

Witold Orzeszko*

ZASTOSOWANIE LOKALNEJ APROKSYMACJI WIELOMIANOWEJ DO PROGNOZOWANIA CHAOTYCZNYCH SZEREGÓW CZASOWYCH

Streszczenie. Teoria chaosu deterministycznego stanowi alternatywne podejście do analizy procesów finansowych. Ze względu na swój złożony charakter, szeregi chaotyczne wydają się losowe i w konsekwencji nieprognozowalne. W istocie różnią się od szeregów prawdziwie losowych możliwością ich efektywnego prognozowania w krótkim horyzoncie czasowym.

W artykule zaprezentowano lokalną aproksymację wielomianową – metodę prognozowania chaotycznych szeregów czasowych. Celem przeprowadzonych badań była weryfikacja skuteczności metody na podstawie wygenerowanych szeregów chaotycznych oraz jej aplikacja do prognozowania ewolucji wybranych szeregów czasowych pochodzących z WGPW. Dodatkowo, otrzymane wyniki wykorzystano do identyfikacji chaosu na WGPW.

Słowa kluczowe: chaos deterministyczny, chaotyczne szeregi czasowe, prognozowanie chaosu, lokalna aproksymacja wielomianowa.

1. WSTĘP

Jedną z teorii stosowanych do opisu złożonej dynamiki procesów finansowych jest teoria chaosu deterministycznego. Chaotyczne szeregi czasowe cechują się skomplikowanym, pozornie losowym przebiegiem oraz mogą posiadać typowe dla szeregów finansowych własności, tj. heteroskedastyczność wariancji warunkowej i grube ogony rozkładów (Hsieh, 1991). Podstawową własnością szeregów chaotycznych, zasadniczo różniącą je od prawdziwie losowych, jest istnienie zależności deterministycznych pomiędzy obserwacjami. Zależności te umożliwiają prognozowanie ich ewolucji w krótkim horyzoncie czasowym z bardzo dużą dokładnością.

W artykule zaprezentowano lokalną aproksymację wielomianową – metodę prognozowania chaotycznych szeregów czasowych. Jej skuteczność

* Mgr, asystent, Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu.

zweryfikowano w zastosowaniu do wygenerowanych znanych szeregów chaotycznych. Dokonano próby krótkookresowego prognozowania ewolucji szeregów czasowych stóp zmian i poziomów indeksu WIG oraz stóp zwrotu wybranych papierów wartościowych notowanych na WGPW.

Dodatkowo, otrzymane wyniki wykorzystano do identyfikacji chaosu deterministycznego w analizowanych szeregach.

2. LOKALNA APROKSYMACJA WIELOMIANOWA

Podstawowym obiektem analizy w teorii chaosu jest system dynamiczny, przez który rozumie się parę (S, f) , gdzie $S \subset R^m$ jest przestrzenią stanów, natomiast $f: S \rightarrow S$ odwzorowaniem definiującym jej dynamikę. W systemach z czasem ciągłym odwzorowanie f zwykle zapisane jest w postaci równania różniczkowego zwyczajnego w postaci normalnej:

$$\frac{ds}{dt} = f(s), \quad (1)$$

dla dowolnego $s \in S$, w przypadku zaś systemu dynamicznego z czasem dyskretnym przez zależność rekurencyjną:

$$s_{t+1} = f(s_t), \quad t = 0, 1, \dots \quad (2)$$

gdzie $s_t, s_{t+1} \in S$ są stanami systemu odpowiednio w momencie t i $t+1$. System (S, f) nazywa się chaotycznym, jeśli posiada dodatni wykładnik Lapunowa oraz jest dyssypatywny, tzn. generuje atraktor (Lorenz, 1989). Warunkiem koniecznym chaotyczności systemu jest nieliniowy charakter funkcji f .

Chaotyczne systemy dynamiczne generują chaotyczne szeregi czasowe, których złożona ewolucja wydaje się zaprzeczeniem regularności i porządku. Klasyczne metody ekonometryczne, tj. analiza spektralna i funkcja autokorelacji nie są w stanie odróżnić ich od prawdziwie losowych. W istocie w szeregach chaotycznych kolejne obserwacje powiązane są zależnościami deterministycznymi, których istnienie daje możliwość znalezienia metod bardzo dokładnego ich prognozowania w krótkim horyzoncie czasowym. W dłuższym horyzoncie czasowym szeregi chaotyczne są nieprognozowalne. Powodem jest ich duża wrażliwość na zmianę warunków początkowych, w wyniku której błędy prognoz powiększają się w kolejnych iteracjach w tempie wykładniczym. Horyzont czasowy, dla którego możliwe jest efektywne prognozowanie zależy od wielu czynników, m. in. liczby obserwacji, wymiaru atraktora i wykładników Lapunowa systemu oraz poziomu zakłóceń losowych.

Podstawą teoretyczną dla metod prognozowania ewolucji chaotycznych szeregów czasowych jest twierdzenie Takensa o zanurzeniu (Takens, 1981; por. Jimenez, Moreno i Ruggeri, 1992), z którego wynika w szczególności, że dla odpowiednio dużego m oraz dowolnych $t, T \in \mathbb{N}$ istnieje funkcja $g_T: R^m \rightarrow R$, dla której:

$$x_{t+T} = g_T(\hat{x}_t^m) \equiv g_T(x_t, x_{t-lag}, \dots, x_{t-(m-1)lag}) \quad (3)$$

Występujące w twierdzeniu Takensa wektory $\hat{x}_t^m = (x_t, x_{t-lag}, \dots, x_{t-(m-1)lag})$ zbudowane z obserwacji szeregu (x_t) są nazywane m -historiami lub wektorami opóźnień, liczba m – wymiarem zanurzenia, natomiast lag – opóźnieniem czasowym.

