

Czesław Domański*, Andrzej S. Tomaszewicz**

KWANTYLE INTERPOLOWANE ROZKŁADU LICZBY SERII

DLA $n_1 = n_2$ ***

1. Uwagi wstępne

Problem konstrukcji testów serii był rozważany już w latach trzydziestych bieżącego stulecia (por. S t e v e n s [10]). M o o d [9] opublikował fundamentalną monografię ogólnej teorii serii. Pierwsze tablice kwantyli warunkowego rozkładu liczby serii, umożliwiające zastosowanie teorii Stevensa i Mooda, opracowali S w e d i E i s e n h a r t [11]. Tablice rozkładu bezwarunkowego liczby serii dla prawdopodobieństw sukcesu różnych od 1/2 opublikował D o m a ń s k i [1]. Omawiane tablice do ogólnych zastosowań, m. in. do konstrukcji standardowych testów serii, są w zasadzie wystarczające. Jednakże badania własności testów serii wymagają tablic, umożliwiających budowę testów zrandomizowanych.

Możliwości konstrukcji tablic rozkładów liczby serii limitowane były możliwościami obliczeniowymi. Ponadto, znane wzory kombinatoryczne były niewygodne w obliczeniach numerycznych. Opracowanie teorii serii w ujęciu rekurencyjnym (D o m a ń s k i, T o m a s z e w i c z [3], D o m a ń s k i [6]) pozwala ominąć te trudności.

* Profesor w Instytucie Ekonometrii i Statystyki UŁ.

** Profesor w Instytucie Ekonometrii i Statystyki UŁ.

*** Artykuł zawiera wyniki badań zrealizowanych w ramach CPBP 10.09.

Renesans zainteresowań teorią serii nastąpił w latach pięćdziesiątych wraz z rozwojem elektronicznej techniki obliczeniowej, a w szczególności metod Monte Carlo i trwa on do chwili obecnej. Wynika to głównie z potrzeb konstrukcji coraz to lepszych generatorów liczb pseudolosowych. Za pomocą testów serii weryfikuje się podstawowy postulat, jakim jest niezależność liczb produkowanych przez dany generator. Ponadto, teoria serii stanowi podstawę do konstrukcji testów weryfikujących hipotezę o równości rozkładów dwóch populacji (por. m. in. W a l d, W o l f o w i t z [13]) hipotezę o liniowości modeli ekonometrycznych z jedną lub dwiema zmiennymi objaśniającymi (D o m a ń s k i, T o m a s z e w i c z [4]) itp. Można też wskazać na wiele zastosowań rozkładów serii w statystycznej kontroli jakości oraz w teorii masowej obsługi (por. np. G i b b s o n [8], s. 50-67).

2. Rozkład liczby serii

Niech będzie dany ciąg niezależnych zmiennych losowych

$$(1) \quad X_1, X_2, \dots, X_{2n-1}, X_{2n}$$

o symetrycznym rozkładzie dwupunktowym

$$(2) \quad P(X_1 = A) = P(X_2 = B) = \frac{1}{2}$$

dla $t = 1, 2, \dots, 2n$. Weźmy pod uwagę liczbę serii w ciągu (1):

$$(3) \quad R = \text{card} \{t : 2 \leq t \leq 2n, X_{t-1} \neq X_t\}.$$

Oznaczmy ponadto przez N_1 i N_2 odpowiednio liczbę elementów A i B w ciągu (1):

$$(4) \quad N_1 = \text{card} \{t : X_t = A\}, \quad N_2 = \text{card} \{t : X_t = B\}.$$

Przedmiotem naszych rozważań jest rozkład zmiennej losowej R przy warunku

$$(5) \quad N_1 = N_2 = n.$$

Rozkład ten jest szczególnie przydatny do weryfikacji hipotez, że dwie równoliczne próby proste

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n,$$

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$$

pochodzą z populacji o tym samym rozkładzie, tj. jeśli Y_t ($t = 1, \dots, n$) mają rozkład o dystrybuancie F , zaś Z_t ($t = 1, \dots, n$) - rozkład o dystrybuancie G , to $H_0: F = G$. Należy wziąć lewostronny obszar krytyczny, gdyż tylko mała liczba serii świadczy na niekorzyść H_0 . W wielu innych przypadkach jednakże (np. dla testu losowości próby przeciw ujemnej autokorelacji) należy stosować obszar krytyczny prawostronny.

