Zygmunt Charzyński

Selected Papers

editors
Tadeusz Krasiński
Stanisław Spodzieja

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Zygmunt Charzyński

Selected Paper



WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Zygmunt Charzyński

Selected Paper

editors
Tadeusz Krasiński
Stanisław Spodzieja

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

ŁÓDŹ 2014

Stanisław Spodzieja – Uniwersytet Łódzki, Wydział Matematyki i Informatyki
Katedra Funkcji Analitycznych i Równań Różniczkowych
90-238 Łódź, ul. Banacha 22
Tadeusz Krasiński – Uniwersytet Łódzki, Wydział Matematyki i Informatyki
Katedra Geometrii Algebraicznej i Informatyki Teoretycznej
90-238 Łódź, ul. Banacha 22

PROJEKT OKŁADKI
Łukasz Orzechowski

Wydrukowano z gotowych materiałów dostarczonych do Wydawnictwa UŁ



© Copyright by Uniwersytet Łódzki, Łódź 2014

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie I. W.06762.14.0.I

ISBN 978-83-7969-434-1

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62

Druk i oprawa: Quick Druk

Contents

Preface 7

Photography of Zygmunt Charzyński in 1957 9

Photography of Zygmunt Charzyński in the 1990s 11

Scientific biography of Zygmunt Charzyński 13

List of publications by Zygmunt Charzyński 17

Other publications by Zygmunt Charzyński 20

1. *Sur les fonctions dont la dérivé symétrique est partout finie*, Fund. Math. 21 (1933), 214–225. 23

2. *Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes*, Colloq. Math. 1 (1948), 168-170 [IV Congrès Polonais de Mathématique, Wrocław, 12–14 Décembre 1946.] 35

3. *Sur l'equation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalents bornées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A. 4, (1950), 41—56. (with W. Janowski) 38

4. *Sur les fonctions univalentes bornées*, Rozprawy Matematyczne 2, Pol. Tow. Mat., Warszawa 1953, 58 pp. 54

5. *Sur les transformations isométriques des espaces du type (F)*, Studia Math. 13, (1953), 94–121. 110

6. *Sur les fonctions univalentes algébriques bornées*, Rozprawy Matematyczne 10, PWN, Warszawa 1955, 41 pp. 138

7. *Méthodes variationnelles dans la théorie des fonctions univalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine (N.S.) 1 (49) (1957), 259–264. 176

8. *Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions holomorphes dans le cercle-unité soient univalentes et bornées*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Cl. 3 8 (2), (1957), 7 pp. (with H. Śmiałkówna) 182

9. *Fonctions univalentes inverses. Polynômes univalentes*,

Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź. Cl. 3 9 (7) (1958), 21 pp. 189

10. *Uniformisation des fonctions. Remarque sur les courbes planes*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Cl. 3 9 (8), (1958), 12 pp. 210

11. *Domaine de variation des coefficients A_2 et A_3 des fonctions univalentes et bornées*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Cl. 3 10 (4) (1959), 29 pp. (with W. Janowski) 222

12. *Domaine de variation des valeurs d'une fonction univalent bornée*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Cl. 3 10 (5), (1959), 12 pp. (with W. Janowski) 251

13. *A geometric proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, Scripta Math. 25 (1960), 173–181. (with M. Schiffer) 263

14. *A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, Arch. Rational Mech. Anal. 5 (1960), 187–193. (with M. Schiffer) 272

15. *Bounds for analytic functions of two complex variables*, Math. Z. 75 (1960/1961), 29–35. 279

16. *The general equation of extremal functions with respect to any differentiated functional*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz 12 (13), (1961), 16 pp. (with H. Śmiałkówna) 286

17. *Sur l'existence de solutions pour des systèmes d'équations algébriques réelles non linéaires*, Bull. Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz 12 (14), (1961), 8 pp. (with W. Waliszewski) 302

18. *Sur certaines évaluations générales d'une fonction analytique de deux variables dans le voisinage d'une zéro isolé*, Colloq. Math. 9 (1962), 115–118. 310

19. *Witold Wolibner (9. IX. 1902–9. I. 1961)*, Colloq. Math. 10 (1963), 353–360. (with A. Krzywicki and J. Zamorski) 314

20. *Jan Zamorski (27. XII. 1927–28. XII. 1961)*, Colloq. Math. 10 (1963), 361–364. (with A. Zięba) 322

21. *On conformality points of certain mappings preserving locally the area*, Colloq. Math. 13 (1964), 81–93. (with J. Ławrynowicz) 326

22. *Remarques sur l'approximation de l'arc simple par les arcs brisés, réguliers et arcs analytiques*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz 17 (1) (1966), 9 pp. (with J. Śladkowska) 339

23. *On the coefficients of univalent polynomials*, Colloq. Math. 16 (1967), 27–33. (with J. Ławrynowicz) 348

24. *Algebraic functions and analytic variations of univalent functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 793–794. (with J. Śladkowska) 355

25. *Transforms of isolated singular popints*, Ann. Polon. Math. 20 (1968), 300. 357

26. *Problems proposed by* ..., Ann. Polon. Math. 20 (1968), 311. 358

27. *Fonctions algébriques et variations analytiques des fonctions univalentes*, Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 70, PWN, Warszawa 1970, 77 pp. (with J. Śladkowska) 359

28. *A simple method of deriving the Löwner equation with the help of algebraic functions*, Proceedings of the First Finnish-Polish Summer School in Complex Analysis (Podlesice, 1977), Part I, pp. 1–9, Univ. Łódź, Łódź, 1977. (with J. Ławrynowicz) 434

29. *Geometry of polynomials (I)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz 28 (5) (1978), 9 pp. (with A. Kozłowski) 443

30. *Geometry of polynomials (II)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz 28 (6) (1978), 10 pp. (with A. Kozłowski) 452

31. *Geometry of polynomials (III)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz 28 (7) (1978), 14 pp. (with A. Kozłowski) 462

32. *Interpolation of the Chebyshev type on zeros of the derivative of a polynomial (I)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz 28 (8) (1978), 11 pp. (with A. Kozłowski) 476

33. *Interpolation of the Chebyshev type on zeros of the derivative of a polynomial (II)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz 28 (9) (1978), 12 pp. (with A. Kozłowski) 487

34. *Interpolation of the Chebyshev type on zeros of the derivative of a polynomial (III)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz 28 (10) (1978), 9 pp. (with A. Kozłowski) 499

35. *Special interpolation of the Chebyshev type*, Conference on Analytic Functions, Kozubnik, April 18–26, 1979. Abstracts, Uniwersytet Łódzki, Łódz 1979, 5–9. 508

36. *Application de la méthode des fonctions algébriques à la représentation conforme*, Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 195, PWN, Warszawa 1982, 55 pp. (with J. Śladkowska-Zahorska) 513

37. *A contribution to Keller's Jacobian conjecture*, in: Seminar on deformations (Łódź/Warsaw, 1982/84), 36–51, Lecture Notes in Math., 1165, Springer, Berlin, 1985. (with J. Chądzyński and P. Skibiński) 566

38. *Bounds of univalent functions in terms of iterated extrema*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz 37 (3) (Ser. Rech. Déform. 5 (43)) (1987), 8 pp. (with L. Kaczmarek) 582

39. *A criterion for explicit dependence of polynomials*,
Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz 37 (8) (Ser. Rech. Déform. 5 (48))
(1987), 3 pp. (with P. Skibiński) 590

40. *A contribution to Keller's Jacobian conjecture II*,
in: Deformations of Mathematical Structures (Łódź/Lublin, 1985/87),
133–140, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
(with J. Chądzyński and P. Skibiński) 593

41. *A contribution to Keller's Jacobian conjecture III*,
Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz 39 (4) (Sér. Rech. Déform. 6 (58))
(1989), 8 pp. (with J. Chądzyński and P. Skibiński) 601

42. *A contribution to Keller's Jacobian conjecture IV*,
Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz 39 (11) (Sér. Rech. Déform. 7 (64))
(1989), 6 pp. (with J. Chądzyński and P. Skibiński) 609

43. *Equation of the set of critical points of a polynomial mapping
in two variables*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 40 (11)
(Sér. Rech. Déform. 9 (81)) (1990), 5-13. (with P. Skibiński) 615

44. *Pseudoorthogonality of powers of the coordinates of a holomorphic mapping
in two variables with the constant Jacobian*, in: Real algebraic geometry
(Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer,
Berlin, 1992. (with P. Skibiński) 624

45. *Pseudoorthogonality of powers of the coordinates of a holomorphic mapping
in several variables with the constant Jacobian*,
Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 42 (24) (Sér. Rech. Déform. 14 (134))
(1992), 39–49. (with P. Skibiński) 639

46. *Equation of the set of critical points of a polynomial mapping in two
variables II*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 43 (5)
(Sér. Rech. Déform. 15 (5)) (1993), 43-51. (with P. Skibiński) 650

Preface

The volume is dedicated to celebrate the 100th anniversary of the Professor Zygmunt Charzyński birth. The volume contains all the published mathematical papers of Zygmunt Charzyński with the exception of some articles in Polish (being mostly didactic or biographic in nature). The presented papers were published between 1933 and 1994, from the first and the most influential one printed in Fundamenta Mathematica to the last one concerning several complex variables in Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź. The almost all concern complex analysis in one and several variables.

We thank very much Professor Jacek Chądzyński and Doctor Przemysław Skibiński for writing mathematical (scientific) biography of Zygmunt Charzyński. We wish also to thank institutions for copyright permission as indicated: Polish Academy of Sciences, Springer Science + Business Media, Łódź Society for Sciences and Arts, Maria Curie Skłodowska University, Yeshiva University, Société des Sciences Mathématiques de Roumanie. At the end we thank Ms. Joanna Chmielewska for her excellent scanning of all articles.

Tadeusz Krasiński
Stanisław Spodzieja

Łódź, October 2014



Zygmunt Charzyński in 1957.
(Photograph by Olli Tammi in Helsinki)



Zygmunt Charzyński in the 1990s
(Photograph by Małgorzata Kazimierczak)

Scientific biography of Zygmunt Charzyński[1]

Zygmunt Charzyński was born on April 2, 1914 in Warsaw. In 1932 he completed the secondary school of the Masovia Land (Gimnazjum Ziemi Mazowieckiej), which was one of the best in Warsaw, among graduates from this school were also, among others, Stanisław Kierst and Alfred Tarski.

On October 1, 1932 he started to study at the University of Warsaw.

As a 19-year-old first-course student, he solved the problem of how to characterize the set of discontinuity points of a function having everywhere the symmetric derivative. Several other mathematicians, among them professors Sierpiński and Mazurkiewicz, tried to solve this problem raised nine years earlier by Professor H. Steinhaus. However, they received only partial results. The Charzyński solution supplied a new method which, according to B. Thomson[2], was crucial for the development of research on symmetry in real analysis. This result was published in 1933, [1].

In 1938 Zygmunt Charzyński began working as a junior assistant of Professor Sierpiński at Warsaw University.

The war years he spent in Lublin and Warsaw working as a clerk. At the same time he carried on the research in the field of univalent holomorphic functions by using functionals defined on the considered family of functions. The results he presented in the first post-war Congress of Polish Mathematicians in Wroclaw in 1946 and published in [2] and [4]. He gave there his own variation of extremal functions in the family of bounded univalent functions. Searching for this type of variation lasted almost 20 years. Almost simultaneously and independently of course, and on the various ways, it was obtained by M.M. Schiffer (Stanford), D.C. Spencer and A.C. Schaeffer (Stanford), G.M. Goluzin (Leningrad). Zygmunt Charzyński has here the priority for bounded functions.

On February 6, 1948 at the University of Warsaw he received a doctorate for the dissertation mentioned-above [4]. His supervisor was Władysław Nikliborc.

The paper [3] is a generalization of the paper [4], though it was published earlier.

---

[1] In this note we use the following publications

1. J. Chądzyński, *Profesor Zygmunt Charzyński*. Seria: Sylwetki Łódzkich Uczonych, Zeszyt 9, ŁTN, Łódź 1993.
2. J. Chądzyński and J. Ławrynowicz, *Obituary: Zygmunt Charzyński (1914-2001)*. Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform. 34 (2001), 5-14

[2] *Symmetric Properties of Real Functions*, Marcel Dekker, Englewood Cliffs, NJ, 1993

After the war, Zygmunt Charzyński worked for a short time as an assistant lecturer at the University of Warsaw. In 1946 he settled in Łódź, where he lived until the end of his life. Here he worked at the University of Łódź (1952-1995) and at the Technical University of Łódź (1946-1959), at the positions from assistant professor to full professor, successively. At the University of Łódź he was the Head of a Chair for 27 years.

In 1953 appeared in *Studia Mathematica* paper [5], in which Z. Charzyński positively solved a difficult, more than 15-years-old problem of the linearity of isometric mappings in finitely-dimensional Fréchet spaces. This problem was raised by S. Ulam, N. Aronszajn and S. Mazur. Thanks to this result Z. Charzyński received in 1954 prestigious Stanisław Zaremba-Award of the Polish Mathematical Society.

In 1954 Zygmunt Charzyński initiated, together with Franciszek Leja (Kraków) and Mieczysław Biernacki (Lublin) a series of Conferences on Analytic Functions, in which more than 100 participants from 30 countries took part. Z. Charzyński participated in the organizing committees of 12 consecutive conferences.

In 1955 Zygmunt Charzyński published paper [6], which introduced the so-called algebraic functions method in the study of bounded functions in one variable. This method has become very successful, there appeared many papers of other mathematicians, and the author himself using it to obtain new information about the univalent functions.

During that time, Z Charzyński begins to participate in the works of the Mathematical-Physical Commission of the Łódź Society for Sciences and Arts and until the end of his life he presents for publication in the Bulletin of the society a series of good papers of his and other authors.

The year 1958 brings another important paper [9] which introduces a new method of investigating of the univalent functions by such functions that are inverse to univalent polynomials. This paper is the beginning of a series of other related publications [23], [25], [29] - [31], [38].

In 1958 he published paper [10], which refers to the difficult problem of global uniformization. The degree of difficulty of the task is generally dependent on the degree of regularity of the considered function - the larger regularity, the more difficult the task. This problem has been dealt with by K. Borsuk, W. Sierpiński, R. Sikorski, W. Wilkosz and K. Zarankiewicz. Z. Charzyński gave a solution for the function of an arbitrary regularity, while others gained much weaker results.

In 1959 two papers were published [11] and [12] together with W. Janowski, where the domain of the variability of second and third coefficient for the bounded univalent functions was given.

In the academic year 1959/1960 Zygmunt Charzyński stayed at Stanford University for nine months. That period brought two, widely known in that time, joint papers with M. Schiffer [13] and [14] in which the authors solved the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, creating simultaneously a new method for solving differential-functional equations by the selection of a functional.

From 1962 till 1964 Zygmunt Charzyński was a member of the Editorial Board of *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. In 1968 he became a member of the Editorial Board of *Annales Polonici Mathematici*. He held this position until the end of his life.

The year 1970 brought extensive dissertation [27], written jointly with J. Śladkowska devoted to obtaining the variation with respect to the parameters for bounded univalent functions.

In 1978 he published a series of six papers [29] - [34] jointly with A. Kozłowski being the result of several years of research on the geometry of polynomials in terms of effective relationships between singular and critical points and interpolation issues, in particular the Chebyshev type.

In 1980 Zygmunt Charzyński received Award of the City of Łódź – it was a true satisfaction for Professor, because he really valued the city and the universities, in which, as he himself said, he found the perfect conditions to develop his ideas and to educate his students.

In 1982 he published the next large dissertation [36], jointly with J. Śladkowska-Zahorska, devoted to application of the methods developed by him, among other things, for the proof of the difficult Löwner theorem.