Należy liczyć się z faktem, że g_T może być bardzo skomplikowaną nieliniową funkcją, jednakże możliwe jest efektywne prognozowanie bez identyfikacji jej wzoru analitycznego. Okazuje się bowiem, że zastąpienie we wzorze (3) nieznannej funkcji g_T pewną jej aproksymantą \tilde{g}_T określonego typu może dawać zadowalające wyniki prognoz. W metodzie lokalnej aproksymacji wielomianowej przyjmuje się za \tilde{g}_T m -wymiarową funkcję wielomianową. Prognozowanie polega wówczas na wyznaczeniu wartości

$$\tilde{x}_{N+T} = \tilde{g}_T(x_N, x_{N-lag}, \dots, x_{N-(m-1)lag}) \equiv \tilde{g}_T(\hat{x}_N^m) \quad (4)$$

gdzie T jest horyzontem prognozy.

W niniejszym opracowaniu rozważono dwa rodzaje wielomianów aproksymujących:

1) stopnia pierwszego (liniowa aproksymacja wielomianowa):

$$\tilde{g}_T(x_1, x_2, \dots, x_m) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m \quad (5)$$

2) stopnia drugiego (kwadratowa aproksymacja wielomianowa):

$$\tilde{g}_T(x_1, x_2, \dots, x_m) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \alpha_{i,j} x_i x_j \quad (6)$$

W obu przypadkach estymacja parametrów wielomianu \tilde{g}_T poprzedzona jest wyborem k wektorów opóźnień, najbliższych (w sensie ustalonej m -wymiarowej metryki) wektorowi \hat{x}_N^m . Na podstawie wyznaczonych najbliższych sąsiadów, przy użyciu metody najmniejszych kwadratów, dokonuje się estymacji współczynników \tilde{g}_T . Przyjmowana *a priori* liczba k może być mniejsza od liczby wszystkich dostępnych m -historii, stąd nazwa „aproksymacja lokalna”. Otrzymane prognozy zależą zatem od stopnia wielomianu aproksymującego, liczby najbliższych sąsiadów – k oraz od wymiaru zanurzenia – m i opóźnienia czasowego – lag .

3. WYNIKI PROGNOZ

W niniejszym artykule zaprezentowano wyniki prognozowania ewolucji wybranych szeregów dla horyzontu czasowego $T = 1$, przy wykorzystaniu liniowej i kwadratowej lokalnej aproksymacji wielomianowej. Badaniu poddano następujące szeregi:

- 1) chaotyczne – generowane przez: odwzorowanie Henona, odwzorowanie logistyczne, system Lorenza, model Kaldora;
- 2) rzeczywiste: logarytmiczne stopy zmian indeksu WIG (dienne i tygodniowe), oraz logarytmiczne stopy zwrotu akcji: BRE, Optimusa i Żywca (obserwacje dienne).

Szeregi czasowe pochodzące z WGPW dotyczą kursów zamknięcia z okresu 3.10.1994-20.08.2001r. Szereg tygodniowych zmian indeksu WIG został wyznaczony w oparciu o poziomy zamknięcia sesji poniedziałkowych.

W trakcie badania każdy z analizowanych szeregów długości N został podzielony na dwie części, składające się odpowiednio z N_1 i N_2 obserwacji. Dla każdej obserwacji z drugiej próbki x_{N_1+i} (dla $i = 1, 2, \dots, N_2$) wyznaczono prognozę $\tilde{x}_{N_1+i} = \tilde{g}_1(\hat{x}_{N_1+i-1}^m) \equiv \tilde{g}_1(x_{N_1+i-1}, \dots, x_{N_1+i-1-(m-1)\cdot lag})$. Pierwsza próbka została wykorzystana do wyboru najbliższych sąsiadów wektora $\hat{x}_{N_1+i-1}^m$ oraz do oszacowania współczynników wielomianu \tilde{g}_1 .

Prognozy wyznaczono dla następujących wartości parametrów: $lag = 1, 2, \dots, 5$, $m = 1, 2, \dots, 15$ (dla aproksymacji liniowej) i $m = 1, 2, 3, 4$ (dla aproksymacji kwadratowej) oraz dla wszystkich potencjalnie możliwych $k \geq m + 2$. W celu znalezienia najbliższych sąsiadów zastosowano metrykę euklidesową.

Do oceny dokładności prognozy wykorzystano bezwzględny błąd predykcji *ex-post* zadany wzorem:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N_2} \cdot \sum_{t=N_1+1}^{N_1+N_2} (x_t - \tilde{x}_t)^2} \quad (7)$$

oraz względny błąd prognozy postaci (por. Farmer i Sidorowich, 1987):

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sigma_x} \cdot 100\% \quad (8)$$

gdzie σ_x jest odchyleniem standardowym szeregu (x_t) dla $t = 1, 2, \dots, N_1$.

Otrzymane rezultaty zostały podsumowane w tabelach 1–9 i dla porównania zestawione z wynikami prognozowania w oparciu o modele ARMA, uzupełnionymi w przypadku procesów giełdowych o model GARCH(1,1) dla reszt.

Odwzorowanie Henona $H: R^2 \rightarrow R^2$ generuje dwuwymiarowy system chaotyczny (R^2, H) , według następującej zależności:

$$H(x_t, y_t) \equiv (x_{t+1}, y_{t+1}) = (1 - 1,4x_t^2 + y_t; 0,3x_t) \quad (9)$$

Badaniu poddano szereg 1715 obserwacji (x_t) wygenerowanych dla $(x_0, y_0) = (0,9; 0,9)$.

Tabela 1. Najmniejsze błędy prognozy dla szeregu Henona przy $N_1 = 1650$, $N_2 = 65$

Metoda	σ	σ' (%)	Optymalne parametry
Liniowa aproksymacja	10^{-5}	0,004	$m = 4$, $lag = 1$, $k = 7$
Aproksymacja kwadratowa	10^{-14}	10^{-12}	$m = 2$, $lag = 1$, $k = 1568$
ARMA	0,64	87,39	ARMA(2, 6)

Źródło: obliczenia własne.

Odwzorowanie logistyczne generuje jednowymiarowy system chaotyczny $((0,1), f)$, gdzie $f(x_t) \equiv x_{t+1} = 4 \cdot x_t \cdot (1 - x_t)$. W badaniu rozważono szereg składający się z 1715 obserwacji wyznaczony dla $x_0 = 0,7$.