Rozkład zmiennej R badany był m. in. przez Stevensa [10], Mooda [9] oraz Walda i Wolfowitza [13]. W swej słynnej monografii Fisz [7] podaje na s. 437 wzór, z którego wynika natychmiast

$$(6) \quad P(R = r | N_1 = N_2 = n) = \begin{cases} \frac{2 \binom{n-1}{k-1}^2}{\binom{2n}{n}}, & \text{gdy } r = 2k \\ \frac{2 \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{k}}{\binom{2n}{n}}, & \text{gdy } r = 2k + 1 \end{cases}$$

dla $r = 2, 3, \dots, 2n$.

3. Formuły rekurencyjne

Wzór (6) jest bardzo elegancki, lecz niezbyt wygodny do obliczeń numerycznych. Efektywny algorytm wyznaczania warunkowego rozkładu liczby serii znacznie lepiej oprzeć na formułach rekurencyjnych. Niech n będzie ustalone, $n \geq 2$ i niech

$$(7) \quad P_r = P(R = r | N_1 = N_2 = n)$$

Z (6) wynika natychmiast

$$(8) \quad P_2 = \frac{2}{\binom{2n}{n}}$$

(pierwszy wzór przy $k = 1$) oraz

$$(9) \quad P_3 = \frac{2(n-1)}{\binom{2n}{n}}$$

(drugi wzór przy $k = 1$). Ponadto, dla $r = 2k$, $k \geq 2$ mamy

$$\frac{P_{2k}}{P_{2(k-1)}} = \frac{\binom{n-1}{k-1}^2}{\binom{n-1}{k-2}^2} = \frac{(n-1)!^2}{(k-1)!^2(n-k)!^2} \frac{(k-2)!^2(n-k+1)!^2}{(n-1)!^2}$$

zatem

$$(10) \quad \frac{P_{2k}}{P_{2(k-1)}} = \frac{(n-k+1)^2}{(k-1)^2}$$

oraz dla $r = 2k+1$, $k \geq 2$, analogicznie

$$\frac{P_{2k+1}}{P_{2k-1}} = \frac{\binom{n-1}{k} \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{k-2}} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \frac{(k-2)!(n-k+1)!}{(n-1)!},$$

a więc

$$(11) \quad \frac{P_{2k+1}}{P_{2k-1}} = \frac{(n-k+1)(n-k)}{k(k-1)},$$

Z (10) i (11) wynika ogólny wzór rekurencyjny

$$(12) \quad P_r = \begin{cases} \frac{(n-k+1)^2}{(k-1)^2} P_{r-1}, & \text{gdy } r = 2k, \\ \frac{(n-k+1)(n-k)}{k(k-1)} P_{r-1}, & \text{gdy } r = 2k+1 \end{cases}$$

dla $r = 4, 5, \dots, 2n$ przy warunkach początkowych (8) i (9).

4. Kwantyle interpolowane

Rozważany przez nas rozkład serii jest oczywiście dyskretny. Zatem dla danego poziomu istotności α na ogół nie można tak dobrać lewostronnej wartości krytycznej r_α , aby

$$(13) \quad P(R \leq r_\alpha) = \alpha.$$

W zastosowaniach, do ustalenia obszaru krytycznego, przyjmuje się kwantyl całkowity

$$(14) \quad r_{\alpha} = \max\{r : P(R \geq r) \leq \alpha\},$$

wobec tego, na ogół

$$(15) \quad P(R \leq r_{\alpha}) < \alpha.$$

Dla teoretycznych badań własności testów serii, szczególnie dla analizy mocy fakt ten jest bardzo kłopotliwy. Porównywanie bowiem testów o różnych rozmiarach budzi zawsze poważne zastrzeżenia. Dla tych celów buduje się testy zrandomizowane.