On May 24, 1985 Professor Zygmunt Charzyński received the title of *Doctor Honoris Causa* of the Technical University of Łódź.

During that time he extended the circle of his interests, taking research related to the Jacobian Conjecture of Keller and polynomial mappings of several variables. The results were published in a series of papers [37], [39] - [42], [43] - [46].

In 1992 the Town Council of the City of Łódź awarded the badge For Service to the City of Łódź (Za Zasługi dla Miasta Łodzi) to Professor Z. Charzyński.

In 2000 Zygmunt Charzyński became the Honorary Member of the Łódź Society for Sciences and Arts.

It is interesting to add that Professor Charzyński maintained numerous contacts abroad all the time. During the Professor's life dozens of mathematicians from around the world visited Łódź. Some of them participated at longer research practices in the Chair led by him. The Professor himself, apart from the above mentioned visit to the United States, visited among others, Finland, Germany, Israel, Romania and the Soviet Union for scientific purposes.

Professor Charzyński promoted over twenty doctors. Among his pupils were nine professors.

Professor when asked about his teachers said that he considered himself a pupil of the Warsaw school of mathematics, in particular, owed much to Stanisław Kierst, Edward Szpilrajn-Marczewski - assistants at the University of Warsaw from the period of his studies and later, from the period of Łódź - Professor Stanisław Mazur.

Professor Charzyński an outstanding scientist, teacher and educator of many generations of mathematicians, brilliant and humourous interlocutor, was a man of a Renaissance personality.

He died in Łódź on January 29, 2001 and was buried in the Old Cemetery Powązki in Warsaw.

Jacek Chądzyński, Przemysław Skibiński

Łódź, November 16, 2014

List of publications by Zygmunt Charzyński

[1] *Sur les fonctions dont la dérivé symétrique est partout finie*, Fund. Math. 21 (1933), 214–225.

[2] *Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes*, Colloq. Math. 1 (1948), 168-170 [IV Congrès Polonais de Mathématique, Wrocław, 12–14 Décembre 1946].

[3] *Sur l'equation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalents bornées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A. 4, (1950), 41—56. (with W. Janowski)

[4] *Sur les fonctions univalentes bornées*, Rozprawy Matematyczne 2, Pol. Tow. Mat., Warszawa 1953, 58 pp.

[5] *Sur les transformations isométriques des espaces du type (F)*, Studia Math. 13, (1953), 94–121.

[6] *Sur les fonctions univalentes algébriques bornées*, Rozprawy Matematyczne 10, PWN, Warszawa 1955, 41 pp.

[7] *Méthodes variationnelles dans la théorie des fonctions univalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine (N.S.) 1 (49) (1957), 259–264.

[8] *Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions holomorphes dans le cercle-unité soient univalentes et bornées*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Cl. 3 8 (2), (1957), 7 pp. (with H. Śmiałkówna)

[9] *Fonctions univalentes inverses. Polynômes univalentes*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź. Cl. 3 9 (7) (1958), 21 pp.

[10] *Uniformisation des fonctions. Remarque sur les courbes planes*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Cl. 3 9 (8), (1958), 12 pp.

[11] *Domaine de variation des coefficients A_2 et A_3 des fonctions univalentes et bornées*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Cl. 3 10 (4), (1959), 29 pp. (with W. Janowski)

[12] *Domaine de variation des valeurs d'une fonction univalent bornée*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Cl. 3 10 (5), (1959), 12 pp. (with W. Janowski)

[13] *A geometric proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, Scripta Math. 25 (1960), 173–181. (with M. Schiffer)

[14] *A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, Arch. Rational Mech. Anal. 5 (1960), 187–193. (with M. Schiffer)

[15] *Bounds for analytic functions of two complex variables*, Math. Z. 75 (1960/1961), 29–35.

[16] *The general equation of extremal functions with respect to any differentiated functional*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 12 (13), (1961), 16 pp. (with H. Śmiałkówna)

[17] *Sur l'existence de solutions pour des systèmes d'équations algébriques réelles non linéaires*, Bull. Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 12 (14), (1961), 8 pp. (with W. Waliszewski)

[18] *Sur certaines évaluations générales d'une fonction analytique de deux variables dans le voisinage d'une zéro isolé*, Colloq. Math. 9 (1962), 115–118.

[19] *Witold Wolibner (9. IX. 1902–9. I. 1961)*, Colloq. Math. 10 (1963), 353–360. (with A. Krzywicki and J. Zamorski)

[20] *Jan Zamorski (27. XII. 1927–28. XII. 1961)*, Colloq. Math. 10 (1963), 361–364. (with A. Zięba)

[21] *On conformality points of certain mappings preserving locally the area*, Colloq. Math. 13 (1964), 81–93. (with J. Ławrynowicz)

[22] *Remarques sur l'approximation de l'arc simple par les arcs brisés, réguliers et arcs analytiques*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 17 (1) (1966), 9 pp. (with J. Śladkowska)

[23] *On the coefficients of univalent polynomials*, Colloq. Math. 16 (1967), 27–33. (with J. Ławrynowicz)

[24] *Algebraic functions and analytic variations of univalent functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 793–794. (with J. Śladkowska)

[25] *Transforms of isolated singular popints*, Ann. Polon. Math. 20 (1968), 300.

[26] *Problems proposed by ...*, Ann. Polon. Math. 20 (1968), 311.

[27] *Fonctions algébriques et variations analytiques des fonctions univalentes*, Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 70, PWN, Warszawa 1970, 77 pp. (with J. Śladkowska)

[28] *A simple method of deriving the Löwner equation with the help of algebraic functions*, Proceedings of the First Finnish-Polish Summer School in Complex Analysis (Podlesice, 1977), Part I, pp. 1–9, Univ. Łódź, Łódź, 1977. (with J. Ławrynowicz)

[29] *Geometry of polynomials (I)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 28 (5) (1978), 9 pp. (with A. Kozłowski)

[30] *Geometry of polynomials (II)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 28 (6) (1978), 10 pp. (with A. Kozłowski)

[31] *Geometry of polynomials (III)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 28 (7) (1978), 14 pp. (with A. Kozłowski)

[32] *Interpolation of the Chebyshev type on zeros of the derivative of a polynomial (I)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 28 (8) (1978), 11 pp. (with A. Kozłowski)

[33] *Interpolation of the Chebyshev type on zeros of the derivative of a polynomial (II)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 28 (9) (1978), 12 pp. (with A. Kozłowski)

[34] *Interpolation of the Chebyshev type on zeros of the derivative of a polynomial (III)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 28 (10) (1978), 9 pp. (with A. Kozłowski)

[35] *Special interpolation of the Chebyshev type*, Conference on Analytic Functions, Kozubnik, April 18–26, 1979. Abstracts, Uniwersytet Łódzki, Łódź 1979, 5–9.

[36] *Application de la méthode des fonctions algébriques à la représentation conforme*, Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 195, PWN, Warszawa, 1982, 55 pp. (with J. Śladkowska-Zahorska)

[37] *A contribution to Keller's Jacobian conjecture*, in: Seminar on deformations (Łódź/Warsaw, 1982/84), 36–51, Lecture Notes in Math., 1165, Springer, Berlin, 1985. (with J. Chądzyński and P. Skibiński)

[38] *Bounds of univalent functions in terms of iterated extrema*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 37 (3) (Ser. Rech. Déform. 5 (43)) (1987), 8 pp. (with L. Kaczmarek)

[39] *A criterion for explicit dependence of polynomials*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 37 (8) (Ser. Rech. Déform. 5 (48)) (1987), 3 pp. (with P. Skibiński)

[40] *A contribution to Keller's Jacobian conjecture II*, in: Deformations of Mathematical Structures (Łódź/Lublin, 1985/87), 133–140, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989. (with J. Chądzyński and P. Skibiński)

[41] *A contribution to Keller's Jacobian conjecture III*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 39 (4) (Sér. Rech. Déform. 6 (58)) (1989), 8 pp. (with J. Chądzyński and P. Skibiński)

[42] *A contribution to Keller's Jacobian conjecture IV*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 39 (11) (Sér. Rech. Déform. 7 (64)) (1989), 6 pp. (with J. Chądzyński and P. Skibiński)

[43] *Equation of the set of critical points of a polynomial mapping in two variables*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 40 (11) (Sér. Rech. Déform. 9 (81)) (1990), 5-13. (with P. Skibiński)

[44] *Pseudoorthogonality of powers of the coordinates of a holomorphic mapping in two variables with the constant Jacobian*, in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992. (with P. Skibiński)

[45] *Pseudoorthogonality of powers of the coordinates of a holomorphic mapping in several variables with the constant Jacobian*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 42 (24) (Sér. Rech. Déform. 14 (134)) (1992), 39–49. (with P. Skibiński)

[46] *Equation of the set of critical points of a polynomial mapping in two variables II*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 43 (5) (Sér. Rech. Déform. 15 (5)) (1993), 43-51. (with P. Skibiński)

Other publications by Zygmunt Charzyński

[47] *Recenzja książki S. Saksa i A. Zygmunda "Funkcje analityczne"*, Ann. Soc. Polon. Math. 17 (1938), 259-262. (with E. Szapilrajn)

[48] *Wstęp do matematyki wyższej*, Wyd. 2 poprawione i rozszerzone, Biblioteka Skryptów 2, Wydaw. Spółdz. Akad. w Łódzi, Łódź, 1949, 177+32 pp. (with A. Grużewski)

[49] W. Nikliborc, *Równania różniczkowe I*, Monografie Matematyczne 25, Pol. Tow. Mat., Warszawa-Wrocław, 1951, 176 pp. (prepared by Z. Charzyński)

[50] *The method of algebraic functions*, in: Proceedings of the Conference on Analytic Functions, Kraków (30 VIII - 4 IX 1962), Kraków, 1962, 10-11.

[51] *Matematyka* [Katedry Matematyki na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii UŁ], Zeszyty Nauk. Uniw. Łódzk. Ser 2 (19) (1965), 92-97.

[52] *Metody nowoczesnej teorii odwzorowań jednolistnych. Lokalne problemy współczynników*, in: Materiały Konferencji Szkoleniowej Funkcji Analitycznych w Uniejowie, Łódź, 1969, 111-152. (with J. Śladkowska)

[53] *Kierunek Matematyczny Uniwersytetu Łódzkiego*, in: Wczoraj, dziś i jutro Łodzi. Materiały sesji naukowej wyższych uczelni (1974 r.), Uniwersytet Łódzki, Łódź, 1979, 453-460.

[54] *Interpolacja specjalna typu Czebyszewa*, in: Materiały IV Konferencji Szkoleniowej Funkcji Analitycznych w Błażejewku, Uniwersytet Łódzki, Łódź, 1983, 5-22. (with L. Kaczmarek)

[55] *Numeracje liczb naturalnych. Podstawy ogólne*, Matematyka 37 (1984), 195-202. (with J. Kupczun)

[56] *Numeracje liczb naturalnych. Algorytny działań arytmetycznych*, Matematyka 37 (1984), 278-284. (with J. Kupczun)

[57] *Numeracje liczb naturalnych. Numeracje potęgowe i pokrewne*, Matematyka 38 (1985), 20-21, 27. (with J. Kupczun)

[58] *Wspomnienia i refleksje (przemówienie wygłoszone podczas sesji naukowej w dniu 2 kwietnia 1984 roku)*, Spraw. z Czynn. i Pos. Łódzk. Tow. Nauk. 41 (9) (1987), 9 pp.

[59] *Numeracje liczb wymiernych i rzeczywistych*, Matematyka 44 (1991), 134-150. (with J. Kupczun)

[60] *Teoria funkcji analitycznych*, in: Historia nauki polskiej. Wiek XX. Zeszyt 1, Pol. Akad. Nauk, Warszawa 1995, 165-185. (with L. Kaczmarek)

Sur les fonctions dont la dérivée symétrique est partout finie[1]).

Par

Z. Charzyński (Varsovie).

M. Steinhaus a posé le problème suivant: Existe-t-il une fonction réelle de variable réelle $f(x)$, pantachiquement discontinue et telle qu'on ait pour tout x réel:

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = 0 ?\ ^{2}) \tag{0}$$

M. Mazurkiewicz a démontré que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction mesurable (L), satisfaisant à la condition (0) est non dense[3]) et M. Sierpiński a prouvé que cet ensemble est au plus dénombrable[4]).

Le but de la note présente est de démontrer un théorème plus fort que les résultats de MM. Mazurkiewicz et Sierpiński et qui donne en même temps une réponse complète au problème de M. Steinhaus (théorème 1).

A la fin de cette note je démontre une proposition (théorème 2) qui généralise un théorème dû à M. Wolibner (corollaire 2a). La méthode de la démonstration ne diffère essentiellement de celle de M. Wolibner.

[1]) Les résultats contenus dans cette note ont été présentés à la Société Polonaise de Mathématique (section de Varsovie), le 19. V. et le 13. X. 1933.

[2]) *Fund. Math.* **4**, p. 368.

[3]) *Sur la dérivée première généralisée*, *Fund. Math.* **11**, p. 145.

[4]) *Sur une hypothèse de M. Mazurkiewicz*, *Fund. Math.* **11**, p. 148.

Termes et notations. Une fonction réelle définie sur toute la droite, resp. sur un ensemble X de nombres réels sera appellée plus court *fonction*, resp. *fonction définie sur X*.

$F(x)$ étant une fonction définie dans une voisinage d'un point x_0, nous posons

$$M_F(x_0) = \operatorname{Max}\,[F(x_0), \overline{\lim_{x=x_0}} F(x_0)]$$
$$m_F(x_0) = \operatorname{Min}\,[F(x_0), \underline{\lim_{x=x_0}} F(x_0)]$$
$$\omega_F(x_0) = M_F(x_0) - m_F(x_0).$$

$\omega_F(x_0)$ s'appelle *oscillation de F dans x_0*.

L'intervalle ouvert, resp. fermé aux extrémités a et b sera désigné par (a, b) resp. $[a, b]$.

Un ensemble de points qui ne contient aucun sous-ensemble dense en soi s'appelle *clairsemé*.

La fermeture d'un ensemble Z sera désigné par $\overline{Z}$.

* * *

$f(x)$ étant une fonction définie dans un intervalle ouvert, nous posons pour tout x appartenant à cet intervalle:

$$f^*(x) = \overline{\lim_{h=0}} \left|\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right|$$

Théorème 1. *$f(x)$ étant une fonction telle que $f^*(x)$ est partout finie, l'ensemble D des points de discontinuité de f est clairsemé* [1]).

Démonstration.

1. L'ensemble D est non dense.

1·1. Supposons pour la démonstration qu'il existe une fonction $f(x)$ étant pantachiquement discontinue sur un intervalle et telle que $f^*(x)$ est partout finie. On peut supposer sans nuire à la généralité que cet intervalle coïncide avec toute la droite.

Il existe pour tout nombre réel x un nombre naturel $n(x)$ tel que la relation $|h| < \frac{1}{n(x)}$ entraîne

$$|f(x+h) - f(x-h)| < 2|h| \cdot [f^*(x) + 1].$$

[1]) J'ai démontré d'abord que l'ensemble D est *non dense* et *au plus denombrable*. L'hypothèse que D est *clairsemé* a été faite par M. Szpilrajn qui a démontré ensuite un théorème inverse au mien. Cf. la note de M. Szpilrajn *Remarque sur la dérivée symétrique*, ce tome, p. 226.

Posons pour tous nombres naturels m et n:

$$E_n^m = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[m-1 \leqslant f^*(x) < m; \quad n(x) = n].$$

La fonction $f^*(x)$ étant partout finie, l'ensemble

$$\sum_{m=1}^{\infty}{}' \sum_{n=1}^{\infty}{}' E_n^m$$

couvre toute la droite. Par conséquent (a, b) *étant un intervalle arbitraire, il existe deux nombres naturels* $\mu(a, b)$ *et* $\nu(a, b)$ *et un sous intervalle* (a', b') *de* (a, b) — *tels que l'ensemble* $E_{\nu(a,b)}^{\mu(a,b)}$ *est dense dans* (a', b').