Tabela 2. Najmniejsze błędy prognozy dla odwzorowania logistycznego przy $N_1 = 1650$, $N_2 = 65$

Metoda	σ	σ' (%)	Optymalne parametry
Liniowa aproksymacja	10^{-7}	10^{-4}	$m = 2$, $lag = 1$, $k = 6$
Aproksymacja kwadratowa	10^{-14}	10^{-12}	$m = 1$, $k = 1627$
ARMA	0,33	93,40	Biały szum

Źródło: obliczenia własne.

System Lorenza jest ciągłym chaotycznym układem dynamicznym, zdefiniowanym przez następujący układ równań różniczkowych:

$$\frac{dx}{dt} = 16 \cdot (y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x \cdot z + 45,92 \cdot x - y \quad (10)$$

$$\frac{dz}{dt} = x \cdot y - 4 \cdot z$$

Badaniu poddano szereg postaci $x_t = x(t \cdot 0,01)$, dla $t = 0, 1, \dots, 1714$, wygenerowany przez system Lorenza przy zadanych warunkach początkowych $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 1)$.

Tabela 3. Najmniejsze błędy prognozy dla szeregu Lorenza przy $N_1 = 1650$, $N_2 = 65$

Metoda	σ	σ' (%)	Optymalne parametry
Liniowa aproksymacja	0,001	0,0093	$m = 14$, $lag = 1$, $k = 30$
Aproksymacja kwadratowa	0,001	0,0087	$m = 4$, $lag = 1$, $k = 20$
ARMA	0,004	0,034	ARMA(5, 4)

Źródło: obliczenia własne.

Model Kaldora. Prognozowaniu poddano szereg (Y_t) wygenerowany z makroekonomicznego modelu Kaldora:

$$Y_{t+1} - Y_t = \alpha(I_t(Y_t, K_t) - S_t(Y_t)) \quad (11)$$

$$K_{t+1} - K_t = I_t(Y_t, K_t) - \delta K_t$$

po przyjęciu założeń, że oszczędności zależą liniowo od dochodu, tzn. $S_t(Y_t) = s \cdot Y_t$, natomiast funkcja inwestycji jest postaci:

$$I_t = c \cdot 2^{\frac{-1}{(dY_t + s)^2}} + e \cdot Y_t + a \cdot \left(\frac{f}{K_t}\right)^g \quad (12)$$

Udowodniono, że tak dobrana funkcja spełnia założenia modelu Kaldora oraz że w zależności od wartości parametrów może generować chaos (Lorenz, 1989). W badaniu przyjęto następujące parametry prowadzące do ewolucji chaotycznej:

$$\alpha = 20, s = 0,21, \delta = 0,05, a = 5, c = 20, d = 0,01, \varepsilon = 0,00001, e = 0,05, f = 280, g = 4,5$$

oraz wartości początkowe $Y_0 = 65$, $K_0 = 265$.

Tabela 4. Najmniejsze błędy prognozy dla szeregu Kaldora przy $N_1 = 1650$, $N_2 = 65$

Metoda	σ	σ' (%)	Optymalne parametry
Liniowa aproksymacja	0,07	0,27	$m = 2$, $lag = 1$, $k = 6$
Aproksymacja kwadratowa	0,01	0,03	$m = 2$, $lag = 1$, $k = 13$
ARMA	15,00	57,59	ARMA(4, 3)

Źródło: obliczenia własne.

Logarytmiczne stopy zmian WIG (1715 obserwacji dziennych)Tabela 5. Najmniejsze błędy prognozy dla dziennych stóp zmian WIG przy $N_1 = 1650$, $N_2 = 65$

Metoda	σ	σ' (%)	Optymalne parametry
Liniowa aproksymacja	0,0125	64,72	$m = 10$, $lag = 3$, $k = 112$
Aproksymacja kwadratowa	0,0125	64,93	$m = 2$, $lag = 3$, $k = 90$
AR-GARCH	0,0130	67,35	AR(1)-GARCH(1,1)

Źródło: obliczenia własne.

Logarytmiczne stopy zmian WIG (338 obserwacji tygodniowych).Tabela 6. Najmniejsze błędy prognozy dla tygodniowych stóp zmian WIG przy $N_1 = 300$, $N_2 = 38$

Metoda	σ	σ' (%)	Optymalne parametry
Liniowa aproksymacja	0,0295	59,27	$m = 15$, $lag = 5$, $k = 130$
Aproksymacja kwadratowa	0,0299	60,00	$m = 3$, $lag = 4$, $k = 62$
AR-GARCH	0,0340	68,31	GARCH(1,1)

Źródło: obliczenia własne.

Logarytmiczne stopy zwrotu BRE (1715 obserwacji dziennych).Tabela 7. Najmniejsze błędy prognozy dla stóp zwrotu BRE przy $N_1 = 1650$, $N_2 = 65$

Metoda	σ	σ' (%)	Optymalne parametry
Liniowa aproksymacja	0,0213	68,11	$m = 3$, $lag = 3$, $k = 271$
Aproksymacja kwadratowa	0,0222	71,01	$m = 4$, $lag = 3$, $k = 477$
AR-GARCH	0,0237	75,64	GARCH(1,1)

Źródło: obliczenia własne.

Logarytmiczne stopy zwrotu Optimusa (1715 obserwacji dziennych).Tabela 8. Najmniejsze błędy prognozy dla stóp zwrotu Optimusa przy $N_1 = 1650$, $N_2 = 65$

Metoda	σ	σ' (%)	Optymalne parametry
Liniowa aproksymacja	0,0361	90,55	$m = 1$, $lag = 1$, $k = 107$
Aproksymacja kwadratowa	0,0380	95,03	$m = 4$, $lag = 5$, $k = 306$
AR-GARCH	0,0409	102,43	GARCH(1,1)

Źródło: obliczenia własne.

Logarytmiczne stopy zwrotu Żywca (1709 obserwacji dziennych).

