

*Witold Szczepaniak\**

## MODELE STOPY SPOT NA RYNKU POLSKIM

**Streszczenie.** W artykule zaprezentowano wczesne modele stopy spot, sposoby estymacji ich parametrów metodą regresji oraz uogólnioną metodą momentów. Dokonano kalibracji rozpatrywanych modeli na rynku polskim dla jednodniowej stopy WIBOR.

**Słowa kluczowe:** model Vasička, model Coxa-Ingersolla-Rossa, model Brennana-Schwartz, model Chana-Karolyiego-Longstaffa-Sandersa.

### 1. WPROWADZENIE

Próby opisu zachowań stóp procentowych, podejmowane zarówno przez teoretyków, jak i praktyków w ostatnim stuleciu zostały zwięźczone stworzeniem dopiero na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych XX w. pierwszych, względnie skutecznych, modeli dynamiki stóp procentowych. Dzięki łatwości implementacji oraz możliwości wyceny obligacji i opcji na obligacje modele te szybko zyskały dużą popularność oraz doczekały się w następnych latach wielu rozwinieć.

W artykule tym przypomnimy wczesne modele stopy spot, sposoby estymacji ich parametrów metodą regresji oraz uogólnioną metodą momentów, a następnie dokonamy kalibracji rozpatrywanych modeli na rynku polskim dla jednodniowej stopy WIBOR.

### 2. CHWILOWA STOPA SPOT, KRZYWA DOCHODOWOŚCI

Jeżeli przez  $B(t, T)$  oznaczymy cenę w momencie  $t \leq T$  obligacji zero-kuponowej o terminie wykupu  $T$  i wartości nominalnej  $B(T, T) = 1$  PLN, to stopę dochodu w terminie do wykupu

\* Mgr, Katedra Inwestycji Finansowych i Ubezpieczeń, Akademia Ekonomiczna im. Oskara Langego we Wrocławiu.

$$r(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T) \quad (1)$$

dla każdego  $t \in [0, T)$  nazywamy **stopą spot**. Zależność stóp zwrotu wolnych od ryzyka instrumentów finansowych od ich terminów do wykupu określamy mianem **struktury terminowej stóp procentowych** – mówimy, że stopa  $r(t, T)$  jako funkcja  $T$  w momencie  $t$  stanowi **krzywą dochodowości**. Wczesne modele struktury terminowej opisywały zachowanie **chwilowej stopy spot**  $r_t$ , takiej że

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t^+} r(t, T) \quad (2)$$

którą można utożsamiać ze stopą oprocentowania trwającej dowolnie krótki okres  $[t, t + dt]$  pożyczki rozpoczętej w momencie  $t$ .

### 3. MODELE CHWILOWEJ STOPY SPOT

Dynamikę chwilowej stopy spot (2) można opisywać za pomocą procesu stochastycznego  $(r_t)_{t \geq 0}$ , zdefiniowanego na przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, F, P)$  z filtracją  $(F_t)_{t \geq 0}$ , generowaną przez jednowymiarowy ruch Browna względem miary  $P$ . W sposób ogólny pierwsze modele chwilowej stopy spot można przedstawić za pomocą **procesu powrotu do średniej Ornsteina – Uhlenbecka** danego, względem neutralnej wobec ryzyka miary  $Q$ , wzorem:

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t \quad (3)$$

gdzie stałe, niezależne od czasu, parametry oznaczają odpowiednio:  $\mu > 0$  – długoterminowy poziom stopy spot,  $\kappa > 0$  – szybkość, z jaką stopa  $r_t$  zmierza do  $\mu$ ,  $\sigma > 0$  i  $\gamma \geq 0$  – współczynniki wpływające na zmienność procesu,  $W_t$  – ruch Browna względem miary  $Q$ . Niejawnie zakłada się tutaj, że:

- istnieje stabilny, długotrwały poziom stopy spot równy  $\mu$ ;
- $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  jest procesem powracającym do średniej  $\mu$  z szybkością  $\kappa$ ;
- zmienność stopy spot opisuje funkcja  $\sigma^2$ ;
- dla każdego  $s \leq t$  rozkład przyrostów  $r_t - r_s$ , warunkowo na  $F_s$ , jest aproksymacyjnie normalny ze średnią

$$E[r_t | F_s] = \kappa(\mu - r_t)(t - s)$$

i wariancją

$$\text{var}[r_t | F_s] = \sigma^2 r_t^{2\gamma} (t - s).$$

Modele dane (3) określa się często jako **endogeniczne**, ponieważ generują strukturę terminową, której wartość początkowa niekoniecznie odpowiada wartości zaobserwowanej na rynku, bez względu na to jak dobrane zostały parametry modelu.