Posons encore pour tout $\eta > 0$ et tout $x \in E_n^m$:

$$\delta(x, \eta) = \operatorname{Min}\left(\frac{1}{\mu}, \frac{\eta}{2(m+1)}\right).$$

Il en résulte que *l'inégalité* $|h| < \delta(x, \eta)$ *entraîne*:

$$|f(x+h) - f(x-h)| < \eta.$$

1·2. Nous allons démontrer maintenant que *pour tout* x_0, *tout* $\eta > 0$ *et tout* h_0 *tel que* $0 < h_0 < \delta\left(x_0, \frac{\eta}{2}\right)$, *il existe un nombre positif* $h_1 < h_0$ *tel que la relation* $x_0 < x < x_0 + h_1$ *entraîne* $|f(x-h_0) - f(x+h_0)| < \eta$.

Soit donc

$$0 < h_0 < \delta\left(x_0, \frac{\eta}{2}\right). \tag{1}$$

Posons

$$h_1 = \operatorname{Min}\left[2h_0, \delta\left(x_0 + h_0, \frac{\eta}{2}\right)\right]. \tag{2}$$

Soit enfin x un nombre satisfaisant à l'inégalité $x_0 < x < x_0 + h_1$. Posons $h' = x_0 - x + h_0$. On a donc $0 < |h'| < h_0$ et par conséquent

$$|f(x_0 + h') - f(x_0 - h')| < \frac{\eta}{2}. \tag{3}$$

Posons ensuite $h'' = x - x_0 = x_0 + h_0 - (x_0 + h')$. Donc

$$h'' < h_1 < \delta\left(x_0 + h_0, \frac{\eta}{2}\right),$$

d'où il résulte que

$$|f[(x_0+h_0)+h'']-f[(x_0+h_0)-h'']|<\frac{\eta}{2}. \tag{4}$$

Vu que

$$\begin{aligned} x_0+h_0-h'' &= x_0+h' \\ x_0+h_0+h'' &= x+h_0 \\ x_0-h' &= x-h_0, \end{aligned}$$

on obtient de (3) et (4):

$$|f(x+h_0)-f(x-h_0)|<\eta.$$

1·3. Nous allons démontrer à present qu'*il existe un nombre* $\alpha>0$ *et un intervalle, tels que dans chaque son sous-intervalle il existe deux points* x_1 *et* x_2 *pour lesquels*

$$|f(x_1)-f(x_2)|>\alpha. \tag{1}$$

Soit donc (a, b) un intervalle dans lequel un ensemble $E_{n_0}^{m_0}$ est dense (cf. *1·1*). Désignons par x^0 un point de discontinuité de $f(x)$ appartenant à (a, b), et soit α un nombre tel que $0<3\alpha<\omega_f(x^0)$.

Il existe évidemment un point x' appartenant à (a, b) tel qu'on a

$$|x^0-x'|<\operatorname{Min}\left(\frac{1}{n_0}, \frac{\alpha}{m_0+1}\right) \tag{2}$$

et

$$|f(x^0)-f(x')|>3\alpha. \tag{3}$$

Nous allons démontrer que dans chaque sous-intervalle de l'intervalle (x^0, x') (nous supposons $x^0<x'$) il existe une couple de points x_1 et x_2, satisfaisant à la condition (1). Soient: $x^0<\lambda_1<\lambda_2<x'$. L'ensemble $E_{n_0}^{m_0}$ étant dense dans (x_0, x'), il existe deux points x_1' et x_2 de cet ensemble tels que

$$\tfrac{1}{2}(x^0+\lambda_1)<x_1<\tfrac{1}{2}(x^0+\lambda_2) \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}(x'+\lambda_1)<x_2<\tfrac{1}{2}(x'+\lambda_2).$$

En posant

$$x_1=2x_1'-x^0 \quad \text{et} \quad x_2=2x_2-x',$$

nous obtenons

$$\lambda_1<x_1<\lambda_2 \qquad \lambda_1<x_2<\lambda_2$$

et

$$\begin{aligned} 0<x_1-x_1' &= x_1-x^0<\tfrac{1}{2}(x'-x^0) \\ 0<x_2'-x_2 &= x'-x_2'<\tfrac{1}{2}(x'-x^0). \end{aligned}$$

x_1 et x_2 appartenant à $E^{m_0}_{n_0}$, il en résulte en vertu de (2):

$$|f(x_1) - f(x^0)| < 2(x'_1 - x^0)\ (m_0 + 1) < \alpha$$

et

$$|f(x_2) - f(x')| < 2(x' - x_2)\ (m_0 + 1) < \alpha.$$

Ces inégalités et l'inégalité (3) nous donnent:

$$|f(x_1) - f(x_2)| > \alpha.$$

1·4. Soient à présent: $\alpha > 0$ et (a, b) un intervalle — tels que dans tout sous-intervalle de (a, b) il existe deux points x_1, x_2 pour lesquels $|f(x_1) - f(x_2)| > \alpha$.

Considérons l'ensemble $E^{\mu(a,b)}_{\nu(a,b)}$ et l'intervalle (a', b') (contenu dans (a, b)), dans lequel cet ensemble est dense (cf. *1·1*). La fonction $\delta\left(x, \frac{\alpha}{4}\right)$ est constante sur $E^{\mu(a,b)}_{\nu(a,b)}$; désignons sa valeur par δ_0.

Soit (c, d) un sous-intervalle de (a', b') tel que $0 < d - c < \delta_0$.

Soit enfin x_0 un point arbitraire de (c, d) et x_1 et x_2 deux points de (x_0, d) tels que

$$|f(x_1) - f(x_2)| > \alpha \tag{1}$$

et

$$0 < x_2 - x_1 < \operatorname{Min}\left[2\delta\left(x_0, \frac{\alpha}{4}\right),\ 2(x_0 - c)\right]. \tag{2}$$

Posons $h_0 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$. En vertu de (2) et *1·2* il existe un nombre positif $h_1 < 2h_0$ tel que

$$|f(x + h_0) - f(x - h_0)| < \frac{\alpha}{2} \text{ pour } x_0 < x < x_0 + h_1. \tag{3}$$

Posons ensuite

$$\xi_1 = \tfrac{1}{2}(x_0 + h_0 + x_1) = \tfrac{1}{2}(x_0 - h_0 + x_2)$$
$$\xi_2 = \tfrac{1}{2}(x_0 + h_0 + x_1 + h_1) = \tfrac{1}{2}(x_0 - h_0 + x_2 + h_1).$$

Les points ξ_1 et ξ_2 se trouvent évidemment dans l'intervalle (c, d).

Désignons par x' un point appartenant à $E^{\mu(a,b)}_{\nu(a,b)}$ et à l'intervalle (ξ_1, ξ_2) et posons $h' = x_1 - x'$ et $h'' = x_2 - x'$. Les nombres h' et h'' étant positifs et plus petits que δ_0, on a:

$$|f(x' + h') - f(x' - h')| < \frac{\alpha}{4}$$

$$|f(x' + h'') - f(x' - h'')| < \frac{\alpha}{4}$$

et comme $x_1 = x' + h'$ et $x_2 = x' + h''$, nous obtenons en vertu de (1):

$$|f(x' - h') - f(x' - h'')| > \frac{\alpha}{2}. \tag{5}$$

Posons d'autre part $x = \frac{1}{2}[(x' - h') + (x' - h'')]$. On a $x_0 < x < x_0 + h_1$ et $-x + (x' - h') = x - (x' - h'') = h_0$, donc, d'après (3):

$$|f(x' - h') - f(x' - h'')| < \frac{\alpha}{4}. \tag{6}$$

Les relations (5) et (6) sont incompatibles.

La proposition *1* est ainsi démontrée.

2. L'ensemble D est au plus dénombrable [1]).

2·1. Lemme. *Soient*: $g(x)$ *une fonction*, x_0 *un nombre réel*, h_0 *et* K *deux nombres positifs. Supposons que l'oscillation* $\omega\ (x_0 - h_0)$ *est finie, et qu'on a*

$$\frac{\omega_g(x_0 + h_0) - \omega_g(x_0 - h_0)}{2h_0} > 2K. \tag{1}$$

Thèse: *Il existe un nombre* $\delta > 0$ *tel que pour tout* x *satisfaisant à l'inégalité* $|x - x_0| < \delta$ *il existe un nombre* $h < 2h_0$ *pour lequel on a*

$$\left|\frac{g(x + h) - g(x - h)}{2h}\right| > K.$$

Démonstration. Il résulte de (1) qu'on a: ou bien

$$M_g(x_0 + h_0) > M_g(x_0 - h_0) + 2Kh_0, \tag{2}$$

ou bien

$$m_g(x_0 + h_0) < m_g(x_0 - h_0) - 2Kh_0. \tag{3}$$

Supposons donc l'inégalité (2) satisfaite. [La démonstration dans le cas de l'inégalité (3) sera tout-à-fait analogue].

Il résulte de l'inégalité (2) qu'il existe deux nombres: $\varepsilon > 0$ et $h_1 > h_0$ tels qu'on a:

$$h_0 < h_1 < 2h_0 \tag{4a}$$

et

$$M_g(x_0 + h_0) > M_g(x_0 - h_0) + 2Kh_1 + \varepsilon. \tag{4b}$$

[1]) La démonstration de cette proposition serait beaucoup plus simple lorsqu'on supposait la fonction $f^*(x)$ bornée dans tout intervalle.

Soit à présent η un nombre positif tel que

(5a) $$\eta < h_1 - h_0$$

et que

(5b) l'inégalité $|x-(x_0-h_0)|<\eta$ entraîne $g(x) < M_g(x_0-h_0)+\varepsilon$.

Soit enfin x' un nombre tel que

(6a) $$|x'-(x_0+h_0)| < \eta$$

et

(6b) $$g(x') > M_g(x_0-h_0)+2Kh_1+\varepsilon.$$

L'existence d'un tel nombre résulte de (4b).

En vertu de (5b) et (6b), l'inégalité

(7) $$|x-(x_0-h_0)| < \eta$$

entraîne

(8) $$|g(x)-g(x')| > 2Kh_1,$$

donc, en vertu de (5a):

(9) $$\left|\frac{g(x)-g(x')}{x-x'}\right| > K.$$

Les moyennes $\frac{1}{2}(x'+x)$, où x appartient à l'intervalle (7), constituent un intervalle ouvert contenant le point x_0. Les inégalités (9), (6a), (5a) et (4a) démontrent la thèse du lemme.

2·2. x_0 étant un nombre réel et K un nombre positif, désignons par $c(x_0, K)$ la borne supérieure des nombres ξ pour lesquels l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[\omega_f(x) \geqslant 2K(x-x_0);\ x_0 < x < \xi]$ est au plus dénombrable.

$c(x_0, K)$ est donc un nombre finie ou non, et on voit aisément que la relation: $x_0 \bar{\in} \overline{D}$ entraîne $c(x_0, K) > x_0$.

(*) *ξ_0 étant un point de condensation des points x pour lesquels $\omega(x) > \alpha$ (où α est un nombre positif arbitraire), il existe pour tous nombres positifs K et δ un nombre $x_0 \bar{\in} \overline{D}$ tel que*

$$\xi_0 - \delta < c(x_0, K) < \xi_0.$$

A cet effet il suffit de considérer un point quelconque $x_0 \bar{\in} \overline{D}$ satisfaisant aux inégalités $\xi_0 - \delta < x_0 < \xi_0$ et $x_0 > \xi_0 - \frac{\alpha}{2K}$. L'en-

semble D étant non dense (comme nous l'avons prouvé dans la *1ère* partie), un tel point x_0 existe.

Il résulte de (*) que

(**) *Si* $c(x^0, K) < +\infty$ *et* $x^0 \in \overline{D}$, *il existe pour tous nombres* $K' > 0$ *et* $\delta > 0$ *un nombre* $x_1 \in \overline{D}$ *tel que*

$$c(x^0, K) - \delta < c(x_1, K') < c(x^0, K).$$

Car le point $c(x^0, K)$ est un point de condensation des points $x \neq x^0$ pour lesquels

$$\omega_f(x) > 2K(x - x^0) > 2K[c(x^0, K) - x^0].$$

2·3. Si $c(x_0, K) < +\infty$ et $x_0 \in \overline{D}$, *il existe un voisinage fermé* I *de* $c(x_0 K)$ *tel que tout nombre* $x \in I$ *coïncide avec la moyenne arithmétique de deux nombres* x_1 *et* x_2 *tels que*

$$|x_j - x_0| < \frac{1}{K} \qquad j = 1, 2.$$

et

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| > K.$$

Cela résulte du lemme *2·1* et de l'existence des nombres h positifs, arbitrairement petits, tels que

$$\omega_f[c(x_0, K) + h] \geqslant 2K[c(x_0, K) + h - x_0]$$

et

$$\omega_f[c(x_0, K) - h] < 2K[c(x_0, K) - h - x_0]$$

donc

$$\omega_f[c(x_0, K) + h] - \omega_f[c(x_0, K) - h] > 4Kh$$

(c'est la conséquence immédiate de la définition du nombre $c(x_0, K)$).

2·4. Supposons l'ensemble D indénombrable. Il existe donc un nombre $\alpha > 0$ tel que l'ensemble des nombres x pour lesquels $\omega_f(x) > \alpha$ est indénombrable. Il résulte donc de *2·2* (*) qu'il existe un nombre $x_1 \in \overline{D}$ pour lequel $c(x_1, 1) < +\infty$.

En vertu de *2·3*, il existe donc un voisinage fermé I_1 du point $c(x_1, 1)$ tel que pour tout $x \in I_1$ il existe deux nombres x' et x'' dont la différence ne dépasse pas 2 et tels que $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$ et

$$\left|\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''}\right| > 1.$$

La proposition 2·2 (**) entraîne l'existence d'un point $x_2 \in \overline{D}$ tel que $c(x_2, 2) \in I_1$. L'application des propositions 2·3 et 2·2 (**) nous donnent ainsi la construction d'une suite descendante d'intervalles I_n telle que pour tout nombre x appartenant à I_n il existe deux nombres x' et x'', dont la différence ne dépasse pas $\frac{2}{n}$ et tels que $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$ et

$$\left|\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''}\right| > n.$$

Le produit de la suite $\{I_n\}$ n'est pas vide: c'est un point x^0 tel que $f^*(x^0) = +\infty$, ce qui est incompatible avec notre prémisse.

L'ensemble D est donc au plus dénombrable.

3. L'ensemble D est clairsemé.

3·1. Lemme. *Supposons*

$$\varphi^*(x_0) < +\infty \tag{1}$$

et

$$\lim_{n=\infty} \frac{\omega_\varphi(x_n)}{|x_n - x_0|} = +\infty, \tag{2}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction, x_0 un nombre réel et $\{x_n\}$ une suite des nombres réels différents de x_0, telle que

$$\lim_{n=\infty} x_n = x_0. \tag{3}$$

Thèse: Pour n suffisamment grands:

$$\omega_\varphi(2x_0 - x_n) > 0. \tag{4}$$

Démonstration. Il existe d'après (1) un nombre fini $K > \varphi^*(x_0)$. Par conséquent il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

(5) l'inégalité $|x - x_0| < \delta$ entraîne $\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(2x_0 - x)}{2(x - x_0)}\right| < K.$

En vertu de (3) et (2) il existe un nombre N tel que pour $n > N$ on a

$$0 < |x_n - x_0| < \delta \tag{6}$$

et

$$\omega_\varphi(x_n) > 4K|x_n - x_0|. \tag{7}$$

Pour $n > N$ on a d'après (6) et (5):

$$\omega_\varphi(2x_0 - x_n) \geqslant \omega_\varphi(x_n) - 4K|x_n - x_0|,$$

donc, en vertu de (7):

$$\omega_\varphi(2x_0 - x_n) > 0.$$

3·2. Désignons par E l'ensemble des points x_0 pour lesquels il existe une suite x_n des nombres différents de x_0, tendant vers x_0 et telle que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\omega_f(x_n)}{|x_n - x_0|} = +\infty.$$

Nous allons démontrer que *si l'ensemble D contient un sous-ensemble dense en soi, l'ensemble E est indénombrable.*

Supposons donc que l'ensemble D contient un ensemble D_0 dense en soi, et soit $\xi_1, \xi_2, \ldots$ une suite arbitraire de nombres réels. Or, nous allons montrer l'existence d'un nombre $x_0 \in E$, n'appartenant pas à cette suite.

