenia stosowanego w praktyce matematycznej. Rok później Jaśkowski zaprezentował na seminarium swoje rozwiązanie tego problemu, a następnie przedstawił je w 1927 r. na Pierwszym Polskim Kongresie Matematycznym we Lwowie. Była to pierwsza w świecie wersja systemu dedukcji naturalnej opracowana w rozprawie doktorskiej przygotowanej pod opieką Łukasiewicza. Niestety, poważne problemy zdrowotne doprowadziły do znaczącej przerwy w jego edukacji oraz opóźnienia publikacji wyników. W latach 1929–1930 Jaśkowski leczył płuca w Davos w Szwajcarii. Dopiero w 1932 r. obronił pracę doktorską, która została opublikowana w 1934 r. w [13]. To opóźnienie nie wyszło Jaśkowskiemu na dobre, gdyż w tym samym roku Gerhard Gentzen niezależnie opublikował pierwszą część swojego doktoratu [8] zawierającego m.in. inną wersję dedukcji naturalnej. Praca Gentzena była szerzej znana i do dziś jest on często wzmiankowany jako jedyny twórca dedukcji naturalnej, pomimo faktycznego pierwszeństwa Jaśkowskiego w tej dziedzinie.

Po powrocie do zdrowia Jaśkowski uczestniczył w Drugim Polskim Kongresie Matematycznym w Wilnie w 1931 r., podczas którego zaprezentował pierwszą aksjomatyzację geometrii brył. Jest to godny odnotowania fakt, który wskazuje na początek innej pasji naukowej Jaśkowskiego – badań nad podstawami matematyki, a w szczególności nad alternatywnymi ujęciami geometrii, które nie opierają się na pierwotnych pojęciach punktu i prostej. Podobne badania prowadził w tym czasie również Alfred Tarski. W 1935 r. Jaśkowski uczestniczył w Międzynarodowym Kongresie Filozofii Naukowej w Paryżu. Zaprezentował tam ważne rezultaty dotyczące matryc dla logiki intuicjonistycznej. Kolejne jego badania dotyczyły m.in. funkcji modalnych i systemów logicznych opartych na pojęciu zmiennej zależnej.

Ważne zmiany zaszły również w życiu prywatnym młodego uczonego. W 1937 r. Jaśkowski poślubił Anielę Holewińską (1905–1976), studentkę matematyki w Uniwersytecie Warszawskim. Po dwóch latach na świat przyszła córka Anna.

Wybuch II wojny światowej przerwał pracę Jaśkowskiego nad habilitacją. Ze względu na problemy zdrowotne nie został powołany do wojska, ale służył jako ochotnik w obronie Warszawy i oddał swój samochód do dyspozycji 151 Kolumny Zmotoryzowanej. Podczas okupacji mieszkał w swoim majątku w Wólce koło Rawy Mazowieckiej i w Warszawie, gdzie pracował jako księgarz. W 1942 r. przez kilka tygodni przebywał w areszcie. Prawie wszystkie jego prace naukowe z tego okresu spłonęły podczas Powstania Warszawskiego.

Po wojnie Jaśkowski przez pół roku pracował jako wykładowca w nowo założonym Uniwersytecie Łódzkim. Następnie przeniósł się do Torunia, w którym żył i pracował od 1 października 1945 r. aż do swej przedwczesnej śmierci w 1965 r. Nawet kiedy proponowano mu, aby przeniósł się do Krakowa i objął kierownictwo Zakładu Logiki w Uniwersytecie Jagiellońskim, po śmierci profesora Zawirskiego w 1949 r., zdecydował się pozostać w Toruniu. Przez ostatnie 20 lat życia pełnił bardzo ważną rolę w rozwoju Uniwersytetu Mikołaja Kopernika. Między innymi: organizował Katedrę Logiki Matematycznej i był jej pierwszym kierownikiem, w latach 1952–1953 organizował Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii i był jego pierwszym dziekanem w latach 1953–1954. W latach 1956–1959 był Prorektorem do spraw nauki, a w latach 1959–1962 Rektorem Uniwersytetu Toruńskiego. Był także współtwórcą i pierwszym przewodniczącym Toruńskego oddziału Polskiego Towarzystwa Matematycznego, a od 1950 r. członkiem Narodowego Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk.

Był bardzo aktywny jako nauczyciel. Uniwersytet Toruński, w pierwszych latach swej działalności cierpiał na dotkliwe braki kadrowe. W rezultacie Jaśkowski prowadził liczne kursy z rozmaitych działów matematyki, m.in. z logiki matematycznej, analizy, teorii mnogości, teorii prawdopodobieństwa. Na potrzeby kursu z logiki i z analizy przygotował autorskie skrypty dla studentów; pierwszy z nich prezentujemy niżej. W ostatnich latach swojej działalności był Jaśkowski mocno zaangażowany w organizację pracowni komputerowej, a jego ostatnie seminarium dotyczyło badań nad automatycznym dowodzeniem twierdzeń. Warto wspomnieć również o jego pracy nad przygotowaniem nowoczesnego programu nauczania matematyki w szkołach średnich, który został wprowadzony w latach 60.

Liczne obowiązki o charakterze edukacyjnym i organizacyjnym nie przeszkodziły Jaśkowskiemu w kontynuacji jego pracy naukowej. Główne wątki badawcze i najważniejsze osiągnięcia scharakteryzujemy w następnym paragrafie, tutaj odnotowując kolejne, najważniejsze etapy kariery akademickiej. Jeszcze w latach 40. Jaśkowski pod opieką Zygmunta Zawirskiego ukończył habilitację dotyczącą liczb rzeczywistych. Obrona odbyła się 7 kwietnia 1946 r., a zatwierdzona została 24 lipca 1946 r. W 1957 r. otrzymał nominację profesorską.

Zły stan zdrowia przerwał jego aktywność w 1962 roku. Umarł przedwcześnie 16 listopada 1965 r. w wyniku powikłań po przebytej żółtaczce.

II Praca

Dorobek naukowy Stanisława Jaśkowskiego obejmuje 48 pozycji z zakresu logiki i matematyki. Ta stosunkowo niewielka liczba publikacji zawiera dużą ilość nowatorskich wyników, które spotkały się w późniejszych latach (niestety często dopiero po śmierci autora) z dużym zainteresowaniem na świecie. Poniżej scharakteryzujemy krótko najważniejsze wyniki uzyskane na obu polach. Dokładniejszą prezentację jego wyników można znaleźć w [36] i [38], a pełna bibliografia podana jest w [5].

Wynalezienie systemów dedukcji naturalnej, zaprezentowane w [13], jest często uważane za najważniejsze osiągnięcie Jaśkowskiego i poświęcimy mu następnie więcej uwagi ze względu na bezpośredni związek z prezentowanym skryptem. Jeżeli chodzi o inne wyniki, to na szczególną uwagę zasługują jego rezultaty w zakresie badań nad logikami nieklasycznymi. Jaśkowski nie tylko uzyskał poważne wyniki w badaniach nad znanymi logikami, takimi jak logiki modalne czy logika intuicjonistyczna, ale jest również twórcą wielu nowych i ważnych systemów. W szczególności:

W swojej pracy o dedukcji naturalnej [13] przedstawił system reguł dla kwantyfikatorów pierwszego rzędu, który jest w istotny sposób słabszy od systemu Gentzena charakteryzującego logikę klasyczną. Fakt, że zaproponowany przez niego system reguł nie jest formalizacją logiki klasycznej przejawia się w ten sposób, że pewne tezy logiki klasycznej, które są uniwersalnie prawdziwe tylko w modelach z niepustą dziedziną, nie dają się w jego systemie udowodnić. W ten sposób Jaśkowski zbudował pierwszy system tzw. logiki inkluzywnej. Jest to logika pierwszego rzędu słabsza od klasycznej, która w ujęciu semantycznym dopuszcza modele z pustą dziedziną. Jaśkowski scharakteryzował tę logikę tylko syntaktycznie, w postaci systemu dedukcji naturalnej, ale jego rozwiązanie było świadome, oparte na przekonaniu, że logika nie powinna przesądzać o istnieniu jakichkolwiek obiektów. Obecnie logiki, które są inkluzywne i wolne (od założeń egzystencjalnych), w tym sensie, że dopuszczają wyrażenia nazwowe nieposiadające desygnatów, są nazywane uniwersalnie wolnymi (Bencivenga [1]). Takie logiki są często traktowane jako filozoficznie bardziej neutralne od logiki klasycznej i chętnie wykorzystywane jako podstawa do budowy modalnych logik 1-rzędu (zob. np. Garson [7]). Warto podkreślić, że pierwsze systemy logiki uniwersalnie wolnej zostały zaproponowane dopiero w latach 50. XX w. przez Andrzeja Mostowskiego, Huguesa Leblanca, Jaakko Hintikkę i innych. Fakt, że Jaśkowski skonstruował pierwszy system logiki inkluzywnej, a jak podkreśla Bencivenga [2], w zasadzie również logiki wolnej, był niezauważony przez długie lata.

W badaniach nad logiką intuicjonistyczną Jaśkowski nie tylko zaproponował system dedukcji naturalnej dla logiki zdaniowej, ale również adekwatną charakterystykę semantyczną w terminach matryc nieskończonych. Wcześniej Gödel wykazał, że nie ma adekwatnej skończonej matrycy dla logiki intuicjonistycznej. Jaśkowski [14] poszerzył ten rezultat, pokazując, w jaki sposób skonstruować adekwatną matrycę jako nieskończony ciąg matryc skończonych.

W [17] oraz [25] Jaśkowski dostarczył filozoficznego uzasadnienia i formalnej konstrukcji dla tzw. logiki dyskusyjnej, która była pierwszym systemem należącym do obszernej i ważnej klasy logik parakonsystentnych. W systemach tego typu, w przeciwieństwie do logiki klasycznej, ze zdań sprzecznych nie wynika dowolne zdanie, zatem sprzeczność nie prowadzi do trywializacji systemu. Wkrótce po pracach Jaśkowskiego, pogłębione badania nad takimi logikami zostały podjęte przez zespół logików z Ameryki Płd., w szczególności przez Newtona da Costa w Brazylii i Florentio Asenjo w Argentynie. Nieco później, w latach 60-tych podobne badania rozpoczęły się w USA i w Australii (Michael Dunn, Rober Meyer, Richard Routley (Sylvan), Graham Priest i inni), w ścisłym połączeniu z badaniami nad logikami implikacji relewantnej. Obecnie logiki parakonsystentne stanowią jedną z najlepiej rozpoznawalnych klas logik nieklasycznych, o szerokich zastosowaniach.

To tylko niektóre osiągnięcia Jaśkowskiego na gruncie logiki, te mianowicie, które obecnie są najbardziej znane w świecie. Z mniej znanych, choć równie interesujących, można wspomnieć o jego pracach nad implikacją kauzalną [18], [28], [29], logiką klasyczną [19], [34], [35] czy sylogistyką Arystotelesa [27].

Jako matematyk Jaśkowski był zainteresowany przede wszystkim badaniami nad podstawami matematyki i zastosowaniami w niej narzędzi logicznych. W szczególności pracował nad pojęciem liczby, podstawami geometrii i problemami rozstrzygalności, gdzie otrzymał szereg rezultatów zarówno pozytywnych, jak i negatywnych. Te ostatnie badania można zresztą zakwalifikować jako przynależne do prac logicznych, aczkolwiek w wielu przypadkach dotyczące teorii matematycznych. W szczególności, w [26] dowiódł rozstrzygalności elementarnej teorii pierścieni Boolowskich. [34], [35] zawierają wyniki dotyczące rozstrzygalności fragmentów logiki klasycznej, a [17] modalnej logiki S5. Jeżeli chodzi o wyniki negatywne na tym polu, to w [21] dowiódł, że pewne klasy formuł teorii grup i topologii są nierozstrzygalne. W [32] wykazał nierozstrzygalność teorii wolnych grupoidów, a w [26] pewnej klasy równości algebr Boolowskich. Interesujące rezultaty o nierozstrzygalności pewnych problemów egzystencjalnych w systemach równań różniczkowych zawiera [31].

Badania nad pojęciem liczby były podstawą habilitacji Jaśkowskiego i zostały podsumowane w [20]. Wykazał on, że liczby całkowite i rzeczywiste można zdefiniować w terminach pewnych operacji na klasach zbiorów.

Jaśkowski był również zaangażowany w badania nad geometrią brył, w której unika się obiektów abstrakcyjnych, takich jak punkty czy proste. Był przekonany, że takie podejście lepiej sprawdza się w zastosowaniach, np. w fizyce kwantowej. W [23], [24] Jaśkowski zmodyfikował podejście Tarskiego do geometrii brył oraz wprowadził aksjomatykę opartą na pojęciu „semiprzestrzeni” jako terminie pierwotnym w [16], [22]. Przygotowywał książkę o podstawach geometrii, ale przedwczesna śmierć przerwała tę pracę.

Jaśkowski opublikował również dwie popularne książki o geometrii ornamentu [30], [33], które stanowią doskonałe świadectwo jego wielkiego talentu dydaktycznego. W sposób niewymagający od czytelnika żadnej zaawansowanej wiedzy matematycznej zaprezentował w nich rozmaite zagadnienia geometryczne ilustrowane przykładami zaczerpniętymi z nauki, historii i sztuki. Pokazał w nich m.in., jak można zastosować abstrakcyjną algebraiczną teorię grup do konkretnego problemu klasyfikacji ornamentów. Wspomnieliśmy wyżej, że oprócz prezentowanego tu skryptu z logiki przygotował też skrypt z analizy matematycznej (zawierający właściwie rodzaj wstępu do matematyki), który również pokazuje jego talent dydaktyczny. Szereg prac i komunikatów dotyczących reformy nauczania matematyki w Polsce, związanych z jego pracami nad przygotowaniem nowego programu, dopełnia obrazu Jaśkowskiego jako nauczyciela, zaangażowanego w upowszechnianie wiedzy z pomocą nowoczesnych środków.

Ten pobieżny przegląd pokazuje, że mimo przedwczesnej śmierci, Jaśkowski zostawił po sobie poważny dorobek naukowy. Miał znaczące osiągnięcia w logice, matematyce, edukacji i organizacji nauki. Warto zwrócić uwagę na niefortunną okoliczność związaną z upowszechnianiem jego wyników. Prawie wszystkie oryginalne pomysły i rezultaty zostały upowszechnione i rozpoznane w świecie długo po ich wynalezieniu, w większości po jego śmierci. Pierwszeństwo Jaśkowskiego w wynalezieniu dedukcji naturalnej zostało pierwotnie niedocenione ze względu na fatalne opóźnienie publikacji wyniku jego autorstwa. Ale nawet dziś wielu autorów, pisząc o dedukcji naturalnej, wspomina jedynie o Gentzenie jako jedynym twórcy tego typu systemów. Podobnie, jego wynalazek logiki inkluzywnej został odnotowany wiele lat po tym, jak rozwinęły się poważne badania nad tymi systemami. Prace nad logikami parakonsystentnymi również rozwinęły się bez znajomości pionierskich prac Jaśkowskiego; jego wkład odnotowano później. Ten przykry stan rzeczy wiązał się w dużej mierze z faktem, że wiele jego prac, choć napisanych po angielsku lub francusku, ukazało się w czasopismach o lokalnym charakterze i nie miało szans dotrzeć do szerszej publiczności.

III Dedukcja Naturalna

Jak już wyżej zaznaczyliśmy jednym z najważniejszych osiągnięć Jaśkowskiego było skonstruowanie oryginalnego systemu dowodzenia, zwanego obecnie zazwyczaj dedukcją naturalną[1]. Standardowym sposobem prezentacji systemów logicznych i teorii formalnych były, i nadal są, systemy aksjomatyczne. Ich starożytny rodowód („Elementy" Euklidesa III w. p.n.e.) i prosta teoretyczna konstrukcja (w szczególności definicja dowodu) to niewątpliwie zalety. Jednak w praktyce dowody w sformalizowanych systemach aksjomatycznych są zazwyczaj trudne do skonstruowania i nadmiernie długie. Matematycy w praktyce dowodzenia nie tylko odwołują się do aksjomatów i wcześniej dowiedzionych twierdzeń, ale nagminnie stosują dedukcje oparte na dodatkowych założeniach, które w trakcie dowodu zostają wyeliminowane. Właśnie próba formalnego ujęcia tych praktycznych sposobów wnioskowania i uzasadnienia ich poprawności doprowadziła Jaśkowskiego i – niezależnie – Gentzena, do skonstruowania systemów dedukcji naturalnej w latach 30-tych XX w. Praktyczna wygoda ich stosowania doprowadziła wkrótce potem do powstania wielu wariantów tych systemów i upowszechnienia ich w podręcznikach logiki, zwłaszcza w krajach anglosaskich. Ponieważ rozmaite wersje dedukcji naturalnej często (pozornie) bardzo się od siebie różnią, więc warto pokrótce opisać zasadnicze cechy takich systemów, które od konstrukcji Jaśkowskiego się wywodzą[2]. Systemy dedukcji naturalnej opierają się przede wszystkim na użyciu dużej liczby reguł zamiast aksjomatów. Reguły te są różnego typu i rozmaicie formułowane, jednak w każdym systemie dedukcji naturalnej mamy reguły, które pozwalają:

1) dedukować nowe formuły (wnioski) na podstawie wcześniej wprowadzonych (przesłanek);

2) wprowadzać do dowodu nowe (tymczasowe) założenia;

3) eliminować z dowodu wykorzystane założenia.

Zazwyczaj zadanie 1) realizują proste reguły inferencji, natomiast 2) i 3) reguły konstrukcji dowodu, o nieco bardziej złożonym charakterze. Reguły inferencji pozwalają z kilku (czasem jednej) przesłanek wydedukować wniosek. Rozmaite systemy dedukcji naturalnej zazwyczaj nie różnią

[1] Sam Jaśkowski pierwotnie używał nazwy „systemy założeniowe".

[2] Dokładniejszą charakterystykę można znaleźć m.in. w pracach Hazena i Pelletiera [9] lub Indrzejczaka [10], [11].

się bardzo w doborze pierwotnych reguł inferencji w systemie; chodzi o to, by były proste i łatwe w stosowaniu. Często dąży się też (w ślad za Gentzenem), żeby dla każdej stałej logicznej (spójnika, kwantyfikatora) mieć przynajmniej parę takich reguł; jedna pozwala wykorzystać formułę z daną stałą jako przesłankę (reguły eliminacji, odłączania), a druga wprowadzić ją jako wniosek (reguły dołączania).

Reguły konstrukcji dowodu mają bardziej kompleksowy charakter. Zazwyczaj wprowadzenie założenia jest zaznaczane za pomocą jakiegoś środka graficznego lub dodatkowej numeracji, żeby zaznaczyć, że ma ono charakter tymczasowy i wszelkie formuły wydedukowane z tego założenia też mają taki charakter. Osobną kwestią jest eliminacja takich założeń i wydedukowanych z nich formuł, oparta na tradycyjnie stosowanych technikach takich jak dowód nie wprost czy dowód warunkowy. W pierwszym przypadku para formuł sprzecznych wydedukowana z dodatkowego założenia upoważnia do eliminacji z dowodu tegoż założenia i wprowadzenia do dowodu jego zaprzeczenia. W drugim możemy dołączyć do dowodu implikację, jeżeli wydedukowaliśmy następnik z założenia dodatkowego, którym był poprzednik tejże implikacji. Te, przykładowo podane, techniki pokazują, że w przypadku reguł konstrukcji dowodu dedukujemy nowe formuły nie na podstawie przesłanek (jak w przypadku reguł inferencji), ale dodatkowych dowodów zaczętych dodatkowym założeniem. Toteż dowód w systemach tego typu nie jest prostym ciągiem formuł (jak w systemie aksjomatycznym), ale raczej strukturą, w której kolejno można zanurzać poddowody oparte o dodatkowe założenia. Poddowód taki kończy się z chwilą, gdy zastosujemy odpowiednią technikę, np. w przypadku dowodu nie wprost uzyskanie sprzeczności zamyka poddowód, a negacja założenia jest już elementem dowodu pierwotnego, który budowaliśmy zanim dołączyliśmy założenie dodatkowe. Jak widać reguły konstrukcji dowodu narzucają też pewną heurystykę niedostępną w systemach aksjomatycznych[3]. Jeżeli chcemy dowieść pewną formułę – wprowadźmy jej negację jako założenie dodatkowe; jeżeli potrzebujemy implikacji – wprowadźmy jej poprzednik jako założenie. Każdy system dedukcji naturalnej posiada takie reguły konstrukcji dowodu – często jeszcze inne.

Na tym kończą się podobieństwa między różnymi systemami dedukcji naturalnej. Zwłaszcza definicja i kształt dowodu dopuszcza wiele urozma-

[3] Dopóki nie udowodni się w ich ramach odpowiednich twierdzeń o dedukcji, stanowiących formalne odpowiedniki scharakteryzowanych wyżej technik. Wykorzystanie takich dodatkowych technik pozwala zbliżyć praktykę dowodzenia w systemach aksjomatycznych do dedukcji naturalnej.

iceń. Z praktycznego punktu widzenia istotne jest wyraźne zaznaczenie, gdzie kończy się poddowód oparty o dodatkowe założenie, aby uniknąć dalszego korzystania z formuł w nim zawartych, gdyż to prowadzi do błędów. Jaśkowski początkowo zastosował technikę prostokątów otaczających każdy zakończony poddowód, ale w ostatecznej wersji swojej pracy [13] zastąpił prostokąty wprowadzaniem dodatkowej numeracji dla każdego poddowodu. W skrypcie zastosował jeszcze inną technikę graficzną separacji poddowodów – poziome klamrowe nawiasy[4]. W każdym z tych rozwiązań ryzyko błędnych dedukcji jest wyeliminowane poprzez zakaz korzystania z tych formuł, które graficznie są zaznaczone jako należące do zakończonego poddowodu.

Gentzen uniknął tego typu problemów w inny sposób. W jego systemie dowód nie jest linearny, lecz jest strukturą o postaci drzewa, którego korzeń stanowi dowodzona formuła, a liście to założenia. Bez wchodzenia w detale zaznaczmy, że takie rozwiązanie również pozwala na uniknięcie ryzyka wykorzystywania w dalszym dowodzie założeń, które zostały wcześniej wyeliminowane (i wydedukowanych z nich formuł). Rozwiązanie Gentzena bardzo dobrze pokazuje konstrukcję gotowego dowodu, ale nie jest przydatne w praktyce poszukiwania dowodu tak jak rozwiązania Jaśkowskiego. Nic dziwnego, że dedukcja naturalna w stylu Gentzena, tzn. z dowodami w formie drzew, jest wykorzystywana przede wszystkim w pracach teoretycznych z zakresu teorii dowodu. Natomiast dowody linearne w stylu Jaśkowskiego doczekały się ogromnej ilości wariantów w literaturze podręcznikowej, gdzie wykorzystuje się dedukcję naturalną jako praktyczne narzędzie konstrukcji dowodów. Dziwi natomiast fakt, że zazwyczaj autorzy tych podręczników o Jaśkowskim nie wspominają[5].

IV Zawartość i konstrukcja skryptu

Wspomnieliśmy na początku, że skrypt Jaśkowskiego zasługuje na przypomnienie m.in. ze względu na oryginalność wykładu. Najważniejszym wyznacznikiem jego oryginalności jest szerokie wykorzystanie własnego sys-

[4] Jeszcze inne, pokrewne rozwiązania w postaci pionowych linii, nawiasów itp., zostały potem wprowadzone przez autorów popularnych podręczników logiki jak Fitch [6] czy Copi [4].

[5] Wspomnieć można, że istnieją też wersje dedukcji naturalnej, wywodzące się od Gentzena, w których podział na reguły inferencji i konstrukcji dowodu oraz potrzeba stosowania graficznych środków dla wyodrębniania poddowodów nie są potrzebne, gdyż reguły definiowane są nie na formułach, a na tzw. sekwentach.

temu dedukcji naturalnej jako sposobu prezentacji logiki. Krótko omówimy jego zawartość, wskazując na te cechy, które świadczą o jego nowatorstwie.

Skrypt składa się ze wstępu oraz trzech rozdziałów. W pięciostronicowym wstępie podane są wskazówki bibliograficzne oraz krótkie uwagi o charakterze wprowadzającym: terminologicznym i historycznym. Rozdział 2 to obszerna prezentacja klasycznej logiki zdań. Autor używa beznawiasowej symboliki Łukasiewicza, w której prezentuje zarówno standardową logikę zdań, jak i jej wersję z kwantyfikatorami. Po omówieniu kwestii syntaktycznych wprowadza reguły dedukcji naturalnej dla spójników i prezentuje dowody 22 tez. Następnie dołącza reguły dla kwantyfikatorów i dowody kolejnych 11 tez. Ostatnia część rozdziału ma charakter metodologiczny i zawiera charakterystykę semantyczną spójników oraz dowód niesprzeczności, rozstrzygalności i zupełności logiki zdań z kwantyfikatorami wraz z dowodami kolejnych 26 tez. Na uwagę zasługuje fakt, że logika zdań jest konsekwentnie scharakteryzowana w terminach dedukcji naturalnej, bez żadnego odniesienia do ujęcia aksjomatycznego. Nawet semantyczna charakterystyka spójników jest wyprowadzona dedukcyjnie na bazie uogólnionego pojęcia rozstrzygalności wyrażeń. Autor konsekwentnie używa w dowodach rezultatów metalogicznych tej samej metody, zbliżonej do zastosowanej przez László Kalmára w dowodzie pełności rachunku zdań; w przypadku Jaśkowskiego ma ona jednak konsekwentnie syntaktyczny charakter. Wprowadzenie kwantyfikatorów do rachunku zdań jest charakterystyczną cechą polskiej szkoły logiki przedwojennej (por. np. skrypt Łukasiewicza [37]). Zabieg ten umożliwia Jaśkowskiemu dowód zupełności (rachunek zdań bez kwantyfikatorów nie jest zupełny w tym sensie), z którego następnie wyprowadzony jest dowód pełności. Ponadto pozwala na dydaktycznie prostsze wprowadzenie reguł kwantyfikatorowych, które w kolejnym rozdziale są uogólnione na rachunek predykatów.

Rozdział 3 jest bardziej zwięzły i zawiera zasadniczo prezentację rachunku pierwszego rzędu, choć można znaleźć również zarysowane sposoby jego poszerzenia na drugi rząd. Warto podkreślić, że reguły dla kwantyfikatorów podane w skrypcie są odmienne zarówno od reguł podanych w [13], jak i reguł podanych przez Gentzena czy późniejszych autorów systemów dedukcji naturalnej. W [13] Jaśkowski podał jedynie reguły dla kwantyfikatora ogólnego i to reguły słabsze, charakteryzujące logikę inkluzywną. Reguły podane w skrypcie charakteryzują logikę klasyczną, ale w odmienny sposób niż w innych systemach. Uwaga ta dotyczy przede wszystkim reguł dla kwantyfikatora szczegółowego, wprowadzonych wcześniej dla zmiennych zdaniowych. Są one trzy i można im zarzucić pewne niedomogi natury teoretycznej. Zamiast jednej reguły eliminacji kwantyfikatora są dwie reguły, z których jedna eliminuje go jedynie wtedy, gdy w formule kwantyfikowanej nie występuje zmienna przykwantyfikatorowa. Druga dla odmiany wymaga dwóch przesłanek, z których jedna jest ogólnie skwantyfikowaną implikacją, a druga egzystencjalną kwantyfikacją poprzednika. Nie jest to więc rozwiązanie eleganckie, ale za to dydaktycznie łatwiejsze do przyswojenia dla nauczanych. Standardowe zestawy reguł kwantyfikatorowych, w których dąży się do adekwatnego ujęcia z pomocą pojedynczych reguł dołączania i eliminacji sprawiają często sporo kłopotów ze względu na skomplikowane warunki dodatkowe, które ograniczają błędne inferencje. Zestaw reguł podany przez Jaśkowskiego pozwala zgrabnie uniknąć tych problemów. W rozdziale tym można znaleźć również dowody 39 tez, prezentację sylogistyki Arystotelesa, identyczności (scharakteryzowanej w logice drugiego rzędu) oraz wybranych własności relacji oraz zagadnienia (nie)rozstrzygalności.

Ostatni rozdział zawiera zwięzłą prezentację teorii typów, kategorii i antynomii Russella. Ponownie pojawia się teoria identyczności jako ilustracja rozważań o definicji oraz teoriach aksjomatycznych. Autor ponownie konsekwentnie stosuje dedukcję naturalną jako poręczny sposób prezentacji omawianych zagadnień. Rozdział kończą krótkie uwagi o metodologii nauk empirycznych oparte głównie na pracach Carnapa.

Krótka charakterystyka zawartości skryptu wskazuje na wszechstronne użycie dedukcji naturalnej jako głównej metody prezentacji logiki i zagadnień metalogicznych. Wiemy, że Jaśkowski był wynalazcą dedukcji naturalnej (choć fakt ten jest często niedostrzegany), ale przy okazji warto wskazać na jeszcze jeden problem dotyczący pierwszeństwa. Od kwestii wynalezienia dedukcji naturalnej należy odróżnić problem upowszechnienia tego sposobu prezentacji logiki i dowodów w nauczaniu. W powszechnym przekonaniu pierwszym podręcznikiem, który konsekwentnie prezentuje logikę w postaci systemów dedukcji naturalnej jest książka Federica Fitcha "Symbolic Logic" [6] wydana w roku 1952. W podręczniku tym autor konsekwentnie używa systemu, który w sensie doboru reguł zależny jest od ujęcia Gentzena, ale w sensie przyjętego sposobu prezentacji dowodów jest uproszczonym systemem Jaśkowskiego, w którym zamiast czworoboków otaczających poddowody używa się jedynie pionowych linii z lewej strony poddowodu. Ten sposób prezentacji dowodów stał się niezwykle popularny i powszechnie określany jest jako "Fitch-style natural deduction", chociaż sam Fitch w przedmowie wymienia Jaśkowskiego jako źródło inspiracji. Niektórzy twierdzą, że pionierem w upowszechnianiu naturalnej dedukcji jest Willard Orman Quine, który w "Methods of Logic" [39] wydanym po raz pierwszy w 1950 r. zaprezentował swój własny system dedukcji naturalnej. Jednak w książce Quine'a dedukcja naturalna nie jest systemem jedynym ani nawet podstawowym; jej prezentacja zajmuje zaledwie 20 stron. Sam Quine jako pioniera stosowania dedukcji naturalnej w nauczaniu logiki wymienia Cooleya i jego podręcznik "Primer of Logic" [3] wydany po raz pierwszy w roku 1942. Trudno jednak zgodzić się z opinią Quine'a w tej kwestii. Cooley wprowadza wprawdzie dużą liczbę wtórnych reguł inferencji, które bardzo upraszczają dowody, ale używa systemów aksjomatycznych i nie stosuje żadnych środków w celu zaznaczania zależności dedukowanych formuł od dodatkowych założeń, co – jak wyżej zaznaczyliśmy – jest jednym z definicyjnych kryteriów uznania danego systemu za system dedukcji naturalnej. W skrypcie Jaśkowskiego, podobnie jak w podręczniku Fitcha, dedukcja naturalna jest konsekwentnie stosowanym systemem formalnym. Wypada więc uznać, że prezentowany niżej skrypt z 1947 r. jest pierwszym na świecie podręcznikiem logiki nauczanej za pomocą dedukcji naturalnej. Być może jest to najważniejszy powód wznowienia tej pracy.

V Zasady redakcji

Podstawową zasadą przyjętą przy redagowaniu skryptu była zasada jak najmniejszego ingerowania w tekst oryginalny.

Zachowano strukturę skryptu: podział na rozdziały, podrozdziały, sekcje[6].

Poprawiono ortografię i interpunkcję według współczesnych zasad i reguł pisowni. Sprostowano także drobne błędy merytoryczne. W szczególności, w różnych miejscach w nawiasach kwadratowych umieszczono bądź drobne dodatki ułatwiające zrozumienie tekstu, bądź rekonstrukcję tekstu nieczytelnego lub ewidentnie zepsutego podczas przepisywania, np. „skrystalizowany" zamiast „sformalizowany", „edukacyjny" zamiast „dedukcyjny" itp.

[6] Z tą różnicą, że w oryginale jest stała numeracja podrozdziałów – łącznie 18 – i brak numeracji sekcji, natomiast w obecnym wydaniu podrozdziały i sekcje są numerowane w obrębie rozdziałów.

Wprowadzono zmiany o charakterze typograficznym – Jaśkowski często posługiwał się podkreśleniami i wersalikami, które zostały konsekwentnie zastąpione czcionką pogrubioną lub kursywą.

Zachowana została oryginalna notacja beznawiasowa (tzw. Łukasiewiczowska), ale dla wygody czytelnika obznajomionego ze współcześnie dominującą notacją dodano przypisy zawierające translację przykładów. W przypadku wzorów zwartych i krótkich transkrypcja jest podana obok w nawiasie kwadratowym, a w przypadku dowodów w przypisie na dole strony. W paru miejscach przypisy podają też drobne uzupełnienia do tekstu (a nie uzupełnienia w tekście – te są, jak wyżej wspominaliśmy, umieszczane w nawiasach kwadratowych).

W podawanych dalej transkrypcjach wzorów zachowujemy te same symbole, które stosował Jaśkowski dla zmiennych, tj. p, q, r dla zmiennych zdaniowych x, y, z dla zmiennych nazwowych, $a, b, \dots, f, g, h$ dla zmiennych predykatowych. Podobnie używamy tych samych liter greckich co autor dla zapisu zmiennych metajęzykowych, natomiast dla spójników zamiast liter N, K, A, I, E stosujemy symbole $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, a dla kwantyfikatorów zamiast liter Π, Σ używamy $\forall, \exists$. W dodanych translacjach wzorów stosujemy nawiasy w sposób oszczędny, zgodny z konwencjami stosowanymi w wielu podręcznikach: 1) pomijamy nawiasy zewnętrzne, 2) stałe są uporządkowane ze względu na „siłę wiązania” swoich argumentów: $\neg$ oraz kwantyfikatory wiążą najmocniej, natomiast dwuargumentowe spójniki wiążą słabiej wg kolejności: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Dla przykładu:

$$p \wedge \neg q \rightarrow r \vee (s \rightarrow \neg(t \leftrightarrow q \rightarrow p))$$

jest uproszczonym, zgodnie z powyższymi konwencjami, zapisem formuły:

$$((p \wedge \neg(q)) \rightarrow (r \vee (s \rightarrow \neg(t \leftrightarrow (q \rightarrow p))))).$$

* *
*

Pragnę na koniec złożyć podziękowania kilku osobom, bez których pomocy nie udałoby się dokonać wydania tej książki. Przede wszystkim jestem bardzo wdzięczny spadkobiercom Profesora Stanisława Jaśkowskiego, Jego córce Pani Annie Dziembowskiej oraz synowi Panu Kazimierzowi Jaśkowskiemu za wyrażenie zgody na wydanie skryptu i życzliwe słowa zachęty. Wdzięczność winienem również profesorowi Maxowi Urchsowi, który jako pierwszy zwrócił moją uwagę na skrypt Jaśkowskiego oraz Pani profesor Urszuli Wybraniec-Skardowskiej. Jej zaproszenie do złożenia artykułu o Stanisławie Jaśkowskim w przygotowanym przez Nią tomie poświęconym Szkole Lwowsko-Warszawskiej, stało się bezpośrednim impulsem do podjęcia przeze mnie pracy redakcyjnej. Chciałbym podziękować za pomoc na różnych etapach przygotowania edycji profesorowi Andrzejowi Pietruszczakowi oraz profesorom UMK Tomaszowi Jarmużkowi i Markowi Nasieniewskiemu, a przede wszystkim magistrowi Mateuszowi Klonowskiemu za Jego bezinteresowną pomoc przy sporządzeniu fotokopii skryptu. Na koniec wielkie podziękowania mojemu współpracownikowi doktorowi Michałowi Zawidzkiemu za czas i wysiłek poświęcony na dokonanie ostatecznej redakcji technicznej tekstu.

Andrzej Indrzejczak
Łódź 2018

Bibliografia

[1] BENCIVENGA, E., „Free Logics”, [in:] D. Gabbay, F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. III, pp. 373–426, Reidel Publishing Company, Dordrecht 1986.

[2] BENCIVENGA, E., Jaśkowski’s Universally Free Logic, *Studia Logica*, 2014, 102/6:1095–1102.

[3] COOLEY, J. C., *A Primer of Formal Logic*, Macmillan 1942.

[4] COPI, I. M., *Symbolic Logic*, The Macmillan Company, New York 1954.

[5] DUBIKAJTIS, L., The life and works of Stanisław Jaśkowski, *Studia Logica*, 1975, 34/2:109–116.

[6] FITCH, F., *Symbolic Logic*, Ronald Press Co, New York 1952.

[7] GARSON, J. W., *Modal Logic for Philosophers*, Cambridge University Press, Cambridge 2006.

[8] Gentzen, G., Untersuchungen über das Logische Schliessen, *Mathematische Zeitschrift*, 1934, 39:176–210 oraz 39:405–431.

[9] Hazen, A. P. i F. J. Pelletier, Gentzen and Jaśkowski Natural Deduction: Fundamentally Similar but Importantly Different, *Studia Logica*, 2014, 102/6:1103–1142.

[10] Indrzejczak, A., *Natural Deduction, Hybrid Systems and Modal Logics*, Springer, Berlin 2010.

[11] Indrzejczak, A., *Natural Deduction*, [in:] *Internet Encyclopedia of Philosophy*, www.iep.utm.edu/nat-ded/.

[12] Jaśkowski, S., „Teoria dedukcji oparta na dyrektywach założeniowych", [w:] S. Banach, K. Kuratowski, S. Kaczmarz (red.), *Księga Pamiątkowa I Polskiego Zjazdu Matematycznego*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1929.

[13] Jaśkowski, S., On the Rules of Suppositions in Formal Logic, *Studia Logica*, 1934, 1:5–32.

[14] Jaśkowski, S., „Recherches sur le systéme de la logique intuitioniste", [in:] *Actes du Congrés International de Philosophie Scientifique*, Sorbonne, ss. 58–61, Paris 1936.

[15] Jaśkowski, S., *Elementy logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych*, skrypt z wykładów, Toruń 1947.

[16] Jaśkowski, S., „O aksjomatyce geometrii brył", *The Report of the VI-th Congress of the Polish Mathematicians*, 1948.