### 3.1. Model Vasička

Analizowany przez Vasička (1977) model należy do najwcześniejszych modeli stopy spot. Zakłada się w nim, że proces chwilowej stopy spot  $r_t$  jest opisany jest za pomocą stochastycznego równania różniczkowego:

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (4)$$

co po scałkowaniu, dla każdego  $s \leq t$ , daje proces

$$r_t = \mu + (r_s - \mu)e^{-\kappa(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u,$$

o normalnym rozkładzie warunkowym z średnią

$$E[r_t | F_s] = \mu + (r_s - \mu)e^{-\kappa(t-s)}$$

i wariancją

$$\text{var}[r_t | F_s] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} [1 - e^{-2\kappa(t-s)}].$$

Jak łatwo zauważyć (4) otrzymujemy z (3) dla  $\gamma = 0$ . Główną wadą modelu Vasička jest to, iż stopa  $r_t$  w (4) może przyjąć wartość ujemną.

### 3.2. Model Coxa-Ingersolla-Rossa (CIR)

Przyjmując w równaniu (3)  $\gamma = 0,5$ , otrzymamy model Coxa, Ingersolla i Rossa (1985), dany zależnością:

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (5)$$

który po scałkowaniu, dla każdego  $s \leq t$ , przyjmie postać:

$$r_t = \mu + (r_s - \mu)e^{-\kappa(t-s)} + \sigma e^{-\kappa(t-s)} \int_s^t e^{\kappa(u-s)} \sqrt{r_u} dW_u,$$

o rozkładzie warunkowo na  $F_s$  niecentrowanym  $\chi^2(2cr_s, 2q+2, 2u)$  z  $2q+2$  stopniami swobody i parametrem  $2u$ , gdzie:

$$c = \frac{2\kappa}{\sigma^2[1 - e^{-\kappa(t-s)}]},$$

$$u = cr_s e^{-\kappa(t-s)},$$

$$v = cr_s,$$

$$q = \frac{2\kappa\mu}{\sigma^2} - 1.$$

Powyższy rozkład w sposób jawny możemy zapisać jako<sup>1</sup>:

$$f(r_t|F_s) = ce^{-u-v} \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{q}{2}} I_q[2\sqrt{uv}],$$

gdzie  $I_q[\cdot]$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju z indeksem  $q$ . Zgodnie z tym rozkładem średnia i wariancja procesu warunkowo na  $F_s$  wynoszą odpowiednio:

$$E[r_t|F_s] = \mu + (r_s - \mu)e^{-\kappa(t-s)}$$

i

$$\text{var}[r_t|F_s] = r_s \frac{\sigma^2}{\kappa} \left[ e^{-\kappa(t-s)} - e^{-2\kappa(t-s)} \right] + \mu \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left[ 1 - e^{-\kappa(t-s)} \right]^2.$$

Model ten generuje jedynie wartości dodatnie.

### 3.3. Model Brennana-Schwartza (BS)

Brennan i Schwartz (1979) zaproponowali model postaci:

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma r_t dW_t \quad (6)$$

<sup>1</sup> Nie jest to rozkład  $\chi^2$ , który otrzymamy dopiero biorąc  $r_t^* = 2cr_s$ , wtedy  $r_t^*$  posiada warunkowo na  $F_s^*$  nie centrowany rozkład  $\chi^2$ , taki że  $f(r_t^*|F_s^*) = \frac{1}{2} \exp[-c(r_s^* + 2u)] \left(\frac{r_s^*}{2u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q[\sqrt{2ur_s^*}]$ .