Zrandomizowany lewostronny test serii polega na:

- odrzuceniu H_0 , gdy $R \leq r_{\alpha}$,
- odrzuceniu H_0 z prawdopodobieństwem

$$(16) \quad P_{\alpha}^R = \frac{\alpha - P(R \leq r_{\alpha})}{P(R = r_{\alpha} + 1)},$$

gdy $R = r_{\alpha} + 1$,

- jeśli zaś $R < r_{\alpha} + 1$, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 .

Z prawdopodobieństwem randomizacyjnym łączy się pojęcie kwantyla interpolowanego, wprowadzone przez Domańskiego i Tomaszewicza [3] (por. także monografie Domański [2], s. 170 oraz Tomaszewicz [12], s. 320). Lewostronny kwantyl interpolowany definiuje się jako sumę

$$(17) \quad r_{\alpha}^i = r_{\alpha} + P_{\alpha}^R.$$

Mając kwantyl interpolowany r_{α}^i można oczywiście wyznaczyć r_{α} i P_{α}^R :

$$(18) \quad r_{\alpha} = \text{entier}(r_{\alpha}^i),$$

$$(19) \quad P_{\alpha}^R = r_{\alpha}^i - r_{\alpha}.$$

Wprowadzenie pojęcia kwantyla interpolowanego służy nie tylko do wygodnej demonstracji kwantyla całkowitego r_{α} i prawdopodobieństwa randomizacyjnego P_{α}^R , lecz pozwala na skuteczniejsze badanie ciągów kwantyli i prawdopodobieństw randomizacyjnych obliczonych dla różnych liczebności próby n , m. in. na ich aproksymację.

Analogicznie, prawostronny kwantyl całkowity jest równy

$$r_{\alpha} = \min\{r : P(R \geq r) \leq \alpha\}.$$

Zrandomizowany prawostronny test polega na:

- odrzuceniu H_0 , gdy $R \geq r_{\alpha}$,
- odrzuceniu H_0 z prawdopodobieństwem

$$(20) \quad P_{\alpha}^R = \frac{\alpha - P(R \geq r_{\alpha})}{P(R = r_{\alpha} - 1)},$$

gdy $R = r_{\alpha} - 1$,

- jeśli zaś $R < r_{\alpha} - 1$, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 .

Prawostronny kwantyl interpolowany definiuje się następująco:

$$(21) \quad r_{\alpha}^i = r_{\alpha} - P_{\alpha}^R,$$

skąd

$$(22) \quad r_{\alpha} = -\text{entier}(-r_{\alpha}^i), \quad P_{\alpha}^R = r_{\alpha} - r_{\alpha}^i.$$

5. Tablice

Na podstawie rekurencyjnego wzoru (12) przy warunkach początkowych (8) i (9) zostały opracowane prezentowane w tym artykule tablice kwantyli interpolowanych warunkowego rozkładu liczby serii¹ dla $N_1 = N_2$.

Nietrudno sprawdzić na podstawie (6), że

$$(23) \quad P(R = r) = P(R = 2(n + 1) - r).$$

Oznacza to, że rozkład liczby serii jest symetryczny. Ograniczamy się przeto do podania tylko kwantyli lewostronnych. Zgodnie z (24), jeśli r_{α} i r_{α}^i oznaczają lewostronny kwantyl odpowiednio całkowity i interpolowany, to analogiczne kwantyle prawostronne są równe

¹ Rozszerzone tablice warunkowego rozkładu serii publikujemy w pracy Domańskiego [6].

$$n + 1 - r_{\alpha}, \quad n + 1 - r_{\alpha}^1$$

Lewostronne kwantyle interpolowane dla najczęściej stosowanych poziomów istotności

$$\alpha = 0,01; \quad 0,05; \quad 0,10$$

oraz $n \leq 1000$ zawarte są w tabl. 1. Ze względu na oszczędność miejsca, nie podajemy kwantyli dla wszystkich n ; ograniczymy się do następujących:

od 5 do 100, co 1;
 od 100 do 200, co 5;
 od 200 do 600, co 10;
 od 600 do 1000, co 20.