En s'appuyant sur la densité en soi d'ensemble D_0, nous construisons deux suites: $x_n \in D_0$ et $\varepsilon_n > 0$, telles que

$$x_1 \in D_0; \quad x_1 \neq \xi_1$$

$$\varepsilon_1 < \operatorname{Min}[\omega_f(x_1);\ 1;\ |x_1 - \xi_1|]$$

et pour $n > 1$:

$$x_n \in D_0; \quad x_n \neq \xi_n; \quad |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon_{n-1}$$

$$\varepsilon_n < \operatorname{Min}\left[(x_n - x_{n-1} + \varepsilon_{n-1});\ (x_{n-1} + \varepsilon_{n-1} - x_n);\ \frac{\omega_f(x_n)}{n};\ \frac{1}{n};\ |x_n - \xi_n|\right].$$

Les intervalles descendants $[x_n - \varepsilon_n,\ x_n + \varepsilon_n]$ possèdent un point commun x_0; ce point diffère de ξ_n (pour $n = 1, 2, \ldots$), car

$$x_n - \varepsilon_n < x_0 < x_n + \varepsilon_n,$$

tandis que $\xi_n < x_n - \varepsilon_n$ ou bien $x_n + \varepsilon_n < \xi_n$ (ce qui résulte de la définition de ε_n).

D'autre part

$$\frac{\omega_f(x_n)}{|x_n - x_0|} > \frac{\omega_f(x_n)}{\varepsilon_n} > n$$

d'où:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\omega_f(x_n)}{x_n - x_0} = +\infty.$$

Par conséquent $x_0 \in D$.

3·3. Il résulte du lemme *3·1* qu'il existe pour tout $x \in E$ deux nombres x' et x'' appartenant à D tels que $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$. L'ensemble D étant au plus dénombrable (comme nous l'avons prouvé dans la partie 2ème), l'ensemble E est donc aussi au plus dénombrable. Il en résulte d'après *3·2* que l'ensemble D est clairsemé.

Le théorème 1 est donc démontré.

* * *

M étant un nombre non négatif, convenons de dire qu'une fonction $f(x)$, définie sur un ensemble X de nombres réels satisfait à *la condition* $\mathfrak{L}(M)$ (condition de Lipschitz), lorsqu'on a

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2| \quad \text{pour tout} \quad x_1, x_2 \in X$$

Une fonction $f(x)$ définie sur un ensemble X et satisfaisant à la condition $\mathfrak{L}(M)$ sur X possède une limite déterminée dans tout point d'accumulation de X. Il en résulte aisément qu'on peut étendre cette fonction à toute la droite d'une telle façon que la fonction étendue satisfait de même à la condition $\mathfrak{L}(M)$ (sur toute la droite).

Posons

$$f^{\times}(x) = \overline{\lim_{h=0}} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|.$$

($f^{\times}(x)$ est donc égale à la plus grande des valeurs absolues des quatres nombres dérivés de Dini). On prouve aisément que la condition $\mathfrak{L}(M)$ pour une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle I équivaut à la condition: $f^{\times}(x) \leqslant M$ (pour tout $x \in I$).

Théorème 2. *M étant un nombre positif arbitraire et $f(x)$ une fonction satisfaisant partout à la condition $f^{*}(x) \leqslant M$, il existe une fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à la condition $\mathfrak{L}(M)$ et telle qu'on a $f(x_0) = \varphi(x_0)$ pour tout point x_0, dans lequel la fonction f est continue.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $x_1 < x_2$ étant deux points de continuité de la fonction $f(x)$ et M' étant un nombre quelconque $> M$, on ait

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant M'(x_2 - x_1).$$

Supposons par contre

$$|f(x_2) - f(x_1)| > M'(x_2 - x_1). \tag{1}$$

En outre, supposons $f(x_2) > f(x_1)$.

Posons

$$l(x) = M'[x - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)] + \tfrac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)].$$

Il résulte de (1) que $l(x_1) > f(x_1)$ et $l(x_2) < f(x_2)$; par conséquent, la fonction $f(x)$ étant continue dans x_1 et x_2, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'inégalité $0 < x - x_1 < \delta$, resp. $0 < x_2 - x < \delta$ entraîne $l(x) > f(x)$, resp. $l(x) < f(x)$.

Désignons par x_0 la borne supérieure des nombres ξ tels que l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[l(x) > f(x);\ x_1 < x < \xi]$ est au plus dénombrable. On a donc $x_1 < x_0 < x_2$. Par conséquent il existe des nombres h arbitrairement petits tels que $f(x_0 - h) < l(x_0 - h)$ et $f(x_0 + h) > l(x_0 + h)$, donc

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) > 2M'h.$$

Il en résulte l'inégalité $f^*(x_0) \geqslant M' > M$ qui est incompatible avec notre prémisse.

Le théorème 2 est donc dèmontre.

Le théorème 2 nous donne pour $M = 0$ le suivant corollaire, démontré plus tôt par M. Wolibner:

Corollaire 2a. *Toute fonction possédant la dérivée symétrique partout nulle est constante sur l'ensemble de tous ses points de continuité.*

Remarque [1]. La question s'impose: $f(x)$ étant une fonction satisfaisant partout à la condition $f^*(x) < +\infty$, existe-t-il une fonction $\varphi x)$ égale à $f(x)$ dans tous les points de continuité de f et telle que $\varphi^{\times}(x) < +\infty$ (pour tout x)? — La réponse est négative: la fonction $g(x)$, définie comme il suit:

$$g(x) = \cos\frac{1}{x} \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$
$$g(0) = 0$$

satisfait partout à la condition $g^*(x) < +\infty$, mais elle n'est égale dans ses points de continuité à aucune fonction partout continue.

[1]) de M. Szpilrajn.

Séance du 14. XII de 17 h. 15 m. à 19 h. sous la présidence de F. Leja.

7. V. Jarník, *Quelques remarques sur la géométrie des nombres.*

Communication des résultats récents de M. Knichal (voir V. Knichal, *Sur une généralisation d'un théorème de MM. Blichfeldt et Visser dans la géométrie des nombres,* Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky 71 (1946), p. 33-44 et *Sur la distribution des mesures sur une sphère à n dimensions*, ibidem, p. 45-54).

8. Z. Charzyński, *Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes* (voir Prace Matematyczno-Fizyczne, à paraître).

Soit $f(z)$ une fonction *univalente* (c'est-à-dire telle que $f(z_1) \neq f(z_2)$ pour $z_1 \neq z_2$) de la forme

$$(1) \qquad f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = a_1 (z + A_2 z^2 + \ldots) \quad \text{où } a_1 > 0 \text{ et } |z| < 1.$$

Appelons-la, pour abréger, *bornée* si $|f(z)| < 1$ pour tout z.

Comme on sait, les quotients des coefficients $a_k/a_1 = A_k$, où $k = 2, 3, \ldots$, sont assujettis pour les fonctions univalentes — les seules dont il sera question dans la suite — à diverses restrictions et ne peuvent pas prendre de valeurs arbitraires indépendamment l'un de l'autre.

La bien connue *hypothèse des coefficients* de Bieberbach donne lieu au problème plus général suivant:

Soit pour un entier $N \geq 2$ fixé arbitrairement

$$H(X_2, X_3, \ldots, X_N, Y_2, Y_3, \ldots, Y_N)$$

une fonction réelle quelconque de $2N-2$ variables réelles, définie dans une région suffisamment grande et y admettant les dérivées partielles continues qui ne s'y annulent nulle part simultanément. Posons pour toute fonction (1):

$$A_k = \lambda_k + i\mu_k \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

et

$$(2) \qquad H_f = H(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_N, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_N).$$

Ainsi formée, H_f est une fonctionnelle définie dans la famille de toutes les fonctions (1). Or, $\boldsymbol{F}$ étant une famille quelconque de fonctions (1), existe-t-il dans $\boldsymbol{F}$ une fonction extrémale $f^*(z)$ —

Colloq. Math. 1 (1947), 168-170 [IV Congrès Polonais de Mathématique, Wrocław, 12–14 Décembre 1946].

ou une classe de telles extrémales — pour laquelle la fonctionnelle correspondante H_{f^*} atteint sa valeur maximum dans $\boldsymbol{F}$? Quelles sont les conditions (nécessaires) satisfaites par telles fonctions $f^*(z)$?

La réponse dépendra évidemment de la nature de la famille $\boldsymbol{F}$ et ne pourra être donnée que dans des cas particuliers. Les résultats de l'auteur sont les suivants:

1. Pour les familles $\boldsymbol{F_T}$. Soit F_T où $0<T<1$ la famille de toutes les fonctions univalentes bornées de la forme (1), assujetties à la condition $a_1 \geqslant T$. Certaines méthodes variationnelles permettent de démontrer ce théorème fondamental:

Théorème I. Il existe dans toute famille $\boldsymbol{F_T}$ des fonctions extrémales $f^*(z)$ pour lesquelles la fonctionnelle (2) *atteint dans $\boldsymbol{F_T}$ la valeur maximum. Chacune de ces extrémales satisfait pour $0<|z|<1$ à l'équation*

$$\left[\frac{f^{*\prime}(z)}{f^*(z)}\right]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = \frac{1}{z^2}\,\mathfrak{N}(z), \tag{3}$$

où

$$\mathfrak{M}(w) = \left[\sum_{p=2}^{N} \frac{\mathfrak{D}_{p-1}}{w^{p-1}} + \overline{\mathfrak{D}}_{p-1}\, w^{p-1}\right] - 2\mathfrak{P}^*,$$

$$\mathfrak{N}(z) = \left[\sum_{p=1}^{N} \frac{\mathfrak{E}_{p-1}}{z^{p-1}} + \overline{\mathfrak{E}}_{p-1}\, z^{p-1}\right] - 2\mathfrak{P}^*,$$

$$f^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* z^n, \quad a_k^*/a_1^* = \lambda_k^* + i\mu_k^* \quad \text{pour } k = 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

$$|f^*(z)|^p = \sum_{n=p}^{\infty} a_n^{*(p)} z^n, \tag{5}$$

$$H_n^* = H'_{X_n}(\lambda_2^*, \lambda_3^*, \ldots, \lambda_N^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \ldots, \mu_N^*) - i H'_{Y_n}(\lambda_2^*, \lambda_3^*, \ldots, \lambda_N^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \ldots \mu_N^*), \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{D}_{p-1} = 2\sum_{n=p}^{N} a_n^{*(p)} H_n^* \qquad (p=2,3,\ldots,N),\\ &\mathfrak{E}_0 = \sum_{n=2}^{N}(n-1)\,a_n^* H_n, \quad \mathfrak{E}_{p-1} = 2\sum_{n=p}^{N}(n-p+1)\,a_{n-p+1}^* H_n^* \quad (p=2,3,\ldots,N),\\ &\mathfrak{P}^* = \min_{0\leqslant x<2\pi} \Re\left\{\sum_{p=1}^{N} \mathfrak{D}_{p-1}\, e^{ix(p-1)}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

36 Colloq. Math. 1 (1947), 168-170 [IV Congrès Polonais de Mathématique, Wrocław, 12–14 Décembre 1946].

Les fonctions $\mathfrak{M}(w)$ *et* $\mathfrak{N}(z)$ *ne prennent sur les circonférences* $|w|=1$ *et* $|z|=1$ *respectivement que des valeurs réelles non négatives et chacune de ces fonctions y admet au moins une racine double. Enfin, le coefficient* a_1^* *du développement de toute fonction extrémale est égal à* T.

II. Pour la famille $\boldsymbol{F}^1$. Soit $\boldsymbol{F}^1$ la famille de toutes les fonctions univalentes (pas nécessairement bornées) de la forme

$$F(z)=z+A_2z^2+A_3z^3+\dots$$

On déduit du théorème I par un passage convenable à la limite dans l'équation (3) les formules analogues pour les fonctions extrémales de la famille $\boldsymbol{F}^1$:

Théorème II. Il existe dans la famille $\boldsymbol{F}^1$ *au moins une fonction extrémale* $F^*(z)$ *satisfaisant pour* $0<|z|<1$ *à l'équation* [5])

$$\left[\frac{F^{*\prime}(z)}{F^*(z)}\right]^2\mathfrak{M}^*[F^*(z)]=\frac{1}{z^2}\mathfrak{N}^*(z), \tag{8}$$

où

$$\mathfrak{M}^*(w)\equiv\sum_{p=2}^{N}\frac{\mathfrak{D}_{p-1}}{w^{p-1}} \qquad et \qquad \mathfrak{N}^*(z)\equiv\sum_{p=1}^{N}\frac{\mathfrak{E}_{p+1}}{z^{p-1}}+\mathfrak{E}_{p-1}z^{p-1},$$

les coefficients $\mathfrak{D}_1,\mathfrak{D}_2,\dots,\mathfrak{D}_{N-1}$ *et* $\mathfrak{E}_0,\mathfrak{E}_1,\dots,\mathfrak{E}_{N-1}$ *étant déterminés par les formules* (4)-(7) *dans lesquelles* a^*_n *est à remplacer par le coefficient correspondant du développement de la fonction* $F^*(z)$.

Il est à remarquer que la thèse du théorème II est plus restreinte que celle du théorème I, car elle n'affirme point que *toute* fonction extrémale $F^*(z)$ satisfait à l'équation (8).

9. W. Ślebodziński. *Quelques remarques sur l'application des invariants intégraux à l'intégration des équations différentielles* (à paraître dans Prace Matematyczno-Fizyczne).

---

[5]) Cette équation à été trouvée par une voie différente par A. C. Schaeffer et D. C. Spencer d'abord pour le cas particulier où

$$H(X_2\cdot\dots\cdot X_N,Y_2\cdot\dots\cdot Y_N)=\sqrt{X_N^2+Y_N^2}$$

(voir Duke Mathematical Journal 10 (1943), p. 612) et puis pour la fonction H arbitraire (voir ibidem 12 (1945), p. 124 et Proceedings of the National Academy of Sciences 32 (1946), p. 113).

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. IV, 7 SECTIO A 1950

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Matem.-Przyr. U.M.C.S.
Kierownik: Prof. dr Mieczysław Biernacki

Zygmunt CHARZYŃSKI i Witold JANOWSKI

Sur l'équation générale des fonctions extrêmales dans la famille des fonctions univalentes bornées.

O ogólnym równaniu funkcyj extremalnych w rodzinie funkcyj różnowartościowych ograniczonych.

Termes et notations employées dans cet ouvrage:

1. (1) $K(0,1)$

— cercle, dont le centre est à l'origine et dont le rayon est égal à l'unité.

(2) $K^*(0,1)$

— circonférence du cercle (1).

2. Nous allons considérer les fonctions méromorphes dans le cercle (1); nous les appellerons pour abréger aussi des points.