[17] Jaśkowski, S., Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sec. A, 1948, vol. 1:57–77.

[18] Jaśkowski, S., Sur les variables propositionnelles dépendantes, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sec. A, 1948, vol. 1:17–22.

[19] Jaśkowski, S., Trois contributions au calcul des propositions bivalent, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sec. A, 1948, vol. 1:3–15.

[20] Jaśkowski, S., Sur certains groupes formés de classes d'ensambles et leur applications aux définitions des nombres, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sec. A, 1948, vol. 1:23–35.

[21] Jaśkowski, S., Sur le probléme de deision de la topologie et de la theorie des groups, *Colloquiun Mathematicum*, 1948, vol. 1:176–178.

[22] Jaśkowski, S., Sur certains axiomes de la géométrie élémentaire, *Annals of the Polish Mathematical Society*, 1948, vol. 21, fasc. 2:349–350.

[23] Jaśkowski, S., Une modification des définitions fondamentales de la géométrie des corps de A. Tarski, *Annals of the Polish Mathematical Society*, 1948, vol. 21, fasc. 2:298–301.

[24] Jaśkowski, S., Geometria brył, *Matematyka*, 1949, 1:1–7.

[25] Jaśkowski, S., O koniunkcji dyskusyjnej w rachunku zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, 1949, vol. 1:171–172.

[26] Jaśkowski, S., Z badań nad rozstrzygalnością rozszerzonej algebry Boole'a, *Casopis pro pestovani matematiky a fizyky*, 1949, Roc. 74: 136–137.

[27] Jaśkowski, S., O interpretacji zdań kategorycznych Arystotelesa w rachunku predykatów, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sec. A, 1950, vol. 2:77–90.

[28] Jaśkowski, S., Interpretacja funkcji przyczynowych w rachunku zmiennej zdaniowej zależnej, *Sprawozdania Toruńskiego Towarzystwa Naukowego*, 1950, no. 1–4:123–124.

[29] Jaśkowski, S., On the modal and causal functions in symbolic logic, *Studia Philosophica*, 1951, vol. 4:71–92.

[30] Jaśkowski, S., *O symetrii w zdobnictwie i przyrodzie*, Warszawa, 1952.

[31] Jaśkowski, S., Example of class of systems of ordinary differentila equations having no decision method for existence problems, *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences*, 1954, vol. 2/4:153–155.

[32] Jaśkowski, S., Undecidability of first order sentences in the theory of free groupoids, *Fundamenta Mathematica*, 1956, vol. 43:36–45.

[33] Jaśkowski, S., *Matematyka ornamentu*, Warszawa, 1957.

[34] JAŚKOWSKI, S., Über Tautologien, in welchen keine Variable mehr als zweimal vorkommt, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1963, Bd. 9:219–228.

[35] JAŚKOWSKI, S., On formulas in which no individual variable occurs more than twice, *Journal of Symbolic Logic*, 1966, vol. 31/1:1–6.

[36] KOTAS, J., A. PIECZKOWSKI, Scientific works of Stanisław Jaśkowski, *Studia Logica*, 1967, 21:7–16.

[37] ŁUKASIEWICZ, J., *Elementy Logiki matematycznej*, PWN 1962 (II wydanie).

[38] PIETKA, D., Stanisław Jaśkowski's logical investigations, *Organon*, 2008, 37(40):39–69.

[39] QUINE, W. Van O., *Methods of Logic*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1950.

Stanisław Jaśkowski

Elementy logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych (skrypt z wykładów)

wydano na prawach rękopisu

Akad. Księgarnia Spółdz. „SKRYPT”
Toruń 1947

Rozdział 1

Wstęp

1.1. Literatura

Dziedzina wiedzy, którą będziemy się tu zajmowali, rozwijała się w szybkim tempie w ostatnich dziesięcioleciach. W rozwoju tym znaczny jest wkład uczonych polskich, których badania zjednały sobie uznanie za granicą i wywarły wyraźny wpływ. Wyniki badań znajdują się przeważnie w pracach specjalnych, w czasopismach logicznych, matematycznych lub filozoficznych, często są opublikowane w postaci streszczeń. W języku polskim brakuje drukowanego podręcznika, który by ujmował najważniejsze wyniki z tego zakresu. Podam tylko szereg książek, z których czytelnik może uzupełnić swe wiadomości. Z książek polskich polecam dla początkujących przede wszystkim niewielką książeczkę, przeznaczoną na lekturę dodatkową dla młodzieży licealnej:

- Tarski Alfred, *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*. Biblioteczka matematyczna N 3-4-5, Książnica–Atlas, Lwów–Warszawa.

Książka ta nie zawiera systematycznego wykładu, lecz może służyć jako cenne uzupełnienie i zbiór zadań. Wobec braku podręcznika studenci uniwersytetów korzystali przeważnie ze skryptów. Wymienię tu:

- Ajdukiewicz Kazimierz, *Główne zasady metodologii nauk i logiki formalnej*. Skrypt autoryzowany zredagował M. Presburger. Koło Matematyczno-Fizyczne Słuch. Un. Warsz., Warszawa 1928 (Litografia).

- Łukasiewicz Jan, *Elementy logiki matematycznej*. Skrypt autoryzowany opracował M. Presburger. Koło Matematyczno- -Fizyczne Słuch. Un. Warsz., Warszawa 1929 (Litografia).

Podręcznikiem przeznaczonym w zasadzie dla studentów wydziału humanistycznego jest:

- Kotarbiński Tadeusz, *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*. Ossolineum, Lwów 1926.

Podręcznik ten zawiera m.in. streszczenie niektórych poglądów Stanisława Leśniewskiego (profesor Uniwersytetu Warszawskiego, zmarł w 1939 r. przed wojną), który niestety nie pozostawił dzieła drukowanego o przystępniejszym charakterze.

Oryginalne a odmienne od „szkoły warszawskiej" poglądy zawierają książki:

- Chwistek Leon, *Granice nauki. Zarys logiki i metodologii nauk ścisłych*. Książnica–Atlas, Lwów–Warszawa 1935.

- Śleszyński Jan, *Teoria dowodu*. Podług wykładów uniwersyteckich opracował S. K. Zaremba, Koło Matematyczno-Fizyczne Ucz. Un. Jagiellońskiego, Kraków, Tom I – 1925, Tom II – 1929.

Literatura w językach obcych również nie jest obszerna, spośród przystępniejszych podręczników wymienię:

- Hilbert David und Ackermann W[ilhelm], *Grundzuge der Theoretischen Logik*. II Aufl. Springer, Berlin 1938.

- Carnap Rudolph, *Abriss der Logistik*. Wien 1929.

Charakter popularyzujący posiada ciekawa książka:

- Russell Bertrand, *Introduction to mathematical philosophy*. London 1921. To samo w tłumaczeniu: *Einfuhrung in die Mathematische Philosophie*. Ins deutsche übertreten von E. J. Gumpel und W. Gordon, Drei Masken, Munchen 1923.

Nie znam literatury zagranicznej z okresu wojny 1939–1945.

1.2. Co rozumieć będziemy przez metodologię

Piszę na tablicy „1 + 1 = 2". Jest to pewne twierdzenie spisane w powszechnie przyjętym znakowaniu arytmetycznym, pewne zdanie wypowiedziane w języku arytmetyki – jak inaczej możemy powiedzieć. Jest to zarazem konkretny, materialny napis na tablicy, o tym napisie możemy wypowiadać różne zdania, np. że ten napis składa się kolejno z jedynki, plusa, jedynki, znaku równości i dwójki. Możemy też powiedzieć: „Napis złożony kolejno ze znaków jedynki, plusa, jedynki, znaku równości i dwójki jest twierdzeniem arytmetyki”. Tego ostatniego zdania nie zaliczymy do arytmetyki, gdyż arytmetyka nie jest nauką o napisach, lecz poucza nas o właściwościach liczb. Tym niemniej badanie znaków używanych w arytmetyce jest zajmujące i pożyteczne, badania takie zaliczamy do metodologii arytmetyki. W arytmetyce mówimy o liczbach: jeden, dwa itd. W metodologii o znakach oznaczających te liczby, a więc o cyfrach: jedynce, dwójce itd. Przedmiotem badań metodologii, takiej jaką tu przedstawiam, są zdania pewnej nauki, a więc konkretne materialne napisy.

Mówiąc o znaku, mamy na myśli jeden konkretny napis znajdujący się w określonym miejscu. A więc mówiąc o napisie „$1 + 1 = 2$”, nie możemy powiedzieć, że pierwszy znak tego napisu (jedynka) jest identyczny, tożsamy, z trzecim znakiem (również jedynka). Przecież te znaki są różne, bo są napisane w innych miejscach. Powiemy natomiast, że pierwszy znak jest **równokształtny** z trzecim znakiem. Jeżeli w języku metodologii chcemy pokazać, jaki kształt ma wyrażenia omawiane, możemy to uczynić, przytaczając wyrażenie w cudzysłowie. A więc możemy powiedzieć, że jedynka jest to znak „1”, że plus jest to znak „+” itd. Rozróżnienie pomiędzy identycznością a równokształtnością wyrażeń, zarówno jak konsekwentny sposób używania cudzysłowów pochodzi od Leśniewskiego.

Ograniczenie badań do zdań zapisywanych pozwala osiągnąć matematyczną ścisłość wysłowionych twierdzeń i dowodów. Wątpliwa jest wartość naukowa takich przekonań, pomyślanych sądów, dopóki nie umiemy ich wysłowić. Dopiero przez wypowiedzenie zdań komunikujemy je innym ludziom, poddajemy dowód kontroli. Zatem pomijamy takie przeżycia badacza, których nie umie on wysłowić. Stanowisko to pociąga ważną konsekwencję: każde zdanie zapisane jest zdaniem ze względu na określony język, więc badając zdania, musimy zająć się również językiem, w którym są one wypowiedziane. Dlatego rozważania dotyczące języka znakowania stanowią istotną część metodologii.

1.3. Logika

Logikę wyłożę w postaci systemów [sformalizowanych]. Twierdzenia logiki będziemy zapisywali w pewnym znakowaniu (symbolice), czyli w pewnym języku sztucznie utworzonym. Językiem metodologii logiki, językiem, w którym będziemy mówili o wyrażeniach systemu logiki, będzie język zwykły, potoczny. Odrębne znakowanie dla badanego systemu uniemożliwi nam pomieszanie wyrażeń systemu z wyrażeniami należącymi do jego metodologii.

1.4. Antynomie spowodowane pomieszaniem języków

Dlaczego dbamy o to, by język systemu był różny od języka jego metodologii. Otóż odróżnienie tych dwóch języków uwalnia nas od niebezpieczeństwa pewnego rodzaju sprzeczności, tzw. antynomii, które grożą w przeciwnym przypadku. Niebezpieczeństwo grozi m.in. wówczas, gdy w pewnym zdaniu możemy mówić o tym samym zdaniu, co stwierdzimy na następującym przykładzie. Sala, w której się znajdujemy posiada określoną nazwę geograficzną, jest to aula Collegium Minus Uniwersytetu Kopernika w Toruniu. Napiszę na tablicy jedno zdanie: „*Zdanie napisane na tablicy w auli Collegium Minus Uniwersytetu Kopernika jest fałszywe*”. Przypuśćmy, że napisane zdanie jest prawdziwe. Wówczas – zgodnie z jego treścią – zdanie napisane na tablicy w tej sali jest fałszywe. [Zatem przypuszczenie, jakoby było zdaniem] prawdziwym doprowadza nas do sprzeczności. Wobec tego należy przyjąć, że zdanie to jest fałszywe. Ale w tej chwili stwierdziliśmy właśnie to, co to zdanie orzeka, a więc zdanie badane jest prawdziwe. W obu możliwych przypadkach: przy założeniu prawdziwości zdania i przy założeniu jego fałszywości otrzymaliśmy sprzeczność, a więc w każdym razie otrzymujemy fałsz. Rozumowanie powyższe jest pewną modyfikacją antynomii kłamcy sformułowanej już w starożytności przez Eubulidesa. W zdaniu napisanym na tablicy występują terminy geograficzne: „*Toruń*”, „*Collegium Minus*” i wyrazy: „*zdanie*”, „*fałszywe*”, które służą do opisywania własności wyrażeń, a więc należeć mogą tylko do języka metodologii nauki. Przykład ten wykazuje, na jakie trudności napotykamy przy usiłowaniu stworzenia języka jednolitego dla wszystkich nauk.

Dokładne rozróżnienie języka systemu i języka metodologii jest radykalnym sposobem uniknięcia tego typu antynomii.

1.5. Uwagi historyczne

Ponieważ historia logiki nie jest głównym tematem niniejszych wykładów, będę ograniczał wiadomości historyczne do niezbędnego minimum. Uwagi historyczne polegać będą przeważnie na zaznaczeniu, który z autorów pierwszy rozwiązał (lub postawił) najważniejsze z zagadnień, o których mowa. Uwagi te umieszczam po rzeczowym wykładzie odpowiedniego materiału, aby nie przerywać toku rozumowania. Badania, które tu zaliczyliśmy do metodologii uprawiane były od dawna, wchodziły one w skład logiki. W badaniu sprzeczności lubowali się starożytni Grecy, wspomniana antynomia Eubulidesa miała w oryginale postać zdania: „*Epimenides Kreteńczyk powiedział, że wszyscy Kreteńczycy kłamią*”. W tej postaci nie jest zresztą antynomią w ścisłym tego wyrazu znaczeniu, bo nie doprowadza do sprzeczności, przypuszczenie, że zdanie „*Wszyscy Kreteńczycy kłamią*” jest fałszywe. Z przypuszczenia tego wynika jedynie, że pewien kreteńczyk mówi prawdę, ale stąd nie wynika, by Epimenides mówił prawdę. Nazwa antynomii zapożyczona jest z prawoznawstwa, oznacza tam sprzeczność praw.

Pierwszy pomysł języka symbolicznego, umyślnie dla celów logiki zbudowanego pochodzi od Leibniza (wiek XVII). Właściwym twórcą logiki symbolicznej był Boole, przywiązywał on wielką wagę do wyboru języka. Pisał np. „Język jest narzędziem ludzkiego rozumu, a nie jest środkiem do wyrażania myśli” (*Laws of thought*, r. 1854). Metodologię matematyki doprowadzili do wysokiego poziomu przede wszystkim Hilbert i jego uczniowie – w ostatnich dziesięcioleciach, uprawiając ją pod nazwą [metamatematyki]. Ogólnie Hilbert nazywa metasystemem względem pewnego systemu to, co my nazywamy metodologią tego systemu (za Prof. Ajdukiewiczem, Łukasiewiczem, Tarskim).

Chwistek podjął próbę stworzenia jednolitego systemu logiki i metodologii logiki o wspólnym języku. W tytule używam nazwy „logika matematyczna” dla zaznaczenia kierunku, który będzie reprezentowany. W tym samym celu używa się też nazwy „logistyka”, „logika symboliczna”. Odmienne stanowisko w wielu zagadnieniach zajmuje logika tzw. filozoficzna lub tradycyjna. Stawia sobie za zadanie [, że] ma wykrywać prawa myślenia, a więc pewne czynności psychiczne. Nie ogranicza się do badania zdań, lecz mówi o sądach, choćby pomyślanych tylko.

Rozdział 2

Rachunek zdań

Uwaga terminologiczna. Rachunek zdań nosi również nazwę teorii dedukcji[1]. Ta ostatnia nazwa nie jest szczęśliwie dobrana, gdyż nasuwa przypuszczenie jakoby teoria ta zawierała całokształt praw rozumowania dedukcyjnego. Tak nie jest, w teorii dedukcji nie umiemy sformułować wielu prostych i podstawowych praw logicznych, które dają się wysłowić dopiero w języku bogatszym, niż język rachunku zdań.

2.1. Wyrażenia sensowne rachunku zdań

2.1.1. Pojęcie sensowności

Każde zdanie składa się z jednego lub kilku wyrazów określonego języka. W języku symbolicznym sztucznie zbudowanym wyrazy mają zwykle postać jednego znaku, takimi są cyfry, plus, znak równości itd. w arytmetyce. Nie wystarczy jednak zapisać szereg wyrazów, aby otrzymać zdanie. Nie jest zdaniem arytmetyki „2+ =”, ani zdaniem geografii „*Wisła Warszawa leży nad*”. O wyrażeniach tych nie powiemy, że są prawdziwe, ani że są fałszywe, lecz tylko to, że nie posiadają żadnego sensu, czyli są niesensowne (bezsensowne). O tym jak łączyć wyrazy, aby otrzymać zdanie danego języka poucza część gramatyki nosząca nazwę składni. Szczegółowe przepisy składni, reguły sensowności – dają nam odpowiedź na pytanie, jakie wyrażenia są zdaniami tego języka. Niektóre spośród zdań możemy uważać za prawdziwe, inne uważamy za fałszywe, lecz równocześnie to jest obojętne przy formułowaniu reguł sensowności. Przykłady zdań arytmetyki:

[1] Taka nazwa została wprowadzone przez Russella i Whiteheada w *Principia Mathematica*, po II wojnie światowej raczej wyszła z użycia.

„$2 + 2 = 4$”, „$2 + 2 = 5$”, zdań geografii: „*Warszawa leży nad Wisłą*”, „*Stolica Polski leży nad wielką rzeką*”, „*Łódź leży nad Wisłą*”.

W algebrze mówimy, że „$2x + 1$” jest funkcją zmiennej „x”, gdyż wyrażenie to podporządkowuje każdej liczbie, którą podstawimy za argument „x” pewną liczbę – wartość funkcji „$2x + 1$”. Uogólniając pojęcie funkcji, powiemy, że wyrażenie „$x + 1 = 2$” jest również funkcją zmiennej „x”, gdyż przyporządkowuje każdej liczbie, którą podstawimy za „x” pewne zdanie (prawdziwe lub fałszywe), które będziemy uważali za wartość funkcji przy tym podstawieniu. A więc jedynkę zamiast „x” otrzymujemy zdanie prawdziwe: „$1 + 1 = 2$” – jako wartość tej funkcji, przy innych podstawieniach, na przykład przy podstawieniu zera – zdanie fałszywe: „$0 + 1 = 2$”. Ponieważ funkcja „$x+1 = 2$” przybiera zdania jako wartości, więc nazywać ją będziemy funkcją zdaniową, a dlatego, że za argument jej podstawiamy liczby – dodajemy bliższe określenie: funkcja zdaniowa o jednym argumencie liczbowym.

Znamy sposoby budowy zdań złożonych, tzn. otrzymywanych przez połączenia innych zdań za pomocą pewnych wyrazów. Z podanych przykładowo zdań możemy utworzyć następujące zdanie złożone: „*Jeżeli Warszawa leży nad Wisłą, to stolica Polski leży nad wielką rzeką*”, „*Nieprawda, że Łódź leży nad Wisłą*”, „*Warszawa leży nad Wisłą i nieprawda, że Łódź leży nad Wisłą*”, „$2 + 2 = 4$ lub $2 + 2 = 5$”. Uważajmy litery małe pe, małe ku za zmienne zdaniowe, tj. zmienne które reprezentują (zastępują) zdania i utwórzmy wyrażenia: „*Jeżeli p, to q*”, „*p i q*”, „*p lub q*”. Wyrażenia te nie są zdaniami języka polskiego. Jeżeli jednak zastąpimy w nich zmienne „p”, „q” przez zdania, to otrzymamy zdanie złożone. Pozostaniemy więc w zgodzie ze znanym z matematyki pojęciem funkcji, gdy powiemy, że wyrażenie „*Jeżeli p, to q*” jest funkcją zdaniową o dwóch argumentach zdaniowych. Podobnie „*Nieprawda, że p*” jest funkcją zdaniową o jednym argumencie zdaniowym.

Wiemy z algebry, że równanie „$x + 1 = 2$” posiada rozwiązanie. Możemy tę okoliczność wysłowić w postaci zdania, które daje się w algebrze udowodnić: „*Istnieje takie x że* $x + 1 = 2$”, Podobnie można udowodnić w algebrze, że równanie to nie posiada innych rozwiązań, niż liczba jeden. Wysłowić to możemy w postaci zdania: „*Przy wszelkim x jeżeli* $x + 1 = 2$, *to* $x = 1$”. Wyrażenie „*przy wszelkim*” nazywamy **kwantyfikatorem ogólnym**, „*przy pewnym*” kwantyfikatorem szczegółowym. W przykładach powyższych stosowaliśmy kwantyfikatory do zmiennych liczbowych. Możemy posługiwać się kwantyfikatorami również w odniesieniu do zmiennych zdaniowych, mianowicie poprzedzać funkcje zdaniowe takimi zwrotami jak „*przy pewnym p*”, „*przy wszelkim p*”. Kwantyfikatorów nie uważamy za znaki funkcji, zmiennej następującej bezpośrednio po kwantyfikatorze nie nazywamy argumentem. Za argument funkcji możemy bowiem podstawić pewną inną funkcję, na przykład w funkcji *„q lub p”* za argument *„p”* podstawić *„jeżeli p, to r”*, a otrzymamy funkcję zdaniową – w tym przypadku trzech argumentów: *„q lub jeżeli p to r”*. Natomiast jeżeli wstawimy *„jeżeli p, to r”* zamiast *„p”* w wyrażeniu *„przy wszelkim p”*, to otrzymamy wyrażenie niezrozumiałe, niemogące wchodzić w skład żadnego wyrażenia sensownego: *„przy wszelkim jeżeli p, to r”*.

2.1.2. Znakowanie beznawiasowe Łukasiewicza

Zmiennymi zdaniowym są małe litery *„p”*, *„q”*, *„r”*, *„s”* oraz litery tych kształtów ze wskaźnikami u dołu: „p_1”, „p_2” itd. Funkcje zdaniowe o argumentach zdaniowych zapisywane są symbolicznie według schematu następującego: na początku zapisujemy znak funkcji, czyli funktor, po nim następuje jeden lub dwa argumenty – argumentów tych nie ujmujemy w nawiasy ani nie oddzielamy ich przecinkiem. Funktorem o jednym argumencie jest znak *„N”* [$\neg$], funktorami o dwóch argumentach znaki: *„A”*, *„C”*, *„E”*, *„K”* [odpowiednio: $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\wedge$]. Pod znaki te podkładamy pewne znaczenie intuicyjne, które uwidocznić możemy przez podanie sposobu odczytywania funkcji zbudowanych przy ich pomocy.

Negację, zaprzeczenie zdania *„Np”* [$\neg p$] najprościej byłoby czytać jako *„nie p”*, jak to czynimy w języku potocznym w pewnych przypadkach np. *„nie grzmi”*. Lepiej czytać *„nieprawda, że p”*, gdyż w języku polskim przeczenie *„nie”* odnoszące się do całego zdania umieszcza się przeważnie wewnątrz zdania np. *„Łódź nie leży nad Wisłą”*. Zdanie *„Nie Łódź leży nad Wisłą”* jest niezrozumiałe.

„Apq” [$p \vee q$] można czytać jako: *„p lub q”*. Aby zbliżyć sposób czytania do symboliki użytej, dobrze umieścić jakiś wyraz na początku czytanego wyrażenia, a więc powiedzieć: *„bądź p lub q”*. Sens wyrażenia najdokładniej oddaje takie odczytanie: *„zachodzi co najmniej jeden spośród dwóch następujących przypadków: p, q”*. Funkcję *„Apq”* nazywa Łukasiewicz alternatywą, nazywają ją również dysjunkcją. Dawniejszą nazwą tej funkcji jest suma logiczna, a zdarza się też nazwa iloczyn logiczny (Hilbert). Argumenty alternatywy nazywamy składnikami.

„Cpq” [$p \rightarrow q$] czyta się jako: *„jeżeli p, to q”* lub krócej: *„jeżeli p, q”*. Przy zbiegu większej ilości funkcji czytać ją można tak: *„p implikuje q”*, *„p pociąga za sobą q”*. Funkcję *„Cpq”* nazywamy implikacją lub okresem warunkowym, pierwszy jej argument poprzednikiem, drugi następnikiem.

„Epq” [$p \leftrightarrow q$] czyta się: *„wtedy i tylko wtedy p gdy q”*, *„p jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by q”*, *„następujące dwa zdania są sobie równoważne: p, q”*. Funkcję tę nazywamy równoważnością (ekwiwalencją), jej argumenty – stronami: lewą i prawą.

„Kpq” [$p \wedge q$] czyta się: *„p i q”*, a także *„zarazem p i q”*, *„oba następujące zdania są prawdziwe: p, q”*. Funkcję tę nazywamy koniunkcją, starszą nazwą jest iloczyn logiczny (Hilbert nazywa ją sumą logiczną). Argumenty nazywamy czynnikami.

Duże pi greckie „Π” [$\forall$] jest kwantyfikatorem ogólnym, tzn. „Πp” [$\forall p$] należy czytać *„przy wszelkim p”*, duże sigma „Σ” [$\exists$] jest kwantyfikatorem szczegółowym, tzn. „Σp” [$\exists p$] czytamy: *„przy pewnym p”* lub *„istnieje takie p, że ...”*.

2.1.3. Reguły sensowności

Przez odpowiednie użycie kilku zmiennych, funktorów i kwantyfikatorów możemy tworzyć coraz bardziej skomplikowane wyrażenia sensowne. Oto reguły sensowności rachunku zdań [podane przez Łukasiewicza], reguły te stanowią składnię systemu.

Reguła I. Wyrażenie złożone z jednej z liter *„p”*, *„q”*, *„r”*, *„s”* lub z jednej z tych liter ze wskaźnikiem – jest wyrażeniem sensownym.

Reguła II. Wyrażenie złożone kolejno ze znaku *„N”* i wyrażenia sensownego jest wyrażeniem sensownym [Wyrażenie złożone z $\neg$ i wyrażenia sensownego].

Reguła III. Wyrażenie złożone kolejno z jednego ze znaków *„A”*, *„C”*, *„E”*, *„K”* z wyrażenia sensownego i z drugiego wyrażenia sensownego – jest wyrażeniem sensownym [Wyrażenie złożone z jednego ze znaków $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge$ postawionego pomiędzy dwoma wyrażeniami sensownymi].

Reguła IV. Wyrażenie złożone kolejno z jednego ze znaków „Π”, „Σ” [Wyrażenie złożone z jednego ze znaków $\forall, \exists$], z jednego ze znaków: *„p”*, *„q”*, *„r”*, *„s”* bez wskaźnika lub ze wskaźnikiem i z wyrażenia sensownego – jest wyrażeniem sensownym.

W sformułowanych czterech regułach mówiliśmy jedynie o kształtach, które winny posiadać wyrażenia nazywane sensownymi w rachunku zdań.

Reguły takie nazywamy strukturalnymi (zamiast nazwy „reguła” używa się również nazwy „dyrektywa”)[2].

2.1.4. Przykłady wyrażeń sensownych

Reguły sensowności pozwalają przyjąć za sensowne wyrażenia następujące:

1) p (na mocy reguły I);

2) q (jw.);

3) Np [$\neg p$] (na mocy reguły I i II);

4) $CNpq$ [$\neg p \rightarrow q$].

Wyrażenie (4) składa się z „C”, wyrażenia „Np” i wyrażenia „q”. „Np” jest równokształtne z wyrażeniem (3), którego sensowność okazaliśmy. Łatwo widzieć, że wyrażenie równokształtne z wyrażeniem sensownym jest sensowne, gdyż przy dowodzie sensowności bierzemy pod uwagę jedynie kształty pewnych części danego wyrażenia. A więc wyrażenie (4) składa się z „C”, z wyrażenia sensownego równokształtnego z wyrażeniem (3) i wyrażenia sensownego równokształtnego z wyrażeniem (1). Jest więc sensowne na mocy reguły III. W ten sposób dla okazania sensowności pewnego wyrażenia powoływać się [musimy] na wcześniej wykazaną sensowność innych wyrażeń:

5) Kpq [$p \wedge q$] (reguła III wobec sensowności wyrażeń 1, 2);

6) $AKpqp$ [$p \wedge q \vee p$] (reguła III, sensowność wyrażeń 5, 1);

7) $CAKpqpCNpq$ [$p \wedge q \vee p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$] (reguła III, sensowność 6, 4).

Wyrażenie (7) jest na tyle skomplikowane, że przy braku wprawy można w pierwszej chwili nie zrozumieć jego budowy. Zadanie to można sobie ułatwić, zakreślając lub ujmując w nawiasy niektóre wyrażenia sensowne w skład jego wchodzące. A więc budowa wyrażenia (7) staje się jasna, jeżeli dopiszemy nawiasy w sposób następujący:

$C(A((Kpq)p)C((Np)q))$ [$(((p \wedge q) \vee p) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow q))$[3]]

[2] W podawanych dalej transkrypcjach wzorów będziemy stosować nawiasy w sposób oszczędny, zgodnie z uwagami podanymi we wstępie, dotyczącymi zasad redakcji.

[3] Por. ten zapis z zapisem tej samej formuły w punkcie 7, w którym uwzględniliśmy konwencje dotyczące pomijania nawiasów.

Nawiasy nie są tutaj znakami rachunku zdań, mają one ten sam charakter, co dopiski marginesowe. Nie mówimy o nich w regułach sensowności. Można ich używać, jeśli chcemy ułatwić zrozumienie bardziej skomplikowanych wyrażeń. Dalsze przykłady wyrażeń sensownych:

8) $\Pi qKpq$ [$\forall p(p \wedge q)$] (reguła IV, sensowność wyrażenia 5);

9) $C\Pi qKpqKpq$ [$\forall q(p \wedge q) \to p \wedge q$] (reguła III, sensowność wyrażeń 8, 5).

2.1.5. Rozpoznawanie wyrażeń sensownych

Reguły sensowności pozwalają okazać, że wyrażenia są sensowne. W taki sposób można dowodzić, że pewne wyrażenie nie jest sensowne, tzn., że przez stosowanie reguł sensowności dowolną, choćby największą ilość razy nie przyjmiemy tego wyrażenia za sensowne. Łatwo zauważyć, że nie jest sensowne żadne wyrażenie, które zawiera jakiś znak niebędący wyrazem naszego języka, tzn. niewymieniony w żadnej z reguł sensowności. Zauważmy, że w regułach sensowności [występują tylko] zmienne zdaniowe, funktor jednoargumentowy „N", funktory dwuargumentowe „A" „C" „E" „K" i kwantyfikatory „Π" i „Σ". Znaki te są to wyrazy tego rachunku zdań, którym będziemy się zajmowali. Jeżeli jakieś wyrażenie zawiera znak, który nie jest wyrazem tego języka, to nie potrafimy wykazać jego sensowności, opierając się na podanych tu regułach, wyrażenie takie nie jest sensowne w podanym tutaj języku rachunku zdań. Jak przeprowadzić ściślejszy dowód niesensowności takiego wyrażenia. Podam dowód prostego twierdzenia, aby unaocznić nam metodę, którą będziemy niejednokrotnie stosowali w dalszym ciągu. Dowodzimy, że: Każde wyrażenie sensowne rachunku zdań składa się jedynie z wyrazów teorii dedukcji.

Dowód: Sensowność każdego wyrażenia sensownego musi być uznana na mocy jednej z reguł sensowności. Jeżeli nie jest to reguła I, to do uznania sensowności wyrażenia potrzeba, by uznaną była już wcześniej sensowność pewnych innych wyrażeń. Nazwijmy je przesłankami. Np. (4) i (6) są przes. dla (7). Powiemy, że własność składania się jedynie z wyrazów wymienionych w regułach jest własnością dziedziczną ze względu na te reguły, jeżeli własność ta przysługuje każdemu wyrażeniu uznanemu za sensowne na mocy jednej z reguł i przesłanek posiadających tę własność. A więc, że własność ta przechodzi z przesłanek na wyrażenia przyjmowane za sensowne, podobnie jak pewne cechy przechodzą z rodziców na dzieci i dlatego noszą nazwę dziedzicznych. W rozważanym przypadku [jeżeli coś] jest uznane za sensowne na mocy reguły I, to składa się jedynie z jednej zmiennej, a więc z wyrazu omawianego języka. Przesłanek w tym wypadku nie ma. Jeżeli wyrażenie dołączone jest na mocy reguły II, to składa się z wyrazu „N” i przesłanki. Skoro ta przesłanka składa się jedynie z wyrazów, to i całe wyrażenie składa się jedynie z wyrazów. Zupełnie podobnie rozpatrujemy przypadki, w których wyrażenie zostało uznane za sensowne na mocy reguł III lub IV. [Stwierdzamy, że analizowane wyrażenie składa] się z pewnych wyrazów i przesłanek, że przesłanki zawierają jedynie wyrazy omawianego języka, więc otrzymane wyrażenie zawiera również jedynie takie wyrazy. Możemy dalej stwierdzić ogólnie, że każda własność dziedziczna względem reguł sensowności przysługuje wszystkim wyrażeniom sensownym. Albowiem stosując reguły sensowności, musielibyśmy móc otrzymać jakieś wyrażenie sensowne jako pierwsze z pośród wyrażeń, nieposiadających tej własności, a takiego otrzymać nie możemy. Ta własność, zatem – jako dziedziczna – przenosi się na wszystkie wyrażenia sensowne. ■

Podobnie okazać możemy, że pewne inne własności są dziedziczne względem reguł sensowności i dlatego przysługują wszystkim wyrażeniom sensownym.

Dla ich wysłowienia przypomnimy, że dwa znaki uważamy za różne, jeżeli znajdują się w różnych miejscach. Jeżeli liczymy znaki pewnego rodzaju, to należy osobno liczyć różne znaki, choćby były równokształtne. A więc wyrażenie (4) *CNpp* [$\neg p \rightarrow p$] zawiera ogółem cztery znaki, w tym dwie zmienne – obie kształtu „*p*”. Przenosząc na grunt naszych badań pojęcie „części”, będziemy tę część rozumieli w ten sposób, że częścią wyrażenia jest pewne wyrażenie zawarte w poprzednim. Na przykład (4) posiada część równokształtną z wyrażeniem (3) „*Np*”, samo wyrażenie można też uważać za jego własną część, mówimy jednak wtedy, że jest to część niewłaściwa. Możemy teraz wysłowić:

Twierdzenie (o warunku koniecznym i dostatecznym sensowności wyrażeń): Wtedy i tylko wtedy pewne wyrażenie jest wyrażeniem sensownym, gdy zarazem (I) wyrażenie to składa się wyłącznie ze zmiennych zdaniowych, funktorów jednoargumentowych i dwuargumentowych i kwantyfikatorów (II) wyrażenie to zawiera więcej zmiennych niż funktorów i kwantyfikatorów łącznie i (III) żadna początkowa właściwa część wyrażenia nie zawiera więcej zmiennych niż funktorów dwuargumentowych i kwantyfikatorów łącznie i (IV) po każdym kwantyfikatorze bezpośrednio następuje zmienna.

Własności wyrażeń opisane w warunkach (I)–(IV) są dziedziczne względem reguł sensowności, wobec tego przysługują wszystkim wyrażeniom sensownym. Dowiedliśmy tego już dla warunku (I), odpowiednie dowody dla pozostałych warunków pominiemy, gdyż nie nastręczają trudności zasadniczych. Nieco dłuższy jest dowód dziedziczności własności (III), wymaga bowiem rozpatrywania szeregu przypadków.

W jaki sposób możemy dowieść, że wyrażenie spełniające warunki (I)–(IV) jest wyrażeniem sensownym, tzn. daje się otrzymać za pomocą reguł sensowności. Zauważmy, że każde wyrażenie składa się ze skończonej ilości znaków, gdyby więc istniały wyrażenia spełniające warunki (I)–(IV) a niesensowne, to wśród nich istniałoby (co najmniej jedno) najkrótsze, a więc takie, że każda jego część właściwa spełniałaby twierdzenie. Okażemy jednak, że to jest niemożliwe. Rozpatrzmy w tym celu szereg przypadków zależnych od tego, jaki znak występowałby na pierwszym miejscu w tym wyrażeniu.

Przypadek 1) Pierwszym znakiem jest zmienna. Wtedy z warunku (III) wynika, że wyrażenie to jest samą zmienną i jest sensowne na mocy reguły I.

Przypadek 2) Pierwszym znakiem wyrażenia jest funktor jednoargumentowy, a więc „N”, część tego wyrażenia otrzymana przez opuszczenie początkowego „N” spełnia warunki (I)–(IV), a że jest to część właściwa najkrótszego wyrażenia niespełniającego twierdzenia, więc spełnia twierdzenie i jest wyrażeniem sensownym. Ale wyrażenie otrzymane z wyrażenia sensownego przez poprzedzenie go znakiem „N” jest wyrażeniem sensownym na mocy reguły II.

Przypadek 3) Pierwszym znakiem wyrażenia jest pewien funktor dwuargumentowy.

Opierając się na warunkach (I)–(IV) i przeprowadzając szczegółowe obliczenia, można okazać, że po tym funktorze dwuargumentowym, następować muszą dwa wyrażenia, które spełniają warunki (I)–(IV), a więc są sensowne. Wobec tego wyrażenie jest sensowne na mocy reguły III. Podobnie w przypadku 4), w którym pierwszym znakiem jest kwantyfikator, możemy okazać, że po kwantyfikatorze tym następuje zmienna i wyrażenie sensowne, a więc wyrażenie jest sensowne na mocy reguły (IV). Ponieważ zaś pierwszym znakiem wyrażenia spełniającego warunek (I) może być tylko bądź zmienna, lub funktor jednoargumentowy, lub funktor dwuargumentowy, lub kwantyfikator, więc wyczerpaliśmy wszystkie możliwe przypadki. Nie istnieje zatem najkrótsze wyrażenie niespełniające twierdzenia i każde wyrażenie spełniające warunki (I)–(IV) jest wyrażeniem sensownym.