Dla pozostałych $n \leq 1000$ można stosować interpolację liniową:

$$(24) \quad r_{\alpha}^1(n) \approx \hat{r}_{\alpha}^1(n) = r_{\alpha}^1(n_1) + \frac{r_{\alpha}^1(n_2) - r_{\alpha}^1(n_1)}{n_2 - n_1} (n - n_1),$$

gdzie: n_1 i n_2 spełniają nierówność $n_1 \leq n \leq n_2$ oraz n_1 bezpośrednio poprzedza n_2 w tabl. 1.

T a b l i c a 1

Lewostronne kwantyle interpolowane
warunkowego rozkładu serii

n	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,10$	n	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,10$
1	2	3	4	5	6	7	8
5	2,065	3,081	3,475	16	10,062	11,907	12,944
6	2,724	3,604	4,304	17	10,873	12,760	13,779
7	3,282	4,476	5,172	18	11,595	13,584	14,678
8	4,050	5,267	5,997	19	12,405	14,453	15,553
9	4,759	6,086	6,861	20	13,236	15,326	16,455
10	5,393	6,962	7,638	21	14,081	16,204	17,358
11	6,174	7,670	8,511	22	14,933	17,108	18,262
12	7,025	8,506	9,374	23	15,686	17,988	19,184
13	7,665	9,338	10,250	24	16,510	18,863	20,089
14	8,436	10,191	11,156	25	17,342	19,708	21,025
15	9,235	11,083	12,034	26	18,194	20,594	21,906

Tablica 1 (cd.)

1	2	3	4	5	6	7	8
27	19,074	21,472	22,823	61	48,705	52,427	54,426
28	19,900	22,364	23,714	62	49,587	53,356	55,370
29	20,726	23,266	24,632	63	50,483	54,284	56,313
30	21,545	24,163	25,540	64	51,380	55,218	57,261
31	22,399	25,082	26,460	65	52,282	56,148	58,205
32	23,263	25,975	27,381	66	53,193	57,088	59,157
33	24,134	26,869	28,303	67	54,100	58,019	60,100
34	25,030	27,741	29,234	68	55,021	58,952	61,055
35	25,853	28,642	30,157	69	55,903	59,865	61,999
36	26,701	29,535	31,097	70	56,796	60,794	62,946
37	27,544	30,440	32,020	71	57,682	61,715	63,880
38	28,411	31,348	32,955	72	58,581	62,646	64,828
39	29,287	32,258	33,859	73	59,481	63,573	65,766
40	30,167	33,179	34,790	74	60,386	64,505	66,714
41	31,067	34,091	35,705	75	61,296	65,437	67,656
42	31,931	35,022	36,637	76	62,207	66,371	68,605
43	32,789	35,912	37,561	77	63,127	67,309	69,551
44	33,639	36,822	38,494	78	64,042	68,244	70,500
45	34,513	37,717	39,426	79	64,956	69,186	71,449
46	35,390	38,630	40,359	80	65,842	70,122	72,398
47	36,275	39,538	41,298	81	66,744	71,068	73,350
48	37,173	40,455	42,232	82	67,641	72,006	74,300
49	38,067	41,373	43,177	83	68,549	72,941	75,254
50	38,969	42,293	44,111	84	69,457	73,864	76,204
51	39,818	43,220	45,061	85	70,369	74,800	77,161
52	40,694	44,141	45,995	86	71,286	75,729	78,111
53	41,567	45,076	46,934	87	72,202	76,666	79,071
54	42,454	46,000	47,857	88	73,126	77,599	80,021
55	43,346	46,918	48,797	89	74,046	78,537	80,978
56	44,242	47,821	49,726	90	74,968	79,475	81,920
57	45,149	48,743	50,667	91	75,862	80,414	82,874
58	46,051	49,656	51,602	92	76,770	81,355	83,819
59	46,954	50,580	52,544	93	77,673	82,296	84,772
60	47,818	51,501	53,484	94	78,586	83,241	85,720