Nous allons appeler la famille

(3) $\mathfrak{G}$

de ces fonctions famille linéaire, si pour chaque couple de points g_1 et g_2 appartenant à la famille (3), la somme g_1+g_2 y appartient, et si pour chaque point g de $\mathfrak{G}$ et pour un nombre complexe arbitraire λ le produit λg appartient aussi à la famille (3).

3. La convergence d'une suite de fonctions

(4) $\{g_i\}$

de $\mathfrak{G}$ vers une certaine fonction

(5) g

méromorphe dans le cercle (1)

(6) $$g_i \longrightarrow g$$

signifie, que pour chaque ensemble fermé des points du cercle (1)

(7) $$F,$$

ne renfermant pas de pôles de la fonction (5), toutes les fonctions de la suite (4), sauf au plus un nombre fini de celles-ci, n'admettent pas de pôles dans l'ensemble (7) et y convergent vers la fonction (5).

4. Nous appellons une fonctionnelle

(8) $$S(g)$$

définie dans une famille linéaire du type (3):

a) r é e l l e (resp. c o m p l e x e), si pour chaque fonction g de $\mathfrak{G}$ elle prend les valeurs réelles (resp. complexes)

b) c o n t i n u e, si pour chaque point g et pour chaque suite (4) la relation (6) entraîne

$$S(g_i) \longrightarrow S(g)$$

c) a d d i t i v e, si pour chaque couple de points g_1 et g_2, y appartenant

$$S(g_1+g_2) = S(g_1)+S(g_2)$$

d) h o m o g è n e, si pour un nombre arbitraire λ réel ou complexe, selon que la fonctionnelle (8) est réelle ou complexe

$$S(\lambda g) = \lambda S(g)$$

e) l i n é a i r e, si elle est continue, additive et homogène.

5. Pour chaque fonction

(9) $$g = g(z)$$

de la famille (3) la fonction définie par la formule

(10) $$\hat{g} = \widehat{g(z)} = \overline{g(\bar{z})}$$

pour les valeurs de z, pour lesquelles les valeurs conjuguées $\bar{z}$ sont différentes des pôles de la fonction (9), est appelée c o n j u g u é e avec la fonction (9).

6. Nous appelons c o n j u g u é e avec la famille (3) la famille de toutes les fonctions de la forme (10) et nous la désignons par

(11) $$\hat{\mathfrak{G}}$$

7. La fonctionnelle

$$\hat{S}(g) = \overline{S(\hat{g})}$$

définie dans $\hat{\mathfrak{G}}$ est appelée conjuguée aves la fonctionnelle (8).

8. Si la fonctionnelle (8) est réelle, la fonctionnelle linéaire complexe, définie dans $\mathfrak{G}$ de la forme

$$D(g) = S(g) - iS(gi)$$

est dite correspondante à la fonctionnelle (8).

Un simple calcul indique, qu'on a dans $\mathfrak{G}$ l'égalité

$$S(g) = \frac{1}{2}\left[D(g) + \hat{D}(\hat{g})\right]$$

9. Dans la suite nous employons les notations suivantes:

(12) H

désigne la famille de toutes les fonctions

(13) $h = h(z)$

holomorphes dans le cercle (1)

10. (14) F

désigne la famille de toutes les fonctions de la famille (12) de la forme:

$$f = f(z) = a_1 z + \ldots \qquad \text{où } a_1 > 0$$

univalentes et bornées, c. à d. assujetties à la condition

$$|f(z)| < 1.$$

(15) F_T

désigne la famille de toutes les fonctions, appartenant à la famille (14), pour lesquelles

$$a_1 \geqslant T \qquad \text{où} \qquad 0 < T < 1,$$

famille introduite par M. Z. Charzyński [1]).

11. Nous appelons le nombre

$$\|h\|_n = \sup_{|z| \leqslant 1-\frac{1}{n}} |h(z)|$$

[1]) Z. Charzyński „Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes bornées" (à paraitre dans les Annales de la Soc. Pol. de Math. tome 24).

n-tième pseudonorme de chaque fonction (13) appartenant à la famille (12).

Il est aisé de voir que la condition nécessaire et suffisante pour que $h_i \longrightarrow h$ (au sens introduit plus haut) est que $\| h_i - h \|_n \longrightarrow 0$ pour $i \longrightarrow \infty$ et pour chaque n fixe.

12. Nous dirons que la fonctionnelle définie dans F

$$K(f) \tag{16}$$

y est différenciable au point

$$f, \tag{17}$$

s'il existe une fonctionnelle linéaire

$$L(h), \tag{18}$$

définie dans H telle, que pour presque chaque n, fixé pour le moment, et pour chaque fonction Δf de F, satisfaisante à la condition $f + \Delta f \in F$, la convergence

$$\Delta f \longrightarrow 0$$

entraîne

$$\frac{|K(f+\Delta f) - K(f) - L(\Delta f)|}{\| \Delta f \|_n} \longrightarrow 0 . \tag{19}$$

La fonctionnelle (18) satisfaisante à la condition (19) sera appelée différentielle de la fonctionnelle (16) au point (17).

13. Pour la fonctionnelle donnée (16), définie et différenciable en chaque point de la famille (14) le symbole

$$F^*_{TK} \tag{20}$$

désigne une famille qui n'est pas, comme il est aisé de le voir, vide, vu la continuité de la fonctionnelle (16) et la compacité de la famille (14), de toutes les fonctions extrémales de la famille (15) par rapport à la fonctionnelle (16), c.-à-d. pour lesquelles la fonctionnelle (16) atteint son maximum en (15)[2]).

Cette note contient la généralisation, pour le cas plus général des fonctionnelles différenciables de la forme (16), des équations pour les fonctions extrémales, obtenues par Z. Charzyński pour le cas des fonctionnelles qui dépendent d'un nombre fini de coefficients[3]).

Le résultat essentiel est compris dans le théorème suivant:

[2]) comparer le renvoi 1.
[3]) „ „ 1.

Théorème fondamental.

Etant donné une fonctionnelle

(21) $$K(f)$$

définie et réelle dans la famille F, différenciable en chaque point de la famille F_T, dont la différentielle ne s'annule identiquement dans aucun point de la famille F_T, chaque fonction extrémale

(22) $$w = f^* = f^*(z)$$

appartenant à la famille citée (20) *satisfait aux conditions suivantes:*

I. *Il existe sur la circonférence*

(23) $$|z| = 1$$

un arc ouvert

(24) $$C$$

tel que la fonction (22) *reste analytique aussi sur cet arc et le transforme en un arc*

(25) $$D$$

du cercle

(26) $$|w| = 1.$$

II. *On a pour chaque point z de C l' équation:*

(27) $$\left[z\,\frac{f^{*\prime}(z)}{f^*(z)}\right]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = \mathfrak{N}(z)$$

où

(28) $$\mathfrak{M}(w) \equiv D^*\left[\psi\left(f^*(\zeta), \frac{1}{w}\right)\right] + \hat{D}^*[\psi(\hat{f}^*(\zeta), w)] - 2\mathfrak{P}$$

(29) $$\mathfrak{N}(z) \equiv D^*\left[\psi\left(\zeta, \frac{1}{z}\right) f^{*\prime}(\zeta)\right] + \hat{D}^*[\psi(\zeta, z)\,\hat{f}^{*\prime}(\zeta)] - 2\mathfrak{P}$$

$$\psi(w, \lambda) \equiv w\,\frac{1 + w\lambda}{1 - w\lambda}$$

(30)
$$D^*(h) = L^*(h) - i\,L^*(hi)$$
$$\hat{D}^*(\hat{h}) = L^*(h) + i\,L^*(hi)$$

$L^*(h)$ — la différentielle de la fonctionnelle (21) *au point f^**

$$\mathfrak{P} = \underset{0 \leqslant y < 2\pi}{Minim}\ \frac{1}{2}\left\{D^*\left[\psi(f^*(\zeta), e^{-iy})\right] + \hat{D}^*\left[\psi(\hat{f}^*(\varphi), e^{iy}\right]\right\}.$$

ζ désigne ici la variable apparente de l'opération tandis que z joue dans (28)—(29) *le rôle d'un paramètre.*

III. *Les fonctions* (28) *et* (29) *prennent sur la circonférence* (26), *respectivement* (23), *les valeurs réelles non négatives.*
IV. *Le premier coefficient du développement de toute fonction extrémale* (22) *est égal à* T.

La démonstration du théorème se compose d'un lemme et de quatre parties correspondantes successivement aux points; I, II, III, IV de la thèse.

Considérons une fonction extrémale quelconque (22) de la thèse

Lemme

S'il existe une suite de fonctions de la famille (14)

$$\{e_i\}$$

qui appartiennent presque toutes à (15) *et sont de la forme*

$$e_i = f^* + l_i\, v_i \qquad (i = 1.2,\ldots)$$

où

$$\{l_i\}$$

est une suite de nombres positifs convergente vers zéro,

et

$$\{v_i\} = \{v_i(z)\}$$

est une suite de fonctions de la famille (12), *qui tends vers la limite,*

(31) $$V = V(z),$$

alors pour la fonction (31) *a lieu l'inégalité*

(32) $$L^*(V) \leqslant 0$$

Démonstration.

En vertu de (22) et de la définition de la classe (20), nous avons d'abord pour presque tous les indices i l'inégalité

(33) $$k(e_i) - k(f^*) \leqslant 0\ ;$$

en outre, vu la différenciabilité de la fonctionnelle (21) au point (22) on a

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|k(f^* + l_i v_i) - k(f^*) - L^*(l_i v_i)|}{\|l_i v_i\|_n} = 0$$

pour presque tous les indices n, d'où

(34) $$\lim_{i\to\infty} \frac{\left|\dfrac{k(f^* + l_i v_i) - k(f^*)}{l_i} - L^*(v_i)\right|}{\|v_i\|_n} = 0,$$

donc en vertu de (33) et de (34)

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\,(-L^*(v_i)) \geqslant 0\,,$$

ce que, vu l'égalité

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\,L^*(v_i) = \lim_{i\to\infty} L^*(v_i) = L^*(V)$$

démontre (32).

A. *Les propriétés de la frontière.*

En supposant qu'il n'existe aucun arc (24) décrit ci-dessus, construisons, d'une manière analogue à celle employée dans le travail cité [4]), pour chaque point w_0 de la circonférence (26) une suite de points w_k et une suite variationnelle des fonctions de la forme (avec les notations dudit travail):

$$f_k^* = f_k^*(z) = \Omega_k^*\,[f^*(z)] \qquad k = 1, 2, \ldots$$

En posant

$$e_k = \frac{f_k^*}{1 + \frac{1}{8}(1-\varepsilon)\,(1-|w_k|)^2} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{35}$$

nous voyons immédiatement, que

$$|e_k| < |f_k^*(z)| < 1 \qquad k = 1, 2, \ldots$$

et que

$$\frac{e_k - f^*}{(1-|w_k|)^2} \longrightarrow \frac{1}{8}\,f^*\,\frac{1+f^*\overline{w}_0}{1-f^*\overline{w}_0} - \frac{1}{8}\,(1-\varepsilon)\,f^*,$$

d'où l'on déduit sans difficulté, que presque tous les membres de la suite (35) appartiennent à la famille F_T.

Il en résulte, que la suite donnée (35) satisfait aux conditions du lemme, si l'on pose

$$l_k = (1-|w_k|)^2$$

$$v_k = \frac{e_k - f^*}{(1-|w_k|)^2}$$

et

$$V = \frac{1}{8}\,\psi\,(f^*, \overline{w}_0) - \frac{1}{8}\,f^*(1-\varepsilon)$$

En appliquant les résultats de ce lemme, nous obtenons l'inégalité

[4]) Comparer le renvoi 1.

$$L^*\left[\frac{1}{8}\psi(f^*, \overline{w}_0) - \frac{1}{8}(1-\varepsilon) f^*\right] \leqslant 0$$

ou, en passant à la limite avec $\varepsilon \longrightarrow 0$, et en divisant par $\frac{1}{8}$, l'inégalité

$$L^*\left[\psi(f^*, \overline{w}_0) - f^*\right] \leqslant 0 \,. \tag{36}$$

De là, en posant

$$\overline{w}_0 = e^{-ix}, \qquad 0 \leqslant x < 2\pi$$

et en intégrant le membre gauche de l'inégalité (35) entre les limites de 0 à 2π, nous obtenons

$$\int_0^{2\pi} L^*\left[\psi(f^*, e^{-ix}) - f^*\right] dx = \int_0^{2\pi} L^*\left[2\sum_{n=2}^{\infty} f^{*n} e^{-ix(n-1)}\right] dx =$$

$$= L^*\left[\sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{2\pi} 2 f^{*n} e^{-ix(n-1)} dx\right] = L^*(\Theta) = 0$$

(Θ désigne la fonction identiquement nulle), d'où il s'ensuit, vu (36) que

$$L^*\left[\psi(f^*, e^{-ix}) - f^*\right] = L^*\left[\sum_{n=2}^{\infty} f^{*n} e^{-ix(n-1)}\right] =$$

$$= 2\sum_{n=2}^{\infty} \cos x\,(n-1)\, L^*(f^{*n}) - 2\sum_{n=2}^{\infty} \sin x\,(n-1)\, L^*(i f^{*n}) \equiv 0$$

et par suite

$$L^*(f^{*n}) \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad L^*(i f^{*n}) \equiv 0 \,,$$

donc

$$L^*[\varkappa f^{*n}] \equiv 0 \tag{37}$$

pour chaque nombre complexe $\varkappa$.

Ensuite soit une fonction quelconque

$$h = h(z) \in H \tag{38}$$

et une suite de polynômes

$$W_k = W_k(w) = \sum_{n=0}^{N_k} b_n w^n \,.$$

convergente presque uniformément vers la fonction

$$h\,[f^{*-1}(\overline{w})]$$

dans le domaine G de la variable $\overline{w}$, transformé du cercle (1) par la fonction (22).

Il est aisé de voir, que

$$W_k^* = W_k(f^*(z)) \longrightarrow h\,(f^{*-1}(f^*(z))) = h(z) \text{ pour } |z|<1 \tag{39}$$

donc, en vertu de (37)

$$L^*(W_k^*) = \sum_{n=0}^{N_k} L^*(b_n f^{*n}) = 0$$

c. à d. finalement, vu (39)

$$\lim_{k\to\infty} L^*(W_k^*) = L^*(h) = 0\ ,$$

ce qui, vu le choix arbitraire d'une fonction (38) est contraire à la supposition que la différentielle (18) ne s'annule identiquement en aucun point de la famille (15).

Ainsi l'existence d'un arc (24) est démontrée.

B. *Les équations pour les fonctions extrémales.*

Nous contruirons, d'une manière identique à celle du travail cité [5]), 3 suites varationnelles des fonctions

$$f_{jk}^* = f_{jk}^*(\zeta)\ ^{6})$$

Chacune de ces suites, comme il résulte des considérations de l'ouvrage cité ci-dessus, satisfait à la condition du lemme si l'on pose:

$$e_k = f_{jk}^* \qquad (j=1,2,3\ ;\ k=1,2,\ldots)$$

$$\left.\begin{aligned} l_k &= \tau_k^2 \\ v_k &= \frac{f_{jk}^* - f^*}{\tau_k^2} \end{aligned}\right\} \quad j=1,2 \ ;\ k=1,2,\ldots$$

$$\left.\begin{aligned} l_k &= \tau_k'^2 \\ v_k &= \frac{f_{jk}^* - f^*}{\tau_k'^2} \end{aligned}\right\} \quad j=3 \ ;\ k=1,2,\ldots$$

$$V = \mp\, c_j\, u_j \qquad (j=1,2,3)$$

[5]) Comparer le renvoi 1.