którego warunkowy rozkład nie jest znany, co m. in. spowodowało, że model ten jest mniej popularny od wcześniej omówionych. Dla każdego  $s \leq t$  rozkład (6) warunkowo na  $F_s$  możemy aproksymować rozkładem normalnym z średnią

$$E[r_t|F_s] = \kappa(\mu - r_t)(t - s)$$

i wariancją

$$\text{var}[r_t|F_s] = \sigma^2 r_t^2 (t - s).$$

### 3.4. Model Chana-Karolyiego-Longstaffa-Sandersa (CKLS)

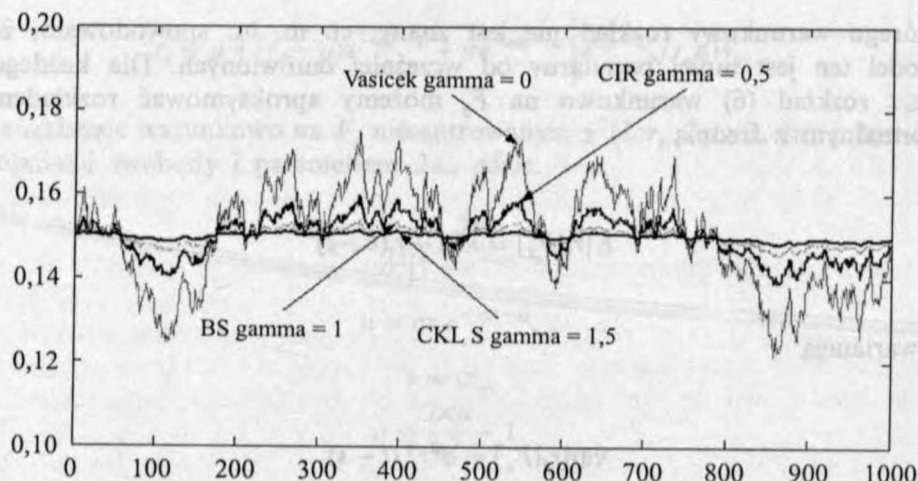
W pracy Chana i in. (1992) dokonano porównania omówionych właśnie modeli dla stóp rentowności amerykańskich jednomiesięcznych bonów skarbowych za okres od 1964 r. do 1989 r. otrzymując dla procesu stopy spot, danego równaniem (3), współczynnik  $\gamma \approx 1,5$ . W tym przypadku warunkowy rozkład również nie jest znany, ale może być aproksymowany dla każdego  $s \leq t$  rozkładem normalnym z średnią

$$E[r_t|F_s] = \kappa(\mu - r_t)(t - s)$$

i wariancją

$$\text{var}[r_t|F_s] = \sigma^2 r_t^{2 \cdot 1,5} (t - s).$$

Na rysunku 1 pokazano przykładowe realizacje procesu (3) dla różnych wartości parametru  $\gamma$  i  $r_0 = 0,15$ ,  $\kappa = 3$ ,  $\mu = 0,15$ ,  $\sigma = 0,06$  oraz  $\Delta t = 0,001$  przy zastosowaniu tych samych liczb losowych.



Rys. 1. Realizacje procesu Vasička, CIR, BS i CKLS przy zastosowaniu tych samych parametrów i liczb losowych

Źródło: opracowanie własne

Jak łatwo zauważyć na rysunku 1, im większa wartość współczynnika  $\gamma$ , tym mniejsza zmienność procesu (3).

#### 4. METODY KALIBRACJI MODELI

##### 4.1. Dyskretyzacja procesów ciągłych

W celu numerycznej aproksymacji procesu (3) dokonamy jego dyskretyzacji za pomocą schematu Eulera:

$$r_{t+\Delta t} = r_t + \kappa(\mu - r_t)\Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{t+\Delta t} \quad (7)$$

co po przekształceniu daje:

$$r_{t+\Delta t} = \kappa\mu\Delta t + (1 - \kappa\Delta t)r_t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{t+\Delta t} \quad (8)$$

gdzie  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ , zob. Janicki, Izydorezyk (2001).