Tabela 9. Najmniejsze błędy prognozy dla stóp zwrotu Żywca przy $N_1 = 1645$, $N_2 = 64$

Metoda	σ	σ' (%)	Optymalne parametry
Liniowa aproksymacja	0,0126	43,28	$m = 2$, $lag = 2$, $k = 49$
Aproksymacja kwadratowa	0,0128	43,98	$m = 2$, $lag = 2$, $k = 1621$
AR-GARCH	0,0163	56,10	AR(1)-GARCH(1,1)

Źródło: obliczenia własne.

Zaprezentowane w tabelach 1-4 wyniki potwierdzają, że lokalna aproksymacja wielomianowa jest bardzo skuteczną metodą prognozowania ewolucji chaotycznych szeregów czasowych. Otrzymane dzięki niej prognozy są dużo dokładniejsze od wyznaczonych w oparciu o modele ARMA. Dotyczy to zarówno prostych systemów, tj. generowanych przez odwzorowania Henona i logistyczne, jak i bardziej złożonych, do których można zaliczyć model Kaldora oraz system Lorenza.

Zauważalna jest wyższość aproksymacji kwadratowej nad liniową. Bardzo duża dokładność prognozy, jaką daje aproksymacja kwadratowa w zastosowaniu do szeregów Henona i logistycznego wynika z faktu, że oba odwzorowania są w istocie funkcjami wielomianowymi stopnia drugiego (funkcja logistyczna dla $m = 1$, odwzorowanie Henona dla $m = 2$, $lag = 1$). Otrzymany błąd prognozy jest więc w tych przypadkach efektem niedokładności estymacji ich współczynników.

W zastosowaniu do szeregów czasowych stóp zwrotu, oba warianty aproksymacji wielomianowej dają prognozy dokładniejsze niż modele AR-GARCH (tabele 5-9). Jednakże wyniki te powinny być ostrożnie interpretowane. Należy bowiem podkreślić, że porównywane procedury prognozowania przebiegały według innej filozofii: w modelowaniu AR-GARCH wykorzystano model z wcześniej ustalonymi wartościami parametrów, natomiast w metodzie aproksymacji wielomianowej zostało wyznaczonych wiele prognoz dla różnych wartości parametrów, a dopiero spośród nich wybrana ta najlepsza.

4. IDENTYFIKACJA CHAOSU DETERMINISTYCZNEGO

Wyniki prognozowania, będące efektem zastosowania lokalnej aproksymacji wielomianem stopnia pierwszego, można wykorzystać do identyfikacji chaosu deterministycznego w szeregach czasowych. Ideą metody jest nieudowodniona

formalnie hipoteza, że dla szeregów chaotycznych najdokładniejsza prognoza ma miejsce dla niewielkich wartości k , czyli liczby najbliższych sąsiadów wykorzystanych do oszacowania współczynników wielomianu aproksymującego. Otrzymane duże wartości k mogą świadczyć o tym, że szereg jest realizacją liniowego procesu autoregresyjnego, pośrednie zaś sugerują potrzebę rozważenia pewnego nieliniowego modelu stochastycznego (Castagli, 1992).

Rysunki 1–4 przedstawiają zależność względnego błędu prognozy σ' od wartości k dla szeregów chaotycznych.

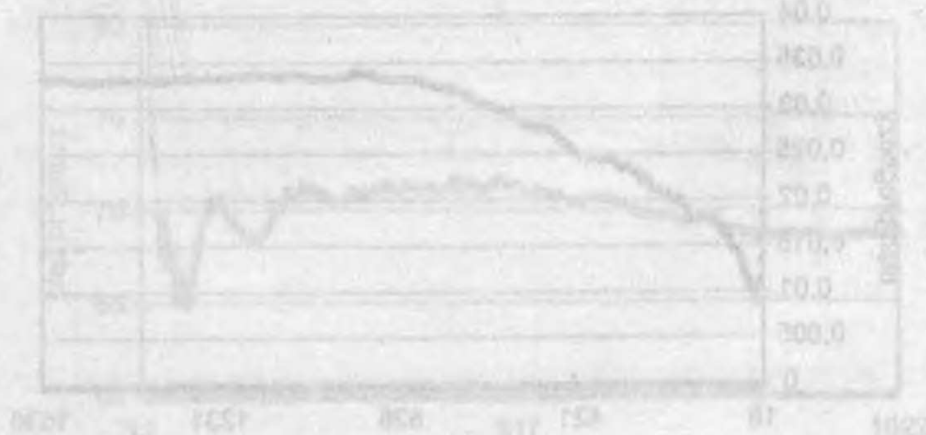
Na rysunkach 5–6 przedstawiona jest zależność błędu prognozy od wartości k dla szeregów poziomów indeksu WIG i jego stóp zmian.

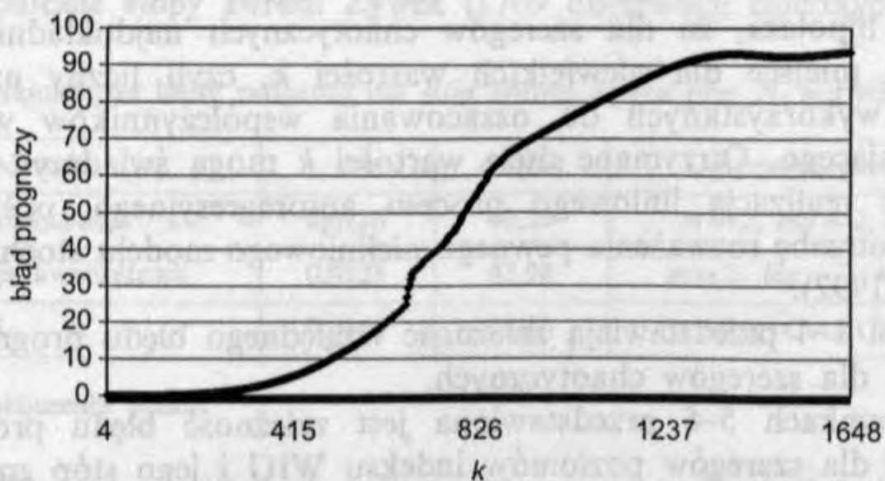
Zauważalna jest wyraźna różnica między wykresami otrzymanymi dla szeregów WIG a przebadanymi szeregami chaotycznymi. Otrzymane wartości k , którym odpowiadają najdokładniejsze prognozy sugerują, że szeregi te są raczej realizacjami pewnych nieliniowych procesów stochastycznych.