[6]) Au lieu de z, nous employons maintenant la lettre ζ comme variable apparente de l'opération.

où nous adoptons le signe "—" pour $j=1$ et "+" pour $j=2,3$ et où nous posons

$$(40)\qquad u_1 = u_1(\zeta) = \psi(\zeta, \bar{\xi}_0)\, f^{*\prime}(\zeta) - Q_0^2 (1-\varepsilon)^2 \psi[f^*(\zeta), \bar{\eta}_0] + \\ + [Q_0^2 (1-\varepsilon)^2 - 1 - \varepsilon]\, \psi[f^*(\zeta), \bar{\nu}]$$

$$(41)\qquad u_2 = u_2(\zeta) = \zeta(\zeta, \bar{\xi}_0)\, f^{*\prime}(\zeta) - Q_0^2 (1+\varepsilon)^2 \psi[f^*(\zeta), \bar{\eta}_0] + \\ + [Q_0^2 (1+\varepsilon)^2 - 1 + \varepsilon]\, \psi[f^*(\zeta), \bar{\mu}_0]$$

$$(42)\qquad u_3 = u_3(\zeta) = \psi[f^*(\zeta), \bar{\mu}'_0] (1+\varepsilon)^2 - (\zeta, \xi)\, f^{*\prime}) \ .$$

ε désigne un nombre positif quelconque, suffisament petit, ν un point quelconque de la circonférence (26), μ_0, μ' — certains point fixes de cette circonférence, ξ_0 — un point quelconque de l'arc (24), $\eta_0 = f^*(\xi_0)$ — un point de l'arc (25).

$Q_0^2 = |f^{*\prime}(\xi_0)|^2 = \left[\xi_0 \dfrac{f^{*\prime}(\xi_0)}{f^*(\xi_0}\right]^2 > 1$, ξ — un point quelconque de la circonférence (23), $c_1 = c_3 = \dfrac{1}{2}$, $c_2 = \dfrac{5}{54}$ [7] .

Il en résulte, en appliquant le résultat du lemme, que

$$(43)\qquad L^*[\mp c_j u_j(\zeta)] \leqslant 0 \qquad (j=1,2,3)$$

En passant dans les inégalités (43) à la limite avec $\varepsilon \longrightarrow 0$ pour $i=1,2$ et en posant

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_j = U_j \ , \qquad (j=1,2)$$

puis en divisant les inégalités respectivement par $-c_1$ et c_2 on a:

$$(44)\qquad \frac{L^*(-c_1 U_1)}{-c_1} \geqslant 0$$

$$(45)\qquad \frac{L^*(c_2 U_2)}{c_2} \leqslant 0 \ .$$

En soustrayant (45) de (44) on obtient:

[7] Comparer le renvoi 1,

$$L^*(U_1) - L^*(U_2) = L^*\{[\psi(f^*(\zeta), \bar{\nu}) - \psi(f^*(\zeta), \bar{\mu}_0)](Q_0^2 - 1)\} \geqslant 0$$

Il en résulte aussitôt, vu le choix arbitraire de ν sur circonférence (26), que

$$(46) \qquad L^*\{\psi[f^*(\zeta), \bar{\mu}_0]\} = \underset{0 \leqslant y < 2\pi}{Minim}\, L^*\{\psi[f^*(\zeta), e^{-iy}]\},$$

D'autre part, pour $\nu = \mu_0$ on a $U_1 = U_2$, il s'ensuit, en vertu de (44), (45) et après des calculs aisés:

$$(47) \qquad L^*\{Q_0^2\,\psi[f^*(\zeta), \bar{\eta}_0] - \psi(\zeta, \bar{\xi}_0)\, f^{*\prime}(\varphi)\} - (Q_0^2 - 1)\mathfrak{P} = 0$$

où

$$\mathfrak{P} = \underset{0 \leqslant y < 2\pi}{Minim}\, L^*\{\psi[f^*(\zeta), e^{-iy}]\},$$

c'est à dire

$$Q_0^2\{L^*[\psi(f^*(\zeta), \bar{\eta}_0] - \mathfrak{P}\} = L^*[\psi(\zeta\, \bar{\xi}_0)\, f^{*\prime}(\zeta)] - \mathfrak{P}$$

Nous avons maintenant, conformément aux notations (30) pour $|y| = 1$

$$(48) \qquad \overbrace{\psi[\zeta, \bar{y}]\, f^{*\prime}(\zeta)} \equiv \psi(\zeta, y)\, \hat{f}^{*\prime}(\zeta)$$

$$(49) \qquad \overbrace{\psi[f^*(\zeta), \bar{y}]} \equiv \psi[\hat{f}^*(\zeta), y]$$

$$\psi(\zeta, \bar{y})\, f^{*\prime}(\zeta) \equiv \psi\left(\zeta, \frac{1}{y}\right) f^{*\prime}(\zeta)$$

$$\psi[f^*(\zeta), \bar{y}] \equiv \psi\left[f^*(\zeta), \frac{1}{y}\right],$$

ce qui donne

$$(50) \qquad L^*[\psi(f^*(\zeta), \bar{y})] = \frac{1}{2}\left\{D^*[\psi(f^*(\zeta), \bar{y})] + \hat{D}^*\overbrace{[\psi(f^*(\zeta), \bar{y})]}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{D^*\left[\psi\left(f^*(\zeta), \frac{1}{y}\right)\right] + \hat{D}^*[\psi(\hat{f}^*(\zeta), y)]\right\}$$

$$(51) \qquad L^*[\psi(\zeta, \bar{y})\, f^{*\prime}(\zeta)] = \frac{1}{2}\left\{D^*[\psi(\zeta, \bar{y})\, f^{*\prime}(\zeta)] + \hat{D}^*\overbrace{[\psi(\zeta, \bar{y})\, f^{*\prime}(\zeta)]}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{D^*\left[\psi\left(\zeta, \frac{1}{y}\right) f^{*\prime}(\zeta)\right] + \hat{D}^*[\psi(\zeta, y)\, \hat{f}^{*\prime}(\zeta)]\right\}$$

En posant $\xi_0 = z$ et $\eta_0 = f^*(z)$, $Q_0^2 = \left[z \frac{f^{*\prime}(z)}{f^*(z)} \right]^2$ nous pouvons écrire l'équation (47) vu (50) et (51), après des transformations aisées, sous la forme (27).

C. *Les inégalités pour les fonctions* $\mathfrak{M}(w)$ *et* $\mathfrak{N}(z)$ *sur les circonférences.*

La première inégalité est directement évidente, vu la définition du nombre $\mathfrak{P}$.

De (43) pour $j=3$, vu (40) — (42) nous obtenons pour $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$L^* \{ \psi [f^*(\zeta), \mu_0'] \} - L^* \{ \psi(\zeta, \xi) f^{*\prime}(\zeta) \} \leqslant 0 ,$$

alors

$$L^* [\psi(\zeta, \xi) f^{*\prime}(\zeta)] \geqslant L^* [\psi(f^*(\zeta), \mu_0')] \geqslant \mathfrak{P}$$

donc, vu (41) et (29)

$$\mathfrak{N}(\xi) = L^* [\psi(\zeta, \xi) f^{*\prime}(\zeta)] - \mathfrak{P} \geqslant 0 ,$$

d'où il s'ensuit, en changeant la notation de ξ en z, que $\mathfrak{N}(z)$ est non négatif sur la circonférence (23).

D. *Le premier coefficient est égal à* T.

En employant un raisonnement analogue à celui de l'ouvrage cité ci dessus [8]) on peut démontrer directement, que le premier coefficient de la fonction extrémale est égal à T.

Ainsi donc le théorème fondamental a été démontré..

Il en résultent les corollaires suivants, utiles dans leurs applications.

Corollaire. I. Si les propriétés:

1° il existe un domaine

(52) E

compris dans le cercle $|z| < 1$, dont la frontière contient un arc

$$C_1 \subset C$$

tel, qu'aucun des points de cet arc n'est un point d'accumulation de points essentiels [9]) du complémentaire du domaine (52),

[8]) Comparer le renvoi 1.
[9]) Comparer le renvoi 1.

2° on peut étendre la différentielle (18) à la famille linéaire

$$\mathfrak{G}$$

de toutes les fonctions méromorphes dans le cercle (1) qui ont des pôles tout au plus aux points du domaine (52), sont verifiées, alors l'équation (27) a lieu pour chaque $z \in E$.

Démonstration: il suffit de remarquer que d'après les conditions 1° et 2° les expressions qui forment les deux membres de l'équation (27) sont des fonctions holomorphes dans un domaine plus vaste contenant l'arc C_1 et E. Puisque l'équation (27) a lieu d'après le théorème fondamental sur l'arc C, on peut l'étendre au domaine (42), c'est ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire II. — Si les propriétés:

1° Il existe un domaine fixe

(53) $$E^*$$

compris dans le cercle (1), dont la frontière contient la circonférence (2), et les points qui sont des points d'accumulation des points essentiels du complémentaire forment sur cette circonférence un ensemble non dense,

2° la différentielle de la fonctionnelle (21), prise au point quelconque de la famille (15) s'étend à la famille linéaire

(54) $$\mathfrak{G}^*$$

de toutes les fonctions méromorphes dans le cercle (1), qui ont des pôles situés tout au plus aux points du domaine (53), sont verifiées, alors l'équation (27) a lieu pour chaque $z \in E^*$.

Démonstration:

Il suffit de remarquer que pour la fonction extrémale (22):

a) la frontière du domaine (53) contient, en vertu de la condition 1°, un certain arc

$$C_1 \subset C$$

qui a des propriétés énoncées au point 1° du corollaire I,

b) la différentielle (18) s'étend d'après la condition 2° à la famille (44). En réunissant a, b et le corollaire I nous obtenons l'égalité (27) pour chaque z de l'ensemble (53), c'est ce qu'il fallait démontrer.

Streszczenie.

Niech $f(z)$ oznacza funkcję holomorficzną i jednolistną w kole $|z|<1$ postaci

(1) $$f=f(z)=a_1 z+\ldots\ldots \qquad (a_1>0),$$

dla której

(2) $$|f(z)|<1.$$

Rozważamy rodzinę F_T wszystkich funkcyj postaci (1) spełniających warunek (2), oraz warunek $a_1 \geqslant T$, gdzie $0<T<1$.

Nota niniejsza zawiera uogólnienie równań dla funkcyj extremalnych uzyskanych przez Z. Charzyńskiego[1]) odnośnie własności funkcyj extremalnych w rodzinie funkcyj F_T.

Dowodzimy następującego zasadniczego twierdzenia:
Jeżeli dany jest jakikolwiek funkcjonał

(3) $$K(f)$$

określony, rzeczywisty i różniczkowalny w każdym punkcie opisanej rodziny, o różniczce nie znikającej tożsamościowo w żadnym jej punkcie, wówczas dla każdej funkcji extremalnej

(4) $$f^*=f^*(z),$$

t. zn. takiej dla której $K(f)$ osięga maximum w F_T spełnione są warunki:

I. istnieje na okręgu koła

(5) $$|z|=1$$

łuk otwarty

$$C$$

taki, że funkcja (2) jest analityczna na tym łuku i odwzorowuje go na łuk

$$D$$

okręgu

$$|w|=1.$$

II. zachodzi równanie

(7) $$\left[z\frac{f^{*\prime}(z)}{f^*(z)}\right]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)]=\mathfrak{N}(z) \qquad \text{dla } z\in C,$$

gdzie

(8) $$\mathfrak{M}(w)\equiv D^*\left[\psi\left(f^*(\zeta),\frac{1}{w}\right)\right]+\hat{D}^*[\psi(f^*(\zeta),w)]-2\mathfrak{P}$$

[1]) Z. Charzyński: „Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes bornées", (w druku w Annales de la Soc. Pol. de Math. tom 24).

$$(9)\qquad \mathfrak{N}(z) \equiv D^*\left[\psi\left(\zeta, \frac{1}{z}\right) f^{*\prime}(\zeta)\right] + \hat{D}^*[\psi(\zeta, z)\, \hat{f}^{*\prime}(\zeta)] - 2\mathfrak{P}$$

$$\psi(w, \lambda) \equiv w\,\frac{1+w\lambda}{1-w\lambda}$$

$$D^*(h) = L^*(h) - i\,L^*(hi)$$

$$\hat{D}^*(\hat{h}) = L^*(h) + i\,L^*(hi)$$

$L^*(h)$ — różniczka funkcjonału (3) w punkcie f^*

$$\mathfrak{P} = \underset{0\leqslant y<2\pi}{Minim}\,\frac{1}{2}\left\{D^*[\psi(f^*(\zeta),\ e^{-iy})] + \hat{D}^*[\psi(\hat{f}^*(\zeta),\ e^{iy}]\right\}$$

zaś ζ jest oznaczeniem zmiennej pozornej operacji.

III. funkcje (8) i (9) przyjmują na okręgu koła (6) względnie (5) wartości rzeczywiste nieujemne.

IV. pierwszy współczynnik rozwinięcia funkcji (4) równy jest T. Z twierdzenia tego wpływają następujące wnioski przydatne do zastosowań:

Wniosek I: jeżeli spełnione są założenia:

1° istnieje zawarty w kole $|z| < 1$ obszar

$$(10)\qquad E$$

którego brzeg zawiera łuk

$$C_1 \subset C$$

taki, że żaden punkt tego łuku nie jest punktem skupienia właściwych[2]) punktów uzupełnienia zbioru (10).

2° różniczkę $L(h)$ można rozszerzyć na rodzinę liniową

$$\mathfrak{S}$$

wszystkich funkcyj meromorficznych w kole $|z| < 1$, o biegunach conajwyżej w punktach obszaru (10), wówczas równanie (7) zachodzi dla każdego $z \in E$.

Wniosek II: jeżeli spełnione są założenia

1° istnieje zawarty w kole $|z| < 1$ stały obszar

$$(11)\qquad E^*$$

[2]) Por. Z. Charzyński: „Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes bornées".

którego brzeg zawiera okręg (5), przy czym punkty będące punktami skupienia właściwych punktów uzupełnienia zbiorú E^* tworzą na tym okręgu zbiór nigdzie gęsty,

2° różniczka funkcjonału (3) wzięta w dowolnym punkcie rodziny F_T rozszerza się na rodzinę liniową

$$\mathfrak{G}^*$$

wszystkich funkcyj meromorficznych w kole $|z| < 1$, o biegunach co najwyżej w punktach obszaru (11), wówczas równanie (7) zachodzi dla każdego $z \in E^*$.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY
KAROL BORSUK redaktor
ANDRZEJ MOSTOWSKI MARCELI STARK
STANISŁAW TURSKI

II

ZYGMUNT CHARZYŃSKI

Sur les fonctions univalentes bornées

WARSZAWA 1953

Introduction.

Je présente ici les résultats de mes recherches sur les fonctions univalentes bornées. On peut les diviser en deux parties distinctes:

Je déduis d'abord quelques équations qui doivent satisfaire les fonctions univalentes bornées, pour lesquelles certaines fonctionnelles, qui dépendent des coefficients, atteignent une valeur extrémale.

Ensuite, je déduis certaines relations d'orthogonalité entre les coefficients des puissances entières des fonctions univalentes bornées, qui transforment le cercle $|z|<1$ en un ensemble de la même mesure, et j'en tire certaines conséquences générales.

Je donne en outre, à la fin de l'article, quelques remarques sur d'autres résultats qui ont été établis à l'aide de ce qui précède.

Termes et notations.

Nous désignerons par

$$K(\xi,r), \quad \text{où} \quad |z-\xi|<r,$$

et

$$K^*(\xi,r), \quad \text{où} \quad |z-\xi|=r$$

respectivement le cercle ouvert de centre ξ et de rayon r, sur le plan complexe, et la circonférence de ce cercle.

Étant donné dans le plan complexe un ensemble de points E mesurable (L), nous désignerons par $m(E)$ sa mesure. Nous désignerons par $\varphi(S)$ l'ensemble des valeurs prises par la fonction $\varphi(z)$ dans un ensemble S de points z.