##### 4.2. Regresja metodą najmniejszych kwadratów

Mając dany szereg czasowy stopy krótkoterminowej  $(r_t)_{t=0, 1, \dots, n}$ , możemy dokonać estymacji parametrów procesu (3) przy zadanym  $\gamma$  (równym odpowiednio 0; 0.5; 1; 1.5) poprzez regresję:

$$r_{t+\Delta t} \kappa_t^{-\gamma} = a r_t^{-\gamma} + b r_t^{1-\gamma} + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{t+\Delta t} \quad (9)$$

gdzie:

$$a = \kappa \mu \Delta t, \quad b = 1 - \kappa \Delta t,$$

otrzymując estymatory:

$$\hat{\kappa} = \frac{1-b}{\Delta t}, \quad \hat{\mu} = \frac{a}{1-b}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\text{odchylenie standardowe reszt}}{\sqrt{\Delta t}}.$$

Metoda ta w praktyce często nie daje dobrych rezultatów – w przypadku gdy  $\Delta t$  nie jest bardzo małe, estymatory  $\hat{\mu}$  i  $\hat{\kappa}$  nie są zbyt dokładne (zob. Ball, Torous 1996), dlatego w dalszej części rozpatrzymy bardziej odpowiednią w finansowych zastosowaniach metodę momentów.

### 4.3. Metoda momentów

Chan i in. (1992) użyli metody momentów do estymacji parametrów procesu (3) w jego dyskretnej postaci (7). Mając dany szereg czasowy stóp procentowych  $r_t$ , którego ewolucja zależy od wektora parametrów  $(a, b, \sigma, \gamma)$ , możliwe jest znalezienie funkcji  $f_i(r_t, a, b, \sigma, \gamma)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , takiej że  $E[f_i(r_t, a, b, \sigma, \gamma)] = 0$ . Weźmy  $e_{t+1} = r_{t+1} - (a + b r_t)$ , co daje  $e_{t+1} = \sigma r_t^\gamma \varepsilon_{t+1}$ . Jeżeli model jest poprawnie zdefiniowany, wtedy:

- $e_{t+1} \sim N(0, \sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t)$  i  $E[e_{t+1}] = 0$ ,  $E[e_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t] = 0$  itd.;
  - $e_{t+1}$  są nieskorelowane w czasie, tzn.  $E[e_{t+1} e_t] = 0$ ,  $E[e_{t+1} e_{t-1}] = 0$  itd.;
  - $e_{t+1}$  są nieskorelowane w czasie z  $r_t$ , więc  $E[e_{t+1} r_t] = 0$ ,  $E[(e_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t) r_t] = 0$  itd.;
- stąd:

$$f_1(r_t; a, b, \sigma, \gamma) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (r_{t+1} - a - b r_t) \quad (10)$$

$$f_2(r_t; a, b, \sigma, \gamma) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [(r_{t+1} - a - b r_t)^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t] \quad (11)$$

$$f_3(r_t; a, b, \sigma, \gamma) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (r_{t+1} - a - b r_t) t_t \quad (12)$$

$$f_4(r_t; a, b, \sigma, \gamma) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [(r_{t+1} - a - b r_t)^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t] r_t \quad (13)$$

Następnie wybierając  $(a, b, \sigma, \gamma)$  i przyrównując funkcje (10)–(13) do zera poprzez minimalizację wyrażenia:

$$J(a, b, \sigma, \gamma) = \sum_{i=1}^4 f_i^2 \quad (14)$$

otrzymujemy estymatory:

$$(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma}, \hat{\gamma}) = \arg \min_{(a, b, \sigma, \gamma)} \{J(a, b, \sigma, \gamma)\} \quad (15)$$

metody momentów dla wektora parametrów  $(a, b, \sigma, \gamma)$ .

#### 4.4. Weryfikacja wyestymowanego modelu

Badanie istotności parametrów w przypadku regresji zostało przeprowadzone na podstawie testu parametrycznego  $F$  – Fishera – dla wektora parametrów  $(a, b)$  była testowana hipoteza