Celem dalszej analizy (rysunki 7–10) jest próba odpowiedzi na pytanie, czy analizowane szeregi WIG mogą być realizacją chaosu deterministycznego z szumem, który jest przykładem nieliniowego procesu stochastycznego. W tym celu do szeregu wygenerowanego przez odwzorowanie logistyczne o odchyleniu standardowym σ_x dodano składnik losowy o odchyleniu standardowym równym kolejno $20\% \cdot \sigma_x$, $50\% \cdot \sigma_x$, $100\% \cdot \sigma_x$ i $150\% \cdot \sigma_x$.

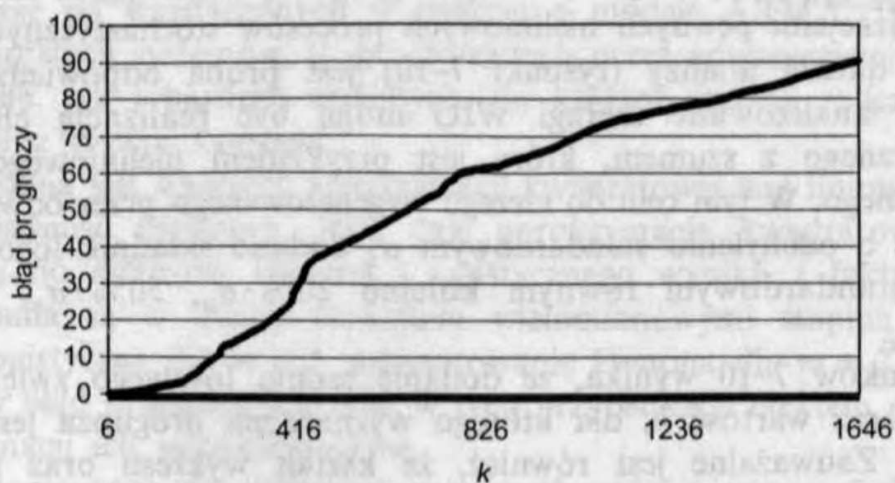
Z rysunków 7–10 wynika, że dodanie szumu losowego zwiększa błąd predykcji oraz wartość k , dla którego wyznaczona prognoza jest najdokładniejsza. Zauważalne jest również, że kształt wykresu oraz rozpiętość błędów prognozy wyraźnie zależą od odchylenia standardowego składnika losowego.

Rysunek 11 ilustruje zależność błędu predykcji od wartości k dla szumu losowego.

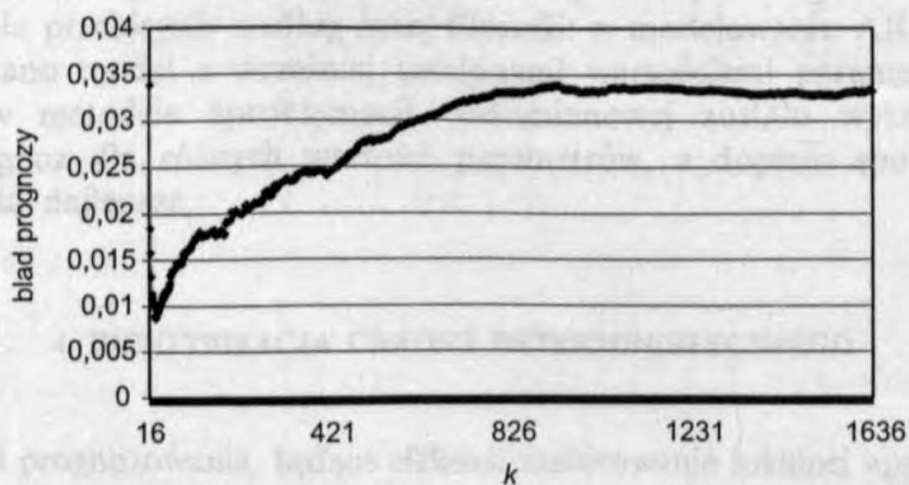




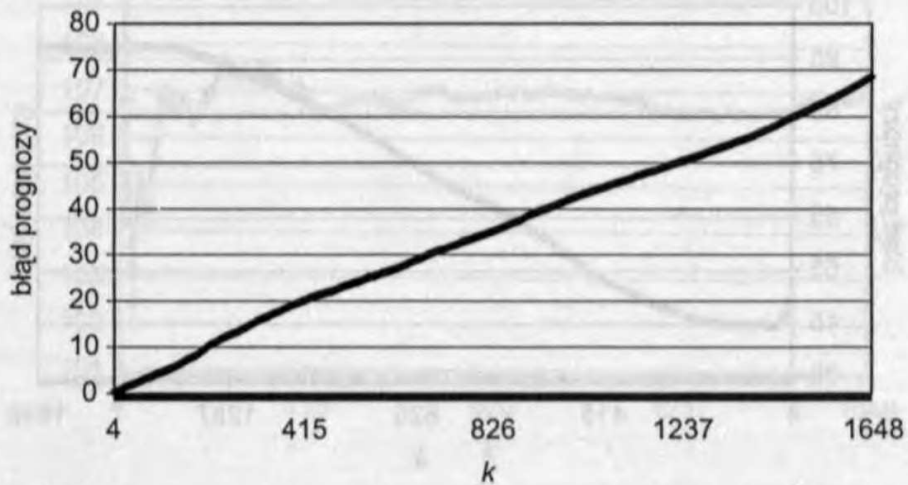
Rys. 1. Odwzorowanie logistyczne ($m = 2$, $lag = 1$): $k_{min} = 6$. Źródło: opracowanie własne