Voilà maintenant une définition un peu plus générale de la convergence uniforme comme suit:

Soit une famille de fonctions complexes de la variable complexe $u_\tau(z)$ qui dépend d'un paramètre réel τ, $0\leqslant\tau\leqslant 1$; on suppose que

$u_\tau(z)$ soit déterminée pour un τ quelconque fixé arbitrairement dans un ensemble ouvert de points S_τ qui peut dépendre du paramètre τ; soit encore une fonction $u(z)$ déterminée dans un ensemble ouvert S.

Nous disons que $u_\tau(z)$ *tend*, pour $\tau \to 0$, *presque uniformément* vers $u(z)$ dans l'ensemble S si, pour chaque ensemble fermé $F \subset S$ les conditions suivantes sont satisfaites:

(a) $F \subset S_\tau$ pour τ suffisamment petits,

(b) $u_\tau(z)$ tend uniformément vers $u(z)$ dans F pour $\tau \to 0$.

Cette définition peut être admise sous une forme analogue pour les suites de fonctions en y remplaçant la variable τ par la variable k parcourant les nombres naturels.

Nous dirons *bornée*[1]) chaque fonction univalente de la forme

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \qquad |z| < 1,$$

qui satisfait aux conditions

$$a_1 > 0, \qquad |f(z)| < 1 \quad \text{pour} \quad |z| < 1.$$

Étant donnée une fonction univalente bornée quelconque $f(z)$, nous désignerons, dans certains cas, le n-ième coefficient de son développement aussi par le symbole

$$a_{nf} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

---

[1]) K. Löwner, *Untersuchungen über schichte, konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann. 89, p. 103-121.

I. Fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes bornées.

Soit T un nombre quelconque de l'intervalle $(0,1)$.

Considérons la famille F_T composée de toutes les fonctions univalentes bornées dont le premier coefficient est plus grand ou égal à T.

Faisons correspondre à chaque fonction $f(z)$ de cette famille le nombre suivant:

$$H_f = H(X_{2f}, X_{3f}, \ldots, X_{Nf}, Y_{2f}, Y_{3f}, \ldots, Y_{Nf}), \tag{1}$$

où on suppose que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nf} z^n, \qquad \frac{a_{nf}}{a_{1f}} = X_{nf} + iY_{nf} \qquad (n = 2,3,\ldots),$$

et que

$$H(X_2, X_3, \ldots, X_N, Y_2, Y_3, \ldots, Y_N), \qquad N \geqslant 2, \tag{1'}$$

soit une fonction quelconque réelle de $2N-2$ variables réelles, définie dans une région suffisamment grande, et qui y admet les dérivées partielles du premier ordre continues, ne s'annulant nulle part simultanément.

Théorème fondamental. *Dans la famille F_T il existe des fonctions extrémales $f^*(z)$, pour lesquelles la fonctionnelle* (1) *atteint la valeur la plus grande. Chacune de ces extrémales satisfait à l'équation*

$$\left[\frac{f^{*\prime}(z)}{f^*(z)}\right]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = \frac{1}{z^2}\mathfrak{N}(z), \qquad 0 < |z| < 1, \tag{2}$$

où

$$\mathfrak{M}(w) = \left[\sum_{p=2}^{N} \frac{\mathfrak{D}^*_{p-1}}{w^{p-1}} + \overline{\mathfrak{D}}^*_{p-1}\, w^{p-1}\right] - 2\,\mathfrak{P}^*, \tag{3}$$

$$\Re(z) = \left[\sum_{p=1}^{N} \mathfrak{E}_{p-1}^{*} z^{p-1} + \mathfrak{E}_{p-1}^{*} z^{p-1}\right] - 2\mathfrak{P}^{*}, \tag{4}$$

$$f^{*}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{*} z^n, \tag{5}$$

$$[f^{*}(z)]^p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{*(p)} z^n \qquad (p=2,3,\ldots), \tag{5'}$$

$$A_n^{*} = \frac{a_n^{*}}{a_1^{*}} \qquad (n=2,3,\ldots), \tag{5''}$$

$$A_n^{*} = X_n^{*} + iY_n^{*} \qquad (n=2,3,\ldots), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} H_n^{*} = {} & H'_{X_n}(X_2^{*}, X_3^{*}, \ldots, X_N^{*}, Y_2^{*}, Y_3^{*}, \ldots, Y_N^{*}) \\ & - iH'_{Y_n}(X_2^{*}, X_3^{*}, \ldots, X_N^{*}, Y_2^{*}, Y_3^{*}, \ldots, Y_N^{*}) \qquad (n=2,\ldots,N), \end{aligned} \tag{6'}$$

$$\mathfrak{D}_{p-1}^{*} = 2\sum_{n=p}^{N} a_n^{*(p)} H_n^{*} \qquad (p=2,\ldots,N), \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_0^{*} &= \sum_{n=2}^{N} (n-1) a_n^{*} H_n^{*}, \\ \mathfrak{E}_{p-1}^{*} &= 2\sum_{n=p}^{N} (n-p+1) a_{n-p+1}^{*} H_n^{*} \qquad (p=2,\ldots,N), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\mathfrak{P}^{*} = \min_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \Re\left\{\sum_{p=2}^{N} \mathfrak{D}_{p-1}^{*} e^{ix(p-1)}\right\}. \tag{9}$$

Les fonctions $\mathfrak{M}(w)$ *et* $\mathfrak{N}(z)$ *ne prennent sur les circonférences* $|w|=1$ et $|z|=1$ *respectivement que des valeurs réelles, non négatives et chacune d'elles y admet une racine double au moins. Enfin, le coefficient* a_1^{*} *du développement de toute fonction extrémale est égal à* T [2]).

Démonstration. La famille F_T étant normale, l'existence des fonctions extrémales est évidente, vu la continuité de la fonction (1').

On peut se borner à la déduction de l'équation (2) et de ses propriétés. On l'aura en huit parties.

1. Lemmes généraux.

Lemme 1. *Soient données deux familles* $g_\tau(z)$, $h_\tau(w)$, *de fonctions continues qui dépendent d'un paramètre* τ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ *et qui satisfont aux conditions suivantes*:

[2]) J'ai communiqué ce résultat au IV Congrès de Mathématique Polonaise à Wrocław en 1946. Voir Colloquium Mathematicum I, 2 (1948).

(a) $g_\tau(z)$ *est déterminée dans un ensemble ouvert* P_τ *et, pour* $\tau \to 0$, *tend presque uniformément dans un ensemble ouvert* P *vers une fonction* $g(z)$;

(b) $h_\tau(w)$ *est déterminée dans un ensemble ouvert* Q_τ *et, pour* $\tau \to 0$, *tend presque uniformément dans un ensemble ouvert* Q *vers une fonction* $h(w)$;

(c) $g_\tau(P_\tau) \subset Q_\tau$; $g(P) \subset Q$.

Alors la superposition $h_\tau[g_\tau(z)]$ *tend, pour* $\tau \to 0$, *presque uniformément vers* $h[g(z)]$ *dans* P [3]).

Démonstration. Soit un ensemble quelconque fermé F compris dans P. Choisissons un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$. On remarque d'abord qu'il existe un ensemble ouvert H tel que

$$g(F) \subset H \subset \bar{H} \subset Q.$$

D'après la condition (a) on peut choisir un nombre τ_1 tel que

$$g_\tau(F) \subset H \subset \bar{H} \subset Q,$$

$$|h[g_\tau(z)] - h[g(z)]| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad z \in F \text{ et } \tau < \tau_1.$$

D'autre part, d'après la condition (b) on a

$$|h_\tau(w) - h(w)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad w \in \bar{H} \text{ et } \tau < \tau_2,$$

où τ_2 est un nombre suffisamment petit. Par conséquent, le point $w = g_\tau(z)$ appartenant à $\bar{H}$ pour $z \in F$ et $\tau < \tau_1$, on a immédiatement, pour $\tau < \min(\tau_1, \tau_2)$,

$$|h_\tau[g_\tau(z)] - h[g(z)]| \leqslant |h_\tau[g_\tau(z)] - h[g_\tau(z)]| + |h[g_\tau(z)] - h[g(z)]| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{pour} \quad z \in F,$$

[3]) Remarquons ici que le lemme précédent peut être exprimé sous la forme équivalente suivante:

Soient deux suites de fonctions continues $\{g_k(z)\}$ et $\{h_k(w)\}$ qui satisfont aux conditions:

(a) $g_k(z)$ est déterminée dans un ensemble ouvert P_k et tend vers $g(z)$ dans un ensemble ouvert P;

(b) $h_k(w)$ est déterminée dans un ensemble ouvert Q_k et tend vers $h(w)$ dans un ensemble ouvert Q;

(c) $g(P_k) \subset Q_k$, $g(P) \subset Q$.

Alors la suite de superpositions $\{h_k[g_k(z)]\}$ tend vers $h[g(z)]$ dans P.

ce qui donne que $h_\tau[g_\tau(z)]$ tend uniformément vers $h[g(z)]$ dans F, ε étant un nombre arbitraire. L'ensemble F étant aussi arbitraire, la dèmonstration est terminée.

Lemme 2. *Si $g(z)$ est une fonction holomorphe, bornée ($|g(z)|\leqslant M$) dans le cercle $K(z_0,R)$, et si $|g'(z_0)|=a>0$, il existe, pour chaque nombre $0<\delta<1$ un nombre positif $r_0=r_0(\delta,M,a,R)$ (dépendant des paramètres δ,M,a,R, indépendant de la forme de la fonction $g(z)$) tel que, pour chaque nombre*

$$0<r<r_0(\delta,M,a,R),$$

les relations suivantes soient satisfaites:

$$g[K(z_0,r)]\supset K[g(z_0),a(1-\delta)r], \tag{10}$$

$$g[K(z_0,r)]\subset K[g(z_0),a(1+\delta)r]. \tag{10'}$$

Démonstration. En développant la fonction $g(z)$ en série entière dans le cercle $K(z_0,R)$, on a

$$g(z)-g(z_0)=g'(z_0)(z-z_0)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$$

et, d'après des inégalités connues, il vient

$$\left|\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}\right|\leqslant\frac{M}{R^n}\qquad\text{pour}\quad n=2,3,\ldots,$$

d'où résultent immédiatement les inégalités suivantes:

$$|g(z)-g(z_0)|\leqslant a|z-z_0|+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{M}{R^n}|z-z_0|^n \tag{11}$$

$$=a|z-z_0|+\frac{M|z-z_0|^2}{R^3\left(1-\frac{|z-z_0|}{R}\right)}.$$

et, d'une façon analogue

$$|g(z)-g(z_0)|\geqslant a|z-z_0|-\frac{M|z-z_0|^2}{R^2\left(1-\frac{|z-z_0|}{R}\right)}. \tag{11'}$$

Admettons comme nombre cherché $r_0(\delta, M, a, R)$, un nombre arbitraire r_0 tel que

$$\frac{Mr_0}{R^2\left(1-\frac{r_0}{R}\right)} < a\delta.$$

On a donc, pour $0 < r < r_0$,

$$\frac{Mr}{R^2\left(1-\frac{r}{R}\right)} < a\delta,$$

et, d'après (11) ou (11′),

$$|g(z)-g(z_0)| \leqslant a|z-z_0| + \frac{M|z-z_0|^2}{R^2\left(1-\frac{|z-z_0|}{R}\right)} \tag{12}$$

$$< ar + \frac{Mr^2}{R^2\left(1-\frac{r}{R}\right)} < ar(1+\delta)$$

pour chaque $|z-z_0| < r$,

$$|g(z)-g(z_0)| \geqslant a|z-z_0| - \frac{M|z-z_0|^2}{R^2\left(1-\frac{|z-z_0|}{R}\right)} \geqslant ar(1-\delta) \tag{12′}$$

pour chaque $|z-z_0| = r$.

La première de ces formules énonce que l'ensemble des valeurs, que la fonction $g(z)$ prend dans le cercle $K(z_0, r)$ est compris dans le cercle $K[g(z_0), ar(1+\delta)]$, ce qui démontre (10′).

D'autre part, soit un nombre w tel que $|w-g(z_0)| < ar(1-\delta)$; en vertu de (12′), on a $|w-g(z_0)| < |g(z)-g(z_0)|$ pour $|z-z_0| = r$, et, en tenant compte du théorème de Rouché, on trouve que l'équation $g(z)-g(z_0)+g(z_0)-w \equiv g(z)-w = 0$ doit avoir, dans le cercle $K(z_0, r)$ autant de racines que l'équation $g(z)-g(z_0) = 0$, donc au moins une. Il en résulte que l'ensemble des valeurs que la fonction $g(z)$ prend dans le cercle $K(z_0, r)$ recouvre le cercle $K[g(z_0), ar(1-\delta)]$, ce qui vérifie (10). Le lemme a été ainsi démontré.

La fonction $g(z)$ étant continue, remarquons encore qu'on a immédiatement, de (10) et (10'), des relations analogues pour les fermetures des ensembles considérés

$$g[\overline{K(z_0,r)}] \supset \overline{K[g(z_0),a(1-\delta)r]}, \tag{13}$$

$$g[\overline{K(z_0,r)}] \subset \overline{K[g(z_0),a(1+\delta)r]}. \tag{13'}$$

2. Certaines propriétés topologiques des fonctions bornées.

Soit un ensemble de points $Z \subset \overline{K(0,1)}$. Désignons par CZ l'ensemble complémentaire $\overline{K(0,1)}-Z$.

Nous appellerons $\zeta \in CZ$ *point essentiel* de l'ensemble complémentaire si $|\zeta|<1$. Désignons par F^T $(0<T\leqslant 1)$ la famille de toutes les fonctions $v(z)$ holomorphes et univalentes dans le cercle $|z|<1$ qui satisfaisent aux conditions:

1^0 $|v(z)|<1$,

2^0 $v(0)=0$,

3^0 $a_{1v}<T$.

Il est évident que chaque famille F_T est comprise dans F^1-F^T ainsi que F^T est compris dans F^1 pour chaque T.

Posons pour abréger

$$G_v = v[K(0,1)]$$

pour chaque $v(z) \in F^1$. L'ensemble G_v est évidemment un domaine simplement connexe, compris dans $K(0,1)$. Désignons par ϱ_v la distance entre l'ensemble CG_v et le point 0.

Puisque le domaine G_v contient le point 0, on a évidemment

$$0<\varrho_v\leqslant 1.$$

Posons, pour $0<T<1$ arbitraire,

$$e(T)=\sup_{v(z)\in F^T}[\varrho_v].$$

Je dis que

$$e(T)<1.$$

En effet, supposons $e(T)=1$; il existe donc, pour tout k naturel, une fonction $v_k(z) \in F^T$ telle que $\varrho_{v_k}>1-1/k$; par conséquent

le domaine G_{v_k} contient le cercle $K(0,1-1/k)$ et, en vertu du théorème connu, on a [4])

$$\lim_{k\to\infty} r_k(z) = z,$$

ce qui est impossible, car $a_{1v_k} < T$ pour tout k. L'inégalité $e(T)<1$ doit donc avoir lieu, c. q. f. d.

Il en résulte immédiatement que pour chaque fonction $v(z)\in F^T$ il existe des points essentieles de l'ensemble complémentaire CG_v dont la distance du point 0 n'est pas plus grande que $e(T)$. Ceci se rattache à la proposition suivante: étant donnée une fonction quelconque $v(z)\in F^T$, la circonférence $K^*(0,b)$ a, pour chaque $e(T)<b<1$, au moins un point commun avec l'ensemble complémentaire CG_v; autrement dit, il existe au moins un point essentiel de l'ensemble complémentaire $\mu\in CG_v$ tel que $|\mu|=b$.