$$H_0 : (a, b) = 0,$$

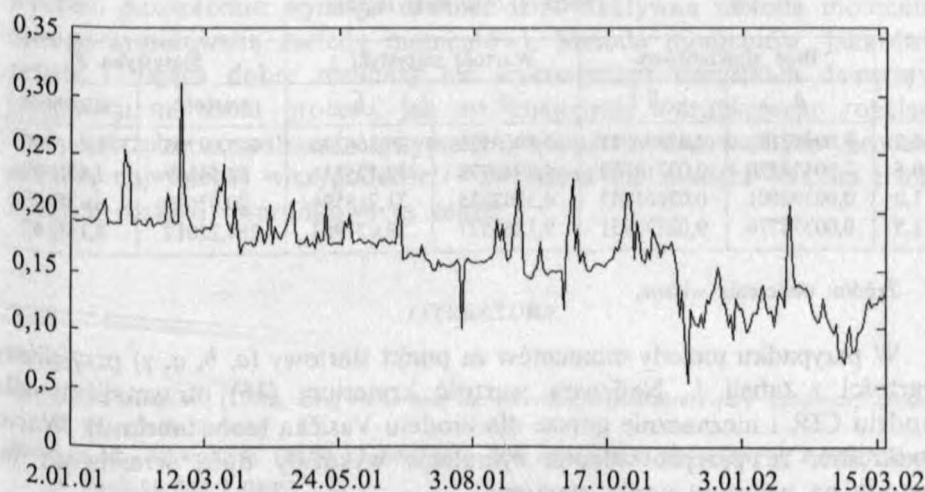
na poziomie istotności 0,05 – taki został przyjęty we wszystkich przeprowadzonych testach. Do badania istotności wpływu poszczególnych zmiennych objaśniających wykorzystaliśmy statystykę  $t$ -Studenta, testując hipotezy

$$H_0 : a = 0, \quad H_0 : b = 0,$$

na założonym poziomie istotności.

#### 5. KALIBRACJA NA RYNKU POLSKIM

Na podstawie notowań jednodniowej stopy WIBOR za okres 2.01.2001–20.03.2002, (zob. rysunek 2), parametry procesu (3) zostały wyestymowane metodą regresji oraz metodą momentów.



Rys. 2. Jednodniowa stopa WIBOR za okres 2.01.2001–20.03.2002

Źródło: opracowanie własne

Wyniki estymacji modelu regresji przy ustalonym  $\gamma$  zostały przedstawione w tabeli 1. Najlepszą wartość kryterium (15) otrzymaliśmy w przypadku  $\gamma = 0$ , co przemawia za stosowaniem dla jednodniowej stopy WIBOR modelu Vasička, najgorszą zaś dla  $\gamma = 1,5$ , a więc modelu CKLS.

Tabela 1. Wyniki regresji

| $\gamma$ | $\hat{a}$  | $\hat{b}$  | błąd standardowy | $\hat{\kappa}$ | $\hat{\mu}$ | $\hat{\sigma}$ |
|----------|------------|------------|------------------|----------------|-------------|----------------|
| 0,0      | 0,02172509 | 0,86510378 | 0,01792427       | 33,7530489     | 0,16105038  | 0,28352944     |
| 0,5      | 0,02058653 | 0,87210620 | 0,04561227       | 32,0009381     | 0,16096585  | 0,72150335     |
| 1,0      | 0,02485273 | 0,84426745 | 0,12550681       | 38,9666090     | 0,15958594  | 1,98528979     |
| 1,5      | 0,03420040 | 0,77842233 | 0,37669136       | 55,4420408     | 0,15434948  | 5,95857315     |

Źródło: obliczenia własne.

Przy założonym poziomie istotności 0,05 dla wszystkich rozpatrywanych wartości  $\gamma$ , wartość empiryczna statystyki  $F$ , (zob. tabela 2), przekroczyła wartość krytyczną  $F_{0,5;2;300} = 3$ , co pozwala odrzucić hipotezę  $H_0: (a, b) = 0$ . Również wartość empiryczna statystyki  $t$  we wszystkich przypadkach przekroczyła wartość krytyczną  $t_{0,05;300} = 1,96$ , a więc możemy odrzucić hipotezy  $H_0: a = 0$  i  $H_0: b = 0$  (zob. tabela 2).

Tabela 2. Statystyki regresji

| $\gamma$ | Błąd standardowy |            | Wartość statystyki $t$ |           | Statystyka $F$ |           |
|----------|------------------|------------|------------------------|-----------|----------------|-----------|
|          | $\hat{a}$        | $\hat{b}$  | $\hat{a}$              | $\hat{b}$ | wartość        | istotność |
| 0,0      | 0,00482131       | 0,02896591 | 4,5060521              | 29,866270 | 445,99705      | 1,84E-90  |
| 0,5      | 0,00428520       | 0,02714708 | 4,8040999              | 32,125233 | 82,54699       | 2,85E-29  |
| 1,0      | 0,00392601       | 0,02661743 | 6,3302755              | 31,718594 | 20,03619       | 6,83E-09  |
| 1,5      | 0,00374776       | 0,02772951 | 9,1255527              | 28,071983 | 264,22012      | 8,15E-67  |

Źródło: obliczenia własne.