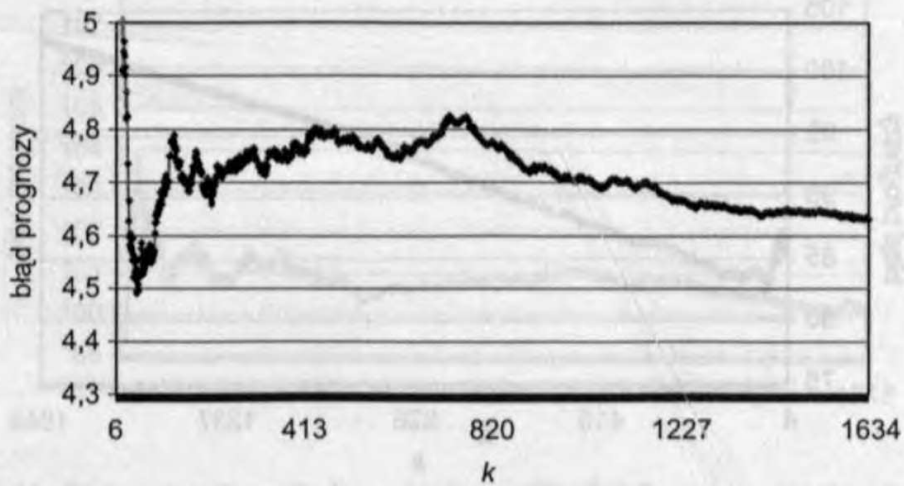
Rys. 2. Odwzorowanie Henona ($m = 4$, $lag = 1$): $k_{min} = 7$. Źródło: opracowanie własne



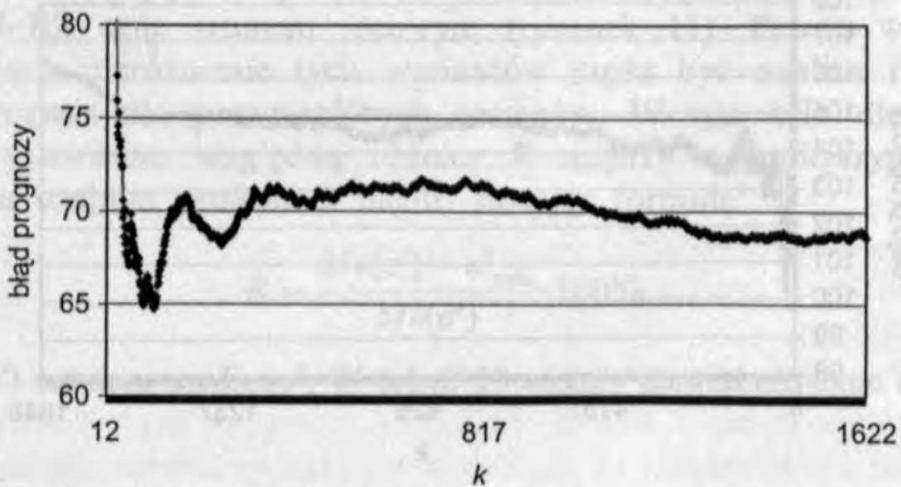
Rys. 3. System Lorenza ($m = 14$, $lag = 1$): $k_{min} = 30$. Źródło: opracowanie własne



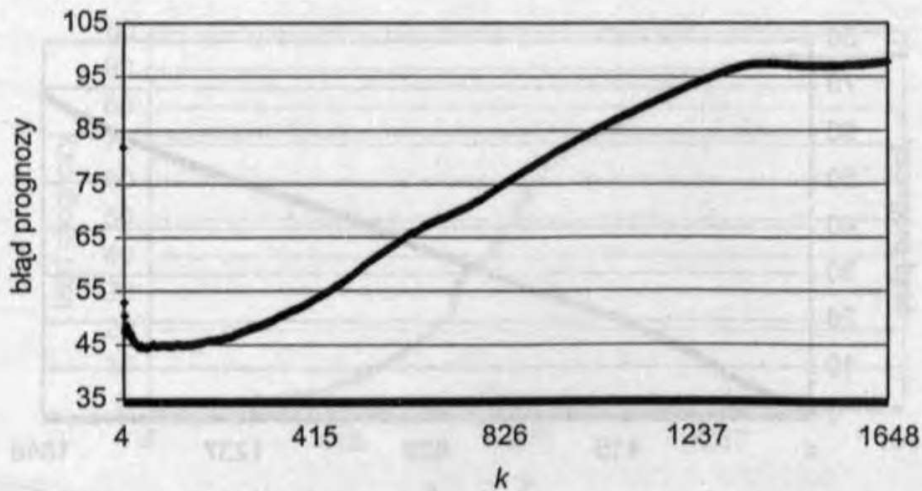
Rys. 4. Model Kaldora ($m = 2$, $lag = 1$): $k_{min} = 6$. Źródło: opracowanie własne



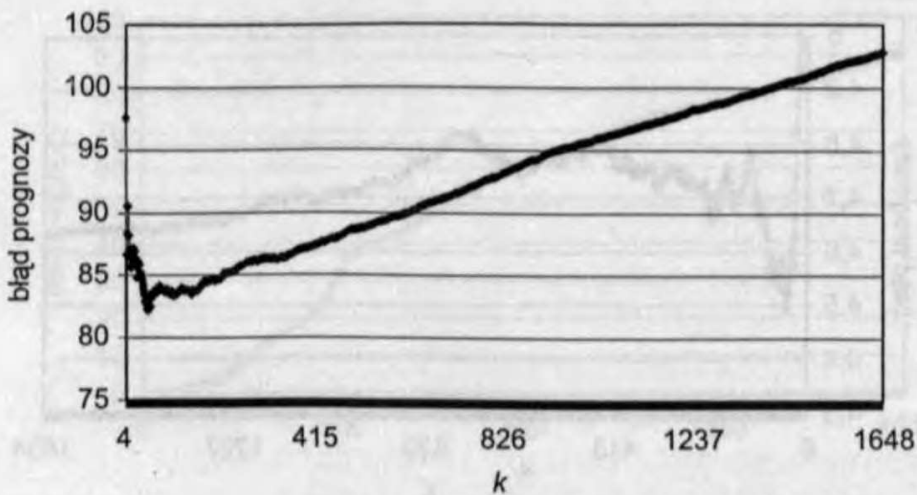
Rys. 5. Szereg poziomów WIG ($m = 4$, $lag = 5$): $k_{min} = 50$. Źródło: opracowanie własne