Twierdzenie to możemy zastosować do praktycznego sprawdzania sensowności wyrażeń. Warunki (I) i (IV) można sprawdzić z łatwością, sprawdzanie zaś, czy wyrażenie spełnia warunki (II) i (III) wymaga obliczenia różnicy pomiędzy ilością funktorów dwuargumentowych i kwantyfikatorów a ilością zmiennych. Po każdym znaku badanego wyrażenia zanotujmy, o ile więcej funktorów dwuargumentowych i kwantyfikatorów niż zmiennych występuje licząc od początku wyrażenia do miejsca, w którym notujemy. Na przykład:

$$0p^{-1}, \quad 0C^1A^2K^3p^2q^1p^0C^1N^1p^0p^{-1}, \quad 0A^1K^2p^1q^0p^{-1}$$

$$0A^1K^2p^1q^0, \quad 0A^1K^2p^1q^0p^{-1}p^{-2}, \quad 0A^1p^0q^{-1}K^0p^{-1}.$$

Dopisane przy znakach liczby zwiększają się o 1 przy przejściu przez funktor dwuargumentowy lub kwantyfikator, zmniejszając się o 1 przy przejściu przez zmienną, pozostają bez zmiany przy przejściu przez znak negacji. Przed wyrażeniem stawiamy znak 0. Łatwo zauważyć, że warunki (II) i (III) są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy liczba -1 występuje tylko raz jeden na końcu wyrażenia. A więc wśród podanych tu przykładów sensowne są trzy [pierwsze] wyrażenia, niesensowne trzy dalsze.

2.1.6. Jednoznaczność znakowania beznawiasowego

Z twierdzenia o warunku koniecznym i dostatecznym sensowności wynika twierdzenie:

Jeżeli pewne wyrażenia sensowne posiadają wspólny pierwszy znak, to są identyczne. Istotnie z przepisów sprawdzania sensowności wynika, że oba te wyrażenia muszą mieć wspólny znak ostatni, bo po tym znaku wypada obliczana przy sprawdzaniu różnica równa -1. Z udowodnionego twierdzenia wynika, że przy beznawiasowym zapisywaniu funkcji każdy argument jest jednoznacznie określony. To znaczy, że istnieje tylko jedno wyrażenie do którego odnosi się dany znak przeczenia „*N*” – jest to wyrażenie sensowne, którego pierwszy znak następuje bezpośrednio po tym „*N*”. Podobnie nie ma wątpliwości co do tego, które wyrażenia są argumentami funktorów dwuargumentowych, np. istnieje tylko jedna para wyrażeń taka, że wyrażenia te są: pierwsze poprzednikiem, drugie następnikiem okresu warunkowego zaczynającego się od danego znaku „C”. Jednoznaczność znakowania beznawiasowego Łukasiewicza zawdzięczamy konsekwentnie przeprowadzonej zasadzie, że funktory umieszczone są przed argumentami. Przy wyrazach języka potocznego mogą zachodzić pod tym względem dwuznaczności. Jeżeli powiemy: „*p lub q i r*”, to może znaczyć zarówno „*ApKqr*”

[$p \vee q \wedge r$] – czyli *„p lub (q i r)”* jak też: *„KApqr”* [($p \vee q$) $\wedge$ r] czyli *„(p lub q) i r”*. Dwuznaczności unikniemy jeżeli funkcje tego rodzaju wypowiadać będziemy w taki sposób, aby na początku wyrażenia umieścić wyraz, który zaznacza, że w tym miejscu zaczyna się alternatywa, czy koniunkcja. Odróżniamy wtedy: *„bądź p lub zarazem q i r”* od *„zarazem bądź p lub q i r”*. Powszechnie używane spójniki (*„lub”*, *„i”*) pomiędzy argumentami można przy tym zachować, bo przyczynić się mogą do zwiększenia przejrzystości wyrażeń. A więc zapewnimy sobie jednoznaczność wyrażeń, jeżeli będziemy mówili: *„bądź p lub q”*, *„jeżeli p, to q”*, *„wtedy i tylko wtedy p gdy q”*, *„zarazem p i q”*.

Oczywiście język potoczny będziemy stosować nie do zmiennych zdaniowych, których tu używam, aby zwiększyć ogólność rozważań, lecz do konkretnych zdań lub funkcji zdaniowych.

2.2. Reguły wnioskowania i twierdzenia rachunku zdań bez kwantyfikatorów

Od autora: Podobnie, jak przy wyborze znakowania, tak samo przy wyborze reguł wnioskowania korzystamy z pewnej swobody, gdyż różne układy reguł i aksjomatów doprowadzają do tych samych twierdzeń.

Podany tutaj układ reguł został sformułowany przeze mnie i ogłoszony w tłumaczeniu pt. „On the rules of suppositions in formal logic”, (Studia Logica Nr 1. Warszawa 1934 r.). Celem tej pracy było sformalizowanie metod wnioskowania używanych w praktyce dowodów matematycznych, a przez to zmniejszenia [rozpiętości] pomiędzy praktyką a teoriami logicznymi. Stawiając sobie ten sam cel obecnie, zdecydowałem się temat wykładu elementarnego ująć tak, jak to czynię poniżej. Nadmieniam, że podobną metodę opracował niezależnie G. Gentzen i ogłosił jednocześnie ze mną.

2.2.1. Praktyka dowodów matematycznych

Oprócz znanych nam już spójników przyzdaniowych i kwantyfikatorów spotykamy w dowodach matematycznych pewne inne wyrazy o charakterze logicznym. Występują one w takich zwrotach, jak *„zakładam, że”*, *„przypuśćmy, że”*. Po założeniu następuje szereg jego konsekwencji, tzn. zdań, które warunkowo tylko przyjmujemy za prawdziwe, mianowicie pod warunkiem, że prawdziwym jest założenie. Jeżeli na przykład chcę dowieść, że równanie

$2x + 1 = 3$ nie posiada innych rozwiązań, niż $x = 1$, to mogę to uczynić jak następuje: *Zakładam, że 2x+1 = 3.* Na mocy znanych twierdzeń otrzymujemy *konsekwencje założenia.* $(2x + 1) - 1 = 3 - 1$ (przez odjęcie 1 od obu stron równania). $2x = 2$ (redukcja na mocy praw dodawania i odejmowania) $x = 1$ (podzielenie obu stron przez 2). Na tym zakończyliśmy konsekwencje założenia i zapisujemy zdanie, które zawiera rezultat dowodu, mianowicie. *Jeżeli 2x+1=3, to x=1.* Zdanie to możemy już zaliczyć do twierdzeń, jego prawdziwość nie jest uwarunkowana żadnymi założeniami – poza pewnikami algebry. W bardziej złożonych dowodach stosujemy kilka założeń i czyniąc dalsze założenia, często pozostawiamy w mocy założenia poprzednie. Odróżniamy wówczas poszczególne układy założeń.

Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić w rachunku zdań. Zamiast zmiennych liczbowych będą występowały zmienne zdaniowe. Oto przykład. *Załóżymy, że p* (nazwijmy to założenie 1). Pozostawiając założenie 1 w mocy *załóżmy, że jeżeli p, to q* (założenie 2). *Konsekwencja założeń 1 i 2: q; zakończyliśmy konsekwencje założenia 2.* Przy założeniu 1 dodatkowe założenie 2 doprowadziło do konsekwencji *q*, możemy więc przyjąć jako *konsekwencje założenia 1. Jeżeli p, to jeżeli (jeżeli p, to q), to q.* W znakowaniu *CpCCpqq* $[p \to ((p \to q) \to q)]$.

2.2.2. Znakowanie założeniowe

Aby dowody tego rodzaju móc zapisać symbolicznie, musimy znakowanie tak uzupełnić, aby uwidocznić, które wyrażenia są założeniami, a które ich konsekwencjami. Każde założenie poprzedzimy znakiem otwarcia obszaru założeniowego, tj. nawiasem klamrowym leżącym, konsekwencje założenia wypisywać będziemy poniżej założenia. Po ostatniej konsekwencji każdego założenia umieścimy znak zamknięcia obszaru, nawias klamrowy leżący zwrócony w stronę przeciwną, który będzie kasował ostatni znak otwarcia. A więc podane przykłady zapisać należy tak:

1) $\overbrace{2x + 1 - 3}$

$(2x + 1) - 1 = 3 - 1$

$2x = 2$

$\underbrace{x = 1}$

$C2x + 1 = 3x = 1$

2)
$$\begin{array}{l}
\qquad\overbrace{\quad p \quad} \\
\qquad\qquad\overbrace{Cpq} \\
\qquad\qquad\underbrace{\quad q \quad} \\
\qquad\underbrace{CCpqq} \\
CpCCpqq
\end{array}$$
[4]

Używając znaków otwarcia i zamknięcia obszarów założenia, możemy na podstawie kształtów dokonanych napisów rozpoznać, które wyrażenia należą do obszaru danego założenia.

Sformułujemy strukturalne reguły wnioskowania, tj. reguły opisujące jedynie kształty wyrażeń dołączonych – ściślej biorąc stosunki pomiędzy kształtami tych wyrażeń a kształtami przesłanek – tj. wyrażeń wcześniej przyjętych, z których korzystamy przy wnioskowaniu. Wyrażenia przyjmowane na mocy reguł będziemy zapisywali w odrębnych wierszach. Zbiór takich wyrażeń nazwiemy dowodem, o nowo przyjętym wyrażeniu powiemy, że zostało dołączone do dowodu. Przez dołączenie wyrażenia przechodzimy od jednego stadium do następnego.

Założeniem (hipotezą) nazywamy wyrażenie zapisane w dowodzie w wierszu bezpośrednio następującym po znaku otwarcia obszaru założeniowego. Badając ilość i kolejność znaków otwarcia i zamknięcia obszarów założeniowych, możemy rozpoznać, które wyrażenia są ważne w danym stadium dowodu.

2.2.3. Reguły przyjmowania założeń

Zauważyliśmy, że w dowodach matematycznych czynimy dowolne założenia, lecz mające określony sens w używanym języku. Odpowiednią regułę strukturalną wysłowimy jak następuje:

---

[4] 1)
$$\begin{array}{l}
\quad\overbrace{2x+1-3} \\
\quad(2x+1)-1=3-1 \\
\quad 2x=2 \\
\quad\underbrace{x=1} \\
2x+1=3 \to x=1
\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l}
\quad\overbrace{\quad p \quad} \\
\qquad\overbrace{p \to q} \\
\qquad\underbrace{\quad q \quad} \\
\quad\underbrace{(p \to q) \to q} \\
p \to ((p \to q) \to q)
\end{array}$$

Reguła Z. Do dowodu wolno dołączyć znak otwarcia obszaru założeniowego i wyrażenie sensowne.

2.2.4. Reguły implikacyjne

Wyrażenie postaci *„jeżeli p to q”* uważmy za dowiedzione, w przypadku, w którym założenie „*p*” doprowadziło nas do konsekwencji „*q*”. Ten sposób wnioskowania ujmujemy w postać następującą:

C1) Reguła tworzenia (dowodzenia) implikacji: Jeżeli „*p*” jest ostatnim ważnym założeniem i „*q*” jest wyrażeniem ważnym w dowodzie, to wolno do dowodu dołączyć znak zamknięcia obszaru i wyrażenie złożone kolejno za znaku implikacji, wyrażenia równokształtnego z „*p*” i wyrażenia równokształtnego z „*q*”.

Jeżeli wiemy, że *„jeżeli p to q”* i przekonamy się, że „*p*” [to „*q*” jest też prawdziwe i] w zastosowaniu do przyjętego tutaj znakowania mamy:

C2) Reguła odrywania implikacyjnego. Jeżeli w dowodzie ważne jest wyrażenie „*p*” i wyrażenie złożone kolejno ze znaku implikacji, wyrażenia równokształtnego z „*p*” i z pewnego wyrażenia „*q*”, to wolno dołączyć do dowodu wyrażenie równokształtne z „*q*”.

2.2.5. Reguły koniunkcji

Jeżeli przyjęte jest zdanie *„p i q”*, to oczywiście przyjąć wypada prawdziwość obu zdań: zdania „*p*” i zdania „*q*”. Jeżeli zaś oba te zdania są prawdziwe, to prawdziwa jest ich koniunkcja. Te dwie proste właściwości koniunkcji wykorzystujemy w regułach wnioskowania:

K1) Reguła symplifikacji koniunkcyjnej. Jeżeli w dowodzie ważne jest wyrażenie złożone ze znaku koniunkcji, z wyrażenia sensownego „*p*” i wyrażenia sensownego „*q*”, to wolno dołączyć do dowodu wyrażenie równokształtne z „*p*” i wyrażenie równokształtne z „*q*”.

K2) Reguła tworzenia koniunkcji. Jeżeli ważne są wyrażenia sensowne „*p*” i „*q*”, to wolno dołączyć do dowodu wyrażenie złożone ze znaku koniunkcji, wyrażenia równokształtnego z „*p*” i wyrażenia równokształtnego z „*q*”.

2.2.6. Reguły alternatywy

Jak już wspominaliśmy alternatywę *„bądź p, lub q”* rozumiemy w sposób niewykluczający jednoczesnej prawdziwości zdań „*p*” i „*q*”. Do tego, by alternatywę taką przyjąć za prawdziwą wystarczy okazać, że co najmniej jedno ze zdań „*p*”, „*q*” jest prawdziwe. Można to wysłowić w postaci reguły:

A1) Reguła symplifikacji alternatywnej. Jeżeli w dowodzie ważne jest wyrażenie „*p*”, to wolno dołączyć do dowodu (1) wyrażenie złożone ze znaku alternatywy, wyrażenia równokształtnego z „*p*” i pewnego wyrażenia sensownego i (2) wyrażenie złożone ze znaku alternatywy, wyrażenia sensownego i wyrażenia równokształtnego z „*p*”.

Zdarza się, że dla dowodu twierdzenia musimy rozważyć dwa przypadki „*p*”, „*q*”. Jeżeli stwierdzimy, że co najmniej jeden spośród tych przypadków musi zachodzić i że jakieś zdanie „*r*” w obydwu przypadkach jest słuszne, wówczas uważamy „*r*” za dowiedzione. Tego rodzaju wnioskowanie odpowiada temu, co w logice tradycyjnej nosi nazwę prawa dylematu. Odpowiednią regułę wnioskowania wysłowimy jak następuje.

A2) Reguła dylematu. Jeżeli w dowodzie ważne są wyrażenia (1) złożone ze znaku alternatywy, z wyrażenia sensownego „*p*” i wyrażenia sensownego „*q*”, (2) złożone ze znaku implikacji, wyrażenia równokształtnego z „*p*” i z pewnego wyrażenia sensownego „*r*”, (3) złożone ze znaku implikacji, wyrażenia równokształtnego z „*q*” i z wyrażenia równokształtnego z „*r*”, to wolno dołączyć do dowodu wyrażenie równokształtne z „*r*”.

2.2.7. Reguły równoważności

Równoważności *„wtedy i tylko wtedy p, gdy q”* można dowieść w ten sposób, że okażemy prawdziwość dwóch implikacji. Pierwszej *„jeżeli p, to q”* i drugiej *„jeżeli q, to p”*. Odpowiednikiem tego sposobu dowodzenia jest:

E1) Reguła tworzenia (dowodzenia) równoważności. Jeżeli w dowodzie ważne są wyrażenia (1) złożone ze znaku implikacji, z wyrażenia sensownego „*p*” i wyrażenia sensownego „*q*”, (2) złożone ze znaku implikacji, wyrażenia równokształtnego z „*q*” i z wyrażenia równokształtnego z „*p*”, to wolno dołączyć do dowodu wyrażenie złożone ze znaku równoważności, z wyrażenia równokształtnego z „*p*” i z „*q*”.

Jeżeli zaś się zdarzy, że obowiązuje równoważność *„wtedy i tylko wtedy p, gdy q”*, to wystarczy stwierdzić prawdziwość jednej z dwóch stron tej równoważności na to, by drugą stronę móc uznać za prawdziwą. A więc:

E2) Reguła odrywania równoważnościowego. Jeżeli w dowodzie ważnym jest wyrażenie złożone kolejno ze znaku równoważności, wyrażenia sensownego „*p*” i wyrażenia sensownego „*q*”, (1) jeżeli ważne jest ponadto wyrażenie równokształtne z „*p*”, to wolno dołączyć do dowodu wyrażenie równokształtne z „*q*” i (1) jeżeli ważne jest wyrażenie równokształtne z „*q*”, to wolno dołączyć do dowodu wyrażenie równokształtne z „*p*”.

2.2.8. Reguły negacyjne (sprzeczności)

Znanym jest sposób dowodzenia przez sprowadzenie do sprzeczości (dowód niewprost, apagogiczny). Mianowicie twierdzenie uważamy za dowiedzione, jeżeli przy założeniu, że jest fałszywe, a więc przy założeniu „*nieprawda, że p*” otrzymamy sprzeczność.

N) Reguła sprzeczności. Jeżeli ostatnie ważne założenie składa się ze znaku negacji i wyrażenia sensownego „*p*”, i w dowodzie ważne są (1) wyrażenie „*q*” i (2) wyrażenie złożone ze znaku negacji i wyrażenia równokształtnego z „*q*”, to do dowodu wolno dołączyć znak zamknięcia obszaru i wyrażenie równokształtne z „*p*”.

2.2.9. Twierdzenia

	$\underbrace{\overbrace{p}}$	(założenie 1 na mocy reguły Z)
$T1$	Cpp	(na mocy reguły C1, za założenie i konsekwencję przyjęliśmy *p*)[5]

Twierdzenie 1 posiada nazwę implikacyjnego prawa tożsamości.

	$\overbrace{p}$	(założenie 1)
	$\underbrace{\overbrace{q}}$	(założenie 2)
	$\underbrace{Cqp}$	(konsekwencja założenia 1 otrzymana na mocy reg. C1 przez przyjęcie założenia 2 za założenie i założenia 1 za konsekwencję)
$T2$	$CpCqp$	(reguła C1)[6]

[5] $p \rightarrow p$

[6] $\overbrace{p}$ (założenie 1)

$\underbrace{\overbrace{q}}$ (założenie 2)

$T2$ otrzymaliśmy dzięki temu, że przyjęcie dodatkowego założenia 2 przerwało ważność założenia 1. Sens intuicyjny $T2$ można uczynić jaśniejszym, gdyby je przeczytać tak:

„*Jeżeli p, to jeżeli q, to p pozostaje prawdziwym*”.

$\overbrace{Kpq}$ (zał. 1)

$\underbrace{p}$ (reg. K1)

$T3$ $CKpqp$ (reg. C1)

$\overbrace{Kpq}$ (zał. 1)

$\underbrace{q}$ (reg. K1)

$T4$ $CKpqq$[7]

$\overbrace{p}$ (założenie 1)

$\underbrace{Apq}$ (reguła A1)

$T5$ $CpApq$

$\overbrace{p}$ (założenie)

$\underbrace{Aqp}$ (reguła A1)

$T6$ $CpAqp$[8]

$\underbrace{q \to p}$ (konsekwencja założenia 1 otrzymana na mocy reg. C1 przez przyjęcie założenia 2 za założenie i założenia 1 za konsekwencję)

$T2$ $p \to (q \to p)$ (reguła C1)

[7]

$\overbrace{p \wedge q}$ (zał. 1)

$\underbrace{p}$ (reg. K1)

$T3$ $p \wedge q \to p$ (reg. C1)

$\overbrace{p \wedge q}$ (zał. 1)

$\underbrace{q}$ (reg. K1)

$T4$ $p \wedge q \to q$

[8]

$\overbrace{p}$ (założenie 1)

$\underbrace{p \vee q}$ (reguła A1)

$T5$ $p \to p \vee q$

$\overbrace{p}$ (założenie)

$\underbrace{q \vee p}$ (reguła A1)

$T6$ $p \to q \vee p$

Twierdzenia $T2, T3, T4, T5, T6$ posiadają wszystkie podobny charakter. Nazywają się prawami symplifikacji, a więc upraszczania, choć ta nazwa jest usprawiedliwiona tylko dla symplifikacji koniunkcyjnej, a więc dla twierdzeń $T3$ i $T4$. Nazwę tę zastosowałem do reguł wnioskowania K1 i A1, gdyż reguły te są odpowiednikami twierdzeń $T3$–$T6$.

$$
\begin{array}{lll}
 & \overbrace{p} & \text{(założenie 1)} \\
 & \quad\overbrace{q} & \text{(założenie 2)} \\
 & \quad\underbrace{Kpq} & \text{(reguła K2)} \\
 & \underbrace{CqKpq} & \text{(reguła C1)} \\
T7 & CpCpKpq & \text{(reguła C1)} \\
 & \overbrace{Cpr} & \text{(założenie 1)} \\
 & \quad\overbrace{Cqr} & \text{(założenie 2)} \\
 & \qquad\overbrace{Apq} & \text{(założenie 3)} \\
 & \qquad\underbrace{r} & \text{(reguła A2)} \\
 & \quad\underbrace{CApqr} & \text{(reguła C1)} \\
 & \underbrace{CCqrCApqr} & \text{(reguła C1)} \\
T8 & CCprCCqrCApqr & \text{(reguła C1)}^{9}
\end{array}
$$

$T8$ jest to prawo dylematu.

$$
\begin{array}{ll}
\overbrace{NNp} & \text{(założenie 1)}
\end{array}
$$

[9]
$$
\begin{array}{lll}
 & \overbrace{p} & \text{(założenie 1)} \\
 & \quad\overbrace{q} & \text{(założenie 2)} \\
 & \quad\underbrace{p \wedge q} & \text{(reguła K2)} \\
 & \underbrace{q \to p \wedge q} & \text{(reguła C1)} \\
T7 & p \to (p \to p \wedge q) & \text{(reguła C1)} \\
 & \overbrace{p \to r} & \text{(założenie 1)} \\
 & \quad\overbrace{q \to r} & \text{(założenie 2)} \\
 & \qquad\overbrace{p \vee q} & \text{(założenie 3)} \\
 & \qquad\underbrace{r} & \text{(reguła A2)} \\
 & \quad\underbrace{p \vee q \to r} & \text{(reguła C1)} \\
 & \underbrace{(q \to r) \to (p \vee q \to r)} & \text{(reguła C1)} \\
T8 & (p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r)) & \text{(reguła C1)}
\end{array}
$$

	$\underbrace{\overbrace{Np}}$	(założenie 2)
	$\underbrace{p}$	(na mocy reguły N, gdyż założenie 2 [daje] sprzeczność z założeniem 1)
$T9$	$CNNpp$	(reg. C1)
	$\overbrace{p}$	(założenie 1)
	$\overbrace{NNNp}$	(założenie 2)
	$\underbrace{\overbrace{NNp}}$	(założenie 3)
	$\underbrace{Np}$	(na mocy reguły N, wobec sprzeczności założeń 3 i 2)
	$\underbrace{NNp}$	(reguła N wobec sprzeczności pomiędzy założeniem 1 a ostatnią konsekwencją założenia 2)
$T10$	$CpNNp$	(reguła C1)
$T11$	$EpNNp$	(na mocy reg. E1 zastosowanej do $T9$, $T10$)[10]

$T11$ jest to prawo podwójnego przeczenia, $T9$ i $T10$ – słabsze, implikacyjne postaci tego prawa.

$T12$ Epp [$p \leftrightarrow p$]

$T12$ – równoważnościowe prawo tożsamości otrzymuje się na mocy reguły E1, przy czym twierdzenie $T1$ występuje jednocześnie jako pierwsza i druga przesłanka.

---

[10]

	$\overbrace{\neg\neg p}$	(założenie 1)
	$\underbrace{\overbrace{\neg p}}$	(założenie 2)
	$\underbrace{p}$	(na mocy reguły N, gdyż założenie 2 [daje] sprzeczność z założeniem 1)
$T9$	$\neg\neg p \to p$	(reg. C1)
	$\overbrace{p}$	(założenie 1)
	$\overbrace{\neg\neg\neg p}$	(założenie 2)
	$\underbrace{\overbrace{\neg\neg p}}$	(założenie 3)
	$\underbrace{\neg p}$	(na mocy reguły N, wobec sprzeczności założeń 3 i 2)
	$\underbrace{\neg\neg p}$	(reguła N wobec sprzeczności pomiędzy założeniem 1 a ostatnią konsekwencją założenia 2)
$T10$	$p \to \neg\neg p$	(reguła C1)
$T11$	$p \leftrightarrow \neg\neg p$	(na mocy reg. E1 zastosowanej do $T9$, $T10$)

	$\overbrace{Epq}$	(założenie 1)
	$\overbrace{p}$	(założenie 2)
	$\underbrace{q}$	(na mocy reguły E2 – odrywania, wobec tego, że założenie 2 jest równokształtne z lewą stroną równoważności przyjętej za założenie 1)
	$\underbrace{Cpq}$	(reg. C1)
$T13$	$CEpqCpq$	(reg. C1)
	$\overbrace{Epq}$	(założenie 1)
	$\overbrace{q}$	(założenie 2)
	$\underbrace{p}$	(na mocy reguły E2, ponieważ założenie 2 jest równokształtne z prawą stroną równoważności przyjętej za założenie 1)
	$\underbrace{Cqp}$	(reg. C1)
$T14$	$CEpqCqp$	(reg. C1)[11]

Czytelnik sam udowodni prawo tautologii $T15$ i $T16$ i prawa przemienności alternatywy i koniunkcji $T17, T18$. Tautologia znaczy tyle, co powtórzenie tego, co było już uprzednio powiedziane.

$T15$ $EAppp$ [$p \vee p \leftrightarrow p$]

$T16$ $EKppp$ [$p \wedge p \leftrightarrow p$]

---

[11]

	$\overbrace{p \leftrightarrow q}$	(założenie 1)
	$\overbrace{p}$	(założenie 2)
	$\underbrace{q}$	(na mocy reguły E2 – odrywania, wobec tego, że założenie 2 jest równokształtne z lewą stroną równoważności przyjętej za założenie 1)
	$\underbrace{p \to q}$	(reg. C1)
$T13$	$(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$	(reg. C1)
	$\overbrace{p \leftrightarrow q}$	(założenie 1)
	$\overbrace{q}$	(założenie 2)
	$\underbrace{p}$	(na mocy reguły E2, ponieważ założenie 2 jest równokształtne z prawą stroną równoważności przyjętej za założenie 1)
	$\underbrace{q \to p}$	(reg. C1)
$T14$	$(p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$	(reg. C1)

*T*17 *EApqAqp* $[p \vee q \leftrightarrow q \vee p]$

*T*18 *EKpqKqp* $[p \wedge p \leftrightarrow q \wedge p]$

	$\overbrace{NNKpNp}$	(założenie 1)
	$\underbrace{\overbrace{NKpNp}}$	(założenie 2)
	$KpNp$	(na mocy reguły N – wobec sprzeczności założeń 1 i 2)
	p	(reguła K1)
	$\underbrace{Np}$	(reguła K1)
*T*19	$NKpNp$	(na mocy reguły N – wobec sprzeczności ostatnich dwóch konsekwencji założenia 1)
	$\overbrace{NApNp}$	(założenie 1)
	$\overbrace{Np}$	(założenie 2)
	$\underbrace{ApNp}$	(reguła A1 symplifikacji alternatywy wobec założenia 2)
	p	(reguła N – wobec sprzeczności zachodzącej pomiędzy założeniem 1 a ostatnią konsekwencją założenia 2)
	$\underbrace{ApNp}$	(reguła symplifikacji alternatywnej A1)
*T*20	$ApNp$	(reguła N – wobec sprzeczności pomiędzy założeniem 1 a jego ostatnią konsekwencją)[12]

---

[12]

	$\overbrace{\neg\neg(p \wedge \neg p)}$	(założenie 1)
	$\underbrace{\overbrace{\neg(p \wedge \neg p)}}$	(założenie 2)
	$p \wedge \neg p$	(na mocy reguły N – wobec sprzeczności założeń 1 i 2)
	p	(reguła K1)
	$\underbrace{\neg p}$	(reguła K1)
*T*19	$\neg(p \wedge \neg p)$	(na mocy reguły N – wobec sprzeczności ostatnich dwóch konsekwencji założenia 1)
	$\overbrace{\neg(p \vee \neg p)}$	(założenie 1)
	$\overbrace{\neg p}$	(założenie 2)
	$\underbrace{p \vee \neg p}$	(reguła A1 symplifikacji alternatywy wobec założenia 2)
	p	(reguła N – wobec sprzeczności zachodzącej pomiędzy założeniem 1 a ostatnią konsekwencją założenia 2)
	$\underbrace{p \vee \neg p}$	(reguła symplifikacji alternatywnej A1)
*T*20	$p \vee \neg p$	(reguła N – wobec sprzeczności pomiędzy założeniem 1 a jego ostatnią konsekwencją)

Twierdzenie $T19$ nosi nazwę prawa sprzeczności, $T20$ prawa wyłączonego środka. Przeprowadzimy dowód twierdzeń mniej oczywistych.

	$\overbrace{Np}$	(założenie 1)
	$\overbrace{p}$	(założenie 2)
	$\overbrace{Nq}$	(założenie 3)
	$\underbrace{\quad}$	(założenia 1 i 2 są sprzeczne. Przyjęcie dodatkowego założenia nie usuwa tej sprzeczności, bo w obszarze założenia 3 oba sprzeczne założenia są ważne. Możemy więc zastosować regułę sprzeczności, która daje nam q)
	$\underbrace{q}$	(na mocy reguły N, wobec sprzeczności założeń 1 i 2)
	$\underbrace{Cpq}$	(reguła C1)
$T21$	$CNpCpq$	(reguła C1)[13]

Twierdzenie to można swobodnie odczytać jako: zdanie fałszywe implikuje każde zdanie.

$\overbrace{CCpqp}$	(założenie 1)
$\overbrace{Np}$	(założenie 2)
Cpq	(reguła C2 – oderwanie od $T21$ będącego implikacją o poprzedniku równokształtnym z założeniem 2)
$\underbrace{p}$	(reguła C2 – oderwanie od założenia 1)
$\underbrace{p}$	(reguła N – wobec sprzeczności założenia 2 jego ostatnią konsekwencją)

13

	$\overbrace{\neg p}$	(założenie 1)
	$\overbrace{p}$	(założenie 2)
	$\overbrace{\neg q}$	(założenie 3)
	$\underbrace{\quad}$	(założenia 1 i 2 są sprzeczne. Przyjęcie dodatkowego założenia nie usuwa tej sprzeczności, bo w obszarze założenia 3 oba sprzeczne założenia są ważne. Możemy więc zastosować regułę sprzeczności, która daje nam q)
	$\underbrace{q}$	(na mocy reguły N, wobec sprzeczności założeń 1 i 2)
	$\underbrace{p \to q}$	(reguła C1)
$T21$	$\neg p \to (p \to q)$	(reguła C1)

*T*22 *CCCpqpp* (reguła C1)[14]

Twierdzenie to nosi nazwę prawa redukcji Peirce'a. Nie znajduje zastosowania, lecz jest ciekawe jako przykład twierdzenia prostego, a dość dalekiego od intuicji, od poczucia oczywistości. Czytelnik zechce je odczytać.

2.3. Rachunek zdań z kwantyfikatorami

2.3.1. Uwagi wstępne

Jak dowodzimy w algebrze twierdzeń zaczynających się od kwantyfikatora ogólnego tj. od słów „przy wszelkim"? Weźmy wzór na różnicę kwadratów dwóch liczb, a więc twierdzenie, które należy wysłowić dokładnie tak „*Przy wszelkich* $x, y, x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$". Można dowieść tego twierdzenia jak następuje: Weźmy dowolne x, y. Stosując twierdzenia, które przyjmujemy jako znane, obliczamy kolejno:

$$(x + y) \cdot (x - y) = x \cdot (x - y) + y \cdot (x - y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2,$$

więc:

$$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y).$$

Ponieważ ostatnia zapisana równość wyprowadzona została dla dowolnych x, y, o których nic nie zakładamy, więc przyjmujemy twierdzenie „*Przy wszelkich* $x, y, x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$" za udowodnione. Jeżeli weźmiemy dwie liczby, np. 5 i 2, i chcemy okazać, że $5^2 - 2^2 = (5 + 2) \cdot (5 - 2)$, to możemy powtórzyć cały tok dowodu, zastępując x przez 5, a y przez 2. Wszystkie przejścia pozostają poprawne. Istnieje jednak krótszy sposób okazania słuszności ostatniej równości, mianowicie skorzystać z twierdzenia ogólnego i zastosować podstawienie, to znaczy powiedzieć tak „*skoro przy wszelkich* $x, y, x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$*", to także „*$5^2 - 2^2 = (5 + 2) \cdot (5 - 2)$".

---

[14] $\overbrace{(p \to q) \to p}$ (założenie 1)

$\overbrace{\neg p}$ (założenie 2)

$p \to q$ (reguła C2 – oderwanie od *T*21 będącego implikacją o poprzedniku równokształtnym z założeniem 2)

$\underbrace{p}$ (reguła C2 – oderwanie od założenia 1)

$\underbrace{p}$ (reguła N – wobec sprzeczności założenia 2 z jego ostatnią konsekwencją)

*T*22 $((p \to q) \to p) \to p$ (reguła C1)

Tak samo można postąpić dla liczb 3 i 7, 153 i 212 itd. Dzięki temu, że przeprowadziliśmy jeden dowód na zmiennych, oszczędzamy konieczności przeprowadzania wielu dowodów dla poszczególnych liczb. Zauważmy, że stosowaliśmy przy tym dwie reguły wnioskowania: pierwsza pozwoliła poprzedzić kwantyfikatorami *„przy wszelkich x, y”* pewne wyrażenie, które było ważne dla dowolnych x, y, a więc nie było konsekwencją żadnego założenia dotyczącego x lub y, nazwiemy tę regułę generalizacją. Druga to reguła podstawiania, na mocy tej reguły moglibyśmy opuścić *„przy wszelkich x, y”* i zastąpić we wzorze zmienne x i y układami cyfr. Zamiast cyfr „5”, „2” moglibyśmy podstawić pewne wyrażenie zawierające zmienne takie jak np. „$3x$”, „$2x$”, otrzymalibyśmy wtedy „$(3x)^2 - (2x)^2 = (3x + 2x) \cdot (3x - 2x)$”. Stosowanie reguły podstawiania wymaga jednak pewnych dodatkowych zastrzeżeń. Można bowiem udowodnić *„Przy wszelkich a, b, jeżeli przy wszelkich x zachodzi* $ax + b = 0$ *to* $a = 0$”. Dla dowodu wystarczy założyć: *przy wszelkich* x, $ax + b = 0$.

Podstawiając 0 za x, otrzymujemy $b = 0$, podstawiając 1 za x, możemy następnie wywnioskować $a = 0$. Gdybyśmy w udowodnionym twierdzeniu podstawili „1” za „a”, „$-x$” za „b”, otrzymalibyśmy *„jeżeli przy wszelkich x zachodzi* $1 \cdot x + (-x) = 0$ *to 1 = 0*”. Jest to fałsz, gdyż wiemy, że *„Przy wszelkich x,* $1 \cdot x + (-x) = 0$, *a mimo to nieprawda, że „1 = 0*”. Jeżeli zastanowimy się nad zródłem błędu, to dostrzeżemy, że za „b” podstawiliśmy wyrażenie „$-x$” zawierające zmienną „x”, a zmienna tego kształtu występuje w kwantyfikatorze *„Przy wszelkim x*”. O zmiennych „x” występujących w wyrażeniu *„Przy wszelkim x zachodzi* $ax + b = 0$” powiemy, że są związane z początkowym kwantyfikatorem. Jeżeli podstawiliśmy „$-x$” za „b”, to „b” przeszło w wyrażenie zawierające pewną zmienną związaną. Otóż tego rodzaju podstawienia nie są prawidłowe. Oprócz zmiennych związanych z kwantyfikatorami występują we wzorach innego rodzaju zmienne związane. Jeżeli chcemy zapisać sumę pewnej ilości składników o dość regularnej postaci, to możemy to uczynić w sposób skrócony, używając znaku sumy - sigma. Mianowicie sumę „$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$” możemy zapisać jako „$\Sigma_{k=1}^4 k^2$”. Znak sigma nie jest tu znakiem funkcji, ani litera k nie jest argumentem, gdyż po podstawieniu jakiejkolwiek liczby za „k” wyrażenie traci sens, otrzymując np. „$\Sigma_{3=1}^4 3^2$” – wyrażenie pozbawione sensu. Znak „k” w tym zastosowaniu nazywamy w praktyce matematycznej wskaźnikiem bieżącym, zgodnie z terminologią logiczną wypada mu nadać nazwę zmiennej związanej. Kwantyfikator posiada pewne własności analogiczne do znaku sigma, tym też się tłumaczy użycie litery sigma na oznaczenie kwantyfikatora szczegółowego. Przy stosowaniu podstawień we wzorach zawierających znak sigma należy również uważać by wyrażenie [, które] podstawiamy za pewną zmienną nie zawierało zmiennych związanych z tym znakiem, tj. wskaźników bieżących. Np. można bez trudu obliczyć, że słusznym jest zdanie „*Przy wszelkim n zachodzi* $1 + \Sigma_{k=0}^{2}(k^2 + n) = \Sigma_{k=1}^{3}(k + n)$”, gdyż obie strony równe są $6 + 3n$. Gdybyśmy chcieli zastosować to twierdzenie do przypadku $n = k$, tj. podstawić „k” za „n”, otrzymalibyśmy fałsz: „$1 + \Sigma_{k=0}^{2}(k^2 + k) = \Sigma_{k=1}^{3}(k + k)$”, gdyż w ostatniej równości po obliczeniu lewa strona daje 9, prawa 12.

Skoro w rachunku zdań używamy kwantyfikatorów, musimy odróżnić w każdym wyrażeniu zmienne zdaniowe związane i wolne, czyli niezwiązane. W wyrażeniu złożonym z kwantyfikatora (ogólnego lub szczegółowego) z pewnej zmiennej α i wyrażenia sensownego β, zmienna α i wszystkie zmienne z nią równokształtne są zmiennymi związanymi. A więc np. zmienne „p” w wyrażeniu „$\Pi pCpq$” [$\forall p(p \to q)$], natomiast w wyrażeniu „$Cp\Pi pCpq$” [$p \to \forall p(p \to q)$] pierwsza zmienna kształtu „p” jest zmienną wolną, pozostałe zmienne tego kształtu są związane. Mówiąc o związaniu zmiennych, należy się wyrażać „zmienna jest **związana w pewnym wyrażeniu**, np. w wyrażeniu α. Zależnie od tego jakie przyjmiemy α, zmienna może być wolna lub związana w α. Np. jeżeli za α przyjmiemy całe wyrażenie „$\Pi pCpq$” [$\forall p(p \to q)$], to drugie w nim występujące „p” jest zmienną związaną w α. Natomiast to samo „p” jest zmienną wolną w wyrażeniu będącym częścią wyrażenia α. Mianowicie częścią kształtu „Cpq” [$p \to q$]. Oczywiście każda zmienna jest zmienną wolną w wyrażeniu sensownym złożonym z tej jednej zmiennej. Dokładniej możemy powiedzieć, że:

> Wtedy i tylko wtedy α jest zmienną związaną w wyrażeniu sensownym β, gdy zmienna α występuje w takim wyrażeniu sensownym γ zawartym w wyrażeniu β, że γ składa się z kwantyfikatora, zmiennej równokształtnej z α i pewnego wyrażenia sensownego.