Tablica 1 (cd.)

1	2	3	4	5	6	7	8
95	79,498	84,182	86,674	290	262,505x	270,702w	275,080w
96	80,414	85,130	87,624	300	272,044x	280,361w	284,811w
97	81,334	86,073	88,579	310	281,555x	290,040w	294,546
98	82,254	87,024	89,531	320	291,105x	299,701w	304,293
99	83,180	87,958	90,486	330	300,636x	309,377w	314,049
100	84,104	88,899	91,441	340	310,192w	319,070w	323,796w
105	88,681y	93,591x	96,222	350	319,747y	328,749x	333,548
110	93,283x	98,312w	101,020w	360	329,308w	338,437w	343,309
115	97,913y	103,058w	105,790w	370	338,888x	348,139w	353,079
120	102,508x	107,774x	110,576	380	348,449x	357,838x	362,842w
125	107,154x	112,504w	115,372	390	358,046w	367,535	372,606
130	111,782y	117,253w	120,177	400	367,617x	377,246	382,378
135	116,414x	122,015w	124,994w	410	377,213w	386,967	392,157
140	121,087x	126,753w	129,785w	420	386,811y	396,670w	401,938w
145	125,724y	131,501w	134,591	430	396,404w	406,386	411,712
150	130,379w	136,266	139,404	440	406,026w	416,115	421,493
155	135,070w	141,047w	144,225	450	415,620w	425,837x	431,280
160	139,723x	145,802x	149,055w	460	425,239w	435,559	441,074
165	144,394w	150,567	153,870x	470	434,862x	445,291	450,861w
170	149,097w	155,344	158,690	480	444,474w	455,034	460,649
175	153,771y	160,131	163,514	490	454,111w	464,762	470,442
180	158,453w	164,918x	168,345	500	463,735x	474,496	480,240
185	163,162w	169,689w	173,184	510	473,366w	484,241	490,044
190	167,863y	174,474	178,024	520	483,019w	493,993	499,841w
195	172,552w	179,269	182,857w	530	492,645w	503,730	509,640
200	177,264w	184,071	187,688w	540	502,290w	513,476	519,443
210	186,688y	193,653x	197,371w	550	511,949w	523,230	529,251
220	196,135y	203,259w	207,073w	560	521,586w	532,992	539,064
230	205,573y	212,878y	216,763w	570	531,244w	542,738	548,872w
240	215,057x	222,487w	226,463w	580	540,908x	552,493	558,678
250	224,510x	232,125w	236,179w	590	550,556w	562,255	568,490
260	234,017x	241,755x	245,898x	600	560,224w	572,024	578,305
270	243,489x	251,394w	255,612w	620	579,553y	591,543w	597,944w
280	253,016x	261,057w	265,340w	640	598,908x	611,087w	617,576w

Tablica 1 (cd.)