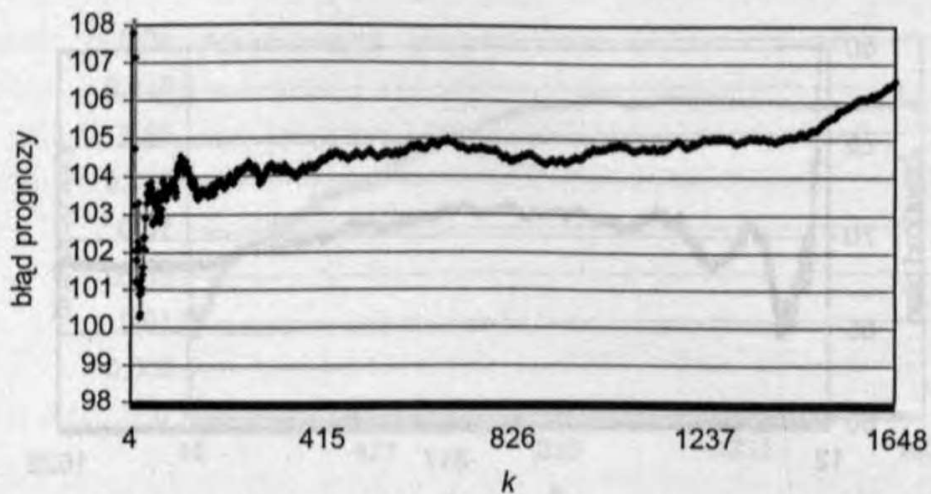
Rys. 6. Szereg stóp zmian WIG ($m = 10$, $lag = 3$): $k_{min} = 112$). Źródło: opracowanie własne



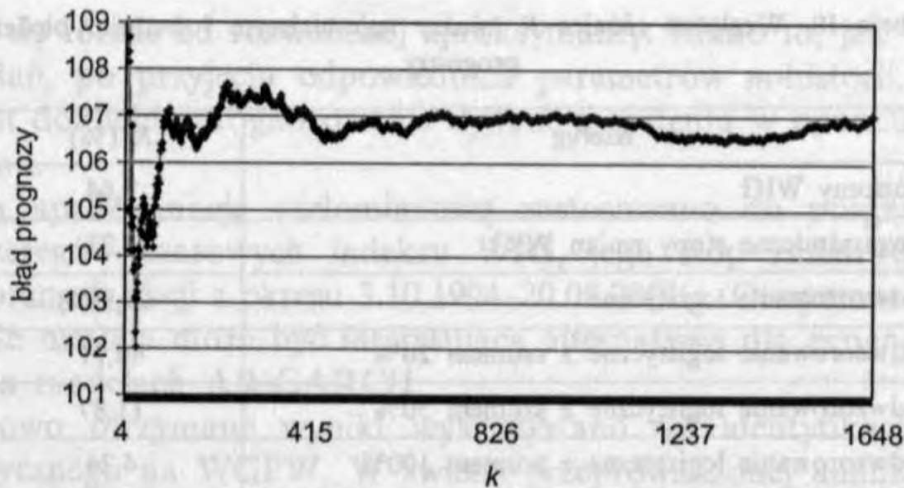
Rys. 7. Odwzorowanie logistyczne ($m = 2$, $lag = 1$, $\sigma = 20\% \cdot \sigma_x$): $k_{min} = 51$.
Źródło: opracowanie własne



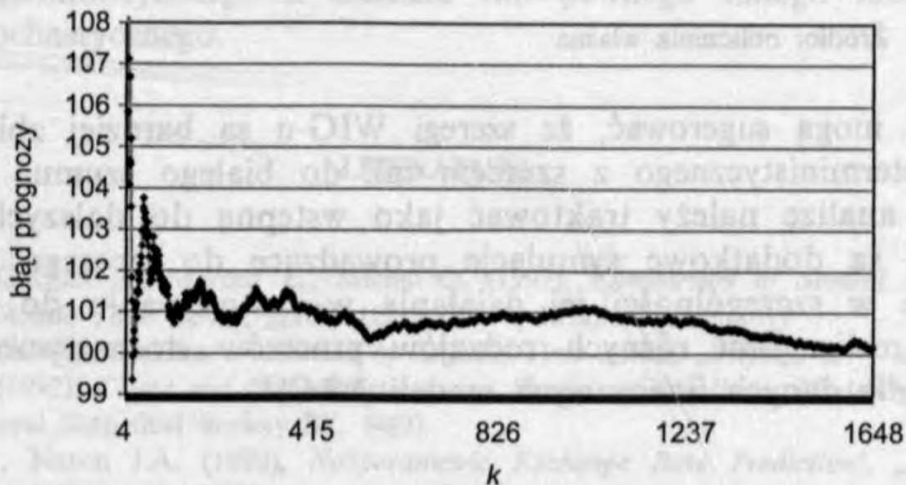
Rys. 8. Odwzorowanie logistyczne ($m = 2$, $lag = 1$, $\sigma = 50\% \cdot \sigma_x$): $k_{min} = 51$.
Źródło: opracowanie własne



Rys. 9. Odwzorowanie logistyczne ($m = 2$, $lag = 1$, $\sigma = 100\% \cdot \sigma_x$): $k_{min} = 22$.
Źródło: opracowanie własne



Rys. 10. Odwzorowanie logistyczne ($m = 2$, $lag = 1$, $\sigma = 150\% \cdot \sigma_x$): $k_{min} = 29$.
Źródło: opracowanie własne



Rys. 11. Biały szum ($m = 2$, $lag = 1$): $k_{min} = 19$. Źródło: opracowanie własne

Jak widać, istnieje podobieństwo między wykresami otrzymanymi dla szeregów WIG (rysunki 5–6) a chaosem deterministycznym z silnym szumem (rysunki 9–10) oraz szumem losowym (rysunek 11). Pewną wskazówką umożliwiającą rozróżnienie tych wariantów może być analiza rozpiętości błędów prognoz dla poszczególnych szeregów. W tym celu dla każdego szeregu wyznaczono względną różnicę R między najmniejszym błędem prognozy a średnim poziomem błędu, stosując formułę:

$$R = \frac{Me(\sigma') - \sigma'_{min}}{Me(\sigma')} \cdot 100\%$$

gdzie $Me(\sigma')$ oznacza medianę¹. W tabeli 10 zostały zaprezentowane otrzymane rezultaty.