2.3.2. Podstawienie prawidłowe za zmienną zdaniową

Oznaczmy przez $\alpha\beta/\gamma$ wyrażenie otrzymane z wyrażenia α w taki sposób, że zamiast wszystkich zmiennych kształtu β **wolnych** w α piszemy wyrażenie kształtu γ. Znaki innego kształtu, a także zmienne związane kształtu β, jeżeli takie w α występują, pozostają bez zmiany. A więc $(C\Pi ppp)p/Kpq$ [$(\forall pp \to p)p/p \wedge q$] – czyli podstawienie „$Kpq$” [$p \wedge q$] za „$p$” w wyrażeniu „$C\Pi ppp$” [$\forall pp \to p$] będzie to „$C\Pi ppKpq$” [$\forall pp \to p \wedge q$], gdyż jedynie ostatnie „p” było zmienną wolną. Podstawienie $\alpha\beta/\gamma$ nazywamy prawidłowym podstawieniem za zmienną zdaniową jeżeli zarazem (1) β jest zmienną zdaniową, (2) γ jest wyrażeniem sensownym i (3) każda zmienna wolna w γ pozostaje zmienną wolną w całym wyrażeniu $\alpha\beta/\gamma$.

2.3.3. Reguły operowania kwantyfikatorem ogólnym

Π1) Reguła generalizacji (dołączania kwantyfikatora ogólnego). Jeżeli w dowodzie ważne jest wyrażenie α, to wolno dołączyć do dowodu wyrażenie złożone kolejno (1) z kwantyfikatora ogólnego „Π” (2) zmiennej zdaniowej nierównokształtnej z żadną zmienną wolną [założenia] ważnego w dowodzie i (3) z wyrażenia równokształtnego z α[15].

Π2) Reguła podstawiania. Jeżeli w dowodzie ważne jest wyrażenie złożone z kwantyfikatora ogólnego, zmiennej zdaniowej β i wyrażenia α, to wolno dołączyć do dowodu każde prawidłowe podstawienie za zmienną zdaniową $\alpha\beta/\gamma$.

2.3.4. Reguły operowania kwantyfikatorem szczegółowym

Σ1) Reguła kwantyfikatora szczegółowego. Jeżeli w dowodzie ważne jest prawidłowe podstawienie $\alpha\beta/\gamma$, to wolno dołączyć do dowodu wyrażenie [złożone z] kwantyfikatora szczegółowego, zmiennej zdaniowej β i wyrażenia sensownego α.
Przykład analogicznego wnioskowania w matematyce: Skoro $a+(b-a) = b$, to możemy wywnioskować: *Istnieje takie* x, *że* $a+x = b$. Tutaj „$a+(b-a) = b$” jest podstawieniem $x/b - a$ w „$a + x = b$”.

Σ2) Reguła rozdziału kwantyfikatora ogólnego z zamianą [na dwa] szczegółowe. Jeżeli w dowodzie ważne są wyrażenia (1) złożone z kwantyfikatora ogólnego, ze zmiennej zdaniowej α, ze znaku implikacji, z wyrażenia sensownego β i wyrażenia sensownego γ, (2) złożone z kwantyfikatora szczegółowego, ze zmiennej równokształtnej z α i z wyrażenia równokształtnego z β, to do dowodu wolno dołączyć wyrażenie złożone z kwantyfikatora szczegółowego, zmiennej równokształtnej z α i z wyrażenia równokształtnego z γ.

Σ3) Reguła opuszczania kwantyfikatora szczegółowego. Jeżeli w dowodzie ważne jest wyrażenie złożone z kwantyfikatora szczegółowego, zmiennej wolnej równokształtnej z α i wyrażenia β, nie zawierającego [zmiennej α,]

[15] Chodzi tu o te założenia, które są ważne w tej dziedzinie, w której występuje kwantyfikowane wyrażenie. W szczególności można skwantyfikować ogólnie dowolną zmienną w tezie, czyli wyrażeniu uniwersalnie ważnym.

to do dowodu wolno dołączyć wyrażenie równokształtne z β. Istotnie, skoro kwantyfikator początkowy nie wiąże żadnej zmiennej, to jest on zbyteczny.

2.3.5. Twierdzenia

*T*23	$\Pi pEpNNp$	(na mocy reguły Π1 – wobec tw. *T*11)
	Πpq	(założenie 1)
	q	((z założenia 1 na mocy reguły Π2 podstawienie $(q)p/p = q$)
*T*24	$C\Pi pqq$	(reguła C1)
	q	(założenie 1)
	Πpq	(reguła Π1 – wobec założenia 1)
*T*25	$Cq\Pi pq$	(reguła C1)
*T*26	$Eq\Pi pq$	(reguła E1)
	$NN\Pi pp$	(założenie 1)
	$E\Pi ppNN\Pi pp$	(reg. Π2, podstawienie w *T*23 $p/\Pi pp$)
	Πpp	(reg. E2)
	$N\Pi pp$	(reg. Π2, podstawienie w ostatniej konsekwencji $(p)p/N\Pi pp$)
*T*27	$N\Pi pp$	(reg. sprzeczności)
*T*28	Σpp	(reg. Σ1 wobec tego, że *T*1 jest podstawieniem $(p)p/Cpp$)
*T*29	$\Pi pCpApq$	(reg. Π1 wobec *T*5)[16]

[16]

*T*23	$\forall p(p \leftrightarrow \neg\neg p)$	(na mocy reguły Π1 – wobec tw. *T*11)
	$\forall pq$	(założenie 1)
	q	(z założenia 1 na mocy reguły Π2 podstawienie $(q)p/p = q$)
*T*24	$\forall pq \to q$	(reguła C1)
	q	(założenie 1)
	$\forall pq$	(reguła Π1 – wobec założenia 1)
*T*25	$q \to \forall pq$	(reguła C1)
*T*26	$q \leftrightarrow \forall pq$	(reguła E1)
	$\neg\neg\forall pp$	(założenie 1)
	$\forall pp \leftrightarrow \neg\neg\forall pp$	(reg. Π2, podstawienie w *T*23 $p/\forall pp$)
	$\forall pp$	(reg. E2)

Przykłady zastosowania reguły $\Sigma 2$

$T30$	$\Sigma pApq$	(reg. $\Sigma 2$ – wobec $T29$ i $T28$)
	$\overbrace{\Sigma pq}$	(założenie 1)
	$\underbrace{q}$	(reguła $\Sigma 3$)
$T31$	$C\Sigma pqq$	(reguła C2)
	$\overbrace{q}$	(założenie 1)
	$\underbrace{\Sigma pq}$	(reguła $\Sigma 1$)
$T32$	$Cq\Sigma pq$	(reguła C1)
$T33$	$Eq\Sigma pq$	(reguła E1 wobec $T31$, $T32$)[17]

Zgodnie z regułami sensowności uważamy za sensowne wyrażenie takie, jak „Πpq”[$\forall pq$], „Σpq” [$\exists pq$], zawierające kwantyfikatory, które nie wiążą żadnych zmiennych w wyrażeniu pokwantyfikatorowym. $T26$ i $T33$ wyjaśniają nam, że takie kwantyfikatory dają się dodawać i opuszczać, są one nieistotne. Szczególnym przypadkiem prawidłowego podstawienia jest podstawienie tożsamych p/p. Zastosowanie reguły podstawiania do tego przypadku pozwala opuszczać umieszczony na początku kwantyfikator ogólny wraz z następującą po nim zmienną zdaniową.

Okażemy jeszcze, że w definicji podstawiania prawidłowego $\alpha\beta/\gamma$ istotnym jest warunek, który głosi, że każda zmienna wolna w γ musi pozo-

---

	$\underbrace{\neg\forall pp}$	(reg. $\Pi 2$, podstawienie w ostatniej konsekwencji $(p)p/\neg\forall pp$)
$T27$	$\neg\forall pp$	(reg. sprzeczności)
$T28$	$\exists pp$	(reg. $\Sigma 1$ wobec tego, że $T1$ jest podstawieniem $(p)p/p \to p$)
$T29$	$\forall p(p \to p \vee q)$	(reg. $\Pi 1$ wobec $T5$)

[17]

$T30$	$\exists p(p \vee q)$	(reg. $\Sigma 2$ – wobec $T29$ i $T28$)
	$\overbrace{\exists pq}$	(założenie 1)
	$\underbrace{q}$	(reguła $\Sigma 3$)
$T31$	$\exists pq \to q$	(reguła C2)
	$\overbrace{q}$	(założenie 1)
	$\underbrace{\exists pq}$	(reguła $\Sigma 1$)
$T32$	$q \to \exists pq$	(reguła C1)
$T33$	$q \leftrightarrow \exists pq$	(reguła E1 wobec $T31$, $T32$)

stać zmienną wolną w całym wyrażeniu. Gdyby tego warunku nie było, to w twierdzeniu

$T25a'$ $\Pi qCq\Pi pq$ [$\forall q(q \to \forall pq)$]

(otrzymanym z $T25$ przez generalizację), można by podstawić q/p co dałoby $Cp\Pi pp$ [$p \to \forall pp$]. Dalej mielibyśmy twierdzenie: $\Pi pCp\Pi pp$ [$\forall p(p \to \forall pp)$], które po podstawieniu p/Cpp [$p/p \to p$] daje $CCpp\Pi pp$ [$(p \to p) \to \forall pp$] i wreszcie wobec $T1$ – na mocy reguły odrywania mielibyśmy Πpp [$\forall pp$], twierdzenie sprzeczne z $T27$. A więc przeoczenie warunku (3) w definicji podstawiania prawidłowego prowadzi do sprzeczności.

2.4. Zupełność rachunku zdań

2.4.1. Reguła wtórna podstawiania

W dowodzie $T27$ wyprowadziliśmy konsekwencję: $E\Pi ppNN\Pi pp$ [$\forall pp \leftrightarrow \neg\neg\forall pp$]. Wyrażenie to można dowieść w obszarze twierdzeń. Dowód jego przedstawia się jak następuje: mamy twierdzenie

$T11$ $EpNNp$ [$p \leftrightarrow \neg\neg p$]

Stosując do $T11$ regułę generalizacji, otrzymaliśmy:

$T23$ $\Pi pEpNNp$ [$\forall p(p \leftrightarrow \neg\neg p)$]

Podstawiając do $T23$ $p/\Pi pp$ [przy zastosowaniu $\Pi 2$], otrzymujemy twierdzenie:

$$E\Pi ppNN\Pi pp \ [\forall pp \leftrightarrow \neg\neg\forall pp]$$

Zauważmy, że z każdym innym twierdzeniem można postąpić podobnie jak postąpiliśmy z twierdzeniem $T11$, to znaczy najpierw poprzedzić je kwantyfikatorem i zmienną „Πp”, następnie zastosować podstawienie $p/\Pi pp$ [$p/\forall pp$]. A więc z twierdzenia $T2$ możemy otrzymać $C\Pi ppCq\Pi pp$ [$\forall pp \to (q \to \forall pp)$], z $T20$ – $A\Pi ppN\Pi pp$ [$\forall pp \vee \neg\forall pp$] itd. Łatwo zauważyć, że zamiast podstawić $p/\Pi pp$, można podstawić w dowolne twierdzenie α za p jakiekolwiek wyrażenie sensowne β, a otrzymamy twierdzenie, jeżeli tylko $\alpha p/\beta$ jest podstawieniem prawidłowym. W ten sposób okazujemy, że rachunek zdań posiada następującą własność:

> Jeżeli wyrażenie α jest twierdzeniem rachunku zdań i $\alpha p/\beta$ jest prawidłowym podstawieniem, to posługując się przyjętymi regułami wnioskowania można otrzymać twierdzenie $\alpha p/\beta$.

(Mówimy tu wyraźnie o twierdzeniach, a więc o wyrażeniach zapisanych w obszarze twierdzeń, a nie w obszarach założeń.) Jak wiemy, zdania opisujące własności systemu nazywamy twierdzeniami metodologii tego systemu. Twierdzenia metodologii, które głoszą, że można posługując się regułami wnioskowania – udowodnić twierdzenia takiego, a takiego kształtu, nazywamy **regułami wtórnymi**. Jeżeli bowiem α jest twierdzeniem rachunku zdań, to każde prawidłowe podstawienie tego twierdzenia możemy przyjąć za twierdzenie, powołując się na udowodnione twierdzenie metodologiczne, tak jak na regułę wnioskowania. Udowodnioną wtórną regułę podstawiania, możemy uogólnić na przypadek podstawiania jednoczesnego za większą ilość zmiennych.

Przez **prawidłowe podstawienie za kilka zmiennych** $\alpha p_1/\beta_1 p_2/\beta_2 \ldots$ rozumieć będziemy wyrażenie otrzymane z α przez zastąpienie pewnych zmiennych kształtu p_1 przez wyrażenie β_1, zmiennych kształtu p_2 przez wyrażenie β_2 itd. – przy zachowaniu dwóch warunków: (1) wszystkie wyrażenia β_i są wyrażeniami sensownymi, (2) każda zmienna wolna w β_i pozostaje po podstawieniu zmienną wolną. Zmienne związane p_1, p_2... jeżeli w α występowały, pozostają bez zmiany.

> **Twierdzenie metodologiczne (reguła wtórna podstawiania za zmienne wolne w twierdzeniach):** Jeżeli α jest twierdzeniem i $\alpha p_1/\beta_1 p_2/\beta_2$... jest podstawieniem prawidłowym za kilka zmiennych, to można udowodnić twierdzenie $\alpha p_1/\beta_1 p_2/\beta_2$...[18].

Udowodniona reguła wtórna różni się od reguły podstawiania [П2] przyjętej przez nas za pierwotną tym, że odnosi się jedynie do twierdzeń, nie można jej stosować do konsekwencji założeń jak to czynimy z regułą pierwotną. Stosując regułę wtórną podstawiania, możemy otrzymać np. z twierdzenia $T17$ twierdzenie: $EArNrANrr$ $[r \vee \neg r \leftrightarrow \neg r \vee r]$, z $T21$ – $CN\Pi ppC\Pi ppNCqq$ $[\neg\forall pp \rightarrow (\forall pp \rightarrow \neg(q \rightarrow q))]$ itd. Czytelnik zechce dowieść tych twierdzeń, nie używając wtórnej reguły podstawiania.

2.4.2. Wyrażenia rozstrzygalne

O wyrażeniu sensownym α powiemy, że jest wyrażeniem rozstrzygalnym w pewnym obszarze (tzn. w obszarze pewnych założeń lub w obszarze twierdzeń), jeżeli bądź wyrażenie równokształtne z α, bądź zaprzeczenie wyraże-

[18] Zarówno w sformułowaniu reguły, jak i w poprzedzającym komentarzu występuje tylko metazmienna β bez indeksów, jednak jest jasne, że omawiana reguła jest ważna bez ograniczenia do podstawiania takiego samego wyrażenia za różne zmienne.

nia równokształtnego z α można otrzymać jako wyrażenie ważne w tym obszarze.

Inaczej mówiąc, jeżeli α jest rozstrzygalne przy założeniach to na pytanie „Czy tak lub nie" umiemy odpowiedzieć „tak" lub „nie".

Na przykład z dowodu twierdzenia *T*21 widzimy, że przy założeniu „*Np*" rozstrzygalne jest „*Cpq*", odpowiedź jest twierdząca. Z tego samego powodu wnosimy, że przy założeniach sprzecznych „*p*" i „*Np*" każde wyrażenie sensowne jest rozstrzygalne, gdyż podobnie jak dowiedliśmy „*q*", można dowieść dowolnego wyrażenia sensownego. W szczególności można dowieść „*Nq*", a więc przy założeniach sprzecznych mogą istnieć dwie sprzeczne odpowiedzi, zarówno „Tak", jak i „Nie".

Jak widać z definicji, wśród wyrażeń rozstrzygalnych możemy wyróżnić wyrażenia rozstrzygalne pozytywnie, tj. wyrażenia, które dają się udowodnić, i wyrażenia rozstrzygalne negatywnie, tj. takie, których zaprzeczenia dają się udowodnić.

Podstawowe znaczenie dla badań nad rachunkiem zdań posiada następujące

> **Twierdzenie metodologiczne:** Każde wyrażenie sensowne jest rozstrzygalne w obszarze, w którym rozstrzygalne są wszystkie jego zmienne wolne.

Przygotujemy się do dowodu tego twierdzenia. Nazwijmy krótko wyrażenia rozstrzygalne pozytywnie – wyrażeniami jedynkowymi, natomiast wyrażenia rozstrzygalne negatywnie – wyrażeniami zerowymi w danym obszarze. Nazwijmy też dla zwięzłości **własnością R** [warunek stwierdzający, że dane wyrażenie jest rozstrzygalne w każdym obszarze, w którym są rozstrzygalne jego zmienne wolne. Zauważmy, że gdy własność **R** zachodzi trywialnie dla dowolnej zmiennej[19]], gdyż zawiera jedną zmienną wolną i ta jest rozstrzygalna, to znaczy, że całe wyrażenie jest rozstrzygalne. Korzystając ze sformułowanego w paragrafie 1 pojęcia dziedziczności, możemy powiedzieć: własność **R** jest dziedziczna względem 1 reguły sensowności.

2.4.3. Macierz implikacji

Przypominam twierdzenia *T*2 *CpCqp*, *T*21 *CNpCpq* [$p \to (q \to p)$ i $\neg p \to (p \to q)$], udowodnimy *T*34.

[19]Tekst oryginalny jest w tym miejscu nieczytelny, w stopce strony mamy odwołanie do erraty, której, przynajmniej w egzemplarzu z biblioteki UMK, nie ma.

	$\overbrace{p}$	(zał. 1)
	$\overbrace{Nq}$	(zał. 2)
	$\overbrace{NNCpq}$	(zał. 3)
	Cpq	(wobec $T23$)
	$\underbrace{q}$	(oderwanie, sprzeczność z zał. 2)
	$\underbrace{NCpq}$	(reg. sprzeczności)
	$\underbrace{CNqNCpq}$	(reg. C1)
$T34$	$CpCNqNCpq$	(reg. C1)[20]

Weźmy pod uwagę obszar, w którym rozstrzygalne są dwa wyrażenia: α, β.

Mogą zajść cztery przypadki:

Przypadek 1) α jest jedynkowa, β jest również jedynkowa. $C\alpha\beta$ jest wtedy jedynkowe, bo możemy je udowodnić w rozważanym obszarze jak następuje:

β	(daje się udowodnić jako jedynkowe)
$C\beta C\alpha\beta$	(podstawienie w $T2$ $p/\beta q/\alpha$ na mocy wzmocnionej, wtórnej reguły podstawiania)
$C\alpha\beta$	(na mocy reguły odrywania)[21]

Przypadek 2) α jest jedynkowe, β zerowe. W rozważanym obszarze są wtedy ważne wyrażenia:

α

20

	$\overbrace{p}$	(zał. 1)
	$\overbrace{\neg q}$	(zał. 2)
	$\overbrace{\neg\neg(p \to q)}$	(zał. 3)
	$p \to q$	(wobec $T23$)
	$\underbrace{q}$	(oderwanie, sprzeczność z zał. 2)
	$\underbrace{\neg(p \to q)}$	(reg. sprzeczności)
	$\underbrace{\neg q \to \neg(p \to q)}$	(reg. C1)
$T34$	$p \to (\neg q \to \neg(p \to q))$	(reg. C1)

21

β	(daje się udowodnić jako jedynkowe)
$\beta \to (\alpha \to \beta)$	(podstawienie w $T2$ $p/\beta q/\alpha$ na mocy wzmocnionej, wtórnej reguły podstawiania)
$\alpha \to \beta$	(na mocy reguły odrywania)

$N\beta$
$C\alpha CN\beta NC\alpha\beta$ (podstawienie w $T34$)
$CN\beta NC\alpha\beta$ (odrywanie)
$NC\alpha\beta$ (odrywanie)[22]

A więc $C\alpha\beta$ jest zerowe.

Przypadek 3) α jest zerowe, β – jedynkowe i

Przypadek 4) α jest zerowe i β – zerowe rozpatrzymy jednocześnie. W obu przypadkach mamy

$N\alpha$
$CN\alpha C\alpha\beta$ (podstawienie w $T21$)
$C\alpha\beta$ (przez odrywanie)[23]

A więc:

Jeżeli α jedynkowe, β jedynkowe, to $C\alpha\beta$ jedynkowe;

Jeżeli α jedynkowe, β zerowe, to $C\alpha\beta$ zerowe;

Jeżeli α zerowe, β jedynkowe, to $C\alpha\beta$ jedynkowe;

Jeżeli α zerowe, β zerowe, to $C\alpha\beta$ jedynkowe.

Zapiszemy te wyniki w postaci tabeli następującej:

C	1	0
1	1	0
0	1	1

Tabelę tej postaci nazywamy macierzą funktora „*C*” (tabelą interpretacyjną, matrycą).

Udowodnionym został:

22 α
$\neg\beta$
$\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$ (podstawienie w $T34$)
$\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)$ (odrywanie)
$\neg(\alpha \to \beta)$ (odrywanie)

23 $\neg\alpha$
$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ (podstawienie w $T21$)
$\alpha \to \beta$ (przez odrywanie)

Lemat: W każdym obszarze – jeżeli α i β są rozstrzygalne, to $C\alpha\beta$ jest rozstrzygalne.

2.4.4. Macierze innych funktorów

Aby znaleźć macierze innych funktorów, udowodnimy dalsze twierdzenia rachunku zdań, i powołamy się na pewne wcześniej udowodnione.

	$\overbrace{Np}$	(zał. 1)
	$\quad\overbrace{NNKpq}$	(zał. 2)
	$\quad Kpq$	(wobec $T23$)
	$\quad\underbrace{p}$	(reg. K1)
	$\underbrace{NKpq}$	(reg. N)
$T35$	$CNpNKpq$	(reg. C1)[24]

Analogicznie można udowodnić $T36$

$T36$ $CNqNKpq$ $[\neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)]$

$\overbrace{Np}$	(zał. 1)
$\quad\overbrace{Nq}$	(zał. 2)
$\qquad\overbrace{NNApq}$	(zał. 3)
$\qquad Apq$	($T23$)
$\qquad Cpq$	(oderwanie od $T21$ wobec zał. 1)
$\qquad Cqq$	(podstawienie p/q w $T1$)
$\qquad\underbrace{q}$	(reg. A2)
$\quad\underbrace{NApq}$	(reg. N)

[24]

	$\overbrace{\neg p}$	(zał. 1)
	$\quad\overbrace{\neg\neg(p \wedge q)}$	(zał. 2)
	$\quad p \wedge q$	(wobec $T23$)
	$\quad\underbrace{p}$	(reg. K1)
	$\underbrace{\neg(p \wedge q)}$	(reg. N)
$T35$	$\neg p \rightarrow \neg(p \wedge q)$	(reg. C1)

	$\underbrace{CNqNApq}$	(reg. C1)
$T37$	$CNpCNqNApq$	(reg. C1)[25]

	$\overbrace{p}$	(zał. 1)
	$\overbrace{q}$	(zał. 2)
	Cqp	(oderwanie od $T2$ wobec zał. 1)
	Cpq	($T2$ $p/qq/p$ + oderwanie z zał. 2)
	$\underbrace{Epq}$	(reg. E1)
	$\underbrace{CqEpq}$	(reg. C1)
$T38$	$CpCqEpq$	(reg. C1)[26]

	$\overbrace{p}$	(zał. 1)
	$\overbrace{Nq}$	(zał. 2)
	$\overbrace{NNEpq}$	(zał. 3)
	Epq	($T23$ p/Epq oderwanie)

25

	$\overbrace{\neg p}$	(zał. 1)
	$\overbrace{\neg q}$	(zał. 2)
	$\overbrace{\neg\neg(p \vee q)}$	(zał. 3)
	$p \vee q$	($T23$)
	$p \rightarrow q$	(oderwanie od $T21$ wobec zał. 1)
	$q \rightarrow q$	(podstawienie p/q w $T1$)
	$\underbrace{q}$	(reg. A2)
	$\underbrace{\neg(p \vee q)}$	(reg. N)
	$\underbrace{\neg q \rightarrow \neg(p \vee q)}$	(reg. C1)
$T37$	$\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \vee q))$	(reg. C1)

26

	$\overbrace{p}$	(zał. 1)
	$\overbrace{q}$	(zał. 2)
	$q \rightarrow p$	(oderwanie od $T2$ wobec zał. 1)
	$p \rightarrow q$	($T2$ $p/qq/p$ + oderwanie z zał. 2)
	$\underbrace{p \leftrightarrow q}$	(reg. E1)
	$\underbrace{q \rightarrow (p \leftrightarrow q)}$	(reg. C1)
$T38$	$p \rightarrow (q \rightarrow (p \leftrightarrow q))$	(reg. C1)

	$\underbrace{q}$	(reg. E2)
	$\underbrace{NEpq}$	(reg. N)
	$\underbrace{CNqNEpq}$	(reg. C1)
$T39$	$CpCNqNEpq$	(reg. C1)[27]

Analogicznie dowodzimy $T40$:

$T40$ $CNpCqNEpq$ $[\neg p \to (q \to \neg(p \leftrightarrow q))]$

	$\overbrace{Np}$	(zał. 1)
	$\overbrace{Nq}$	(zał. 2)
	Cpq	($T21$)
	Cqp	($T21$ $p/qq/p$)
	$\underbrace{Epq}$	(reg. E1)
	$\underbrace{CNqEpq}$	(reg. C1)
$T41$	$CNpCNqEpq$	(reg. C1)[28]

27

	$\overbrace{p}$	(zał. 1)
	$\overbrace{\neg q}$	(zał. 2)
	$\overbrace{\neg\neg(p \leftrightarrow q)}$	(zał. 3)
	$p \leftrightarrow q$	($T23$ $p/p \leftrightarrow q$ oderwanie)
	$\underbrace{q}$	(reg. E2)
	$\underbrace{\neg(p \leftrightarrow q)}$	(reg. N)
	$\underbrace{\neg q \to \neg(p \leftrightarrow q)}$	(reg. C1)
$T39$	$p \to (\neg q \to \neg(p \leftrightarrow q))$	(reg. C1)

28

	$\overbrace{\neg p}$	(zał. 1)
	$\overbrace{\neg q}$	(zał. 2)
	$p \to q$	($T21$)
	$q \to p$	($T21$ $p/qq/p$)
	$\underbrace{p \leftrightarrow q}$	(reg. E1)
	$\underbrace{\neg q \to (p \leftrightarrow q)}$	(reg. C1)
$T41$	$\neg p \to (\neg q \to (p \leftrightarrow q))$	(reg. C1)

Przypomnijmy twierdzenia: $T5$ $CpApq$, $T6$ $CpAqp$, $T7$ $CpCqKpq$ [$p \to p \vee q$, $p \to q \vee p$, $p \to (q \to p \wedge q)$]. Opierając się na tych twierdzeniach, możemy okazać, że jeżeli rozstrzygalne są α i β to rozstrzygalne są: $K\alpha\beta, A\alpha\beta, E\alpha\beta$, przy czym to ostatnie wyrażenie jest jedynkowe lub zerowe w zależności od tego czy α i β są jedynkowe czy zerowe. Jeżeli rozważamy cztery przypadki: 1) α i β jedynkowe, 2) α jedynkowe, β zerowe, 3) α zerowe, β jedynkowe, 4) α i β zerowe, to wyniki możemy ująć w postaci macierzy, podobnie, jak to uczyniliśmy dla implikacji.

K	1 0	*A*	1 0	*E*	1 0
1	1 0	1	1 1	1	1 0
0	0 0	0	1 0	0	0 1

A więc np. zero znajdujące się w drugiej kolumnie pierwszego wiersza macierzy dla E wskazuje, że przy α jedynkowym i β zerowym, $E\alpha\beta$ jest zerowe. Istotnie w obszarze, w którym α jest jedynkowe i β zerowe, możemy otrzymać wyrażenia: α, $N\beta$ i zastosować dwukrotnie odrywanie od $C\alpha CN\beta NE\alpha\beta$ [$\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \leftrightarrow \beta))$] będącego podstawieniem $T39$, a otrzymujemy $NE\alpha\beta$ [$\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$]. Dla negacji macierz ma postać:

N	
1	0
0	1

Wystarczy bowiem zbadać dwa przypadki. Jeżeli α jest jedynkowe, tzn. mamy w [danym] obszarze α, to stosując odpowiednie podstawienie w $T10$ otrzymujemy $C\alpha NN\alpha$ [$\alpha \to \neg\neg\alpha$], a więc i $NN\alpha$ [$\neg\neg\alpha$], czyli $N\alpha$ jest zerowe. Jeżeli α jest zerowe, to mamy $N\alpha$, czyli $N\alpha$ jest jedynkowe. Więc udowodniliśmy

> **Lemat:** Jeżeli α i β są rozstrzygalne w pewnym obszarze, to w tym obszarze rozstrzygalne są: $K\alpha\beta, A\alpha\beta, E\alpha\beta, N\alpha$.

Weźmy teraz α i β posiadające własność **R** tzn. rozstrzygalne w każdym obszarze, w którym są rozstrzygalne ich zmienne wolne, i utwórzmy z nich wyrażenia sensowne γ na mocy 3-ej reguły sensowności: $C\alpha\beta, K\alpha\beta$, $A\alpha\beta$, $E\alpha\beta$. Twierdzę, że otrzymane nowe wyrażenia sensowne posiadają własność **R**. Niech będzie dany obszar, w którym rozstrzygalne są wszystkie zmienne wolne wyrażenia γ. Zmienne wolne wyrażeń α i β są zmiennymi wolnymi wyrażenia γ, rozstrzygalne są zatem α i β. Udowodnione lematy 1 i 2 mówią nam, że γ są również rozstrzygalne. A więc wyrażenia [te] posiadają własność **R**. Podobnie okazujemy, że jeżeli α posiada własność **R**, to posiada ją również wyrażenie $N\alpha$ na mocy 2-ej reguły sensowności. W ten sposób udowodniliśmy: własność **R** jest dziedziczna względem reguł sensowności 2 i 3.

2.4.5. Rozstrzygalność wyrażeń z kwantyfikatorem ogólnym

$$\begin{array}{lll}
 & \overbrace{CpNq} & \text{(zał. 1)} \\
 & \quad \overbrace{q} & \text{(zał. 2)} \\
 & \quad\quad \overbrace{NNp} & \text{(zał. 3)} \\
 & \quad\quad p & \text{(wobec } T9\text{)} \\
 & \quad\quad \underbrace{Nq} & \text{(reguła odrywania)} \\
 & \quad \underbrace{Np} & \text{(reg. N)} \\
 & \underbrace{CqNp} & \text{(reg. C1)} \\
T42 & CCpNqCqNp & \text{(reg. C1)}^{29}
\end{array}$$

Niech α posiada własność **R**. Okażę, że tę samą własność posiada wyrażenie $\Pi p\alpha$. Weźmy pod uwagę dowolny obszar, w którym są rozstrzygalne wszystkie zmienne [wolne] wyrażenia $\Pi p\alpha$ [$\forall p\alpha$], tzn. ważne są w obszarze wyrażenia mające kształt tych zmiennych lub ich zaprzeczeń. Połączymy te wyrażenia znakami koniunkcji – otrzymamy wyrażenie, które nazwiemy β. Jeżeli np. zmienne q, r były rozstrzygnięte pozytywnie, a zmienna s, negatywnie, to wyrażeniem β jest $KqKrNs$ [$q \wedge (r \wedge \neg s)$]. β będzie też ważna w obszarze reguły tworzenia koniunkcji. Z uwagi na regułę odrywania – na to, aby $\Pi p\alpha$ [$\forall p\alpha$] było rozstrzygalne w rozważanym obszarze, wystarczy

[29]
$$\begin{array}{lll}
 & \overbrace{p \to \neg q} & \text{(zał. 1)} \\
 & \quad \overbrace{q} & \text{(zał. 2)} \\
 & \quad\quad \overbrace{\neg\neg p} & \text{(zał. 3)} \\
 & \quad\quad p & \text{(wobec } T9\text{)} \\
 & \quad\quad \underbrace{\neg q} & \text{(reguła odrywania)} \\
 & \quad \underbrace{\neg p} & \text{(reg. N)} \\
 & \underbrace{q \to \neg p} & \text{(reg. C1)} \\
T42 & (p \to \neg q) \to (q \to \neg p) & \text{(reg. C1)}
\end{array}$$

mieć jedno z dwóch twierdzeń: $C\beta\Pi p\alpha$ [$\beta \to \forall p\alpha$] lub $C\beta N\Pi p\alpha$ [$\beta \to \neg\forall p\alpha$]. Wystarczy więc, by $\Pi p\alpha$ [$\forall p\alpha$] było rozstrzygalne w obszarze założenia β. Jest to obszar, w którym rozstrzygalne są wszystkie zmienne wolne wyrażenia α z wyjątkiem zmiennej p i założenie β nie zawiera zmiennej kształtu p. Okażemy, że $\Pi p\alpha$ [$\forall p\alpha$] jest istotnie rozstrzygalne.

Utworzymy dwa nowe obszary – pierwszy w ten sposób, że dodatkowo założymy p, drugi (po zamknięciu pierwszego) przez założenie dodatkowe Np [$\neg p$]. W każdym z tych obszarów rozstrzygalne są wszystkie zmienne wolne w α, a więc i samo α jest rozstrzygalne, czyli można otrzymać α lub $N\alpha$ [$\neg\alpha$]. Na mocy reguły C1 możemy wobec tego otrzymać w obszarze założenia β jedno z dwóch wyrażeń: $Cp\alpha$ [$p \to \alpha$] lub $CpN\alpha$ [$p \to \neg\alpha$], a także jedno z dwóch wyrażeń: $CNp\alpha$ [$\neg p \to \alpha$] lub $CNpN\alpha$ [$\neg p \to \neg\alpha$]. Zbadamy trzy przypadki: 1) otrzymujemy zarówno $Cp\alpha$ [$p \to \alpha$], jak i $CNp\alpha$ [$\neg p \to \alpha$], 2) otrzymujemy $CpN\alpha$ [$p \to \neg\alpha$] , 3) otrzymujemy $CNpN\alpha$ [$\neg p \to \neg\alpha$].

Prowadzimy wtedy dowody według następujących wzorów:

Przypadek 1) w obszarze założenia β mamy

$Cp\alpha$	
$CNp\alpha$	
α	(na mocy reguły dylematu A2 wobec twierdzenia $T20$)
$\Pi p\alpha$	(reguła generalizacji)[30]

a więc $\Pi p\alpha$ [$\forall p\alpha$] jest rozstrzygalne jedynkowo.

Przypadek 2) mamy

$CpN\alpha$	
$\quad NN\Pi p\alpha$	(założenie)
$\quad \Pi p\alpha$	(wobec $T23$)
$\quad \alpha$	(podstawienie p/p)
$\quad Np$	($T42$ q/α dwukrotne odrywanie)
$\quad \Pi pNp$	(reg. generalizacji)
$\quad NNp$	(podstawienie p/Np)

[30]

$p \to \alpha$	
$\neg p \to \alpha$	
α	(na mocy reguły dylematu A2 wobec twierdzenia $T20$)
$\forall p\alpha$	(reguła generalizacji)

$N\Pi p\alpha$ (reg. N)[31]

podobnie w przypadku 3) otrzymujemy $N\Pi p\alpha$ [$\neg\forall p\alpha$], a więc w obu przypadkach 2) i 3) $\Pi p\alpha$ [$\forall p\alpha$] jest rozstrzygalne negatywnie, tj. zerowe.

A więc jeżeli α posiada własność **R**, to $\Pi p\alpha$ [$\forall p\alpha$] posiada również własność **R**. Podobne rozważania można przeprowadzić dla kwantyfikatora szczegółowego, dochodzimy do następującego wniosku:

Własność **R** jest własnością dziedziczną względem 4-tej reguły sensowności.

2.4.6. Rozstrzygalność wyrażeń z kwantyfikatorem szczegółowym

Odpowiedni dowód dla wyrażenia $\Sigma p\alpha$ [$\exists p\alpha$] prowadzimy podobnie jak dla wyrażenia zaczynającego się od kwantyfikatora ogólnego, rozpatrujemy jednak trzy przypadki nieco odmienne:

1) zarówno przy dodatkowym założeniu „p, jak i „Np” [$\neg p$] wyrażenie α jest rozstrzygalne negatywnie, tzn. jest zerowe,

2) przy dodatkowym założeniu „p” wyrażenie α jest jedynkowe,

3) przy dodatkowym założeniu „Np” [$\neg p$] wyrażenie α jest jedynkowe.