W przypadku metody momentów za punkt startowy ( $a, b, \sigma, \gamma$ ) przyjęliśmy wartości z tabeli 1. Najlepszą wartość kryterium (15) otrzymaliśmy dla modelu CIR i nieznacznie gorsze dla modelu Vasička (zob. tabela 3). Warto podkreślić, że przeprowadzone symulacje wykazały dużą wrażliwość tej metody na wybrany punkt startowy.

Tabela 3. Estymatory metody momentów i wartość funkcji minimalizowanej

| $\hat{\kappa}$ | $\hat{\mu}$ | $\hat{\sigma}$ | $\hat{\gamma}$ | $J(a, b, \sigma, \gamma)$ |
|----------------|-------------|----------------|----------------|---------------------------|
| 33,753049      | 0,161050    | 0,283529       | 1,903635E-13   | 6,037652E-07              |
| 34,281451      | 0,161074    | 0,713969       | 0,5097368107   | 3,822710E-07              |
| 38,601560      | 0,161247    | 1,961607       | 1,0822465557   | 2,755169E-05              |
| 35,347404      | 0,161121    | 5,935679       | 1,7339637539   | 9,074772E-06              |

Źródło: obliczenia własne.

Podsumowując wyniki, możemy stwierdzić konieczność stosowania na rynku polskim raczej modeli charakteryzujących się dużą zmiennością, jak model Vasička i Coxa-Ingersolla-Rossa, niż modeli o małej zmienności typu Chana-Karolyiego-Longstaffa-Sandersa.

## 6. KIERUNKI DAJSZYCH BADAŃ

Przeprowadzone badania pozwoliły określić kierunek dalszych prac nad rozpatrywanym zagadnieniem. Do dyskretyzacji procesu ciągłego użyliśmy najprostszego schematu. Można przypuszczać, iż lepsze wyniki estymacji dałyby schematy Milshteina i Itô-Taylor'a zwłaszcza wyższego rzędu, jednak kosztem wydłużenia czasu obliczeń. Metodę momentów użytą do estymacji parametrów zastosowaliśmy w klasycznej formie – liczba parametrów równa jest liczbie momentów. Być może lepsze efekty przyniosłoby zastosowanie większej liczby momentów, powstaje jednak problem, które momenty

wybrać. Rozważenia wymaga również tzw. efektywna metoda momentów (zwana symulowaną metodą momentów). Metoda momentów, jakkolwiek prosta i dająca dobre rezultaty nie wykorzystuje wszystkich dostępnych informacji na temat procesu, jak np. znajomość warunkowego rozkładu, stąd potrzeba rozpatrzenia estymacji parametrów rozważanych procesów metodą największej wiarygodności – zwłaszcza dla modelu Vasička i CIR, których rozkłady warunkowe są znane.

### LITERATURA

- Ball C., Torous W. (1996), *Unit roots and the estimation of interest rate dynamics*, „Journal of Empirical Finance”, 3.
- Brennan M., Schwartz E. (1979), *A continuous time approach to the pricing of bonds*, „Journal of Banking and Finance”, 3.
- Brennan M., Schwartz E. (1982), *An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency*, „Journal of Financial and Quantitative Analysis”, 25.
- Chan K., Karolyi G., Longstaff F., Sanders A. (1992), *An empirical comparison of alternatives models of the term structure of interest rate*, „Journal of Finance”, 47.
- Cox J., Ingersoll J., Ross S. (1980), *An analysis of variable rate loan contracts*, „Journal of Finance”, 35.
- Cox J., Ingersoll J., Ross S. (1985), *A theory of the term structure of interest rates*, „Econometrica”, 53.
- Janicki A., Izydorczyk A. (2001), *Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym*, „Wydawnictwo Naukowo-Techniczne”.
- Vasiček O. A. (1977), *An equilibrium characterization of the term structure*, „Journal of Financial Economics”, 5.

Witold Szczepaniak

### SPOT RATE MODELS ON THE POLISH MARKET

#### Summary

In this paper early spot rate models are presented as well as regression method and general method of moments of estimation of their parameters. These models are calibrated according to the polish market with WIBOR rates calibration being an example.