1	2	3	4	5	6	7	8
660	618,255x	630,624w	637,223	840	792,841x	806,797x	814,239
680	637,617y	650,178w	656,876w	860	812,273x	826,395w	833,932w
700	657,005x	669,733x	676,525w	880	831,715x	846,009w	853,619
720	676,373x	689,296w	696,188	900	851,167x	865,611	873,316
740	695,767y	708,870x	715,854w	920	870,616x	885,227	893,022
760	715,169x	728,439w	735,519	940	890,085w	904,848x	912,719
780	734,570x	748,029w	755,195	960	909,542x	924,466w	932,424
800	753,998x	767,606	774,875w	980	929,026w	944,098	952,136
820	773,406x	787,201w	794,552w	1000	948,491w	963,724w	971,848w

Ciągi kwantyli interpolowanych są bardziej "gładkie" niż odpowiednie ciągi kwantyli całkowitych. Niemniej jednak występują w tych ciągach pewne nieregularności, których konsekwencją może być dość znaczny błąd interpolacji liniowej:

$$(25) \quad d_{\alpha}(n) = |\hat{r}_{\alpha}^i(n) - r_{\alpha}^i(n)|$$

w niektórych przedziałach. Oznaczmy

$$d_{\alpha}^*(n_1, n_2) = \max_{n_1 \leq n \leq n_2} d_{\alpha}(n)$$

Informacje o wielkości maksymalnego błędu w przedziale $n_1 \leq n \leq n_2$ podane są w tablicach poprzez dopisanie jednej z liter w, x, y po kwantylu $r_{\alpha}^i(n_2)$, przy czym:

symbol w oznacza, że $0,002 < d_{\alpha}^*(n_1, n_2) \leq 0,005$,

symbol x oznacza, że $0,005 < d_{\alpha}^*(n_1, n_2) \leq 0,010$,

symbol y oznacza, że $d_{\alpha}^*(n_1, n_2) > 0,010$.

W przypadku braku któregośkolwiek z wymienionych symboli

$$d_{\alpha}^*(n_1, n_2) \leq 0,002.$$

P r z y k ł a d 1

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć kwantyl $r_{\alpha}^i(n)$ dla $\alpha = 0,05$,

$n = 2$. Z tabl. 1 odczytujemy:

$$r_{\alpha}^i(210) = 193,653 \quad \text{ i } \quad r_{\alpha}^i(220) = 203,259.$$

Na podstawie wzoru (24):

$$r_{\alpha}^i(215) = 193,653 + \frac{203,259 - 193,653}{220 - 210} (215 - 210) = 198,456.$$

W tabl. 1 po kwantylu $r_{\alpha}^i(220)$ występuje symbol w. Oznacza to, że błąd interpolacji liniowej nie przekracza 0,005. W rzeczywistości $r_{\alpha}^i(215) = 198,4516$, a więc, istotnie

$$|198,456 - 198,4516| = 0,0034 < 0,005.$$

P r z y k ł a d 2

Załóżmy, że weryfikujemy hipotezę H_0 o niezależności kolejnych obserwacji w ciągu (1), tj. hipotezę o losowości próby, na podstawie 60-elementowej próby wylosowanej z populacji o rozkładzie symetrycznym dwupunktowym. Przypuśćmy, że zaobserwowaliśmy w tej próbie liczbę serii $r = 54$. Z tabl. 1 odczytujemy:

$$\text{dla } \alpha = 0,10 \quad r_{\alpha}^i = 53,544, \quad \text{stad } r_{\alpha} = 53 \quad \text{ i } \quad P_{\alpha}^P = 0,544,$$

$$\text{dla } \alpha = 0,05 \quad r_{\alpha}^i = 51,501, \quad \text{stad } r_{\alpha} = 51 \quad \text{ i } \quad P_{\alpha}^P = 0,501..$$

Na poziomie istotności 0,05 nie ma więc podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 . Jeśli zaś przyjmiemy poziom istotności 0,10, to stosując test niezrandomizowany nie ma podstaw do odrzucenia H_0 , natomiast w przypadku testu zrandomizowanego należy H_0 odrzucić z prawdopodobieństwem 0,544.

Literatura

- [1] D o m a ń s k i Cz. (1978): Quantiles of Unconditional Distribution of Runs, Prace Instytutu Ekonometrii i Statystyki UŁ, 30, Łódź.
- [2] D o m a ń s k i Cz. (1986): Teoretyczne podstawy testów nieparametrycznych i ich zastosowanie w naukach ekonomiczno-społecznych, Acta Universitatis Lodzensis, Folia oeconomica.