W pierwszym przypadku $\Sigma p\alpha$ [$\exists p\alpha$] jest zerowe, w drugim i trzecim – jedynkowe. Jeżeli czytelnik zechce ten dowód zrekonstruować, może skorzystać z następujących schematów dowodu w każdym z przypadków:

1) w obszarze założenia mamy:

$CpN\alpha$

$CNpN\alpha$

$N\alpha$ (reg. dylematu wobec $T20$)

[31] $p \to \neg\alpha$

$\overbrace{\neg\neg\forall p\alpha}$ (założenie)

$\forall p\alpha$ (wobec $T23$)

α (podstawienie p/p)

$\neg p$ ($T42$ q/α dwukrotne odrywanie)

$\forall p\neg p$ (reg. generalizacji)

$\underbrace{\neg\neg p}$ (podstawienie $p/\neg p$)

$\neg\forall p\alpha$ (reg. N)

$C\alpha\Pi pp$ (*T*21)
$\Pi pC\alpha\Pi pp$ (generalizacja)
  $NN\Sigma p\alpha$ (założenie)
  $\Sigma p\alpha$ (*T*23)
  $\Sigma p\Pi pp$ (reg. rozdziału Σ2)
  Πpp (reg. opuszczania Σ3)
$N\Sigma p\alpha$ (reg. sprzeczności N wobec *T*27)[32]

2) w obszarze założenia mamy:

$Cp\alpha$
$\Pi pCp\alpha$ (reg. generalizacji)
$\Sigma p\alpha$ (reg. rozdziału Σ2 wobec *T*28)[33]

3) Udowodnimy pomocnicze twierdzenie *T*43:

*T*43 ΣpNp [$\exists p\neg p$] (reguła Σ1 wobec *T*27, które jest wynikiem podstawienia $p/\Pi pp$ [$p/\forall pp$] w wyrażeniu Np [$\neg p$])

W obszarze założenia mamy:

$CNp\alpha$
$\Pi pCNp\alpha$ (generalizacja)
$\Sigma p\alpha$ (reg. rozdziału Σ2 wobec *T*43)[34]

---

32 $p \to \neg\alpha$
$\neg p \to \neg\alpha$
$\neg\alpha$ (reg. dylematu wobec *T*20)
$\alpha \to \forall pp$ (*T*21)
$\forall p(\alpha \to \forall pp)$ (generalizacja)
  $\neg\neg\exists p\alpha$ (założenie)
  $\exists p\alpha$ (*T*23)
  $\exists p\forall pp$ (reg. rozdziału Σ2)
  $\forall pp$ (reg. opuszczania Σ3)
$\neg\exists p\alpha$ (reg. sprzeczności N wobec *T*27)

33 $p \to \alpha$
$\forall p(p \to \alpha)$ (reg. generalizacji)
$\exists p\alpha$ (reg. rozdziału Σ2 wobec *T*28)

34 $\neg p \to \alpha$
$\forall p(\neg p \to \alpha)$ (generalizacja)
$\exists p\alpha$ (reg. rozdziału Σ2 wobec *T*43)

2.4.7. Zupełność rachunku zdań

Okazaliśmy, że własność **R** jest dziedziczna względem wszystkich reguł sensowności, to znaczy, że tworząc dłuższe wyrażenia sensowne otrzymać możemy tylko wyrażenia posiadające tę własność. Własność **R** przysługuje zatem wszystkim bez wyjątku wyrażeniom sensownym rachunku zdań. Wypowiadamy:

> **Twierdzenie metodologiczne:** Wszelkie wyrażenia sensowne rachunku zdań są rozstrzygalne w każdym obszarze, w którym rozstrzygalne są wszystkie zmienne wolne wyrażenia.

Zastosujemy to twierdzenie do wyrażeń sensownych, które nie zawierają żadnej zmiennej wolnej, jak np. „$\Pi pCpNp$” [$\forall p(p \to \neg p)$], „$\Pi p\Pi qCpq$” [$\forall p\forall q (p \to q)$]. Ponieważ wyrażenia te nie posiadają żadnej zmiennej wolnej, więc o każdym obszarze możemy powiedzieć, że są w nim rozstrzygalne wszystkie zmienne wolne tych wyrażeń, w szczególności możemy to powiedzieć o obszarze twierdzeń. Otrzymujemy podstawowe twierdzenie, które nazywamy **twierdzeniem o zupełności rachunku zdań** (w jednym ze znaczeń, które można nadać wyrazowi ”zupełność„):

> Jeżeli α jest wyrażeniem sensownym rachunku zdań nie zawierającym zmiennych wolnych, to można udowodnić jedno z następujących twierdzeń: twierdzenie α lub twierdzenie $N\alpha$ [$\neg\alpha$].

2.4.8. Obliczanie wartości wyrażeń

[Rozważmy] pewien obszar, w którym są ważne wyrażenia „p” i „q”. O tym, że w tym obszarze udowodnić można wyrażenia „$CNqNp$” [$\neg q \to \neg p$] przekonamy się, korzystając z macierzy implikacji i negacji. Istotnie w obszarze tym obie zmienne „p” i „q” są rozstrzygalne pozytywnie, a więc jedynkowe. Wobec tego wyrażenia „Np” [$\neg p$] i „Nq” [$\neg q$] są wyrażeniami zerowymi – zgodnie z macierzą negacji. Macierz implikacji wskazuje nam, że zbudowana z nich implikacja „$CNqNp$” [$\neg q \to \neg p$] jest wyrażeniem jedynkowym, tzn., że daje się w rozważanym obszarze udowodnić.

Rozumowanie to możemy przeprowadzić dla innego wyrażenia, które otrzymaliśmy z wyrażenia badanego przez zastąpienie zmiennych „p” i „q” jakimkolwiek wyrażeniem jedynkowym.

Niech znak „1” oznacza nam dowiedlne wyrażenie jedynkowe, znak „0” – wyrażenie zerowe, znak równości $\alpha = \beta$ niech znaczy, że oba wyrażenia

α i β są jednocześnie jedynkowe lub jednocześnie zerowe, tzn. równe co do wartości. Na mocy definicji macierzy możemy obliczyć:

$$CN1N1 = C00 = 1\ [\neg 1 \rightarrow \neg 1 = 0 \rightarrow 0 = 1].$$

W tak skrócony sposób okazaliśmy, że jedynkowym jest wyrażenie „*CNqNp*" [$\neg q \rightarrow \neg p$] w obszarach, w których „*p*" i „*q*" są jedynkowe.

Podobnie możemy obliczyć:

$$C\{C00\}\{K10\} = C10 = 0\ [(0 \rightarrow 0) \rightarrow 1 \wedge 0 = 1 \rightarrow 0 = 0]$$

$$A\{C10\}\{C01\} = A01 = 1\ [(1 \rightarrow 0) \vee (0 \rightarrow 1) = 0 \vee 1 = 1]$$

I tak dalej. Śledząc dowód rozstrzygalności wyrażeń z kwantyfikatorami, możemy ustalić podobny sposób rachunkowego ich rozstrzygania. Mianowicie wyrażenie $\Pi p\alpha$ [$\forall p\alpha$] jest rozstrzygalne pozytywnie, czyli jedynkowo, w każdym obszarze D posiadającym tę własność, że α jest jedynkowe w obu obszarach otrzymanych z obszaru D przez dodatkowe założenia: założenie „*p*" i założenie „*Np*" [$\neg p$]. Oznaczmy przez $\alpha p/1$ wyrażenie otrzymane z α przez podstawienie 1 za wolne zmienne „*p*", przez [$\alpha p/0$] wyrażenie otrzymane z α przez podstawienie 0 za wolne zmienne „*p*". Wtedy wystarczy [, by] jednocześnie $\alpha p/1$ i $\alpha p/0$ były jedynkowe, na to, by $\Pi p\alpha$ [$\forall p\alpha$] były jedynkowe. Podobnie wystarczy, by bądź $\alpha p/1$, bądź $\alpha p/0$ były zerowe aby $\Pi p\alpha$ [$\forall p\alpha$] było też zerowe. Porównywając otrzymane wyniki z macierzami koniunkcji, możemy zapisać wzór ogólny na wartość wyrażenia z kwantyfikatorem ogólnym:

$$\Pi p\alpha = K\alpha p/1\alpha p/0\ [\forall p\alpha = \alpha p/1 \wedge \alpha p/0]$$

Podobnie możemy wprowadzić wzór na wartość wyrażenia z kwantyfikatorem szczegółowym:

$$\Sigma p\alpha = A\alpha p/1\alpha p/0\ [\exists p\alpha = \alpha p/1 \vee \alpha p/0]$$

Przykłady:

$$\Pi pC1p = K\{C11\}\{C10\} = K10 = 0$$
$$[\forall p(1 \rightarrow p) = (1 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 0) = 1 \wedge 0 = 0]$$

$$C0\Pi pp = C0K10 = C00 = 1\ [0 \rightarrow \forall pp = 0 \rightarrow 1 \wedge 0 = 0 \rightarrow 0 = 1]$$

$$\Sigma pC1p = A\{C11\}\{C10\} = A10 = 1$$
$$[\exists p(1 \rightarrow p) = (1 \rightarrow 1) \vee (1 \rightarrow 0) = 1 \vee 0 = 1]$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę jakieś wyrażenie sensowne nie zawierające żadnej zmiennej wolnej, np. wyrażenie „$N\Pi pCpNp$” [$\neg\forall p(p \to \neg p)$], to wyrażenie takie otrzymuje w rachunku jedną określoną wartość, w tym przykładzie:

$$N\Pi pCpNp = NK\{C1N1\}\{C0N0\} = NK\{C10\}\{C01\} = NK01 = N0 = 1$$
$$[\neg\forall p(p \to \neg p) = \neg((1 \to \neg 1) \wedge (0 \to \neg 0)) =$$
$$\neg((1 \to 0) \wedge (0 \to 1)) = \neg(0 \wedge 1) = \neg 0 = 1]$$

Jeżeli wynikiem obliczania jest jeden, to wyrażenie to daje się udowodnić jako twierdzenie.

Podobnie można obliczyć:

$$\Pi p\Pi qCpKpq = \Pi pK\{CpKp1\}\{CpKp0\} =$$
$$KK\{C1K11\}\{C1K10\}K\{C0K01\}\{C0K00\} = KK10K11 = K01 = 0$$
$$[\forall p\forall q(p \to p \wedge q) = \forall p((p \to p \wedge 1) \wedge (p \to p \wedge 0)) =$$
$$((1 \to 1 \wedge 1) \wedge (1 \to 1 \wedge 0)) \wedge ((0 \to 0 \wedge 1) \wedge (0 \to 0 \wedge 0)) =$$
$$(1 \wedge 0) \wedge (1 \wedge 1) = 0 \wedge 1 = 0]$$

także:

$$\Pi pC\Pi qCqpp = \Pi pCK\{C1p\}\{C0p\}p =$$
$$K\{CK\{C11\}\{C01\}1\}\{CK\{C10\}\{C00\}0\} = 1$$
$$[\forall p(\forall q(q \to p) \to p) = \forall p((1 \to p) \wedge (0 \to p) \to p) =$$
$$((1 \to 1) \wedge (0 \to 1) \to 1) \wedge ((1 \to 0) \wedge (0 \to 0) \to 0) = 1]$$

Weźmy teraz pod uwagę dowolne wyrażenie sensowne, które może zawierać pewne zmienne wolne i otrzymuje wartość 1 przy wszelkich zero-jedynkowych podstawieniach za te zmienne, takim jest np. wyrażenie „$CCpqCNqNp$” [$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$], co można sprawdzić. Wyrażenie takie można poprzedzić tyloma kwantyfikatorami ogólnymi, że otrzymane wyrażenie „$\Pi p\Pi qCCpqCNqNp$” [$\forall p\forall q((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$] nie będzie już zawierało zmiennych wolnych, wartością tego wyrażenia będzie 1, a więc będzie ono twierdzeniem. Stosując regułę podstawiania, możemy opuścić początkowe kwantyfikatory i otrzymamy w tym przykładzie „$CCpqCNqNp$” [$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$] – jako twierdzenie.

Mamy więc

> **Twierdzenie metodologiczne:** Jeżeli przy wszelkich podstawieniach zer i jedynek za zmienne wolne w wyrażeniu α otrzymujemy wartość 1, to wyrażenie α daje się udowodnić jako twierdzenie systemu[35].

[35] Jest to twierdzenie o pełności.

2.5. Niesprzeczność rachunku zdań

Twierdzeniem o niesprzeczności rachunku zdań nazywamy (w jednym z używanych znaczeń wyrazu ”niesprzeczność„) następujące

> **Twierdzenie metodologiczne:** Jeżeli α jest twierdzeniem rachunku zdań, to stosując w dowolny sposób przyjęte reguły wnioskowania, nie otrzymamy twierdzenia postaci $N\alpha$ [$\neg\alpha$].

Korzystając z poznanego sposobu obliczania wartości wyrażeń przy danych podstawieniach wartości 1 i 0 za zmienne, możemy sformułować następującą własność, którą nazwiemy własnością W wyrażenia α: Wyrażenia α otrzymują wartość 1 przy wszelkich takich zero-jedynkowych podstawieniach, które wartość 1 [nadają] wszystkim założeniom ważnym w obszarze, do którego α należy. Własność ta przysługuje każdemu wyrażeniu, które można dołączyć do dowodu, aby to wykazać, wystarczy przekonać się, że własność ta jest dziedziczna względem reguł wnioskowania, tzn. nie możemy dołączyć [do] dowodu pierwszego wyrażenia nieposiadającego własności W. Inaczej mówiąc, jeżeli tylko wszystkie wcześniejsze dołączone wyrażenia i przesłanki posiadają własność W, to i [kolejne dołączone] wyrażenia tę samą własność posiadają. Dowód dziedziczności przeprowadzimy przykładowo dla dwóch reguł wnioskowania.

1) Dziedziczność względem reguły odrywania implikacyjnego C2:

Dowód: W dowodzie mamy ważne wyrażenia kształtu α, $C\alpha\beta$ [$\alpha \to \beta$], dołączamy β.
Weźmy dowolne podstawienie zer i jedynek za zmienne, byle takie, że wszystkie ważne założenia otrzymują wartość 1. α i $C\alpha\beta$ otrzymują również wartość 1, gdyż posiadają własność jako wyrażenia wcześniej do dowodu dołączone. Wobec tego β również musi mieć wartość 1, bo gdyby miało wartość 0, to $C\alpha\beta$ miałoby wartość $C10 = 0$. ■

2) Dziedziczność względem reguły sprzeczności N:

Dowód: Dowód dziedziczności względem reguły sprzeczności N jest nieco bardziej skomplikowany. Skoro w dowodzie ważne są dwa wyrażenia [sprzeczne] posiadające własność W, to nie istnieje żadne podstawienie, które dałoby wartość jeden jednocześnie wszystkim ważnym założeniom. Gdyby bowiem takie podstawienie istniało, musiałyby oba sprzeczne wyrażenia mieć wartość 1, co jest niemożliwe z uwagi na budowę macierzy negacji. Stosujemy regułę sprzeczności, przeto ostatnie ważne założenie zaczyna się od negacji, powiemy, że ma postać $N\alpha$ $[\neg\alpha]$. Reguła sprzeczności pozwala nam zamknąć obszar tego założenia i dołączyć α. Weźmy pod uwagę dowolne zero-jedynkowe podstawienie, które nadaje wartość 1 wszystkim założeniom ważnym po zamknięciu obszaru założenia $N\alpha$. Wiemy, że podstawienie to nie daje wartości 1 założeniu $N\alpha$, wobec tego musi nadać wartość 1 wyrażeniu α, tj. wyrażeniu dołączonemu do dowodu. A więc wyrażenie [to] posiada własność W i własność [ta] jest dziedziczna względem reguły sprzeczności. ■

W podobny sposób dowodzimy, że własność W jest dziedziczna względem wszystkich reguł wnioskowania, a więc przysługuje wszystkim wyrażeniom dołączanym do dowodów, oczywiście nie wyłączając twierdzeń. Twierdzenia są zapisane w obszarze, w którym nie są ważne żadne założenia, więc mają wartość 1 przy wszelkich podstawieniach zero-jedynkowych i nie może się zdażyć, by jedno z twierdzeń było zaprzeczeniem drugiego, bo wtedy jedno z nich musiałoby przybrać wartość 0 przy pewnym podstawieniu. Widzimy, że sprawdzenie za pomocą macierzy zero-jedynkowej zawsze daje odpowiedź na pytanie, czy pewne wyrażenie α daje się udowodnić jako twierdzenie rachunku zdań. Odpowiedź jest twierdząca wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie to otrzymuje wartość 1 przy wszelkich podstawieniach jedynek i zer za zmienne wolne.

Wartość 1 i 0 możemy rozumieć jako prawdziwość i fałszywość zdania. Ponieważ mamy do czynienia z dwoma wartościami, więc mówimy, że przedstawiony tutaj system jest **dwuwartościowym rachunkiem zdań**. Kto przyjmuje reguły wnioskowania takie, jak tu podaliśmy, ten używa dwuwartościowego rachunku zdań. Jeżeli chcemy wykazać, że jakieś wyrażenie sensowne w matematyce, nie może być twierdzeniem, np. $x + y = x - y$, to wystarczy podać chociaż jeden kontrprzykład, to znaczy taki układ liczb, dla którego to domniemane twierdzenie jest fałszywe, np. $2 - 1 = 3$, zatem różne od $2 - 1 = 1$.

Podobnie w rachunku zdań. Aby wykazać, że „*CCpqCNpNq*” $[(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)]$ nie jest twierdzeniem rachunku zdań, wystarczy znaleźć dwa zdania, które podstawione za „*p*”, „*q*” dają zdanie fałszywe. Wystarczy przyjąć za „*p*” jakiekolwiek zdanie fałszywe, np. „*Śnieg jest czarny*”, „$2\times2 = 5$”, za „*q*” jakiekolwiek zdanie prawdziwe: „*Śnieg jest biały*”, „$2 \times 2 = 4$”, a otrzymamy jako wynik podstawiania zdanie fałszywe mianowicie okres warunkowy, którego poprzednikiem jest: „*Jeżeli śnieg jest czarny, to śnieg jest biały*” – a więc zdanie prawdziwe, a następnikiem zdanie fałszywe: „*Jeżeli śnieg nie jest czarny, to śnieg nie jest biały*”.

Jeżeli przy sprawdzaniu zero-jedynkowym wyrażenie otrzymuje wartość zero przy pewnym podstawieniu za zmienne, to nie jest ogólnie prawdziwe. Wystarczy mianowicie podstawić zamiast jedynki dowolne zdanie prawdziwe, np. *„Śnieg jest biały”*, zamiast zera – dowolne zdanie fałszywe, chociażby: *„Śnieg jest czarny”*.

2.6. Dalsze twierdzenia rachunku zdań. Zastosowanie twierdzeń rachunku zdań

W dowodach matematycznych w algebrze, czy w geometrii najczęściej wnioskujemy zgodnie z podanymi tu regułami wnioskowania – oczywiście należy przy tym uwzględnić inne kształty wyrażeń sensownych. Tym niemniej często się zdarza, że korzystamy z pewnych twierdzeń rachunku zdań. A więc takie praktyczne zastosowanie znaleźć mogą znane nam już twierdzenia:

$T11$ *EpNNp* $[p \leftrightarrow \neg\neg p]$ (prawo podwójnego przeczenia),

$T20$ *ApNp* $[p \vee \neg p]$ (prawo wyłączonego środka),

$T21$ *CNpCpq* $[\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)]$,

$T42$ *CCpNqCqNp* $[(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)]$ (jedna z postaci prawa kontrapozycji).

Dalsze twierdzenia znajdujące zastosowanie podam bez dowodu, gdyż dowód można zastąpić sprawdzeniem zero-jedynkowym. Najczęściej stosowane najpowszechniej znane jest prawo kontrapozycji:

$T44$ *ECpqCNqNp* $[(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)]$

Należy zwrócić uwagę na to, że w następniku $T44$ „q” występuje wcześniej, a zmienna „p” później. Przestawienie tych zmiennych prowadzi do błędnego pojmowania kontrapozycji.

$T45$ *CCpqCCqrCpr* $[(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))]$ (prawo sylogizmu).

Różne sformułowania prawa sprzeczności:

$T46$ *CCNppp* $[(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p]$

$T47$ *CCpqCCpNqNp* $[(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)]$

$T48$ $CCNpqCCNpNqp$ $[(\neg p \to q) \to ((\neg p \to \neg q) \to p)]$

Specjalne znaczenie mają twierdzenia, które ustalają równoważność pomiędzy funkcją a wyrażeniem, które nie zawiera znaku tej funkcji. Równoważność taka może służyć za definicję, np. implikacji za pomocą „N” i „A” ($T49$) lub za pomocą znaków „N” i „K” ($T50$)

$T49$ $ECpqANpq$ $[p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q]$

$T50$ $ECpqNKpNq$ $[p \to q \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)]$

$T51$ $EEpqAKpqKNpNq$ $[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q]$

$T52$ $EKpqNCpNq$ $[p \wedge q \leftrightarrow \neg(p \to \neg q)]$

$T53$ $EApqCNpq$ $[p \vee q \leftrightarrow \neg p \to q]$

Czytelnik zechce porównać twierdzenia $T49$–$T53$ z macierzami. Jeżeli twierdzenie ma postać $E\varphi\psi$ $[\varphi \leftrightarrow \psi]$, to przy każdym podstawieniu zero-jedynkowym, oba wyrażenia φ i ψ muszą mieć równe wartości. Następujące dwa twierdzenia noszą nazwę praw dwoistości de Morgana:

$T54$ $ENKpqANpNq$ $[\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q]$

$T55$ $ENApqKNpNq$ $[\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q]$

Ciekawe są twierdzenia $T56$–$T58$, które na pewne podobieństwa wskazują pomiędzy alternatywą i koniunkcją z jednej strony a dodawaniem i mnożeniem – z drugiej strony. Równoważność odpowiada wtedy równości.

$T56$ $EApAqrAApqr$ $[p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r]$ (prawo łączności alternatywy)

$T57$ $EKpKqrKKpqr$ $[p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r]$ (prawo łączności koniunkcji)

$T58$ $EKpAqrAKpqKpr$ $[p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ (prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy)

Odpowiednikami arytmetycznymi tych praw są:

$$x + (y + z) = (x + y) + z, x(yz) = (xy)z, x(y + z) = xy + xz$$

Podobnie prawa przemienności $T17, T18$ mają swoje odpowiedniki w arytmetyce. Jednak nie wszystkie twierdzenia rachunku zdań posiadają prawdziwe odpowiedniki przy tej interpretacji, np. weźmy prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji:

$T59$ *EApKqrKApqApr* $[p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

Jego odpowiednik arytmetyczny jest fałszywy w ogólnym przypadku.

2.7. Uwagi historyczne i porównawcze

2.7.1. Logika zdań w starożytności i w średniowieczu

W historii logiki interesujemy się przede wszystkim tym, kto i jak pewne prawa logiczne formułował, opisywał. W szczególności ciekawym jest ustalić, kto pierwszy opisał pewne prawo. „Ojciec logiki" – Arystoteles nie zajmował się logiką zdań, dopiero późniejsi od niego stoicy, zwłaszcza Chryzyp (wiek III przed Chr.). Używali oni spójników międzyzdaniowych w znaczeniu zasadniczo zgodnym z tym, w jakim my ich używamy. Jedynie zamiast alternatywy posługiwali się dysjunkcją wyłączającą: „*albo p albo q*", która jest fałszywa w przypadku, w którym zarówno p jak i q są prawdziwe. Dysjunkcja wyłączająca jest zaprzeczeniem równoważności. Stoicy umieli określać wartość (prawdę lub fałszywość) funkcji zdaniowej w zależności od wartości argumentów i to w sposób pokrywający się z naszą definicją za pomocą dwuwartościowej macierzy. Odpowiednia funkcja pochodzi od Filona z Megary, który może być uważany za twórcę logiki dwuwartościowej. Dwuwartościowa logika spotykała się ze sprzeciwem i była tematem ożywionych sporów już w starożytności.

W wiekach średnich logikę zdań uprawiali scholastycy, znajdujemy tu również logikę zdań dwuwartościową. Np. Albert Wielki (wiek XIII) wypowiada twierdzenie, które w naszym znakowaniu należy zapisać jako: *CKpNpq* $[p \wedge \neg p \rightarrow q]$ (por. $T21$), i podaje przykład: „Sokrates jest i Sokrates nie jest, a więc kij stoi w kącie". Przykład ten jest widocznie dany w tym celu, aby wykazać, że związek rzeczowy pomiędzy poprzednikiem a następnikiem nie jest koniecznym warunkiem prawidłowości implikacji.

2.7.2. Matematyczna logika zdań

Pierwszym, który ujął logikę zdań w postać symboliczną, rachunkową, był Boole. Logikę Boole'a nazywamy algebrą logiki, gdyż użył on znakowania algebraicznego: alternatywę zdań zapisywał tak, jak w algebrze zapisujemy sumę, a więc „$p + q$", koniunkcję jak iloczyn „$p.q$" (por. uwagi do twierdzeń $T56$–$T58$). Istotnie różnym od rachunku zdań Boole'a jest system Fregego, oparty o dwie dokładnie sformułowane reguły wnioskowania: regułę podstawiania i regułę odrywania implikacyjnego. Zerojedynkowe sprawdzanie pochodzi od Schrödera.

Obecnie rozpowszechnione są aksjomatyczne systemy rachunku zdań. Regułami wnioskowania są: reguła podstawiania (w takim sformułowaniu, w jakim podałem ją w paragrafie 2.4.1. na stronie 36 – jako regułę wtórną), reguła odrywania implikacyjnego i dwie reguły operowania kwantyfikatorami. Bardzo prostym jest układ aksjomatów Łukasiewicza:

CCpqCCqrCpr	$[(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))]$	($T45$)
CCNppp	$[(\neg p \to p) \to p]$	($T46$)
CpCNpq	$[p \to (\neg p \to q)]$	(podobna do $T21$)

Oprócz tutaj przyjętego znakowania beznawiasowego Łukasiewicza, są w użyciu znakowania 1) Peano i Russella, 2) Hilberta. W pierwszym spośród tych znakowań nawiasy są zastąpione kropkami. Funktory i kwantyfikatory oznaczane są jak następuje:

Łukasiewicz	Cpq	Apq	Kpq	Epq	Np	Πp	Σp
Peano, Russell	$p \supset q$	$p \vee q$	pq	$p \equiv q$	$\sim p$	(p)	$\exists p$
Hilbert	$p \to q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \sim q$	$\overline{p}$	(p)	Ep

Oprócz systemów dwuwartościowego rachunku zdań sformalizowane zostały inne systemy. Takimi są systemy: Łukasiewicza, Lewisa, Kołmogorowa, Heytinga[36].

Podany wyżej układ aksjomatów Łukasiewicza jest jednak aksjomatyką dwuwartościowego rachunku zdań.

[36]Chodzi tu o wielowartościowe logiki Łukasiewicza, modalne logiki Lewisa oraz logikę intuicjonistyczną w wydaniu Kołmogorowa lub – bardziej popularnym – Heytinga.

Rozdział 3

Rachunek Predykatów

3.1. Wyrażenia sensowne

3.1.1. Nawiązanie do języka potocznego

Najprostsze zdania logiki matematycznej nie należące do logiki zdań są wzorowane na zdaniach takich jak: 1) "*Sokrates nauczał*„ 2) „*Wisła płynie*", 3) „*Ten kawałek kredy bieleje*". Można w nich wyróżnić podmiot i orzeczenia. Podmiotem w zdaniach (1) i (2) jest imię własne – człowieka czy przedmiotu martwego, w zdaniu (3) podmiotem jest wyrażenie złożone oznaczające jeden tylko przedmiot, „*ten kawałek kredy*". Wybierzmy litery „x", „y", „z" jako zmienne, które będą reprezentowały imiona własne, tak jak litery „p", „q", „r" reprezentują zdania. Tego rodzaju zmienne nazywamy zmiennymi indywidualnymi, gdyż imiona własne oznaczają pojedyncze indywidua (po polsku można by również powiedzieć: osobniki). Używając zmiennych indywidualnych, możemy napisać: „*x naucza*", „*x bieleje*", „*y płynie*", tj. wyrażenia które stają się zdaniami (prawdziwymi lub fałszywymi), gdy za zmienne podstawimy indywidua[1]. Są to funkcje zdaniowe, których argumenty są zmiennymi indywidualnymi. Znakami funkcji są orzeczenia: „*naucza*", „*bieleje*", „*płynie*".

Wprowadzamy zmienne, które będą reprezentowały takie orzeczenia (predykaty), będą to litery: „a", „b", „c". Jeżeli w matematyce chcemy zapisać w sposób ogólny funkcję o jednym argumencie, to piszemy np. „$f(x)$", nawias zaznacza, że „f" jest znakiem funkcji, funktorem, „x" – argumentem. Analogicznie należałoby łączyć zmienne predykatowe „a" ze zmiennymi indywidualnymi „x" jako funkcje: „$a(x)$". Przenosząc na grunt rachunku pre-

[1] To znaczy ich nazwy.

dykatów beznawiasowe znakowanie Łukasiewicza, będziemy opuszczać nawiasy, a więc pisać „*ax*". Należy jednak rozumieć, że „*a*" jest znakiem funkcji, „*x*" argumentem, podobnie jak w wyrażeniu „*Np*" litera „*N*" jest znakiem funkcji, „*p*" – argumentem.

Oprócz imion własnych używamy w języku potocznym nazw ogólnych, a więc takich rzeczowników jak: „*nauczyciel*", „*Polak*", i przymiotników: „*biały*", „*płynny*" itp. Nazwy te możemy łączyć z imionami własnymi w zdaniach za pomocą wyrazu „*jest*":

(4) „*Sokrates był nauczycielem*" (5) „*Wisła jest płynna*", (6) „*Ten kawałek kredy jest biały*".

Zdania takie nazywamy **jednostkowymi**. Otóż można – (w pewnym przybliżeniu) przyjąć, że zdanie (6) wyraża właśnie to samo, co zdanie (3) tylko pod inną postacią gramatyczną. Podobnie zdania (1) i (4) oraz zdania (2) i (5). Jeszcze wyraźniej występuje możność takiej zamiany w zdaniu: „*x choruje*" na „*x jest chory*".

W języku symbolicznym, celowo, sztucznie utworzonym, unikamy synonimów, tj. różnych wyrażeń na oznaczenie tej samej rzeczy, dlatego ograniczamy się do jednej. W wykładzie niniejszym – idąc za Russellem i Hilbertem, wybierzemy pierwszą formę czasownikową bez wyrazu „*jest*". Niektórzy autorowie jak Łukasiewicz, Leśniewski (za tradycją Arystotelesa) wybierają postać drugą i nie rozpatrują rachunku predykatów, lecz **rachunek nazw**.

W matematyce używa się jeszcze jednego wyrażenia, które jak to czyni np. Chwistek, można uważać za synonimiczne ze zdaniem jednostkowym. Jeżeli powiemy: „*Punkt a należy do zbioru (miejsca geometrycznego) punktów równo odległych od punktów b i c*", znaczy to tyle, co „*a jest punktem równo odległym od punktów b, c*". Ogólnie: „*x jest elementem zbioru a*" daje się zastąpić przez zdanie tego samego rodzaju, które tu rozpatrywaliśmy, mianowicie „*ax*".

Jak czytać „*ax*"? Wyrażenie to posiada postać taką: „*x naucza*", „*x choruje*", więc najlepiej jest czytać „*x a-uje*". Uwidoczni się w ten sposób, że zmienna „*a*" reprezentuje czasownik. Jest to sposób czytania dość odległy od dotychczasowych przyzwyczajeń choć używany był (w pewnych nieco innych zastosowaniach) przez Leśniewskiego. Będziemy bliżsi zwyczajów językowych, jeżeli sposób czytania dostosujemy do drugiej możliwej interpretacji tych zdań, mianowicie jako zdań jednostkowych: „*x jest a*". Istnieje możliwość czytania czysto matematycznego, formalnego, bez nadawania zdaniu postaci gramatycznej, a więc po prostu „*a od x*", tak jak „$f(x)$" czytamy: „*f od x*". Można wreszcie czytać: „*x posiada własność a*".

„Sokrates nauczał Platona”, *„Wisła płynie pod Toruniem”* – to są przykłady zdań zawierających dwa imiona własne. Można przedstawić je w postaci: *„x nauczał y”*, *„x płynie pod y”*. Czasownik *„nauczał”* jest tu znakiem funkcji o dwóch argumentach *„x”*, *„y”*, podobnie wyrażenie *„płynie pod”*. Aby pozostać w zgodzie z wytycznymi przyjętego znakowania winniśmy pisać ten znak funkcji na początku, a więc ogólny schemat tych zdań będzie to: *„fxy”* – i chociaż nie piszemy nawiasów, to jednak pamiętamy, że *„f”* jest znakiem funkcji, a *„x”* i *„y”* są dwoma argumentami tej funkcji. Wartością funkcji jest zdanie. Hilbert używa tu terminów zaczerpniętych ze zwykłej gramatyki, mianowicie mówi, że znak funkcji jest orzeczeniem, a argumenty są podmiotami. Predykaty dwuargumentowe (dwupodmiotowe) nazywamy stosunkami. Podobnie możemy rozważać zdania zawierające większą ilość podmiotów niż dwa.

3.1.2. Reguły sensowności

Określimy strukturalnie wyrażenia sensowne rachunku predykatów. Przez zmienne **indywidualne** rozumiemy litery *„x, y, z”* (w razie potrzeby ze wskaźnikami). Wśród zmiennych predykatywnych (orzeczeniowych) odróżniamy różne typy – w zależności od tego, ile argumentów powinno po danej zmiennej następować. W [wykładzie] niniejszym wystarczą nam zmienne predykatywne o jednym argumencie. Będą to litery *„a, b, c”*, oraz zmienne o dwóch argumentach – będą to litery *„g, h, i”*. Jeżeli brakuje liter – możemy je zaopatrzyć wskaźnikami. Wyrażenia sensowne rachunku zdań pozostają wyrażeniami sensownymi rachunku predykatów, utrzymujemy bowiem w mocy wszystkie cztery **reguły sensowności rachunku zdań**. Nową będzie:

Reguła V sensowności: Wyrażenie złożone ze zmiennej predykatywnej i odpowiedniej ilości zmiennych indywidualnych jest wyrażeniem sensownym.

To znaczy, że sensowne są wyrażenia *„ax”*, *„bx”*, *„by”*, *„fxy”*, *„fxx”*, *„gyx”*, *„gzz”* itd.

Regułę sensowności IV wzmocnimy do następującej postaci:

IVa Wyrażenie złożone z kwantyfikatora ogólnego lub szczegółowego, z jakiejkolwiek zmiennej i z wyrażenia sensownego jest wyrażeniem sensownym.

Sensownymi są wyrażenia „Πxp” [$\forall xp$], „$\Pi xfxx$” [$\forall xfxx$], „$\Pi xCaxax$” [$\forall x(ax \rightarrow ax)$], „$\Pi xEaxay$” [$\forall x(ax \leftrightarrow ay)$]. Do zrozumienia, jak należy czytać pewne wyrażenia dłuższe, dobrze jest użyć nawiasów, choć teoretycznie są one zbyteczne.

„$C\{\Pi aC(ax)(ay)\}\{CN(bx)N(by)\}$” [$\forall a(ax \to ay) \to (\neg bx \to \neg by)$]

Aby rozpoznać wyrażenie sensowne należy (1) sprawdzić, czy po każdym predykacie następuje właściwa ilość zmiennych indywidualnych (2) zastosować znane sprawdzanie sensowności wyrażeń rachunku zdań, licząc każdą zmienną predykatywną tak jak zmienną zdaniową (dodatnie jeden).

3.2. Reguły wnioskowania i twierdzenia dla predykatów jednoargumentowych

3.2.1. Reguły wnioskowania

Utrzymujemy w mocy wszystkie reguły wnioskowania rachunku zdań. Wypowiemy pewne reguły dodatkowe, które zasadniczo będą przystosowaniem reguł kwantyfikatorowych do nowowprowadzonych typów zmiennych. Niektóre z nich pozostają bez istotnej zmiany, należy tylko zastąpić wyrazy „zmienna zdaniowa” przez „zmienna dowolnego typu”. Takimi są: reguła generalizacji ($\Pi 1$), reguła rozdziału kwantyfikatora ogólnego z zamianą na dwa szczegółowe [($\Sigma 2$) oraz reguła odłączania] ($\Sigma 3$). Jeżeli chodzi o pozostałe reguły kwantyfikatorowe: podstawiania ($\Pi 2$) i dołączania kwantyfikatora szczegółowego ($\Sigma 1$), to należy odpowiednio wyjaśnić, co rozumiemy przez prawidłowe podstawianie za zmienne nowych typów. Jeżeli β jest zmienną indywidualną, α wyrażeniem sensownym, to powiem, że $\alpha\beta/\chi$ jest podstawieniem prawidłowym wtedy, gdy i tylko wtedy, gdy χ jest zmienną indywidualną wolną w $\alpha\beta/\chi$. Biorąc pod uwagę to znaczenie słów „podstawienie prawidłowe” – przenosimy reguły $\Pi 2, \Sigma 1$ na zmienne indywidualne bez innych zmian. Regułę podstawiania za zmienne predykatywne wysłowimy później.

3.2.2. Twierdzenia

	$\overbrace{ax}$	(założenie 1)
	$\underbrace{\Pi yax}$	(generalizacja 1)
$T1$	$Cax\Pi yax$[2]	

[2] $\overbrace{ax}$ (założenie 1)

Zauważmy, że możemy otrzymać – na mocy reguły generalizacji – dalsze twierdzenie:

$\Pi xCax\Pi yax$ [$\forall x(ax \to \forall yax)$]

Nie możemy jednak zastosować reguły podstawiania w taki sposób, by za „x” podstawić „y”, gdyż końcowa zmienna „x” – wolna w wyrażeniu „$Cax\Pi yax$” [$ax \to \forall yax$] przeszłaby w zmienną związaną „y”, a więc podstawienie takie nie byłoby prawidłowe. Mianowicie otrzymalibyśmy: „$Cay\Pi yay$” [$ay \to \forall yay$] – „*Jeżeli y posiada własność a, to wszelkie y posiada własność a*”, co jest oczywiście niesłuszne.

	$\overbrace{K\Pi xax\Pi xbx}$	(założenie 1)
	Πxax	(symplifikacja K1)
	Πxbx	(symplifikacja K1)
	ax	(podstawienie x/x)
	bx	(podstawienie x/x)
	$Kaxbx$	(reguła K2)
	$\underbrace{\Pi xKaxbx}$	(generalizacja)
$T2$	$C\{K\Pi xax\Pi xbx\}\{\Pi xKaxbx\}$	(reguła C1)[3]

	$\overbrace{\Pi xKaxbx}$	(założenie 1)
	$Kaxbx$	(podstawienie x/x)
	ax	(symplifikacja K1)
	bx	(symplifikacja K1)

	$\underbrace{\forall yax}$	(generalizacja 1)
$T1$	$ax \to \forall yax$	

3

	$\overbrace{\forall xax \wedge \forall xbx}$	(założenie 1)
	$\forall xax$	(symplifikacja K1)
	$\forall xbx$	(symplifikacja K1)
	ax	(podstawienie x/x)
	bx	(podstawienie x/x)
	$ax \wedge bx$	(reguła K2)
	$\underbrace{\forall x(ax \wedge bx)}$	(generalizacja)
$T2$	$\forall xax \wedge \forall xbx \to \forall x(ax \wedge bx)$	(reguła C1)

Πxax	(generalizacja)
Πxbx	(generalizacja)
$\underbrace{K\Pi xax\Pi xbx}$	(reguła K2)
$T3$ $C\{\Pi xKaxbx\}\{K\Pi xax\Pi xbx\}$	(reguła C1)
$T4$ $E\{\Pi xKaxbx\}\{K\Pi xax\Pi xbx\}$	(reguła E1)[4]

Jest to prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem koniunkcji.