¹ Zastosowanie w badaniu średniej arytmetycznej doprowadziłoby do zniekształcenia wyników, ze względu na istnienie wartości ekstremalnych (pojawiających się dla małych k).

Tabela 10. Względne różnice R między najmniejszym i średnim błędem prognozy

Szereg	R (%)
Poziomy WIG	7,64
Logarytmiczne stopy zmian WIG	4,73
Odwzorowanie logistyczne	99,9998
Odwzorowanie logistyczne z szumem 20%	40,91
Odwzorowanie logistyczne z szumem 50%	11,87
Odwzorowanie logistyczne z szumem 100%	4,24
Odwzorowanie logistyczne z szumem 150%	4,52
Biały szum	1,46

Źródło: obliczenia własne

Wyniki mogą sugerować, że szeregi WIG-u są bardziej zbliżone do chaosu deterministycznego z szumem niż do białego szumu. Jednakże powyższą analizę należy traktować jako wstępną do dalszych badań. Niezbędne są dodatkowe symulacje prowadzące do lepszego poznania metody, a w szczególności jej działania w zastosowaniu do szeregów będących realizacjami różnych rodzajów procesów stochastycznych, np. typowych dla danych finansowych modeli ARCH.

5. ZAKOŃCZENIE

W niniejszym opracowaniu zaprezentowano lokalną aproksymację wielomianową – metodę wykorzystywaną do krótkoterminowego prognozowania ewolucji chaotycznych szeregów czasowych. Jej skuteczność zweryfikowano w zastosowaniu do szeregów wygenerowanych przez odwzorowanie Henona, funkcję logistyczną, system Lorenza i makromodel Kaldora. Wyniki badań potwierdzają, że lokalna aproksymacja wielomianowa w zastosowaniu do szeregów chaotycznych daje dużo dokładniejsze prognozy niż modele ARMA. Najmniejsze błędy predykcji otrzymano stosując aproksymację wielomianem stopnia drugiego.

Prezentowana metoda potencjalnie może być skutecznym narzędziem prognozowania również innych rodzajów szeregów czasowych, gdyż nie odwołuje się do własności szczególnych dla chaosu deterministycznego. Co więcej, w przypadku aproksymacji wielomianowej stopnia pierwszego, z góry wiadomo, że prawdziwa (nieliniowa) dynamika chaotycznego szeregu czaso-

wego musi się różnić od rozważonej aproksymanty. Mimo to, jak wykazują wyniki badań, po przyjęciu odpowiednich parametrów m -historii, lokalnie możliwe jest dokładne prognozowanie dynamiki systemu w oparciu o zależności liniowe.

Lokalną aproksymację wielomianową zastosowano do prognozowania ewolucji szeregów czasowych indeksu WIG, jego stóp zmian oraz stóp zwrotu wybranych akcji z okresu 3.10.1994–20.08.2001 r. Otrzymane rezultaty wskazują, że metoda może być interesującą alternatywą dla prognozowania opartego na modelach AR-GARCH.

Dodatkowo otrzymane wyniki wykorzystano do identyfikacji chaosu deterministycznego na WGPW. W świetle przeprowadzonej analizy wydaje się wątpliwe, aby przebadane szeregi były deterministyczne o dynamice chaotycznej. Nie można wykluczyć ewentualności, że są one realizacją chaosu deterministycznego z szumem lub pewnego innego nieliniowego procesu stochastycznego.

LITERATURA

- Badel A.E., Guégan D., Mercier L., Michel O. (1997), *Comparison of Several Methods to Predict Chaotic Time Series*, „IEEE-ICASSP'97”, Munich (Germany).
- Casdagli M. (1989), *Nonlinear Prediction of Chaotic Time Series*, „Physica D.”, 35.
- Casdagli M. (1992), *Chaos and Deterministic versus Stochastic Non-linear Modelling*, „Journal of the Royal Statistical Society B”, 54(2).
- Diebold F.X., Nason J.A. (1990), *Nonparametric Exchange Rate Prediction?*, „Journal of International Economics”, 28.
- Farmer J.D., Sidorowich J.J. (1987), *Predicting Chaotic Time Series*, „Physical Review Letters”, 59.
- Hsieh D.A. (1991), *Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets*, „The Journal of Finance”, XLVI(5).
- Jimenez J., Moreno J.A., Ruggeri G.J. (1992), *Forecasting on Chaotic Time Series: A Local Optimal Linear-Reconstruction Method*, „Physical Review A”, 45(6).
- Lorenz H.-W. (1989), *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Takens F. (1981), *Detecting Strange Attractors in Turbulence*, [w:] Rand D., Young L. (eds), *Dynamical Systems and Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

Witold Orzeszko

APPLICATION OF A LOCAL POLYNOMIAL APPROXIMATION TO CHAOTIC TIME SERIES PREDICTION

Summary

Chaos theory has become a new approach to financial processes analysis. Due to complicated dynamics, chaotic time series seem to be random and, in consequence, unpredictable. In fact, unlike truly random processes, chaotic dynamics can be forecasted very precisely in a short run.

In this paper, a local polynomial approximation is presented. Its efficiency, as a method of building short-term predictors of chaotic time series, has been examined. The presented method has been applied to forecasting stock prices and indices from the Warsaw Stock Exchange. Additionally, obtained results have been used to detect chaos in analyzed time series.