- [3] Domański Cz., Tomaszewicz A. (1984): Recursive Formulae for Runs' Distributions, *Acta Universitatis Lodzensis, Folia oeconomica*, 34, 19-28.
- [4] Domański Cz., Tomaszewicz A. (1983): An Empirical Power of Some Tests for Linearity. *Transactions of the Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes*, Prague, 191-197.
- [5] Domański Cz., Tomaszewicz A. (1984): Wzory aproksymacyjne dla momentów rozkładów długości serii. *Problem R.III.9, Łódź* (materiał powielony).
- [6] Domański Cz. (1992): Quantiles of Distribution of Runs.
- [7] Fisz M. (1967): *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa.
- [8] Gibbons J. D. (1985): *Nonparametric Statistical Inference*, Dekker, New York.
- [9] Mood A. M. (1940): The Distribution Theory of Runs, *AMS*, 34, 367-392.
- [10] Stevens W. L. (1939): Distribution of Groups in Sequence of Alternatives, *Annals of Eugenics*, 9, 10-17.
- [11] Swed F. S., Eisenhart C. (1943): *Tables for Testing Randomness of Grouping in Sequence of Alternatives*, *AMS*, 14, 66-87.
- [12] Tomaszewicz A. (1985): Jednorównaniowe modele ekonometryczne przy nieklasycznych założeniach, *Acta Universitatis Lodzensis, Folia oeconomica*.
- [13] Wald A., Wolfowitz J. (1940): On a Test Whether Two Samples Are from the Same Population, *AMS*, 11, 147-162.

Czesław Domański, Andrzej S. Tomaszewicz

INTERPOLATED QUANTILES OF DISTRIBUTION
OF A NUMBER OF SERIES FOR $n_1 = n_2$

The left-side quantiles of distribution of a number of series for $n_1 = n_2 = 5(1)100(5)200(10)600(20)1000$ and $\alpha = 0,005, 0,10, 0,01, 0,05, 0,10$ are given. The construction of these tables has been based upon recursive formulae, more effective in numerical calculations.

1. WSTĘP

W podziale szeregu przedmiotów według pewnego kryterium, np. według czasu, miejsca, rodzaju, itp., otrzymujemy pewną liczbę serii. Wzrost tej liczby prowadzi do zwiększenia niepewności oszacowania wartości funkcji dystrybucji. W celu zmniejszenia tej niepewności, w [1] zaproponowano interpolację kwantyli. W [2] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [3] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [4] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [5] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [6] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [7] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [8] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [9] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [10] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [11] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [12] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [13] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [14] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [15] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [16] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [17] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [18] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [19] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [20] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [21] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [22] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [23] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [24] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [25] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [26] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [27] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [28] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [29] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [30] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [31] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [32] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [33] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [34] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [35] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [36] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [37] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [38] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [39] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [40] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [41] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [42] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [43] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [44] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [45] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [46] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [47] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [48] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [49] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [50] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [51] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [52] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [53] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [54] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [55] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [56] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [57] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [58] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [59] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [60] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [61] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [62] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [63] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [64] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [65] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [66] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [67] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [68] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [69] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [70] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [71] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [72] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [73] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [74] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [75] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [76] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [77] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [78] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [79] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [80] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [81] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [82] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [83] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [84] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [85] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [86] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [87] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [88] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [89] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [90] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [91] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [92] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [93] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [94] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [95] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [96] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [97] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [98] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [99] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii. W [100] podano wzory na kwantyle interpolowane dla rozkładu liczby serii.

Profesor w Instytucie Ekonomiki i Statystyki w Poznaniu.

Dr hab. w Katedrze Metod Matematycznych i Statystycznych w Instytucie Ekonomiki i Statystyki w Poznaniu.