$\overbrace{\Pi xCaxbx}$	(założenie 1)
$\overbrace{\Pi xax}$	(założenie 2)
ax	(podstawienie x/x)
$Caxbx$	(podstawienie x/x)
bx	(odrywanie C2)
$\underbrace{\Pi xbx}$	(generalizacja)
$\underbrace{C\Pi xax\Pi xbx}$	(reguła C1)
$T5$ $C\{\Pi xCaxbx\}\{C\Pi xax\Pi xbx\}$	(reguła C1)[5]

[4]

$\overbrace{\forall x(ax \wedge bx)}$	(założenie 1)
$ax \wedge bx$	(podstawienie x/x)
ax	(symplifikacja K1)
bx	(symplifikacja K1)
$\forall xax$	(generalizacja)
$\forall xbx$	(generalizacja)
$\underbrace{\forall xax \wedge \forall xbx}$	(reguła K2)
$T3$ $\forall x(ax \wedge bx) \to \forall xax \wedge \forall xbx$	(reguła C1)
$T4$ $\forall x(ax \wedge bx) \leftrightarrow \forall xax \wedge \forall xbx$	(reguła E1)

[5]

$\overbrace{\forall x(ax \to bx)}$	(założenie 1)
$\overbrace{\forall xax}$	(założenie 2)

Prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem implikacji. Twierdzenia tego nie możemy wzmocnić do postaci równoważności, tzn. zmieniając początkowe „C” na „E”, otrzymamy wyrażenie, które nie jest ogólnie prawdziwe. Równoważność taka staje się jednak prawdziwa w przypadku, w którym poprzednik „ax” zastępujemy wyrażeniem niezawierającym „x”, a więc [np.] zmienną zdaniową „p”. Wykażemy to, dowodząc $T8$. Wzorując się na dowodzie $T5$, czytelnik dowiedzie $T6$:

$T6$ $C\{\Pi xCpax\}\{Cp\Pi xax\}$ $[\forall x(p \to ax) \to (p \to \forall xax)]$

$\overbrace{Cp\Pi xax}$	(założenie 1)
$\overbrace{p}$	(założenie 2)
Πxax	(odrywanie)
$\underbrace{ax}$	(podstawienie x/x)
$Cpax$	(reguła C1)
$\underbrace{\Pi xCpax}$	(generalizacja)
$T7$ $C\{Cp\Pi xax\}\{\Pi xCpax\}$	(reguła C1)
$T8$ $E\{\Pi xCpax\}\{Cp\Pi xax\}$	(reguła E1)[6]

---

ax	(podstawienie x/x)
$ax \to bx$	(podstawienie x/x)
bx	(odrywanie C2)
$\underbrace{\forall xbx}$	(generalizacja)
$\underbrace{\forall xax \to \forall xbx}$	(reguła C1)
$T5$ $\forall x(ax \to bx) \to (\forall xax \to \forall xbx)$	(reguła C1)

[6]

$\overbrace{p \to \forall xax}$	(założenie 1)
$\overbrace{p}$	(założenie 2)
$\forall xax$	(odrywanie)
$\underbrace{ax}$	(podstawienie x/x)
$p \to ax$	(reguła C1)
$\underbrace{\forall x(p \to ax)}$	(generalizacja)
$T7$ $(p \to \forall xax) \to \forall x(p \to ax)$	(reguła C1)
$T8$ $\forall x(p \to ax) \leftrightarrow p \to \forall xax$	(reguła E1)

Podobny charakter mają twierdzenia, których dowody pomijam.

$T9$ $C\{\Pi xEaxbx\}\{E\Pi xax\Pi xbx\}$ $[\forall x(ax \leftrightarrow bx) \rightarrow (\forall xax \leftrightarrow \forall xbx)]$

Prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem równoważności.

$T10$ $C\{A\Pi xax\Pi xbx\}\{\Pi xAaxbx\}$ $[\forall xax \vee \forall xbx \rightarrow \forall x(ax \vee bx)]$

Odwrócenie tego twierdzenia jest błędne.

$T11$ $E\{\Pi xApax\}\{Ap\Pi xax\}$ $[\forall x(p \vee ax) \leftrightarrow p \vee \forall xax]$

	Πxax	(założenie 1)
	ay	(podstawienie x/y)
	Πyay	(generalizacja)
$T12$	$C\Pi xax\Pi yay$	(reguła C1)[7]

Podobnie można okazać: $C\Pi yay\Pi xax$ $[\forall yay \rightarrow \forall xax]$, reguła E1 daje nam wobec tego:

$T13$ $E\Pi xax\Pi yay$ $[\forall xax \leftrightarrow \forall yay]$

Sens twierdzenia $T13$ można wypowiedzieć swobodnie w taki sposób: Dobór oznaczenia „x" czy „y" na zmienną związaną w wyrażeniu jest rzeczą obojętną.

	Πxax	(założenie 1)
	ax	(podstawienie x/y)
$T14$	$C\{\Pi xax\}ax$	(reguła C1)[8]

ax (założenie 1)

7

	$\forall xax$	(założenie 1)
	ay	(podstawienie x/y)
	$\forall yay$	(generalizacja)
$T12$	$\forall xax \rightarrow \forall yay$	(reguła C1)

8

	$\forall xax$	(założenie 1)
	ax	(podstawienie x/y)
$T14$	$\forall xax \rightarrow ax$	(reguła C1)

	$\overbrace{NN\Pi xNax}$	(założenie 2)
	$\Pi xNax$	(twierdzenie $T23$ rachunku zdań)
	$\underbrace{Nax}$	(podstawienie x/x)
	$\underbrace{N\Pi xNax}$	(reg. N – wobec sprzeczności ostatniej konsekwencji z założeniem 1)
	$CaxN\Pi xNax$	(reguła C1)
$T15$	$\Pi xCaxN\Pi xNax$	(reg. generalizacji)[9]

(Należy zwrócić uwagę na to, które „x” są związane z którym kwantyfikatorem)

	$\overbrace{\Sigma xax}$	(założenie)
	$\Sigma xN\Pi xNax$	(reguła $\Sigma2$ wobec twier. $T15$)
	$\underbrace{N\Pi xNax}$	(reguła $\Sigma3$)
$T16$	$C\Sigma xaxN\Pi xNax$	(reguła C1)[10]

	$\overbrace{\Pi xax}$	(założenie)
	ax	(podstawienie x/x)
	$\underbrace{\Sigma xax}$	(reguła $\Sigma1$ x/x)
$T17$	$C\Pi xax\Sigma xax$	(reguła C1)[11]

9

	$\overbrace{ax}$	(założenie 1)
	$\overbrace{\neg\neg\forall x\neg ax}$	(założenie 2)
	$\forall x\neg ax$	(twierdzenie $T23$ rachunku zdań)
	$\underbrace{\neg ax}$	(podstawienie x/x)
	$\underbrace{\neg\forall x\neg ax}$	(reg. N – wobec sprzeczności ostatniej konsekwencji z założeniem 1)
	$ax \to \neg\forall x\neg ax$	(reguła C1)
$T15$	$\forall x(ax \to \neg\forall x\neg ax)$	(reg. generalizacji)

10

	$\overbrace{\exists xax}$	(założenie)
	$\exists x\neg\forall x\neg ax$	(reguła $\Sigma2$ wobec twier. $T15$)
	$\underbrace{\neg\forall x\neg ax}$	(reguła $\Sigma3$)
$T16$	$\exists xax \to \neg\forall x\neg ax$	(reguła C1)

11

	$\overbrace{\forall xax}$	(założenie)
	ax	(podstawienie x/x)

Twierdzenie to wraz z $T14$ można uważać za symboliczne sformułowanie prawa, znanego w logice tradycyjnej pod nazwą „*dictum de omni*”: Cokolwiek jest ważne dla wszystkich, jest ważne dla niektórych ($T17$) i dla poszczególnych.

	$\overbrace{N\Sigma xax}$	(założenie 1)
	$\quad\overbrace{NNax}$	(założenie 2)
	$\quad ax$	(twierdzenie $T23$ rachunku zdań)
	$\quad\underbrace{\Sigma xax}$	(reguła $\Sigma 1\ x/x$)
	Nax	(reg. sprzeczności)
	$\underbrace{\Pi xNax}$	(reg. generalizacji)
$T18$	$C\{N\Sigma xax\}\{\Pi xNax\}$	(reg. C1)[12]

Stosując twierdzenie rachunku zdań: „$CCNpqCNqp$” $[(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)]$, możemy otrzymać:

$T19$ $CN\Pi xNax\Sigma xax$ $[\neg\forall x\neg ax \to \exists xax]$

$T20$ $E\{\Sigma xax\}\{N\Pi xNax\}$ $[\exists xax \leftrightarrow \neg\forall x\neg ax]$ wobec $T16$ i $T19$.

Twierdzenie to pozwala zastąpić kwantyfikator szczegółowy przed „ax” kwantyfikatorem ogólnym pomiędzy dwoma negacjami. Sens $T20$ staje się jasnym, gdy go odczytać. Można dowieść podobnych twierdzeń:

$T20a$ $E\{N\Sigma xax\}\{\Pi xNax\}$ $[\neg\exists xax \leftrightarrow \forall x\neg ax]$

$T20b$ $E\{N\Pi xax\}\{\Sigma xNax\}$ $[\neg\forall xax \leftrightarrow \exists x\neg ax]$

	$\underbrace{\exists xax}$	(reguła $\Sigma 1\ x/x$)
$T17$	$\forall xax \to \exists xax$	(reguła C1)

12

	$\overbrace{\neg\exists xax}$	(założenie 1)
	$\quad\overbrace{\neg\neg ax}$	(założenie 2)
	$\quad ax$	(twierdzenie $T23$ rachunku zdań)
	$\quad\underbrace{\exists xax}$	(reguła $\Sigma 1\ x/x$)
	$\neg ax$	(reg. sprzeczności)
	$\underbrace{\forall x\neg ax}$	(reg. generalizacji)
$T18$	$\neg\exists xax \to \forall x\neg ax$	(reg. C1)

Twierdzenie $T20b$ mówi, że na to, by zdanie ogólnie kwantyfikowane Πxax [$\forall xax$] było fałszywe, potrzeba i wystarcza, by istniał co najmniej kontrprzykład, tzn. takie x, że dla tego indywiduum x fałszywym jest „ax”. $T20a$ i $T20b$ są to prawa przemienności negacji z kwantyfikatorami, przy takiej przemianie zamienia się kwantyfikator ogólny na szczegółowy i przeciwnie.

3.2.3. Podstawienie funkcyjne

W jaki sposób stosujemy podstawianie za funkcje w matematyce? Weźmy jako przykład następujące twierdzenie: *Przy wszelkim f jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x i przy pewnych $x_1, x_2, f(x_1) < 0$ i $f(x_2) > 0$, to przy pewnym x_3 mamy: $f(x_3) \neq 0$.* Podstawiamy za $f(x)$ pewną funkcję, np. $x^3 - 2$, otrzymujemy: *Jeżeli $x^3 - 2$ jest funkcją ciągłą zmiennej x i przy pewnych $x_1, x_2 : x_1^3 - 2 < 0$ i $x_2^3 - 2 > 0$, to przy pewnym x_3 mamy: $x_3^3 - 2 \neq 0$.* Widzimy, że podstawiając, zastępowaliśmy nie sam znak „f”, lecz całe wyrażenia „$f(x)$”, „$f(x_1)$”, „$f(x_2)$”, „$f(x_3)$” pewnymi innymi, które się między sobą [różnią] kształtem zmiennych „x”, „x_1” itd. Podobnie przy podstawianiu za funkcję zdaniową „a” zastępujemy całe wyrażenie „ax” itd. Do twierdzenia $T13$ – reguła generalizacji, otrzymamy

$T13a$ $\Pi aE\{\Pi xax\}\{\Pi yay\}$ [$\forall a(\forall xax \leftrightarrow \forall yay)$]

Twierdzenie to możemy zastosować w matematyce na przykład w taki sposób, że za „ax” podstawiamy „$x - x = 0$”. Wtedy zamiast „ay” należy napisać „$y - y = 0$”. Otrzymamy:

$$E\{\Pi x(x - x = 0)\}\{\Pi y(y - y = 0)\} \; [\forall x(x - x = 0) \leftrightarrow \forall y(y - y = 0)]$$

tj. wtedy i tylko wtedy przy wszelkim x zachodzi $x - x = 0$, gdy przy wszelkim y zachodzi $y - y = 0$. Podobnie jeżeli zechcemy zamiast „ax” podstawić „bx”, to zamiast „ay” musimy pisać „by”. Widzimy oznaczenie dla podstawienia funkcyjnego, w którym zaznaczamy, jak zastępujemy wyrażenia sensowne: $T13$ $ax/bx, ay/by$ jest $E\Pi xbx\Pi yby$ [$\forall xbx \leftrightarrow \forall yby$]. Podobnie przez ”$T13$ $ax/Caxbx, ay/Cayby$” rozumieć będziemy $E\Pi xCaxbx\Pi yCayby$ [$\forall x(ax \to bx) \leftrightarrow \forall y(ay \to by)$]. Kiedy podstawienie $\alpha\beta_1/\gamma_1, \beta_2/\gamma_2, \ldots, \beta_n/\gamma_n$ uznamy za **prawidłowe podstawienie funkcyjne** za predykat jednoargumentowy φ? Wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są jednocześnie następujące warunki:

1) Wolne zmienne φ występują w α jedynie jako pierwsze znaki w wyrażeniach sensownych $\beta_1, \beta_2, \ldots$ zamiast których występują w α odpowiednio wyrażenia sensowne $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$.

2) Każda zmienna wolna w γ_i jest bądź zmienną wolną w α, bądź jest równokształtną z argumentem β.

3) Każde γ_i różni się od dowolnego $[\beta_i]$ co najwyżej tym, że w wyrażeniu γ_i znajdują się zmienne wolne równokształtne z argumentem β_i na tych miejscach, na których w wyrażeniach γ_i występują zmienne wolne równokształtne z argumentem β_i.

Warunku 3) nie spełnia podstawienie:

*T*13*a* $ax/\Pi xCaxbx, ay/\Pi xCayby$.

Podstawienie takie dałoby wyrażenie:

$$E\{\Pi x\Pi xCaxbx\}\{\Pi y\Pi xCaybx\}\ [\forall x\forall x(ax \to bx) \leftrightarrow \forall y\forall x(ay \to bx)]$$

Tutaj wyrażenia „$\Pi xCaxbx$” różnią się jedną literą, ale w jednym z nich ta litera jest zmienną związaną, a w drugim wolną. Regułę $\Pi 2$ podstawiania funkcyjnego za predykat sformułujemy tak:

> Jeżeli w dowodzie jest ważne wyrażenie $\Pi\varphi\alpha$, gdzie φ jest zmienną predykatywną i δ jest prawidłowym podstawieniem funkcyjnym za zmienną φ w wyrażeniu α, to wolno dołączyć α/δ do dowodu.

Odpowiednio reguła dołączania kwantyfikatora szczegółowego $\Sigma 1$ brzmi:

> Jeżeli α jest wyrażeniem sensownym, φ jest zmienną predykatywną i ważne w dowodzie jest δ będące prawidłowym podstawieniem funkcyjnym za φ w wyrażeniu $[\alpha]$, to wolno dołączyć do dowodu wyrażenie $\Sigma\varphi\alpha$.

W definicji podstawiania prawidłowego nie zastrzegaliśmy, że wyrażenie γ podstawiane np. za „ax” musi zawierać zmienną wolną kształtu „x”. Podobnie w matematyce stałą [uznajemy] za szczególny przypadek funkcji, a twierdzenia prawdziwe dla wszystkich funkcji $f(x)$ pozostają prawdziwe dla funkcji spełniającej stałe: $f(x) = 1$.

Poprawne więc są następujące dowody:

$\overbrace{NN\Pi aax}$	(założenie 1)
Πaax	(*T*25 rachunku zdań)
p	(podstawienie ax/p)
$\underbrace{Np}$	(podstawienie ax/Np)

$T21$	$N\Pi aax$	(na mocy reg. sprzeczności)
	$\Pi xCpp$	(reg. generalizacji zastosowana do $T1$ rachunku zdań)
$T22$	$\Sigma a\Pi xax$	(na mocy reg. dołączania kwantyfikatora szczegółowego, gdyż podstawiania ax/Cpp w wyrażeniu Πxax dają $\Pi xCpp$)[13]

3.2.4. Prawa identyczności

Podamy kilka praw dotyczących wyrażenia „$\Pi aEaxay$" [$\forall a(ax \leftrightarrow ay)$], które można przeczytać jako: *„x posiada wszystkie te same własności co y"* lub jako *„x jest tym samym przedmiotem co y"*, czy wreszcie *„x jest identyczne z y"*. Tak pojęta identyczność jest powszechnie zwana identycznością Leibniza. Niedawno Wilkosz znalazł tę samą definicję identyczności u św. Tomasza z Akwinu (wiek XIII). Dla uniknięcia nieporozumień zwracam uwagę na to, że identyczność jest wysłowiona w terminach systemu, nie metodologii systemu, nie jest ona związkiem pomiędzy literami „x" i „y", które oczywiście są różne i różnego kształtu. Jeżeli identyczność jest zdaniem prawdziwym, to znaczy, że x i y mimo różnych kształtów oznaczają ten sam przedmiot. Zasadnicze własności identyczności wyrażają twierdzenia $T23$, $T24$, $T25$:

$Eaxax$ (podstawienie p/ax w twierdzeniu rachunku zdań $T12$)

$T23$ $\Pi aEaxax$ [$\forall a(ax \leftrightarrow ax)$] (na mocy reguły generalizacji)

Prawo zwrotności: *x jest identyczne z x*

$\overbrace{\Pi aEaxay}$	(założenie 1)
$Eaxay$	(podstawienie ax/ax, ay/ay)
$Eayax$	(na mocy twierdzenia rachunku zdań: $CEpqEqp$)

[13]

	$\overbrace{\neg\neg\forall aax}$	(założenie 1)
	$\forall aax$	($T25$ rachunku zdań)
	p	(podstawienie ax/p)
	$\underbrace{\neg p}$	(podstawienie $ax/\neg p$)
$T21$	$\neg\forall aax$	(na mocy reg. sprzeczności)
	$\forall x(p \to p)$	(reg. generalizacji zastosowana do $T1$ rachunku zdań)
$T22$	$\exists a\forall xax$	(na mocy reg. dołączania kwantyfikatora szczegółowego, gdyż podstawiania $ax/p \to p$ w wyrażeniu $\forall xax$ dają $\forall x(p \to p)$)

$\underbrace{\Pi aEayax}$	(reguła generalizacji)
$T24$ $C\{\Pi aEaxay\}\{\Pi aEayax\}$[14]	

Prawo symetrii: *jeżeli x jest identyczne z y, to y jest identyczne z x.*

$\overbrace{K\Pi aEaxay\Pi aEayaz}$	(założenie 1)
$\Pi aEaxay$	(na mocy reg. symplifikacji)
$E\Pi aEaxaz\Pi aEayaz$	(podstawienie funkcyjne: $ax/\Pi aEaxaz$, $ay/\Pi aEayaz$)
$\Pi aEayaz$	(symplifikacja zał. 1)
$\underbrace{\Pi aEaxaz}$	(reg. odrywania)
$T25$ $CK\{\Pi aEaxay\}\{\Pi aEayaz\}\{\Pi aEaxaz\}$[15]	

Jest to prawo przechodniości: Dwa przedmioty identyczne z trzecim są między sobą identyczne.

3.2.5. Pojęcie ilości

Σxbx [$\exists xbx$] można rozumieć jako: istnieje takie x, że bx, lub co na jedno wychodzi: istnieje co najmniej jedno takie x, że bx. Jak rozumieć wyrażenie:

$$\Sigma x\Sigma yKKbxby\{N\Pi aEaxay\}\ [\exists x\exists y(bx \wedge by \wedge \neg\forall a(ax \leftrightarrow ay))]$$

---

[14]

$\overbrace{\forall a(ax \leftrightarrow ay)}$	(założenie 1)
$ax \leftrightarrow ay$	(podstawienie ax/ax, ay/ay)
$ay \leftrightarrow ax$	(na mocy twierdzenia rachunku zdań: $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \leftrightarrow p)$)
$\underbrace{\forall a(ay \leftrightarrow ax)}$	(reguła generalizacji)
$T24$ $\forall a(ax \leftrightarrow ay) \rightarrow \forall a(ay \leftrightarrow ax)$	

[15]

$\overbrace{\forall a(ax \leftrightarrow ay) \wedge \forall a(ay \leftrightarrow az)}$	(założenie 1)
$\forall a(ax \leftrightarrow ay)$	(na mocy reg. symplifikacji)
$\forall a(ax \leftrightarrow az) \leftrightarrow \forall a(ay \leftrightarrow az)$	(podstawienie funkcyjne: $ax/\forall a(ax \leftrightarrow az)$, $ay/\forall a(ay \leftrightarrow az)$)
$\forall a(ay \leftrightarrow az)$	(symplifikacja zał. 1)
$\underbrace{\forall a(ax \leftrightarrow az)}$	(reg. odrywania)
$T25$ $\forall a(ax \leftrightarrow ay) \wedge \forall a(ay \leftrightarrow az) \rightarrow \forall a(ax \leftrightarrow az)$	

Dosłownie: „Istnieją takie x, y, że: bx, by i x jest różne od y". Swobodniej można powiedzieć: „Istnieją co najmniej dwa przedmioty spełniające predykat b czy też posiadające własność b".

Nasz prosty język symboliczny pozwala wypowiedzieć jeszcze inne wyrażenia, mianowicie: „Co najwyżej dwa przedmioty spełniają predykat b", czyli: „Przy wszelkich x, y, z, jeżeli bx i by i bz, to bądź $x = y$ lub $x = z$ lub $y = z$", w znakowaniu:

$$\Pi x \Pi y \Pi z C\{KKbxbybz\}AA\{\Pi aEaxay\}\{\Pi aEaxaz\}\{\Pi aEayaz\}$$
$$[\forall x \forall y \forall z(bx \land by \land bz \to \forall a(ax \leftrightarrow ay) \lor \forall a(ax \leftrightarrow az) \lor \forall a(ay \leftrightarrow az))]$$

Jeżeli połączymy koniunkcją dwa wyrażenia, z których jedno orzeka, że co najmniej a drugie, że co najwyżej dwa przedmioty posiadają tę samą własność b, to otrzymamy wyrażenie, które głosi, że tę własność spełniają dokładnie dwa przedmioty, ani mniej, ani więcej. To samo umiemy uczynić dla każdej liczby naturalnej, jak 3, 15, 1000, tylko wyrażenia będą coraz dłuższe. Czytelnik zechce wypowiedzieć: „Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta", nie używając liczebników „dwa", „jeden", tylko zmienne reprezentujące punkty i proste, oraz kwantyfikator.

3.3. Reguły i twierdzenia dotyczące stosunków

3.3.1. Reguły wnioskowania

Dla zmiennych predykatywnych o dwóch argumentach pozostają w mocy wszystkie reguły wnioskowania, z zastrzeżeniem wszakże, że pojęcie prawidłowego podstawienia funkcyjnego musi być na nowo zdefiniowane. Definicja takiego podstawienia w całej ogólności byłaby dość skomplikowana. Dlatego zdefiniujemy szczególny przypadek podstawiania prawidłowego, przypadek, w którym predykat φ, za który podstawiamy, występuje kilka razy, lecz zawsze będzie mu towarzyszył równokształtny zespół argumentów. Definicja, którą tu podam przenosi się bez istotnych zmian na predykaty o większej ilości argumentów niż dwa. Podstawienie $\alpha\beta/\gamma = \delta$ jest wtedy i tylko wtedy prawidłowym podstawieniem za zmienny predykat φ, gdy jednocześnie:

(1) wolne zmienne φ występują w α jedynie jako pierwsze znaki w wyrażeniach sensownych β, zamiast których w wyrażeniu δ występują wyrażenia sensowne γ.

(2) każda zmienna wolna w γ jest bądź wolną zmienną w δ lub też jest równokształtna pewnemu argumentowi wyrażenia β.

3.3.2. Twierdzenia

$\overbrace{\Pi x \Pi y fxy}$	(założenie 1)
$\Pi y fxy$	(podstawienie x/x)
fxy	(podstawienie y/y)
$\Pi x fxy$	(generalizacja)
$\underbrace{\Pi y \Pi x fxy}$	(generalizacja)

*T*26 $C\{\Pi x \Pi y fxy\}\{\Pi y \Pi x fxy\}$[16]

Jest to prawo przemienności kwantyfikatorów ogólnych. Można też dowieść prawa przemienności kwantyfikatorów szczegółowych *T*27.

*T*27 $C\{\Sigma x \Sigma y fxy\}\{\Sigma y \Sigma x fxy\}$ $[\exists x \exists y fxy \to \exists y \exists x fxy]$

$\overbrace{\Sigma x \Pi y fxy}$	(założenie 1)
$\quad \overbrace{\Pi y fxy}$	(założenie 2)
$\quad \underbrace{fxy}$	(podstawienie y/y)
$C\{\Pi y fxy\} fxy$	(reguła C1)
$\Sigma x fxy$	(reg. $\Sigma 2$ rozdziału wobec założenia 1)
$\underbrace{\Pi y \Sigma x fxy}$	(generalizacja)

*T*28 $C\{\Sigma x \Pi y fxy\}\{\Pi y \Sigma x fxy\}$[17]

---

[16]

$\overbrace{\forall x \forall y fxy}$	(założenie 1)
$\forall y fxy$	(podstawienie x/x)
fxy	(podstawienie y/y)
$\forall x fxy$	(generalizacja)
$\underbrace{\forall y \forall x fxy}$	(generalizacja)

*T*26 $\forall x \forall y fxy \to \forall y \forall x fxy$

[17]

$\overbrace{\exists x \forall y fxy}$	(założenie 1)
$\quad \overbrace{\forall y fxy}$	(założenie 2)
$\quad \underbrace{fxy}$	(podstawienie y/y)
$\forall y fxy \to fxy$	(reguła C1)

Jest to prawo przemienności kwantyfikatora ogólnego ze szczegółowym. Obowiązuje ono tylko w jedną stronę, twierdzenie odwrotne względem $T28$ nie jest ogólnie prawdziwe, bo np. dla wszelkiej liczby y istnieje liczba x od niej większa, a więc spełniająca $x > y$, mimo to nie istnieje liczba największa, tj. nie istnieje takie x, które by przy wszelkich y spełniało $x > y$.

3.3.3. Pewne własności szczególne stosunków

W matematyce duże znaczenie posiadają stosunki o pewnych własnościach szczegółowych. Są to przede wszystkim trzy własności, które posiada identyczność: przechodniość, symetria, zwrotność.

Przechodnim nazywamy stosunek f, który spełnia warunek:

$$\Pi x \Pi y \Pi z C\{Kfxyfyz\}fxz \; [\forall x \forall y \forall z(fxy \wedge fyz \to fxz)f]$$

Symetrycznym – stosunek f spełniający:

$$\Pi x \Pi y Cfxyfyx \; [\forall x \forall y(fxy \to fyx)]$$

Zwrotnym jest stosunek spełniający:

$$\Pi xfxx \; [\forall xfxx],$$

tzn. taki, że każdy przedmiot pozostaje w tym stosunku do siebie.

Przykłady przechodnich stosunków: przystawanie figur geometrycznych, $x < y$.

Stosunki symetryczne: przystawanie figur, prostopadłość prostych (jeżeli $a \perp b$, to $b \perp a$)

	$\exists xfxy$	(reg. $\Sigma 2$ rozdziału wobec założenia 1)
	$\underbrace{\forall y \exists xfxy}$	(generalizacja)
$T28$	$\exists x \forall yfxy \to \forall y \exists xfxy$	

Stosunki zwrotne: przystawanie figur.

Stosunki jednocześnie przechodnie, zwrotne, symetryczne nazywają niektórzy równoważnościami (nie mieszać z tą samą nazwą dla znaku „E”).

Każda równoważność ustala pewien podział przedmiotów na klasy nie mające elementów wspólnych.

Asymetrycznym (przeciwsymetrycznym) nazywamy stosunek spełniający

$$\Pi x \Pi y C f x y N f y x \ [\forall x \forall y (f x y \rightarrow \neg f y x)]$$

Na przykład: $x < y, y = x - 1$.

Asymetria – w tym znaczeniu, to coś więcej, niż zaprzeczenie symetrii, tzn. niż warunek:

$$N \Pi z \Pi y C f x y f y x \ [\neg \forall x \forall y (f x y \rightarrow f y x)].$$

Z asymetrii wynika przeciwzwrotność: $\Pi x N f x x$ $[\forall x \neg f x x]$.

Dziedziną stosunku f nazywamy zbiór wszystkich tych przedmiotów, które pozostają w stosunku f do jednego co najmniej przedmiotu. Jeżeli przez „ax” będziemy rozumieli: „x jest elementem zbioru a”, to powiemy, że a jest dziedziną stosunku f wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $\Pi x E\{ax\}\{\Sigma y f x y\}$ $[\forall x (ax \leftrightarrow \exists y f x y)]$. Przeciwdziedziną jest zbiór wszystkich tych y-ów, do których co najmniej jeden przedmiot pozostaje w stosunku f, a więc przeciwdziedzinę b stosunku f można określić wyrażeniem: $\Pi y E b y \Sigma x f x y$ $[\forall y (by \leftrightarrow \exists x f x y)]$. Wreszcie przedmioty, które należą do dziedziny lub do przeciwdziedziny, zaliczamy do pola stosunków. Jeżeli za fxy obierzemy: „*x jest mężem y*” to dziedziną jest zbiór wszystkich mężów, przeciwdziedziną zbiór wszystkich żon, polem – zbiór wszystkich ludzi żonatych lub zamężnych.

3.4. Metodologia rachunku predykatów

3.4.1. Wtórne reguły wnioskowania

Można udowodnić następującą wtórną **regułę zastępowania:**

> **Twierdzenie metodologiczne:** Jeżeli mamy twierdzenie $E\alpha\beta$ $[\alpha \leftrightarrow \beta]$ i w obszarze D ważne jest wyrażenie γ zawierające α, to w obszarze D można otrzymać każde wyrażenie sensowne $[\delta]$ różniące się od γ tylko tym, że zamiast wszystkich lub niektórych wyrażeń kształtu α występujących w γ, w wyrażeniu δ występują wyrażenia β. Z twierdzenia $T13$ przez generalizację otrzymujemy twierdzenie:
>
> $\Pi aE\Pi xax\Pi yay$ $[\forall a(\forall xax \leftrightarrow \forall yay)]$

Łatwo sprawdzić, że można dowieść każdego twierdzenia, które różniłoby się od $T13$ tylko tym, że zamiast „y" i „x" użyto innego kształtu zmiennych indywidualnych. Można sprecyzować, co mamy na myśli, mówiąc, że jakieś dwa wyrażenia różnią się jedynie oznaczeniami zmiennych związanych. Należy przez to rozumieć, że zmienne znajdujące się na odpowiadających sobie miejscach muszą być związane z odpowiadającymi sobie kwantyfikatorami. Stosując wtórną regułę zastępowania i wychodząc z twierdzenia $T13$, można udowodnić **wtórną regułę zmiany oznaczeń zmiennych związanych**:

> Jeżeli α jest wyrażeniem ważnym w pewnym obszarze D i β różni się od α tylko oznaczeniem zmiennych związanych, to w tym obszarze D można otrzymać wyrażenie β.

Ta reguła wtórna zachowuje swą moc dla zmiennych wszelkich typów, tzn. również dla zmiennych zdaniowych i predykatywnych.

Przykłady: można otrzymać twierdzenia:

$C\Pi xax\Sigma yay$ $[\forall xax \rightarrow \exists yay]$ (z twierdzenia $T17$)

$E\{\Sigma yay\}\{N\Pi zNaz\}$ $[\exists yay \leftrightarrow \neg\forall z\neg az]$ (z $T20$)

$C\{\Pi aEaxay\}\{\Pi bEbybx\}$ $[\forall a(ax \leftrightarrow ay) \rightarrow \forall b(by \leftrightarrow bx)]$ (z $T24$)

To samo prawo obowiązuje dla zmiennych związanych we wzorach matematycznych, wiemy [na] przykład, że:

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\alpha_k = \Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n.$$

3.4.2. Zagadnienie rozstrzygalności

Jak można wykazać, że jakieś wyrażenie rachunku predykatów nie może być twierdzeniem, że nie jest ogólnie ważne dla wszelkich predykatów. Otóż na to, by wykazać, że jakieś wyrażenie nie może być przyjęte jako twierdzenie, wystarczy wykazać jego fałszywość na jednym chociażby przykładzie.

Weźmy: „$C\Sigma xax\Pi xax$" [$\exists xax \to \forall xax$] – „*jeżeli przy pewnym x: ax, to przy wszelkim x: ax*". Łatwo dobrać kontrprzykład: wystarczy wziąć za „*ax*" – „*x* jest kawałkiem kredy". Przy pewnym *x* istotnie, *x* jest kawałkiem kredy, nie wynika stąd jednak, by przy wszelkim *x*, *x* było kawałkiem kredy. Podobnie przy pewnym *x*: *x* jest liczbą parzystą, a jednak nieprawda, że przy wszelkim *x*, *x* jest liczbą parzystą. Dla rachunku zdań potrafiliśmy podać metodę sprawdzania zero-jedynkową, która pozwala dla każdego wyrażenia nie dającego się udowodnić znaleźć kontrprzykład. Czy jest możliwa podobna metoda dla rachunku predykatów?

Otóż metody, która by działała dla rachunku predykatów w całej jego rozciągłości, dotychczas nie znamy, a nawet jest rzeczą wątpliwą, czy metoda taka jest w ogóle możliwa. Jest to tzw. zagadnienie rozstrzygalności rachunku predykatów. Istnieją metody, które rozwiązują to zagadnienie dla tylko pewnych przypadków szczególnych. Ponieważ w rachunku predykatów mamy zmienne indywidualne, więc musimy przede wszystkim określić jakie przedmioty będziemy dobierali w przykładach. Musimy ustalić dokładnie, co będziemy rozumieli przez powiedzenie: „*przy wszelkim x*". Mianowicie przyjmujemy, że zmienna *x* może przyjmować jako wartości jedynie imiona przedmiotów należących do pewnego zbioru.

3.4.3. Interpretacja w przestrzeniach skończonych

Mamy różne geometrie: geometrię płaszczyzny, czyli planimetrię, geometrię przestrzeni trójwymiarowej, czyli stereometrię. Pewne twierdzenia są wspólne obu tym geometriom, pewne inne są odrębne dla każdej z nich, na przykład: jeżeli mamy prostą i punkt na niej leżący, to w przestrzeni nieskończenie wiele [prostych przecina tę prostą w tym punkcie]. Twierdzenia planimetrii są to twierdzenia geometrii, które by obowiązywały, gdyby świat był płaszczyzną. Mówimy [, że] płaszczyzna jest przestrzenią dla planimetrii. Podobnie możemy rozpatrywać rachunek predykatów jakiegoś zbioru skończonego, który nazwiemy przestrzenią. Powiemy [wtedy], że interpretujemy rachunek predykatów w przestrzeni skończonej.

Weźmy pod uwagę przestrzeń złożoną z 3 przedmiotów, nazwijmy te przedmioty: X, Y, Z. Są to imiona własne 3 indywiduów. Zdania takie jak – „aX”, „aY”, „aZ”, „bZ” mają sens w tej interpretacji, „a”, „b” są jak zwykle zmiennymi predykatywnymi. „*Przy wszelkim x*” będzie znaczyć tyle co „*przy wartościach X, Y, Z zmiennej x*” lub „*dla $x = X$ i dla $x = Y$ i dla $x = Z$*”. „Πxax” [$\forall xax$] możemy więc interpretować jako: „$KK(aX)(aY)(aZ)$” [$aX \wedge aY \wedge aZ$].

Interpretację dowolnego wyrażenia sensownego otrzymamy, [eliminując] z niego kwantyfikatory, tzn. zastępując wszędzie kwantyfikatory ogólne przez wyrażenia będące koniunkcją trzech podstawień tzn. zastępując „$\Pi x\alpha$” [$\forall x\alpha$] przez „$KK\{\alpha x/X\}\{\alpha x/Y\}\{\alpha x/Z\}$” [$\alpha x/X \wedge \alpha x/Y \wedge \alpha x/Z$], a kwantyfikatory szczegółowe przez alternatywę tych samych członów, a więc „$\Sigma x\alpha$” [$\exists x\alpha$] przez „$AA\{\alpha x/X\}\{\alpha x/Y\}\{\alpha x/Z\}$” [$\alpha x/X \vee \alpha x/Y \vee \alpha x/Z$]. W ten sposób każde wyrażenie sensowne zawierające [n] wolnych zmiennych indywidualnych przechodzi w pewne wyrażenie, w którym występują jedynie stałe funktory rachunku zdań, zmienne predykatywne, imiona własne przedmiotów przestrzeni, a więc:

„$\Pi xCaxbx$” [$\forall x(ax \to bx)$] przechodzi w:
$KK\{CaXbX\}\{CaYbY\}\{CaZbZ\}$”
[$(aX \to bX) \wedge (aY \to bY) \wedge (aZ \to bZ)$]

„$\Sigma xfxx$” [$\exists xfxx$] przechodzi w:
„$AA\{fXX\}\{fYY\}\{fZZ\}$”
[$fXX \vee fYY \vee fZZ$]

Przy interpretacji wyrażenia takie jak „ax” przechodzą w wyrażenia złożone ze zmiennej predykatywnej i jednej z wielkich liter „X, Y, Z”.

Jeżeli mamy tylko 3 przedmioty, to możemy utworzyć tylko skończoną ilość różnych predykatów jednoargumentowych, mianowicie osiem. Inaczej mówiąc, możemy utworzyć z tych tylko 8 istotnie różnych własności. Każdy z predykatów jest określony przez to, że podajemy, czy staje się on prawdziwym czy fałszywym dla danej wartości argumentu. A więc wyczerpujemy wszystkie predykaty przez podanie następujących możliwych wartości układów 1 (prawda) i 0 (fałsz), które przybierają dla X, Y, Z. Każda z ośmiu kolumn odpowiada innemu predykatowi.

podstawienie	Wartości
X	1 1 1 1 0 0 0 0
Y	1 1 0 0 1 1 0 0
Z	1 0 1 0 1 0 1 0
predykat	1 2 3 4 5 6 7 8

Aby się przekonać, czy wyrażenie jest prawdziwe dla wszystkich predykatów „a”, trzeba podstawić kolejno wszystkie 8 predykatów za „a”. Ale łatwo się przekonać, że to wychodzi na jedno [co podstawić jedynki i zera] tak, jak gdybyśmy mieli zamiast aX, aY, aZ trzy zmienne zdaniowe różnych kształtów. Jeżeli przy wszystkich podstawieniach zer i jedynek za predykaty otrzymamy 1, [to wyrażenie jest spełnione] w przestrzeni o tej ilości przedmiotów, jeżeli przy choćby jednym podstawieniu otrzymamy zero, to wyrażenie nie jest w takiej przestrzeni spełnione.

A więc wyrażenie: $C\Sigma xax\Pi xax$ [$\exists xax \rightarrow \forall xax$] interpretuje się w przestrzeni o 2 przedmiotach jako: $C\{AaXaY\}\{KaXaY\}$ [$aX \vee aY \rightarrow aX \wedge aY$]. Podstawiając: $aX/1, aY/0$ otrzymujemy $CA10K10 = C10 = 0$ [$1 \vee 0 \rightarrow 1 \wedge 0 = 1 \rightarrow 0 = 0$].

Wynik sprawdzenia jest negatywny, wyrażenie nie jest spełnione. Natomiast w przestrzeni złożonej z jednego tylko przedmiotu X to samo wyrażenie jest spełnione, mianowicie interpretacja jego w tej przestrzeni daje: $CaXaX$ [$aX \rightarrow aX$], a więc podstawienie prawa tożsamości, które daje jedność przy podstawieniach zero-jedynkowych. Ogólnie należy sprawdzać tak, jak gdyby otrzymane po wyrugowaniu kwantyfikatorów różnokształtne wyrażenia: aX, bX, bY, fXX, fXY itd. były zmiennymi zdaniowymi różnych kształtów.

W ten sposób określiliśmy sposób sprawdzania pewnych wyrażeń sensownych mianowicie, w których wszystkie zmienne predykatywne są wolne. Wyrażenia takie posiadają nazwę wyrażeń sensownych **węższego** rachunku predykatów. Kwantyfikatory występujące w tych wyrażeniach wiążą jedynie zmienne indywidualne, np. „Πx”, „Πy”, a nie ma takich kwantyfikatorów, jak: „Πa”, „Πb”, „Σf”.

Jeżeli ograniczymy się do wyrażeń węższego rachunku predykatów zawierających jedynie predykaty jednoczłonowe (jednoargumentowe), to bliższe badanie wykazuje, że sprawdzanie w pewnych przestrzeniach skończonych pozwala nam odpowiedzieć na pytanie, czy wyrażenie to daje się udowodnić jako twierdzenie rachunku predykatów, czy też nie. Stosuje się tu mianowicie twierdzenie Löwenheima-Bachmanna, które w zastosowaniu do naszego ujęcia tematu należy [wysłowić] jak następuje:

> **Twierdzenie (Löwenheim-Bachmann):** Jeżeli α jest wyrażeniem sensownym węższego rachunku predykatów i α zawiera jedynie predykaty jednoczłonowe n różnych kształtów, to α wtedy i tylko wtedy daje się udowodnić jako twierdzenie, gdy jest spełnione w przestrzeni o 2^n przedmiotach.

A więc na to, by się przekonać, czy można dowieść wyrażenia zawierającego predykaty jednego kształtu „*a*” – wystarczy zbadać to wyrażenie w przestrzeni o 2 przedmiotach, dla wyrażenia o predykatach „*a*”, „*b*” wystarczy przestrzeń o 2^2 czyli 4 przedmiotach, przy predykatach trzech kształtów: „*a*”, „*b*”, „*c*” wystarczy 8 przedmiotów itd.

Wystarczy więc sprawdzić następujące wyrażenia w przestrzeni o 4 przedmiotach, aby się przekonać, że są twierdzeniami:

*T*29 $E\{\Sigma xAaxbx\}A\{\Sigma xax\}\{\Sigma xbx\}$ $[\exists x(ax \vee bx) \leftrightarrow \exists xax \vee \exists xbx]$

*T*30 $E\{\Sigma xCaxbx\}C\{\Pi xax\}\{\Sigma xbx\}$ $[\exists x(ax \rightarrow bx) \leftrightarrow \forall xax \rightarrow \exists xbx]$

Twierdzeń tych możemy również dowieść, korzystając z reguły wtórnej zastępowania. Oprzeć się możemy na prawie rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem koniunkcji (*T*4) i na twierdzeniu *T*20 rachunku predykatów. Skorzystać przy tym można z twierdzeń de Morgana i *T*49 rachunku zdań. Wnioskiem z *T*30 jest *T*31.

*T*31 $\Sigma xCax\Pi xax$ $[\exists x(ax \rightarrow \forall xax)]$

> *„istnieje takie x, że jeżeli to x spełnia ax, to przy wszelkim x mamy ax”.*

Metoda interpretacji w przestrzeniach skończonych zawodzi z chwilą, gdy przejdziemy do predykatów dwuargumentowych. Istnieją wówczas wyrażenia, które są spełnione we wszelkiej przestrzeni [skończonej], a mimo to nie są twierdzeniami.

Takim jest wyrażenie:

$$NKK\{\Pi x\Pi y\Pi zCKfxyfyzfxz\}\{\Pi xNfxx\}\{\Pi x\Sigma yfxy\}$$
$$[\neg(\forall x\forall y\forall z(fxy \wedge fyz \rightarrow fxz) \wedge \forall x\neg fxx \wedge \forall x\exists yfxy)]$$

Pierwsze spośród wyrażeń ujętych w nawiasy mówi, że stosunek f jest przechodni, drugie, że jest przeciwzwrotny, trzecie, że każdy przedmiot należy do dziedziny tego stosunku. Całe wyrażenie stwierdza, że stosunek f nie posiada tych trzech własności jednocześnie. Nie jest ono ogólnie prawdziwe, bo można dobrać kontrprzykłady w pewnej przestrzeni nieskończonej. Weźmy jako przestrzeń liczby (chociażby liczby całkowite), jako fxy stosunek mniejszości $x < y$. Stosunek mniejszości jest zarazem przechodni, przeciwzwrotny, a przy tym dla każdego x istnieje liczba y większa od x. Przy tym [rozważane] wyrażenie jest spełnione w każdej przestrzeni skończonej, bo gdy założymy jego fałszywość, to wyniknie istnienie nieskończenie wielu indywiduów. Weźmy bowiem dowolne indywiduum x_1. Istnieje takie y, oznaczamy je x_2, że fx_1x_2. Ponieważ nie [zachodzi] fx_1x_1, więc x_2 jest różne od x_1. Istnieje jeszcze takie x_3, że fx_2x_3. Wobec tego na mocy przechodniości: fx_1x_3 i na mocy przeciwzwrotności możemy wywnioskować, że x_3 jest różne zarówno od x_1, jak i od x_2. To rozumowanie możemy powtarzać dowolnie [długo], okazuje się, że ilekolwiek mamy indywiduów $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zawsze istnieje różne od nich indywiduum x_{n+1}.

A więc indywiduów jest nieskończenie wiele. O wyrażeniu spełnionym we wszystkich przestrzeniach skończonych i nieskończonych powiemy, że jest ogólnie ważne. Jeżeli jest spełnione w jednej chociaż przestrzeni nazwiemy je realizowalnym. Odpowiednich pojęć używał już Löwenheim, a Herbrand nadał im bardziej sprecyzowane znaczenie, którego trzymałem się w wykładzie przestrzeni skończonych. Herbrand okazał, że każde ogólnie ważne wyrażenie węższego rachunku predykatów daje się otrzymać jako twierdzenie.

3.5. Rachunek nazw (sylogistyka)

3.5.1. Uwagi historyczne

Najstarszą częścią logiki jest rachunek nazw. Ściślej biorąc jego część, którą nazywamy teorią sylogizmów kategorycznych, a która pochodzi od Arystotelesa ze Stagiry, z wieku IV-go przed narodzeniem Chryst. Należą tu pewne twierdzenia opisujące związki pomiędzy zdaniami tzw. kategorycznymi, tj. mającymi jedną z czterech postaci następujących:

„*Wszelkie a jest b*”,

„*Pewne a jest b*”,

„*Żadne a nie jest b*”,

„*Pewne a nie jest b*”.

Twierdzenia te sprowadzają Peano, Russell i niektórzy inni do twierdzeń rachunku predykatów. Mówiłem, że „*ax*” można rozumieć jako: „*x jest a*”. Ponieważ „*Wszelkie a jest b*” znaczy tyle, co „*Cokolwiek jest a, jest b*”, więc można uważać, że „*Wszelkie a jest b*” daje się zapisać w naszej symbolice jako: „$\Pi xCaxbx$” [$\forall x(ax \to bx)$]. Podobnie „*Pewne a jest b*” zapiszemy jako: „$\Sigma xKaxbx$” [$\exists x(ax \wedge bx)$]. Dokonujemy przez to pewnego przekształcenia formalnego w stosunku do języka zwykłego. Zamiast używać nazw (np. rzeczowników) używamy właściwie czasowników. A więc zdanie:

„Wszelki nauczyciel jest pracownikiem"

sprowadzamy do zdania:

„Przy wszelkim x jeżeli x naucza, to x pracuje".

Nie dla każdego rzeczownika możemy w języku polskim utworzyć odpowiedni czasownik, dlatego (niezupełnie ściśle) będziemy czytać „$\Pi xCaxbx$" [$\forall x(ax \to bx)$] jako: *„Wszelkie a jest b"*. Przy badaniu twierdzeń w postaci podanej przez Arystotelesa i jego następców nasuwają się trudności wywołane tym, że w logice tradycyjnej nie brano pod uwagę nazw pustych, nazw nie dających się orzec prawdziwie o żadnym istniejącym przedmiocie, a więc *„centaur"*, *„kwadratowe koło"* itd. W logice matematycznej nie możemy – bez bardzo istotnego jej zniekształcenia – uniknąć predykatów, które by nie były prawdziwe dla żadnego indywiduum. W myśl reguł wnioskowania możemy za „ax" podstawić „$KpNp$" [$p \wedge \neg p$] – wyrażenie stale fałszywe. Można zresztą podstawić za „ax" wyrażenie: „$KKpNpax$" [$p \wedge \neg p \wedge ax$] – więc mające już wyraźnie postać funkcji o argumencie „x", a przy tym dla wszelkiego x fałszywe. Otóż w tradycyjnej logice nazw wypowiada się m.in. twierdzenie: *„Jeżeli każde a jest b, to pewne a jest b"*. Odpowiednik tego twierdzenia w postaci:

$$C\{\Pi xCaxbx\}\{\Sigma xKaxbx\} \; [\forall x(ax \to bx) \to \exists x(ax \wedge bx)]$$

nie jest ogólnie prawdziwy; fałszywość jego można wykazać, przyjmując za „a" predykat pusty, fałszywy przy wszelkim x. Przy takim podstawieniu – bez względu na „b" – poprzednik „$\Pi xCaxbx$" [$\forall x(ax \to bx)$] jest prawdziwy, natomiast następnik „$\Sigma xKaxbx$" [$\exists x(ax \wedge bx)$] jest fałszywy. Aby utrzymać w mocy tego rodzaju twierdzenia klasyczne, można przyjąć nieco inne rozumienie zdania *„Każde a jest b"*, mianowicie: „$K\{\Pi xCaxbx\}\{\Sigma xax\}$" [$\forall x(ax \to bx) \wedge \exists xax$]. Wtedy jednak występują trudności przy innych twierdzeniach. Niektórzy wreszcie logicy matematyczni mówią wprost, że sylogistyka Arystotelesa zawiera pewne twierdzenia błędne. W naszym wykładzie unikniemy błędów, poprzedzając twierdzenia dodatkowymi poprzednikami, gdzie to jest potrzebne. Leśniewski proponował używać w języku codziennym *„Każde a jest b"* w znaczeniu drugim, silniejszym, to znaczy: *„Cokolwiek jest a to jest b i pewne a istnieje"*. Natomiast znaczenie słabsze *„Cokolwiek jest a, jest b"* bez zastrzeżenia egzystencjalnego wyrazić słowami: *„Wszelkie a jest b"*.

3.5.2. Zdanie ogólne i szczegółowe, twierdzące i przeczące

Aby nawiązać do tradycji, będziemy nazywali:

1) zdaniem ogólnym twierdzącym: „$\Pi xCaxbx$" [$\forall x(ax \to bx)$] – „*Wszelkie a jest b*";

2) zdaniem szczegółowym twiedzącym: „$\Sigma xKaxbx$" [$\exists x(ax \wedge bx)$] – „*Pewne a jest b*";

3) zdaniem ogólnym przeczącym: „$\Pi xCaxNbx$" [$\forall x(ax \to \neg bx)$] – „*Żadne a nie jest b*";

4) zdaniem szczegółowym przeczącym: „$\Sigma xKaxNbx$" [$\exists x(ax \wedge \neg bx)$] – „*Pewne a nie jest b*".

W logice tradycyjnej przyjętym było oznaczać zdania twierdzące samogłoskami z łacińskiego wyrazu „*affirmo*". Mianowicie „a" jest znakiem zdania twierdzącego ogólnego, „i" znakiem zdania twierdzącego szczegółowego. Podobnie korzystając z samogłosek wyrazu: „*nego*", „e" było znakiem zdania ogólnego przeczącego, „o" znakiem zdania szczegółowego przeczącego.

Wymienione w powyższym podziale zdania w logice tradycyjnej noszą nazwę zdań kategorycznych. Podmiot i orzeczenie nazywają się terminami.

3.5.3. Prawa kwadratu logicznego

Twierdzenia będziemy podawali bez dowodu. Czytelnik może bądź dowieść ich, korzystając z reguł wnioskowania lub też sprawdzając je w przestrzeni 4 przedmiotów (ilość ta wystarczy, ponieważ mamy tu tylko zmienne 2 różnych kształtów).

Prawa sprzeczności $T32, T33$ stwierdzają równoważność zdania szczegółowego przeczącego z zaprzeczeniem zdania ogólnego twierdzącego i równoważność zdania ogólnego przeczącego z zaprzeczeniem zdania szczegółowego twierdzącego.

$T32$ $E\{N\Pi xCaxbx\}\{\Sigma xKaxNbx\}$ [$\neg\forall x(ax \to bx) \leftrightarrow \exists x(ax \wedge \neg bx)$]

$T33$ $E\{N\Sigma xKaxbx\}\{\Pi xCaxNbx\}$ [$\neg\exists x(ax \wedge bx) \leftrightarrow \forall x(ax \to \neg bx)$]

$T34$ wyraża prawo podrzędności (subalternacji); ze zdania ogólnego twierdzącego wynika zdanie szczegółowe twierdzące, jeżeli podmiot nie jest nazwą pustą. To ostatnie zastrzeżenie należy dodać, aby otrzymać zdanie ogólne prawdziwe. Odpowiednie prawo dla zdań przeczących otrzymujemy, podstawiając w $T34 bx/Nbx$.

$T34$ $C\{\Sigma xax\}C\{\Pi xCaxbx\}\{\Sigma xKaxbx\}$
[$\exists xax \to (\forall x(ax \to bx) \to \exists x(ax \wedge bx))$]

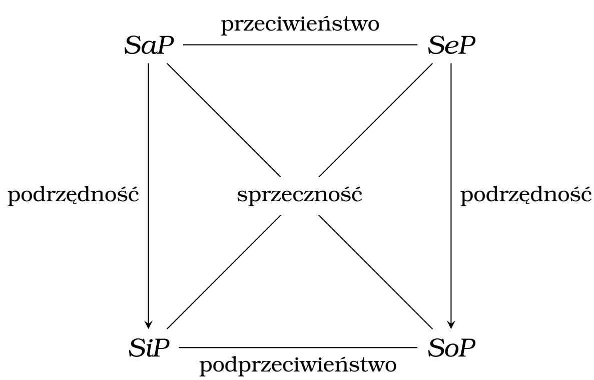
$T35$ nazwiemy prawem przeciwieństwa, $T36$ – prawem podprzeciwieństwa.

$T35$ $C\{\Sigma xax\}C\{\Pi xCaxbx\}\{N\Pi xCaxNbx\}$
$[\exists xax \to (\forall x(ax \to bx) \to \neg\forall x(ax \to \neg bx))]$

$T36$ $C\{\Sigma xax\}A\{\Sigma xKaxbx\}\{\Sigma xKaxNbx\}$
$[\exists xax \to \exists x(ax \wedge bx) \vee \exists x(ax \wedge \neg bx))]$

$T35$ głosi, że zdanie ogólne twierdzące nie może być prawdziwe jednocześnie ze zdaniem ogólnie przeczącym, $T36$, że jedno ze zdań szczegółowych – twierdzące lub przeczące jest prawdziwe.

Oba te twierdzenia w ich symbolicznym ujęciu wymagały dodatkowego warunku: jeżeli a (podmiot) nie jest nazwą pustą. W logice tradycyjnej zestawia się prawa wyrażone w twierdzeniach $T32$–$T36$ w pewien przejrzysty schemat, zwany kwadratem logicznym. Cztery zdania kategoryczne zapisujemy w narożach kwadratu, na bokach i przekątnych piszemy nazwę stosunku zachodzącego pomiędzy zdaniami, które odcinek łączy.



Sylogizmy kategoryczne mówią, jakie zdanie kategoryczne można otrzymać jako wniosek (*conclusio*) z dwóch innych zdań kategorycznych – przesłanek (*premissae*). Jednym z terminów przesłanki pierwszej (tzw. większej) jest orzeczenie wniosku, jednym z terminów przesłanki drugiej (mniejszej), jest podmiot wniosku. Pozostałe terminy – jeden przesłanki większej i jeden mniejszej są równokształtne, nazywają się terminem średnim (*terminus medius*). Aby otrzymać twierdzenie rachunku predykatów, należy niektóre sylogizmy poprzedzić warunkiem egzystencjalnym, stwierdzającym, że pewien termin nie jest nazwą pustą. Ograniczamy się tutaj do podania trzech sylogizmów.

*T*37 $CK\{\Pi xCaxbx\}\{\Pi xCcxax\}\{\Pi xCcxbx\}$
$[\forall x(ax \to bx) \wedge \forall x(cx \to ax) \to \forall x(cx \to bx)]$
– sylogizm Barbara: *Jeżeli wszelkie a jest b i wszelkie c jest a, to wszelkie c jest b.*

*T*38 $CK\{\Pi xCaxNbx\}\{\Pi xCcxax\}\{\Pi xCcxNbx\}$ $[\forall x(ax \to \neg bx) \wedge \forall x(cx \to ax) \to \forall x(cx \to \neg bx)]$
– sylogizm Celarent: *Jeżeli żadne a nie jest b i wszelkie c jest a, to żadne c nie jest b.*

*T*39 $C\{\Sigma xax\}CK\{\Pi xCaxbx\}\{\Pi xCaxcx\}\{\Sigma xKcxbx\}$
$[\exists xax \to (\forall x(ax \to bx) \wedge \forall x(ax \to cx) \to \exists x(cx \wedge bx))]$
– poprzedzony warunkiem egzystencjalnym (jeżeli istnieje pewne *a*) sylogizm Darapti: *Jeżeli wszelkie a jest b i wszelkie a jest c, to pewne c jest b.*

Jeżeli w *T*39 pominiemy początkowy znak implikacji wraz z poprzednikiem „Σxax”, to otrzymujemy wyrażenie fałszywe, o czym można się przekonać, sprawdzając to wyrażenie w przestrzeni złożonej choćby z jednego przedmiotu i podstawiając za *a, b, c* predykaty puste, tzn. podstawiając wartość 0 jednocześnie za *aX, bX, cX*. Każdy sylogizm posiada swoją nazwę, a nazwy są tak dobrane, że:

1) pierwsza samogłoska nazwy jest a, e, i, o – zależnie od tego jakim zdaniem jest przesłanka większa (przypominam: a – ogólnie twierdzące, i – szczegółowe twierdzące, e – ogólne przeczące, o – szczegółowe przeczące),

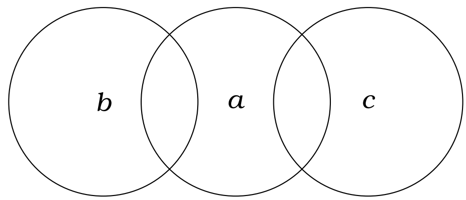
2) druga samogłoska wskazuje, jakim zdaniem jest przesłanka mniejsza,

3) trzecia samogłoska charakteryzuje wniosek, np. w sylogizmie Ferio – przesłanka [większa] jest zdaniem ogólnym przeczącym, przesłanka mniejsza zdaniem szczegółowym twierdzącym. Proszę to sprawdzić dla podanych sylogizmów: Barbara, Celarent, Darapti.

Ponieważ w sylogizmie występują zmienne predykaty trzech kształtów, więc jak wiemy każdy sylogizm wystarczy sprawdzić w przestrzeni złożonej z $2^3 = 8$ przedmiotów, na to, aby się przekonać czy twierdzeniem jest, czy też nie. Podobnego sposobu wykazywania, że pewne sylogizmy są błędne, używano znacznie dawniej. Mianowicie, aby wykazać np. błędność:

$CK\{\Sigma xKaxbx\}\{\Sigma xKcxax\}\{\Sigma xKcxbx\}$
$[\exists x(ax \wedge bx) \wedge \exists x(cx \wedge ax) \to \exists x(cx \wedge bx)]$

(*Jeżeli pewne a jest b i pewne c jest a, to [pewne] c jest b*) można przedstawić przedmioty a, b, c jako punkty leżące wewnątrz kół:



Z rysunku widać, że istotnie koła a, b mają punkty wewnętrzne wspólne, podobnie koła c, a. Mimo to nie istnieją wspólne punkty kół c, b. Przy pomocy metody sprawdzania, której tu używamy, można wykazać błędność rozważanego wyrażenia już w przestrzeni złożonej z dwóch przedmiotów, mianowicie oznaczając te przedmioty X, Y, wystarczy podstawić:

$$aX/1, aY/1, bX/1, bY/0, cX/0, cY/1$$

Rozdział 4

Zastosowania Logiki Matematycznej

4.1. Systemy dedukcyjne

4.1.1. Ogólne własności systemu dedukcyjnego sformalizowanego

Poznaliśmy dwie teorie logiczne: rachunek zdań i rachunek predykatów, obydwie w postaci sformalizowanego systemu dedukcyjnego. To znaczy, że (1) za twierdzenia uznaliśmy pewne napisy i (2) uznanie twierdzeń odbywało się na mocy reguł wnioskowania strukturalnych, tj. takich, w których mówiliśmy jedynie o tym, jakiego kształtu napisy wolno uznać za twierdzenia. Te dwa warunki właśnie wystarczą do tego, aby zbiór twierdzeń móc uważać za sformalizowany system dedukcyjny. Nadanie takiej właśnie postaci pewnej teorii nazywamy jej formalizacją. Z chwilą, gdy mamy system dedukcyjny sformalizowany, możemy wyprowadzić twierdzenia, nie odwołując się do ich intuicyjnego znaczenia, praca przy wnioskowaniu sprowadza się do porównywania kształtów pewnych napisów, do stwierdzenia ich równokształtności. Poznaliśmy szereg korzyści wypływających z formalizacji. Osiągneliśmy ścisłość i zwięzłość zapisywanych twierdzeń, nie krępowaliśmy się zwyczajami języka potocznego, ani jego własnościami stylistycznymi. Wreszcie dzięki dokładnemu wysłowieniu strukturalnych reguł wnioskowania mogliśmy dowieść twierdzeń metodologicznych. Okazaliśmy, że pewnych wyrażeń nie możemy udowodnić, a dla pewnej obszernej klasy wyrażeń umieliśmy podać sposób ich rozstrzygania, tzn. zbadania, czy wyrażenie daje się udowodnić jako twierdzenie czy też nie.

Oczywiście można utworzyć wiele innych systemów sformalizowanych. Nie wszystkie są zajmujące, nie wszystkie są formalną postacią jakiejś teorii naukowej. Wystarczy bowiem wypowiedzieć jakiekolwiek strukturalne reguły uznawania pewnych napisów za twierdzenia, na to, by te twierdzenia tworzyły sformalizowany system dedukcyjny. Nas interesują oczywiście te systemy dedukcyjne, które są sformalizowaniem pewnej teorii naukowej. Jakie teorie wchodzą tu w grę, jakie [nauki] można przedstawić w postaci systemu dedukcyjnego?

Otóż systemy dedukcyjne zaliczamy tradycyjnie do logiki lub do matematyki. Czym się różni logika od matematyki?

System rachunku predykatów otrzymaliśmy w ten sposób, że pozostawiliśmy w mocy wszystkie reguły wnioskowania rachunku zdań, a ponadto przyjęliśmy w mocy nowe reguły, które pozwoliły otrzymać szereg twierdzeń obcych już rachunkowi zdań. Tzn., że w rachunku predykatów możemy otrzymać wszystkie twierdzenia rachunku zdań, a ponadto pewne inne. Wobec takiej sytuacji mówimy, że rachunek zdań jest systemem **logicznie wcześniejszym** od rachunku predykatów, który jest systemem późniejszym.

Jeżeli chcemy scharakteryzować różnice między logiką a matematyką, to przede wszystkim trzeba podkreślić, że systemy logiczne są wcześniejsze od systemów matematycznych. Jeżeli nawet w matematyce nie wypowiadamy twierdzeń logicznych, np. twierdzeń rachunku zdań, to jednak korzystamy z logicznych wyrazów („*jeżeli*", „*lub*") i z logicznych reguł wnioskowania. Dokładną granicę pomiędzy logiką a matematyką trudno jest przeprowadzić, jakkolwiek tę granicę nakreślamy, zawsze będzie miała charakter umowny, w pewnej mierze dowolny. Można zresztą uważać, że logika w jej sformalizowanej postaci, a więc dzisiajsza logika matematyczna, jest jednym z działów matematyki. W każdym razie matematyka wraz z logiką wzięte łącznie odróżniają się wyraźnie od innych nauk tym właśnie, że tworzą systemy dedukcyjne. Mówimy, że są to nauki **dedukcyjne**.

W matematyce również możemy odróżnić działy wcześniejsze (zwane potocznie niższymi) i późniejsze (wyższe). Rachunek różniczkowy jest późniejszy względem arytmetyki, bo używamy w nim znaków plus, minus i korzystamy z twierdzeń arytmetycznych, które pozostają w mocy. Poznane przez nas systemy rachunku zdań i rachunku predykatów były przedstawione w taki sposób, że przed wysłowieniem reguł wnioskowania poznaliśmy reguły sensowności, a z pojęcia wyrażenia sensownego korzystaliśmy przy formułowaniu reguł wnioskowania. Ale reguły sensowności wyznaczały same przez się pewien pomocniczy system dedukcyjny. Wszystkie wyrażenia sensowne można uważać za twierdzenia pewnego sformalizowanego systemu dedukcyjnego w tym sensie, w jakim tu system dedukcyjny pojmujemy, gdyż reguły sesnowności są strukturalne. Podobnie we wszystkich systemach dedukcyjnych logiczno-matematycznych oprócz właściwych twierdzeń systemu ustala się znakowanie, język systemu podaje się w reguły sensowności.

Na ogół w systemach późniejszych mamy większe bogactwo języka (znaków), np. każde wyrażenie sensowne rachunku zdań jest wyrażeniem sensownym rachunku predykatów, ale nie przeciwnie: istnieją sensowne [wyrażenia] w rachunku predykatów (chociażby ”*ax*„), które [nie] są sensowne w rachunku zdań. Zbadamy nieco bliżej, w jaki sposób możemy otrzymać systemy późniejsze, opierając się na podanych tutaj założeniowych systemach logicznych.

4.1.2. Typy logiczne

W gramatyce języka zwykłego dzielimy wyrazy na części mowy: rzeczowniki, czasowniki, itd. Jeżeli zmienimy w zdaniu, wyrażeniu sensownym, pewien wyraz na inny należący do tej samej części mowy zdanie może przestać być prawdziwym, lecz pozostanie sensownym. Skoro zarówno „*czyta*”, jak i „*pisze*” są czasownikami, to przez zmianę tych czasowników otrzymamy ze zdania „*Jan czyta*” zdanie „*Jan pisze*”, które może być prawdziwe lub fałszywe, lecz na pewno jest zrozumiałe, jest sensowne. Gdybyśmy jednak zmienili czasownik na rzeczownik, otrzymalibyśmy np. „*Jan Jan*” – wyrażenie niesensowne, niezrozumiałe, nie będące ani prawdziwym, ani fałszywym. W języku symbolicznym, który poznaliśmy, mamy również pewną ilość części mowy. Te części mowy języka symbolicznego nazywają się typami logicznymi (Leśniewski używa nazwy „kategorie semantyczne”). Niektóre wśród nich są to stałe lub zmienne znaki funkcji, poznaliśmy np.: „*C*”, „*K*”, „*A*”, „*E*” – są to znaki takich funkcji, których wartością jest zdanie, i które posiadają dwa argumenty zdaniowe.

Wszystkie są one jednego typu logicznego, jeżeli zastąpimy np. znak „*C*” w jakimś wyrażeniu sensownym przez znak „*A*”, to wyrażenie nie przestanie być sensownym. Wiemy również, że jeżeli w jakimś wyrażeniu sensownym zastąpimy jakąś sensowną jego część innym wyrażeniem sensownym [tej samej kategorii], to całe wyrażenie pozostanie sensowne, np. zastępując w „*CCpqr*” $[(p \to q) \to r]$ część sensowną „*Cpq*” $[p \to q]$ wyrażeniem sensownym „*AKpqCrs*” $[p \wedge q \vee (r \to s)]$ otrzymamy „*CAKpqCrsr*” $[p \wedge q \vee (r \to s) \to r]$. Dlatego powiemy, że wszystkie wyrażenia sensowne posiadają ten sam typ logiczny, typ zdania, który oznaczamy literą „z”. Ten sam typ posiadają oczywiście zmienne zdaniowe, które przecież są wyrażeniami sensownymi. Inny typ logiczny posiadają zmienne indywidualne. Mówiliśmy, że reprezentują one imiona własne. Nie jest rzeczą konieczną, by tak właśnie rozumieć te zmienne, nie będziemy bliżej w tę sprawę wnikali.

Istotną jest rzeczą, że prócz zmiennych zdaniowych mieliśmy do czynienia jeszcze z jednym typem zmiennych, które nie są znakami funkcji. Typ ten nazwiemy typem indywiduów, zaznaczamy go przez „i”. Poza tym mieliśmy do czynienia z pewnymi typami funktorów, tj. znaków funkcji. Typ funktora możemy (za prof. Ajdukiewiczem) przedstawić w postaci ułamka, w którym na miejscu mianownika piszemy typy argumentów, a na miejscu licznika typ wartości funkcji. A więc typ znaku przeczenia „N” zapiszemy jako z/z, bo jest to znak funkcji, której argumentem jest zdanie np. „p”, a przy właściwym doborze argumentu całe wyrażenie, tj. funkcja „Np” posiada typ logiczny zdania; wartością funkcji „Np” może być tylko zdanie. Mówimy, że znak negacji ma typ funktora zdaniowego (lub „zdaniotwórczego”) o jednym argumencie zdaniowym. Inne znane nam typy: „C”, „A”, itd. są to funktory zdaniowe o dwóch argumentach zdaniowych, typ ten można zapisać jako: $z/z, z$. Predykaty są to funktory zdaniotwórcze o jednym lub kilku argumentach indywidualnych, należą zatem do różnych typów logicznych w zależności od ilości argumentów. Predykaty jednoargumentowe oznaczane przez nas literami „a”, „b”, „c” posiadają typ logiczny: z/i, predykaty dwuargumentowe, czyli stosunki „f”, „g”, . . . mają typ $z/i, i$.

W językach późniejszych systemów logicznych i matematycznych występują znaki (zmienne lub stałe) posiadające inne typy logiczne, wyższe w stosunku do poznanych dotychczas. W różnych systemach formalnych przyjmowane są różne zasady podziału wyrażeń na typy logiczne. Pierwsza teoria typów pochodzi od Russella. Tutaj podałem teorię, według której typy logiczne zupełnie odpowiadają gramatycznym częściom mowy – taką koncepcję wypowiedział pierwszy Chwistek. W zasadzie zgadzał się z nią Leśniewski (kategorie semantyczne), choć u Leśniewskiego brakuje typu indywiduum, a kategorie zaczynają się od nazw jako kategorii najniższej.

4.1.3. Antynomia Russella

Wskażę jeszcze na niebezpieczeństwo, na jakie jesteśmy narażeni, jeżeli nie przestrzegamy typów logicznych. Umówiliśmy się, że w „ax” zmienna „x” reprezentuje imię własne, zmienna „a” orzeczenie, a więc całość „ax” może po podstawieniach przejść na przykład w zdanie „*Jan naucza*”. Gdybyśmy zamiast „*x*” podstawili również orzeczenie „*naucza*”, otrzymalibyśmy wyrażenie nie mające sensu „*naucza naucza*”. Ale przypuśćmy, że budujemy system sformalizowany, w którym nie wprowadzamy rozróżnień dotyczących typu zmiennych. Dla osiągnięcia jednoznaczności trzeba wtedy wprowadzić nawiasy, które wskażą, gdzie znajduje się funktor, a gdzie argument. A więc zamiast „ax” piszemy „$a(x)$”. Nawias ten moglibyśmy opuszczać bez obawy dwuznaczności dopóki funktor i argument nie mogły mieć tego samego kształtu. Skoro jednak mamy nie przestrzegać typów logicznych, a więc wyrażenie „$a(a)$” uznamy za sensowne, trzeba używać nawiasów.

„$a(a)$” możemy przeczytać jako „*Własność przysługuje sama sobie*”. W języku potocznym nie znajdujemy w tym zwrocie nic nieprawidłowego, nieznanego. Jesteśmy bowiem przyzwyczajeni do używania rzeczownika „własność”, czy też „cecha” na równi z takimi rzeczownikami jak „*Jan*”, czy „*Sokrates*”. Sokratesowi mogą przysługiwać pewne cechy: jest mądry, wysoki, itd. Podobnie własnościom przysługują z kolei pewne własności np. to, że dana własność przysługuje więcej niż dwóm przedmiotom. Niewątpliwie istnieje więcej niż dwie takie własności, które przysługują więcej niż dwóm przedmiotom. Takimi własnościami są chociażby własności „być białym”, „być czarnym”, „być czerwonym”. A więc – skłonni jesteśmy powiedzieć – własność przysługiwania większej ilości przedmiotów niż dwóm, jest własnością, która przysługuje sama sobie. Oznaczmy przez „$a(b)$” własność polegającą na tym, że b nie jest własnością przysługującą samej sobie. A więc: przy wszelkim b wtedy i tylko wtedy $a(b)$, gdy nieprawda, że $b(b)$. Zbadamy, co wyniknie z założenia, że własność taka istnieje.

$\overbrace{\Pi bEa(b)Nb(b)}$	(założenie 1)
$Ea(a)Na(a)$	(w założeniu 1 podstawiliśmy b/a)
$\quad\overbrace{Na(a)}$	(założenie 2 – przypuszczamy, że własność a nie przysługuje sama sobie)
$\quad\underbrace{a(a)}$	(odrywanie)
$a(a)$	(wobec sprzeczności, do której nas doprowadziło zał. 2)
$\underbrace{Na(a)}$	(odrywanie)[1]

[1]

$\overbrace{\forall b(a(b) \leftrightarrow \neg b(b))}$	(założenie 1)
$a(a) \leftrightarrow \neg a(a)$	(w założeniu 1 podstawiliśmy b/a)
$\quad\overbrace{\neg a(a)}$	(założenie 2 – przypuszczamy, że własność a nie przysługuje sama sobie)

A więc założenie 1 doprowadziło nas do sprzeczności. Tę sprzeczność dostalibyśmy, gdybyśmy zamiast założenia 1 przyjęli podwójne zaprzeczenie tego założenia. Wobec tego na mocy reguły sprzeczności otrzymać możemy twierdzenie:

$N\Pi bEa(b)Nb(b)$ $[\neg\forall b(a(b) \leftrightarrow \neg b(b))]$

Nie pozostało nam nic innego, jak stwierdzić, że opisana w założeniu 1 własność a nie istnieje. A jednak umiemy ją określić, jeżeli nie rozróżniamy typów. I tego umiemy w sposób formalny dowieść. Ostatnie twierdzenie zawiera zmienną wolną „a". Możemy zastosować regułę generalizacji, a następnie podstawianie funkcyjne za tę zmienną. Skoro twierdzenie jest słuszne dla wszystkich własności a przedmiotu b, to jest też słuszne dla własności polegającej na tym, że b nie jest własnością przysługującą samej sobie, a więc przy podstawieniu $a(b)/Nb(b)$. Otrzymamy twierdzenia:

$\Pi aN\Pi bEa(b)Nb(b)$ $[\forall a\neg\forall b(a(b) \leftrightarrow \neg b(b))]$ (reguła generalizacji)

$N\Pi bENb(b)Nb(b)$ $[\neg\forall b(\neg b(b) \leftrightarrow \neg b(b))]$ (podstawienie $a(b)/Nb(b)$)

To ostatnie twierdzenie jest równie błędne. Weźmy prawo tożsamości Epp, przez podstawienie $p/Nb(b)$ otrzymujemy $ENb(b)Nb(b)$ $[\neg b(b) \leftrightarrow \neg b(b)]$, a przez zastosowanie reguły generalizacji:

$\Pi bENb(b)Nb(b)$ $[\forall b(\neg b(b) \leftrightarrow \neg b(b))]$

a więc sprzeczność w obszarze twierdzeń.

Podane tutaj rozumowanie jest w swej istocie antynomią, którą wykrył Russell, wykazując sprzeczność nie tylko teorii mnogości Cantora, ale także sformalizowanego w sposób doskonały systemu Fregego. Ściślej biorąc w antynomii Russella mówi się o zbiorach, które nie są własnymi elementami. Aby otrzymać to sformułowanie, wystarczy czytać „$a(x)$" jako „x jest elementem zbioru a". Wtedy „$Nb(b)$" znaczy tyle, co „*b nie jest elementem zbioru b*". I tu również język potoczny jest instrumentm, który nie ostrzega nas przed bezsensem kryjącym się w zwrocie: „*b jest elementem zbioru b*". „zbiór" jest rzeczownikiem, w zwrocie „x jest elementem zbioru a" podstawiamy rzeczowniki na miejsce obu zmiennych.

$\underbrace{a(a)}$	(odrywanie)
$a(a)$	(wobec sprzeczności, do której nas doprowadziło zał. 2)
$\underbrace{\neg a(a)}$	(odrywanie)

Nie czujemy, że równokształtne wyrazy nie mogą sensownie występować jednocześnie na obu miejscach. Przeważnie skłonni jesteśmy do **hipostazy** językowej, tj. do uwierzenia, że istnieją jakieś przedmioty będące zbiorami czy własnościami, skoro istnieją odpowiednie rzeczowniki.

4.1.4. Definicje

Poznaliśmy trzy prawa identyczności (*T*23–25), można wyprowadzić wiele innych. W twierdzeniach tych występują wyrażenia „$\Pi aEaxay$", „$\Pi aEayaz$" [$\forall a(ax \leftrightarrow ay)$, $\forall a(ay \leftrightarrow az)$], które znaczą tyle, co w języku zwykłym *„x jest identyczne z y"*, *„y jest identyczne z z"*. (Identyczność rozumiemy tak, jak Tomasz z Akwinu i Leibniz). Wyrażenia symboliczne są w tym wypadku niezbyt krótkie. Widzieliśmy, że przy pomocy identyczności możemy wypowiedzieć wyrażenia, które rozumiemy jako: *„Dwa przedmioty posiadają własność a"* itd. W wyrażeniach takich kilkakrotnie występuje identyczność, dlatego są one już nieprzyjemnie długie. Niewątpliwie byłoby ze względów praktycznych pożyteczne wprowadzić jakieś krótsze oznaczenie dla identyczności, by zamiast pisać „$\Pi aEaxay$" [$\forall a(ax \leftrightarrow ay)$], móc zapisywać wyrażenia krótsze, np. „$x = y$", czy też – konsekwentnie umieszczając funktor na początku – „ixy". Aby mieć prawo używać takiego skrótu, trzeba w takiej czy innej postaci wprowadzić definicje. Definicje są bardzo różnie przez różnych autorów traktowane. A więc niektórzy – jak Russell, Hilbert – uważają wyrażenia zdefinowane jedynie jako skróty, jako wyrażenia, które ze względów praktycznych zapisaliśmy nie tak, jak powinniśmy byli zapisać. Sama definicja jest notatką różną zupełnie co do charakteru od twierdzeń. W systemach tych definicje są teoretycznie zbędne, można by ich nie wprowadzać.

Jeżeli używamy reguł założeniowych, to nie wprowadzając osobnej reguły definiowania – możemy zapisać **definicje jako założenia.** Przypominam, że „i" jest zmienną predykatywną o 2 argumentach. Aby otrzymać wszystkie twierdzenia dla identyczności oznaczonej przez „ixy" wystarczy założyć, że przy wszelkich x, y wyrażenie to jest równoważne wyrażeniu „$\Pi aEaxay$" [$\forall a(ax \leftrightarrow ay)$] . Przyjmiemy więc założenie, które nazywać będziemy **definicją identyczności.**

$\overbrace{\Pi x \Pi y E\{ixy\}\{\Pi aEaxay\}}$	(założenie 1 definicja identyczności)
$E\{ixx\}\{\Pi aEaxax\}$	(podstawienia x/x, y/x)
ixx	(zwrotność – otrzymana przez odrywanie wobec *T*23)
$\overbrace{ixy}$	(założenie 2)

$E\{ixy\}\{\Pi aEaxay\}$	(podstawienie x/x, y/y)
$\Pi aEaxay$	(odrywanie)
$\Pi aEayax$	(odrywanie od $T24$)
$E\{iyx\}\{\Pi aEayax\}$	(otrzym. z założ. 1 przez podstawianie)
$\underbrace{iyx}$	(odrywanie)
$Cixyiyx$	(symetryczność i – na mocy reguły C1)[2]

Podobnie można wyprowadzić w obszarze założenia 1 prawo przechodniości stosunku i, mianowicie:

$CK\{ixy\}\{iyz\}\{ixz\}$ $[ixy \wedge iyz \to ixz]$

Można okazać będzie to twierdzenie metodologii, że jakiekolwiek weźmiemy twierdzenia dotyczące identyczności zapisanej w postaci „$\Pi aEaxay$" $[\forall a(ax \leftrightarrow ay)]$ [względnie przy innych oznaczeniach zmiennych], to odpowiednik tego twierdzenia dla „ixy" daje się otrzymać jako konsekwencja założenia 1. Ale i przeciwnie. Jeżeli w obszarze założenia 1 otrzymamy pewne konsekwencje α, to wyraża ono prawo, którego odpowiednik daje się otrzymać. Odpowiednik ten jest wynikiem podstawienia $ixy/\Pi aEaxay$ $[ixy/\forall a(ax \leftrightarrow ay)]$ w wyrażeniu α.

Szczególne znaczenie posiada przypadek, w którym konsekwencja α nie zawiera znaku zdefiniowanego „i". Rozpatrzmy ten przypadek dokładniej. Mamy

$\overbrace{\Pi x \Pi y E\{ixy\}\{\Pi aEaxay\}}$	(założenie – definicja)
$\underbrace{\alpha}$	(konsekwencja niezawierająca „i")

[2]

$\overbrace{\forall x \forall y(ixy \leftrightarrow \forall a(ax \leftrightarrow ay))}$	(założenie 1 definicja identyczności)
$ixx \leftrightarrow \forall a(ax \leftrightarrow ax)$	(podstawienia x/x, y/x)
ixx	(zwrotność – otrzymana przez odrywanie wobec $T23$)
$\overbrace{ixy}$	(założenie 2)
$ixy \leftrightarrow \forall a(ax \leftrightarrow ay)$	(podstawienie x/x, y/y)
$\forall a(ax \leftrightarrow ay)$	(odrywanie)
$\forall a(ay \leftrightarrow ax)$	(odrywanie od $T24$)
$iyx \leftrightarrow \forall a(ay \leftrightarrow ax)$	(otrzym. z założ. 1 przez podstawianie)
$\underbrace{iyx}$	(odrywanie)
$ixy \to iyx$	(symetryczność i – na mocy reguły C1)

$C\{\Pi x \Pi y E\{ixy\}\{\Pi a E axay\}\}\alpha$	(na mocy reg. C1)
$\Pi i C\{\Pi x \Pi y E\{ixy\}\{\Pi a E axay\}\}\alpha$	(generalizacja)
$C\{\Pi x \Pi y E\{\Pi a E axay\}\{\Pi a E axay\}\}\alpha$	(podstawienie funkcyjne: $ixy/\Pi a E axay$)[3]

Poprzednik ostatniego twierdzenia możemy otrzymać z prawa tożsamości:

$$\Pi x \Pi y E\{\Pi a E axay\}\{\Pi a E axay\}\ [\forall x \forall y(\forall a(ax \leftrightarrow ay) \leftrightarrow \forall a(ax \leftrightarrow ay))]$$

wreszcie na mocy reguły odrywania otrzymujemy twierdzenia postaci: α.

Okazaliśmy, że jeżeli pewna konsekwencja założenia 1 nie zawiera znaku „*i*”, to daje się otrzymać jako twierdzenie. Tę własność założenia 1 możemy wypowiedzieć w takiej postaci: definicja identyczności zapisana jako założenie 1 nie jest definicją twórczą. To znaczy, że jeżeli pominiemy wyrażenia, które zawierają termin zdefiniowany przyjęcie tej definicji nie zwiększa zasobu wyrażeń uznanych, ważnych.

Rozpatrzyliśmy tu bardzo prosty przykład definicji, przykład, w którym definiowany był stosunek. Jeżeli przejdziemy do języka, w którym istnieją zmienne wyższych typów, to możemy podobnie definiować terminy bardziej złożone, na przykład taki, który orzeka, że predykat *b* jest spełniony przez taką, a nie inną ilość przedmiotów. Niech „U” będzie znakiem typu $z/z/i$ to znaczy funktorem zdaniowym, którego argument jest predykatem jednoargumentowym, a zatem „$U(b)$” jest sensowne.

W obszarze definicji identyczności zakładamy dodatkowo definicję „U”:

$$\Pi b E U(b) K\{\Sigma x bx\}\{\Pi x \Pi y C[Kbxby]ixy\}$$
$$[\forall b U(b) \leftrightarrow \exists x bx \wedge \forall x \forall y(bx \wedge by \rightarrow ixy)]$$

$U(b)$ znaczy: istnieje dokładnie jeden przedmiot posiadający własność *b*.

Można dokładnie strukturalnie określić, kiedy należy używać założenie za definicję. Tutaj chciałem tylko okazać, że posługując się regułami założeniowymi, umiemy bez pomocy odrębnej reguły definiowania osiągnąć cel definicji, mianowicie wprowadzić skrócone sposoby zapisywania wyrażeń.

[3]

$\overbrace{\forall x \forall y(ixy \leftrightarrow \forall a(ax \leftrightarrow ay))}$	(założenie – definicja)
$\underbrace{\alpha}$	(konsekwencja niezawierająca „*i*”)
$\forall x \forall y(ixy \leftrightarrow \forall a(ax \leftrightarrow ay)) \rightarrow \alpha$	(na mocy reg. C1)
$\forall i(\forall x \forall y(ixy \leftrightarrow \forall a(ax \leftrightarrow ay)) \rightarrow \alpha)$	(generalizacja)
$\forall x \forall y(\forall a(ax \leftrightarrow ay) \leftrightarrow \forall a(ax \leftrightarrow ay)) \rightarrow \alpha$	(podstawienie funkcyjne: $ixy/\forall a(ax \leftrightarrow ay)$)

4.1.5. Aksjomaty

Pewne systemy tworzymy w ten sposób, że do twierdzeń logiki dołączamy pewne aksjomaty (pewniki), czyli wyrażenia uznane za prawdziwe bez dowodu. Interesuje nas w tej chwili przypadek, w którym nie wzmacniamy przy tym reguł wnioskowania. Wówczas aksjomaty możemy przyjąć za założenia, a konsekwencje założeń będą to twierdzenia nowego systemu. Na przykład identyczność – możemy wprowadzić na drodze aksjomatycznej, przyjmując jako założenia następujące aksjomaty:

$\overbrace{\Pi x i x x}$ (założenie 1)

$\overbrace{\Pi a \Pi x \Pi y C\{ixy\}\{Caxay\}}$ (założenie 2)[4]

W obszarze tych założeń możemy otrzymać konsekwencję:

$$\Pi x \Pi y E\{ixy\}\{\Pi a E a x a y\} \ [\forall x \forall y(ixy \leftrightarrow \forall a(ax \leftrightarrow ay))]$$

równokształtną z definicją identyczności, wobec czego możemy otrzymać również wszystkie konsekwencje definicji. Jakąkolwiek mamy konsekwencję α założeń 1 i 2, to na mocy reguły C1, tworzenia implikacji możemy otrzymać pewne twierdzenie logiczne, które będzie posiadało budowę następującą:

$$C\{\text{aksjomat } 1\}\{C\{\text{aksjomat } 2\}\alpha \ [\text{aksjomat } 1 \rightarrow (\text{aksjomat } 2 \rightarrow \alpha)]$$

Wśród zmiennych występujących w założeniach 1 i 2 zmiennymi wolnymi są tylko zmienne „*i*”. W obszarze założeń tych znak „*i*” znaczy właściwie zawsze to samo, dopóki nie wychodzimy poza obszar, znak ten zachowuje się jak znak stały. Zauważmy, że różnica pomiędzy znakiem stałym a zmienną jest rzeczą do pewnego stopnia umowną. Jeżeli rozpatrujemy funkcję liniową (np. równanie prostej) $y = ax + b$, to mówimy, że zmiennymi są „*x*”, „*y*”, natomiast stałymi są „*a*”, „*b*”. Tymczasem w pewnych dalszych rozważaniach nieraz wychodzi na jaw, że „*a*”, „*b*” posiadają charakter zmiennych, że można za „*a*”, „*b*” podstawić pewne wyrażenia bardziej złożone.

Uwagi ogólne. Za klasyczne, dotychczas powszechne w podręcznikach można przyjąć następujące ujęcie teorii systemów dedukcyjnych:

1) Budując pewien system dedukcyjny, mówimy, jakie systemy uważamy za wcześniejsze tzn. jakich systemów twierdzenia pozostawiamy w mocy.

---

4 $\overbrace{\forall x i x x}$ (założenie 1)

$\overbrace{\forall a \forall x \forall y(ixy \rightarrow (ax \rightarrow ay))}$ (założenie 2)

2) Podajemy aksjomaty (pewniki), tj. uznajemy pewne wyrażenia za ogólnie ważne bez dowodu. Na oznaczenie zarówno aksjomatu, jak i twierdzenia używa się wyrazu „teza”. Niekiedy zamiast skończonej ilości aksjomatów przyjmujemy takich wyrażeń nieskończenie wiele, nie mówimy wtedy, że tworzą one układ aksjomatów, lecz że tworzą **bazę** nieskończoną. Układ aksjomatów nazywamy również bazą, mianowicie bazą skończoną systemu.

3) W aksjomatach lub ogólniej w wyrażeniach należących do bazy występować mogą zmienne, tj. znaki za które możemy podstawiać pewne wyrażenia mimo iż nie w każdym systemie są one związane kwantyfikatorem ogólnym, niekiedy także inne zmienne związane, wreszcie pewne znaki **stałe**, do których nie możemy stosować reguły podstawiania. Stałe występujące w aksjomatach nazywamy **terminami pierwotnymi** systemu, znaczenie ich, sens intuicyjny, jest wyjaśniony przez aksjomaty.

4) Wreszcie określone są reguły wnioskowania systemu. Wśród reguł wnioskowania może znajdować się taka czy inna reguła definiowania, jeżeli taka istnieje, to przy pomocy terminów pierwotnych możemy definiować inne stałe terminy systemu.

Ten ustalony porządek psują przede wszystkim systemy nieposiadające aksjomatów, jak poznane systemy założeniowe.

Zresztą aksjomatykę możemy zawsze zastąpić specjalną regułą głoszącą, że takie wyrażenia (tu należy opisać kształt aksjomatów) można dołączyć do dowodu jako twierdzenia. Nie zawsze system musi mieć terminy pierwotne niebędące stałymi znakami systemu wcześniejszego, na którym się opiera. Najciekawszym niespodziewanym na to przykładem jest arytmetyka w ujęciu Fregego i Russella.

4.1.6. Arytmetyka

Jeżeli rozpoczniemy od rachunku zdań i przechodzimy do coraz późniejszych systemów, to pierwszym systemem, który niewątpliwie zasługuje na nazwę systemu matematycznego, a nie logicznego, jest arytmetyka. Przez arytmetykę liczb naturalnych (wraz z zerem) będę rozumiał system, w którym występują zmienne liczbowe, tzn. takie zmienne, za które można podstawić stałe liczby: 0, 1, 2 itd. Oprócz liczb terminami stałymi są: znak dodawania, znak mnożenia, znak równości itd. Ze względu na użycie zmiennych arytmetyka w tym rozumieniu przypomina algebrę szkolną. Twierdzenia, które można w niej wypowiadać przy użyciu kwantyfikatorów, należą często do działu matematyki zwanego teorią liczb. Arytmetykę można oprzeć na rozmaitych układach aksjomatów.

Peano podał prosty układ aksjomatów z terminami pierwotnymi. Ciekwszy jest inny sposób ugruntowania arytmetyki. Mianowicie Frege odkrył, że terminy arytmetyczne dają się zdefiniować za pomocą terminów logicznych. Widzieliśmy, że w rachunku predykatów umiemy wypowiedzieć takie zdanie, jak: „dokładnie dwa przedmioty posiadają własność *b*". Wyrażenie takie możemy zapisać w postaci „2(*b*)", gdzie „2" jest funktorem zdaniowym o jednym argumencie predykatywnym, ściślej typ znaku „2" można określić wzorem $z/z/i$.

Bliższe badanie ukazuje, że tak zdefiniowane „2" można uważać za liczbę dwa zdefiniowaną w języku logicznym.

Podobnie – w tym samym typie logicznym – możemy zdefiniować wszystkie liczby naturalne. Wreszcie możemy zdefiniować ogólnie, co rozumieć będziemy przez liczbę naturalną, co przez ich sumę, iloczyn itd. Przy tych definicjach wyniknie pewna ilość twierdzeń bez pomocy żadnego aksjomatu, będą to więc twierdzenia ściśle logiczne. Nie otrzymamy jednak wszystkich twierdzeń, dopóki nie przyjmiemy pewnego aksjomatu.

Ponieważ sens każdego wyrazu (znaku) arytmetycznego daje się wyrazić w wyrazach logicznych (definicje właśnie tak ten sens wyrażają), więc wszelki aksjomat sformułowaany za pomocą znaków arytmetyki posiada określony sens logiczny. Aksjomat, który wystarczy przyjąć, aby otrzymać arytmetykę liczb naturalnych posiada sens bardzo prosty. Mianowicie jest to aksjomat stwierdzający, że istnieje nieskończenie wiele przedmiotów. Aksjomat ten (sformułowany przez Russella) nosi nazwę aksjomatu nieskończoności.

Zdefiniowanie terminów arytmetyki za pomocą terminów logiki jest właśnie ściślejszym ujęciem tego samego sposobu, którego używamy, ucząc dzieci [klas] początkowych. Zaczynamy od liczenia przedmiotów, od liczb mianowanych. Umiemy dalej sprowadzić pojęcie dodawania do pewnego dołączania przedmiotów, podobnie wyjaśniamy, na czym polega mnożenie.

Zasadnicze znaczenie dla metodologii arytmetyki posiada wynik Gödla z roku 1931. Gödel okazał, że arytmetyki liczb naturalnych ze znakami dodawania i mnożenia nie można zaksjomatyzować w sposób zupełny. Jakikolwiek weźmiemy układ aksjomatów, zawsze będzie istniało wyrażenie, którego nie potrafimy dowieść na gruncie tej aksjomatyki, ani też wykazać jego błędności. I to przy wszelkich strukturalnych regułach wnioskowania.

4.2. Zastosowanie do metodologii nauk empirycznych

4.2.1. Uwagi ogólne

W wykładzie dotychczasowym, dopóki mówiliśmy o metodologii nauk dedukcyjnych, mieliśmy do czynienia z materiałem dokładnie zbadanym, opracowanym. Inaczej rzecz się ma z metodologią nauk empirycznych, przyrodniczych. Aczkolwiek logicy matematyczni stawiają sobie za zadanie opracować metodologię nauk empirycznych tak samo pojętą, jak to uczynili z metodologią nauk dedukcyjnych, to jednak program ich w tym zakresie nie został dotychczas zrealizowany. Dlatego należy raczej mówić jeszcze o zagadnieniach, niż o wynikach w tej dziedzinie. Tym niemniej dobrze jest poznać terminologię, która się wytwarza i która pozwala z większą ścisłością te zagadnienia omawiać.

Zagadnieniami tymi zajmuje się m.in. grupa złożona z przedstawicieli różnych nauk zarówno specjalnych, jak i filozoficznych znana pod nazwą „szkoły wiedeńskej", a nazywająca swój kierunek badań: „filozofią naukową", „jednością nauki" – „unity of science", wreszcie „pozytywizmem logicznym". Wykład swój oprę przede wszystkim na pracy czołowego logistyka tej szkoły Carnapa pt. „Testability and meaning" z czasopisma „Philosophy of Science" tom 3 i 4 (1936-37). Poza tym przytoczę opinie za artykułem Poznańskiego „Analiza operacyjna pojęć fizyki" z „Przeglądu Filozoficznego", tom 35 (r. 1932), w którym autor referuje m.in. charakterystyczne poglądy fizyków N.R. Campbella i P.W. Bridgmana.

Carnap oczywiście wyraźnie odróżnia język badanej nauki od języka jej metodologii. Na gruncie metodologii mówi tylko o zdaniach należących do pewnej nauki, o ich częściach, a więc wyrazach. Odróżnia przy tym wyrazy logiczne i wyrazy specjalne używane w badanej nauce. Jako wyrazów logicznych używa znanych nam wyrazów w rachunku predykatów [orzeczenia, czyli] (predykaty, spójniki przyzdaniowe, kwantyfikatory). Predykaty oznacza innymi literami, a więc $P(x)$, $Q(x)$ itd.

4.2.2. Zdania sprawozdawcze

W naukach empirycznych, doświadczalnych mamy pewne zdania, które przyjmujemy bez bliższego uzasadnienia podobnie jak w naukach dedukcyjnych bez dowodu uznajemy aksjomaty. Są to zdania, o których prawdziwości przekonaliśmy się naocznie, które zawierają sprawozdania z obserwacji.

Carnap nazywa takie zdania „basic sentences" (por. wyraz „baza" na oznaczenie zbioru aksjomatów), lub po niemiecku „Protokollsätze". W języku polskim przyjęła się nazwa zdania „sprawozdawcze".

Nasuwają się różne możliwości formułowania zdań sprawozdawczych, możliwe jest użycie zasadniczo dwóch różnych języków: języka fizykalnego i języka psychologicznego (i to w kilku odmianach).

W języku **fizykalnym**, czyli języku rzeczy, mówimy o przedmiotach obserwowanych: np. „roztwór *X* zabarwił się na czerwono", „pręt wprowadzony do ognia rozżarzył się", „gwiazda przeszła przez skrzyżowanie nici pajęczych teleskopu".

W języku **psychologicznym** należało by powiedzić raczej tak: „widziałem (obserwator *O* widział) czerwoną barwę roztworu", „widziałem blask rozżarzonego pręta", „widziałem światło gwiazdy na skrzyżowaniu nici pajęczych". Mówiąc w języku psychologicznym, wymieniamy obserwatora, wypowiadamy, że doznał on takich a takich spostrzeżeń. Wiadomo, że niektóre obserwacje polegają na – w pewnym stopniu – dowolnej ocenie obserwatora (np. odczytanie wskazań z dokładnością do $^{1}/_{10}$ podziałki, ocena barw). Istnieją tzw. poprawki osobiste obserwatorów, np. jeżeli w chwili przejścia gwiazdy przez nić pajęczą, obserwator wykazuje odpowiedni ruch (notowanie) przez mechanizm zegarowy, to różni obserwatorzy wykazują stałe różnice między znalezionymi czasami, czynią mniej lub więcej stały znany błąd, który można usunąć, wprowadzając poprawkę osobistą.

Carnap wypowiada się jednak za formułowaniem zdań sprawozdawczych w języku fizykalnym, osobę obserwatora wymienia w języku metodologii. Zdanie w języku fizykalnym jest prostsze, takich zdań używamy w praktyce. Poza tym logicy niechętnie operują terminami psychologicznymi, np. wiemy, że [eliminują] z logiki wyrazy psychologiczne: sąd, pojęcie, a zastępują je przez: zdania, wyraz. Jest to antypsychologizm logiczny.

4.2.3. Obserwacja i eksperyment

W pracy swojej Carnap przedstawia zdania proste badanych nauk w postaci ogólnej „$P(a)$" „$Q(b)$" itd., gdzie „a", „b" – zmienne indywidualne – reprezentują punktochwile, „P", „Q" predykaty (orzeczenia) opisujące to co się w punkcie i chwili „a" dzieje. Zdanie $Q(b)$ należy rozumieć: Punkt czaso-przestrzenny b posiada własność Q. Wśród orzeczeń szczególną rolę odgrywają orzeczenia obserwowane i realizowane.

Orzeczenie P nazywa się **obserwowalnym** (*observable predicate*) dla pewnej osoby O, jeżeli dla odpowiednich argumentów b i w odpowiednich warunkach C jest zdolna przy pomocy obserwacji rozstrzygnąć zdanie $P(b)$ tzn. uznać bądź $P(b)$, bądź nie-$P(b)$, (proszę porównać definicję wyrażenia rozstrzygalnego w logice). A więc obserwowalnym jest orzeczenie „b jest świecące" w odniesieniu do punktów b, na które może obserwator spojrzeć. Istotnie wystarczy zdrowemu i przytomnemu obserwatorowi spojrzeć na punkt b, aby stwierdzić, czy jest on punktem świecącym, czy nie. Przy pomocy orzeczeń obserwowalnych opisujemy wyniki obserwacji.

Orzeczenie P nazywa się realizowalnym (dającym się urzeczywistnić, *realizable*) dla osoby O, jeżeli dla odpowiedniego argumentu b i w odpowiednich warunkach C, osoba O jest zdolna uczynić zdanie $P(b)$ prawdziwym, tzn. nadać punktowi b własność P.

Ponieważ umiemy przesunąć koniec przewodnika elektrycznego do punktu b, więc umiemy uczynić prawdziwym zdanie: „Koniec przewodnika elektrycznego znajduje się w punkcie b". Jeżeli w pobliżu punktu b znajduje się inny koniec przewodnika elektrycznego, to tym samym umiemy uczynić prawdziwym zdanie: dwa końce przewodników elektrycznych znajdują się blisko siebie.

Jeżeli przy tym końce przewodników są połączone z przeciwnymi biegunami maszyny elektrycznej, to pomiędzy nimi przebiegnie iskra.

Zapiszemy dwa zdania sprawozdawcze: 1) Przewodnik II został zbliżony do przewodnika I, 2) Pomiędzy przewodnikami błysnęło światło. Zdanie 1) jest realizowalnym, jest prawdziwym, bo świadomie je takim uczyniliśmy. Zdanie 2) jest tylko obserwowalnym. Takie połączenie zdań zawierających orzeczenia realizowalne i obserwowalne dostarcza sprawozdania z tego, co tradycyjnie nazywa się **eksperymentem**.

4.2.4. Potwierdzanie i wypróbowanie

Oprócz zdań sprawozdawczych wypowiadamy wiele innych zdań. Opis torów planet czy też prawa termodynamiki są czymś odmiennym od opisu poszczególnych doświadczeń. Zdania sprawozdawcze przyjmujemy dlatego, że ich prawdziwość została naocznie przez nas stwierdzona. Dlaczego uznajemy inne jeszcze zdania, które nazywamy prawami przyrodniczymi? Czy są one pewne tak jak pewnymi były prawa matematyczne czy logiczne z chwilą przyjęcia reguł wnioskowania? Otóż prawa przyrodnicze nie posiadają tego stopnia pewności. Nigdy nie wiadomo, czy dalsze doświadczenia nie obalą prawa. Dlatego bezpieczniej nie mówić, że prawa przyrodnicze są dowiedzione, tylko, że prawa są sprawdzane przez doświadczenia. Carnap proponuje usunąć i ten termin „sprawdzanie" (*verification*), gdyż zupełne sprawdzenie, przekonanie się czy prawo jest prawdziwe, (porównaj np. sprawdzanie zero-jedynkowe) nie jest możliwe. Możliwe jest tylko stale postępujące **potwierdzenie** (*confirmation*) i wypróbowanie (*testing*) tych praw. W związku z rozróżnieniem tych dwóch pojęć rozróżnia się też zdania potwierdzalne (*confirmable*) i wypróbowalne (*testable*).

Zdania potwierdzalne są to zdania, których [sprawdzanie sprowadza] się do potwierdzania pewnej klasy predykatów obserwowalnych. Mówiąc swobodniej: potwierdzanie dokonywuje się przez obserwację. A więc prawa ruchu planet są potwierdzalne, gdyż potwierdzają je wyłącznie obserwacje, stosowanie eksperymentów, a więc użycie predykatów realizowalnych jest tutaj zbyteczne. Przeciwnie rzecz się ma, jeżeli powiemy, że ciała spadają w próżni zgodnie ze wzorem $s = {}^{3}/_{2at^2}$. Prawo to wypróbowujemy za pomocą eksperymentów, np. pozwolimy spadać swobodnie wielu ciałom w próżni i zanotujemy czas, w którym przebywają pewną drogę. Podobnie wypróbowujemy zdanie, że między zbliżonymi do siebie końcówkami maszyny elektrycznej przebiegają iskry. Używamy predykatów przy tym realizowalnych.

4.2.5. Definicje operacyjne

W jaki sposób wprowadzamy do nauk empirycznych pewne nowe wyrazy, w jaki sposób wyjaśniamy ich znaczenie. Przytoczę tu, za cytowaną pracą Poznańskiego, głosy fizyków, którzy wykazują, że znaczenie wyrazów należy pojmować nieco inaczej, niż to dotychczas na ogół czynimy, traktując odrębnie każdy wyraz tak, jakim go w języku potocznym spotykamy. Poznański twierdzi, że powstały „realne przeszkody, które stanęły na drodze dalszemu postępowaniu nauki w postaci trudności pojęciowych" (z naszego punktu widzenia lepiej powiedzieć „trudności językowych"). I przytacza Campbella, który wyjaśnia, że np. na pytanie „co to jest elektryczność" nie można dać odpowiedzi, bo to pytanie nie posiada sensu. „Pytanie pozostaje jedynie pod wpływem myśli, że zdania można rozkładać na części, z których każda ma samoistne znaczenie, a w szczególności, że każdy wyraz, który gramatycznie jest nazwą, może być podmiotem jakiegoś sensownego twierdzenia o postaci podmiotowo-orzecznikowej", a więc np. że elektryczność jest to a to. Dlatego nie należy definiować np. „długości" jako pojęcia samoistnego, a zdefiniować można tylko, kiedy mamy prawo powiedzić:

„długość przedmiotu P [wynosi] A cm". Przez to ostatnie zdanie zrozumiemy tyle: „dzięki wykonaniu zespołu przepisanych operacji na przedmiocie P przy pomocy przyrządów mierniczych otrzymamy liczbę A cm".

Pogląd ten nosi nazwę „poglądu operacyjnego”. Pojęcie jest równoznaczne z odpowiednim zespołem operacyjnym (Bridgman). „Zasługą Einsteina jest zastosowanie po raz pierwszy idei, że treścią pojęcia fizycznego jest zespół operacji pomiarowych”. W związku z tym, jeżeli bierzemy pod uwagę długości mierzone odmiennymi metodami: sztabą mierniczą lub optycznie, tj. teodolitem, to mamy do czynienia z zasadniczo odmiennymi wielkościami: długością dotykową o długością optyczną. Wyraz „długość” jest wieloznaczny, jeżeli nie odróżniamy tych znaczeń, to możemy dojść do błędu np. w zastosowaniu do zjawisk w skali bardzo wielkiej lub bardzo małej.

Czy „pogląd operacyjny” jest brany pod uwagę przez Carnapa? Niewątpliwie tak. Od dawna znanym był fakt, że używanie rzeczowników tzw. abstrakcyjnych, prowadzi nieświadomie do traktowania ich na równi z nazwami rzeczy i do znacznego zamieszania pojęć. Dlatego Carnap w swojej metodologii nauk empirycznych wyznacza postać predykatów, a więc czasowników, wszystkim terminom z wyjątkiem argumentów indywidualnych, które reprezentują punkty czasowo-przestrzenne. Być może, że lepiej by było przyjąć, że zmienne indywidualne reprezentują konkretne przedmioty (w pewnym okresie czasu). Carnap wyznaje pogląd operacyjny, jeśli chodzi o sposób wprowadzania (określenia) nowych predykatów. Otóż według metodologii jego wprowadza się predykaty przez podanie „*test-chain*” tj. łańcucha prób, które należy wykonywać, aby móc orzec dany predykat. „Łańcuch prób” Carnapa jest to właśnie „zespół opracji”. Predykat, który jest bądź obserwowalny lub też wprowadzony przez łańcuch prób, nazywa się **wypróbowalnym** (*testable*). Jako jedną z naczelnych tez pozytywizmu Carnap wymienia zapatrywanie, że cały język nauki sprowadza się do terminów danych zmysłowych lub terminów spostrzeżonych:

„Osoba w miejscu przestrzenno-czasowym b ma spostrzeżenie rodzaju P”.

4.2.6. Opis i hipoteza

Ta ostatnia teza pozytywizmu wypowiadana była dawniej w postaci następującej: Nauka winna ograniczać się do **opisu** zjawisk, a powstrzymywać się od ich **wyjaśniania**. Wyjaśnianie odbywa się przez hipotezę. Wyraz „hipoteza” bywa używany również na oznaczenia wszelkiego zdania niezupełnie pewnego, w tym sensie każde prawo przyrodnicze byłoby hipotezą. Wyjaśniamy tu węższe znaczenie tego słowa. Zdawna ludzie wiedzieli, że pewne choroby są zaraźliwe, że zachorowanie następuje po zetknięciu się z chorym. Zjawisko to wyjaśniła hipoteza, że istnieje jakaś zaraza, która przenosi się z chorego na zdrowego. Póki nie znano mikroskopu termin „zaraza” nie był, jakby Carnap powiedział, obserwowalnym, ani nawet wypróbowalnym. Nie było możności orzec o jakimś przedmiocie: „to jest zaraza". A więc wyjaśnienie zawierało pewien termin niewypróbowalny, wykraczało poza opis zjawisk, było hipotezą. Z chwilą wynalazku mikroskopu sytuacja zmieniła się. Okazało się, że „zaraza" składa się z istot żywych, można było już o pewnych przedmiotach (bakteriach) orzec: „to jest zaraza". To samo zdanie przestało być hipotezą wyjaśniającą, weszło w skład opisu przyrody. Wyjaśniania zarzucał już w XVIII w. D'Alembert, jeden z twórców Encyklopedii Francuskiej, hasło „zupełnego i najprostszego opisu" wysunął Kirchoff, fizyk XIX w.

Przedstawiona tu teza pozytywizmu może budzić wątpliwości. Hipotezy wydają się pożyteczne i pobudzają do odkryć. Jednak sama zasada odróżniania hipotez wyjaśniających od praw opisowych posiada bezsprzeczną wartość metodologiczną.

W metodologii nauk dedukcyjnych takiej, jaką tu poznaliśmy, nie używaliśmy zwrotów normatywnych, rozkazujących:

> „należy postępować tak a tak",

a tylko:

> „jeżeli postąpimy tak, a tak, to ... np. rozstrzygniemy takie a takie wyrażenie".

Dlatego i w metodologii nauk empirycznych można nie używać nakazów lub zakazów, a wystarczy przedstawić, jak wyglądać będzie nauka bez hipotez.

4.2.7. Zagadnienia

Nauka empiryczna, jaką Carnap w swojej metodologii opisuje, różni się oczywiście pod względem formy znacznie od stanu, w jakim obecnie te nauki się znajdują.

Czy powstanie język sztucznie dla tych nauk utworzony na wzór języka symbolicznego matematyki o celowo budowanej składni? Czy nauki te będą sformalizowane?

Widzimy, że formalizacja ogromnie zwiększa stopień ścisłości nie tylko samej nauki, lecz i jej metodologii. Nawet tak mgliste pojęcie jak znana „zasada ekonomii myślenia" (Mach) może zyskać sformułowanie matematycznie dokładne. W języku symbolicznym możemy dokładnie liczyć wyrazy, możemy zupełnie **obiektywnie** sprawdzić, które spośród dwóch zdań jest krótsze, która z dwóch teorii jest prostsza, przy takim czy innym pojmowaniu prostoty, możliwości zastosowań nie dają się z góry przewidzieć.

Summary

Stanisław Jaśkowski is one of the late representant of Polish Lvov-Warsaw School. He was an outstanding logician and mathematician first of all known as one of the founders of modern systems of natural deduction (ND). His other achievements belong mainly to investigations on nonclassical logics (e.g. invention of inclusive and discussive logics), decidability results, foundations of geometry.

In fact, ND systems were constructed independently by two logicians; the second was Gerhard Gentzen. Jaśkowski presented his system in 1934 as the first volume of the series Studia Logica initiated by J. Łukasiewicz. It is a matter of coincidence that at the same year Gentzen started to publish his Habilitationschrift which appeared in two parts in *Mathematische Zeitschrift*.

In this volume we present a new, critical edition of Jaśkowski's lecture notes published originally in 1947. They appeared originally in mimeographed form, under the title „Elements of Mathematical Logic and Methodology of Deductive Sciences" in Polish. This small book (105 pages long) is of great importance since Jaśkowski decided to apply in it his (modified) natural deduction system. It is perhaps the first logic textbook where natural deduction is uniformly used as a method for presentation of logic. It is used from the beginning for proving theorems of logic without any reference to axiomatic systems. Moreover, it is applied also in proofs of metalogical results and even truth-functional semantics is introduced via analysis of ND proofs of selected theses. It is also worth noting that a system described in the notes is significantly different from his original system introduced in 1934. ND system presented in lecture notes covers:

1) classical propositional logic;

2) propositional logic with quantifiers;

3) classical first-order logic;

4) theory of identity in the second order language.

The most important changes in his later approach to ND are the following:

1. Richer language. Jaśkowski introduced $\wedge, \vee, \leftrightarrow$ and $\exists$ as primitive constants and defined introduction and elimination rules for all of them.

2. Omission of nonclassical logics. Only classical logic is presented in lecture notes. In particular, instead of inclusive logic there is a set of rules characterising classical quantifiers. Moreover, the rules are generalised for second order variables and theory of identity is expressed in the extended language.

3. Different style of layout for proofs. Instead of labels expressing dependence of formulae on undischarged assumptions he is using graphical means for separation of subproofs.

Our claim that Jaśkowski's lecture notes are perhaps the first uniform textbook application of ND requires some justification. Quine in „Methods of Logic" (1950) claims that the first textbook applying ND is due to Cooley and was printed in 1942, then reprinted in 1946. In fact, Cooley's „Primer of Logic" applies numerous inference rules throughtout the book, however it may be disputable if it is genuine ND system. Conditional proofs based on additional assumptions are only described on pp. 126–140 but not used as the main form of presentation of logic. Moreover, Cooley did not apply any devices for separating subproofs and a rule for elimination of existential quantifier is stated without sufficient restrictions. Hence in our opinion it cannot be treated as a correct system of ND. In Quine's „Methods of Logic" from 1950, ND is also introduced only in three sections as an illustration rather, not as the main proof system. It seems that the first well known textbook which consequently applies ND is „Symbolic Logic" of Fitch, published in 1952, 5 years after Jaśkowski's lecture notes.