En effet, dans le cas contraire, on pourrait décomposer l'ensemble CG_v en deux ensembles fermés, non vides, n'ayant pas de points communs

$$C_1 = K(0,b)\cdot CG_v, \qquad C_2 = [\overline{K(0,1)} - K(0,b)]\cdot CG_v,$$

$$C_1 + C_2 = CG_v,$$

ce qui est impossible, vu la connexité simple de l'ensemble G_v.

3. Étude de la fonction Ω [5]).

Soit une région quelconque simplement connexe $G\subset K(0,1)$, différente du cercle $K(0,1)$, qui contient le point 0. Désignons par $A=re^{i\theta}$ $(0<r<1)$ un point essentiel quelconque de l'ensemble complémentaire CG.

Posons

$$l(u) = \frac{r-ue^{-i\theta}}{1-ure^{-i\theta}} \qquad \text{pour} \quad u\in K(0,1). \tag{14}$$

Comme on le voit immédiatement, la fonction (14) transforme conformément le cercle $K(0,1)$ en lui-même; en même temps, la région G se transforme en un ensemble $G'=l(G)$ et comme G ne con-

[4]) Comp. C. Carathéodory, Math. Ann. 72, p. 107.

[5]) Voir les démonstrations du théorème de Riemann; S. Saks et A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, Warszawa 1938, p. 218-221; L. Bieberbach, *Funktionentheorie II*, Leipzig-Berlin 1927, p. 8.

tient pas le point A, en vertu de (14), G' ne comprend pas 0. De la même façon, on déduit que dans la région G', il y a une branche uniforme de la racine

$$\varphi(w)=\sqrt{w} \quad \text{pour} \quad w\in G' \tag{15}$$

(on choisit une branche de la racine, qui ait au point $w_0=l(0)=r$ la valeur positive $\varphi(w_0)=\varphi(r)=|\sqrt{r}|>0$).

Comme $|w|<1$, on a $|\sqrt{w}|<1$ et $\sqrt{w_1}\neq\sqrt{w_2}$ pour $w_1\neq w_2$, par conséquent, la fonction (15) transforme conformément l'ensemble G' en un domaine $G''=l(G')\subset K(0,1)$.

Posons

$$L(\zeta)=-e^{i\theta}\frac{\zeta-\varphi(r)}{1-\zeta\varphi(r)} \quad \text{pour} \quad \zeta\in K(0,1). \tag{16}$$

La fonction (16) est évidemment une transformation conforme du cercle $K(0,1)$ en lui-même, d'où

$$G'''=L(G'')\subset K(0,1).$$

Soit maintenant la fonction composée

$$\Omega(u)=L\{\varphi[l(u)]\} \quad \text{pour} \quad u\in G. \tag{17}$$

Des propriétés des fonctions (14), (15) et (16) il résulte immédiatement que la fonction (17) transforme conformément la région G en $\Omega(G)=G'''$ et puisque $G'''\subset K(0,1)$, donc

$$|\Omega(u)|<1 \quad \text{pour} \quad u\in G; \tag{18}$$

en outre, ce qui est facile à calculer, on a

$$\Omega(0)=0, \tag{18'}$$

$$\Omega'(0)=\frac{1+r}{2|\sqrt{r}|}>1. \tag{18''}$$

Considérons ensuite le quotient différentiel

$$A(u)=\frac{\Omega(u)-u}{(1-r)^2}=\frac{\Omega(u)-u}{(1-|A|)^2}. \tag{19}$$

Il est facile de voir qu'on peut écrire (19) sous une forme équivalente que voici

$$(19') \qquad \Delta(u)=\left\{-e^{i\theta}\frac{\varphi[l(u)]-\varphi(r)}{1-\varphi[l(u)]\varphi(r)}-u\right\}\frac{1}{(1-r)^2}$$

$$=\frac{u(1+ue^{-i\theta})}{(1+r)[1+\varphi(r)]^2}\cdot\frac{1+\varphi[l(u)]\varphi(r)}{\varphi[l(u)]+\varphi(r)-ue^{-i\theta}\{1+\varphi[l(u)]\varphi(r)\}}.$$

Nous allons nous servir de cette formule dans la suite.

On vérifiera le plus facilement cette identité comme suit:
Posons d'abord pour simplifier le calcul

$$\varphi[l(u)]=\alpha, \qquad \varphi(r)=\beta.$$

Désignons par G et D respectivement les côtés gauche et droit de la formule (19′). En appliquant ces notations, on peut écrire

$$G-D=\left(-e^{i\theta}\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}-u\right)\frac{1}{(1-r)^2}-\frac{u(1+ue^{-i\theta})}{(1+r)(1+\beta)^2}\cdot\frac{1+\alpha\beta}{\alpha+\beta-ue^{-i\theta}(1+\alpha\beta)}$$

$$=-\frac{[e^{i\theta}(\alpha-\beta)+u(1-\alpha\beta)][\alpha+\beta-ue^{-i\theta}(1+\alpha\beta)](1+r)(1+\beta)^2}{(1-\alpha\beta)[\alpha+\beta-ue^{-i\theta}(1+\alpha\beta)](1-r)^2(1+r)(1+\beta)^2}$$

$$-\frac{u(1+ue^{-i\theta})(1+\alpha\beta)(1-\alpha\beta)(1-r)^2}{(1-\alpha\beta)[\alpha+\beta-ue^{-i\theta}(1+\alpha\beta)](1-r)^2(1+r)(1+\beta)^2}$$

$$=-\frac{[e^{i\theta}(\alpha^2-\beta^2)-u^2e^{-i\theta}(1-\alpha^2\beta^2)+2u\beta(1-\alpha^2)](1+r)(1+\beta)^2}{(1-\alpha\beta)[\alpha+\beta-ue^{-i\theta}(1+\alpha\beta)](1-r)^2(1+r)(1+\beta)^2}$$

$$-\frac{u(1+ue^{-i\theta})(1-\alpha^2\beta^2)(1-r)^2}{(1-\alpha\beta)[\alpha+\beta-ue^{-i\theta}(1+\alpha\beta)](1-r)^2(1+r)(1+\beta)^2}.$$

Considérons le „numérateur'' N de cette dernière expression. En tenant compte de (15), on a

$$\alpha^2=l(u)=\frac{r-ue^{-i\theta}}{1-rue^{-i\theta}}, \qquad \beta^2=r,$$

et, par conséquent,

$$\alpha^2-\beta^2=-(1+r)ue^{-i\theta}\frac{1-r}{1-ure^{-i\theta}},$$

$$1-\alpha^2\beta^2=(1+r)\frac{1-r}{1-ure^{-i\theta}},$$

$$1-\alpha^2=(1+ue^{-i\theta})\frac{1-r}{1-ure^{-i\theta}},$$

ce qui donne immédiatement

$$N = \frac{1-r}{1-ure^{-i\theta}}\{[-u(1+r)-u^2e^{-i\theta}(1+r)+2u\beta(1+ue^{-i\theta})](1+r)(1+\beta)^2$$

$$+[u(1+ue^{-i\theta})(1+r)(1-r)^2\}$$

$$= \frac{1-r^2}{1-ure^{-i\theta}}[u(1+ue^{-i\theta})(-1-r+2\beta)(1+\beta)^2+u(1+ue^{-i\theta})(1-r)^2]$$

$$= \frac{1-r^2}{1-ure^{-i\theta}}u(1+ue^{-i\theta})[-(1+r-2\beta)(1+\beta)^2+(1-r)^2].$$

Puisque le dernier facteur est égal à zéro, donc $N=0$ et de même $G-D=0$, c. q. f. d.

De cette manière certaines fonctions $\Omega(u)$ et $\Lambda(u)$, aux propriétés citées ci-dessus, ont été déterminées dans la région G. Puisqu'elles dépendent du domaine G et du point A, il sera convenable de les désigner aussi par

$$\Omega_{G,A}(u) \qquad \text{et} \qquad \Lambda_{G,A}(u).$$

Admettons maintenant que soit donnée une suite de régions

$$G_k \subset K(0,1) \qquad (k=1,2,\ldots), \tag{20}$$

différentes de $K(0,1)$, qui contient le point 0, ainsi qu'une suite de points

$$A_k = r_k e^{i\theta_k} \qquad (0<r_k<1;\ k=1,2,\ldots), \tag{20'}$$

appartenant à l'ensemble CG_k; en même temps, la suite (20') doit être convergente vers un point $A_0=e^{i\theta_0}$ sur la circonférence, c'est-à-dire

$$\lim_{k\to\infty} r_k = 1, \qquad \lim_{k\to\infty} e^{i\theta_k} = e^{i\theta_0}. \tag{21}$$

Soit G_0 un domaine quelconque fermé qui contient le point 0, et tel que $G_0 \subset G_k$ pour tout k naturel. Formons pour les suites (20), (20') des suites correspondantes de fonctions

$$\Omega_{G_k,A_k}(u), \qquad \Lambda_{G_k,A_k}(u), \tag{22}$$

où $u \in G_k$ $(k=1,2,\ldots)$. Pour simplifier, nous désignerons les fonctions (22) par

$$\Omega_k(u), \qquad \Lambda_k(u),$$

et, en même temps, les fonctions analogues à (14), (15) et (16) par

$$l_k(u)=\frac{r_k-ue^{-i\theta_k}}{1-ue^{-i\theta_k}r_k}, \qquad u\in G_k,$$

$$\varphi_k(w)=\sqrt{w}, \qquad w\in G'_k=l_k(G_k),$$

$$L_k(\zeta)=-e^{i\theta_k}\frac{\zeta-\varphi_k(r_k)}{1-\zeta\varphi_k(r_k)}, \qquad \zeta\in G''_k=\varphi_k(G'_k).$$

Dans ces conditions, le lemme suivant a lieu:

Lemme 3. *La suite de fonctions $\Lambda_k(u)$ est uniformément convergente vers la fonction* $\frac{u}{8}\cdot\frac{1+u\Lambda_0}{1-u\bar{\Lambda}_0}$ *dans l'ensemble G_0, c'est-à-dire*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Omega_k(u)-u}{(1-|\Lambda_k|)^2}=\frac{u}{8}\cdot\frac{1+u\bar{\Lambda}_0}{1-u\bar{\Lambda}_0}.$$

Démonstration. L'ensemble G_0 étant fermé, la distance entre G_0 et le point Λ_0 est supérieure à un $\delta>0$, c'est-à-dire $|u-\Lambda_0|=|1-\Lambda_0 u|>\delta$ pour $u\in G_0$, d'où immédiatement

$$\lim_{k\to\infty}l_k(u)=\lim_{k\to\infty}\frac{r_k-ue^{-i\theta_k}}{1-r_k ue^{-i\theta_k}}=\frac{1-u\bar{\Lambda}_0}{1-u\bar{\Lambda}_0}=1 \tag{23}$$

uniformément dans l'ensemble G_0.

Je dis que de même

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k[l_k(u)]=1 \tag{24}$$

uniformément dans G_0.

En effet, désignons par $\sqrt[*]{v}$ pour $v\in K(1,1)$ la branche uniforme de la racine qui sur le segment $(0,2)$ prend une valeur positive; on a

$$\sqrt[*]{x}=|\sqrt{x}|>0 \quad \text{pour} \quad 0<x<2.$$

Il résulte de la formule (23) que, pour des k suffisamment grands ($k>K$), on a $l_k(G_0)\subset K(1,1)$. Donc, en considérant (pour $k>K$) les fonctions $\varphi_k(w)$ et $\sqrt[*]{w}$ dans l'ensemble $l_k(G_0)$, on constate qu'elles sont toutes les deux des branches de la racine dans l'ensemble $l_k(G_0)$; en même temps, au point $w_0=l_k(0)=r_k$, elles ont la même valeur $\varphi_k(w_0)=\sqrt[*]{w_0}=|\sqrt{r_k}|$. En vertu de la connexité de l'ensemble $l_k(G_0)$, elles doivent être identiques dans tout cet ensemble:

$$\varphi_k(w)=\sqrt[*]{w} \quad \text{pour} \quad w\in l_k(G_0) \qquad (k>K),$$

donc

$$\varphi_k[l_k(u)]=\sqrt[*]{l_k(u)} \quad \text{pour} \quad u \in G_0.$$

De la continuité de la fonction $\sqrt[*]{w}$ au point $w=1$ et de (23), il résulte que

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[*]{l_k(u)}=\sqrt[*]{\lim_{k\to\infty} l_k(u)}=1,$$

ce qui donne, vu l'égalité $\varphi_k[l_k(u)]=\sqrt[*]{l_k(u)}$ pour $k>K$, la formule désirée (24).

En passant à la démonstration de la convergence de la suite $\Delta_k(u)$, on a, en vertu des formules (19′), (23), (24) et (21),

$$\lim_{k\to\infty}\Delta_k(u)=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left\{u(1+ue^{-i\theta_k})\right\}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left\{(1+r_k)[1+\varphi_k(r_k)]^2\right\}}\cdot\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left\{1+\varphi_k[l_k(u)]\varphi_k(r_k)\right\}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\varphi_k[l_k(u)]+\varphi_k(r_k)-ue^{-i\theta_k}\left\{1+\varphi_k[l_k(u)]\varphi_k(r_k)\right\}\right\}}$$

$$=\frac{u(1+ue^{-i\theta_0})}{8}\cdot\frac{2}{2-2ue^{-i\theta_0}}=\frac{u}{8}\cdot\frac{1+u\bar{A}_0}{1-u\bar{A}_0},$$

c. q. f. d.

Au lemme démontré se rattache le lemme suivant:

Lemme 3′. *Etant donné un ensemble ouvert connexe G contenant le point 0 et tel que chaque ensemble fermé $H\subset G$ soit compris dans G_k à partir d'un indice, la convergence presque uniforme*

$$\lim_{k\to\infty}\Delta_k(u)=\frac{1}{8}\cdot u\frac{1+u\bar{A}_0}{1-u\bar{A}_0} \tag{24′}$$

a lieu pour u parcourant l'ensemble G.

En effet, pour chaque ensemble fermé $F\subset G$, on peut trouver un domaine fermé H_0, contenant 0, et tel que $F\subset H_0\subset G$. L'ensemble H_0 étant compris dans G, il est compris pour k suffisamment grand dans G_k, ce qui donne, d'après le lemme 3, que la convergence uniforme (24′) a lieu dans H_0, et aussi dans F, c. q. f. d.

4. Étude des fonctions χ.

Soient le cercle $K(0,1)$, un point arbitraire sur la circonférence $\xi \in K^*(0,1)$ et un cercle quelconque de centre ξ: $K(\xi,\delta)$ (où $0<\delta<1$). Posons

$$G^{(1)}_{\delta\xi} = K(0,1) - \overline{K(\xi,\delta)}, \tag{25}$$

$$G^{(2)}_{\delta\xi} = K(0,1) + K(\xi,d). \tag{25'}$$

Désignons par

$$\xi_1 = \xi e^{-ia}, \qquad \xi_2 = \xi e^{ia} \qquad \left(\text{où } 0 < a < \frac{\pi}{3}\right)$$

les points d'intersection des cercles cités. Comme on le voit aisément, on aura

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{\delta}{2}, \qquad \cos\frac{a}{2} = \left|\sqrt{1-\frac{\delta^2}{4}}\right|, \tag{26}$$

donc

$$\frac{a}{2} = \arcsin\frac{\delta}{2} = \arccos\left|\sqrt{1-\frac{\delta^2}{4}}\right|. \tag{26'}$$

A l'aide d'une méthode connue, il n'est pas difficile de calculer les fonctions qui transforment conformément le cercle $|z|<1$ respectivement en domaines (25) et (25'). Ce seront les fonctions

$$\chi_j(z,\delta,\xi) = \xi\,\frac{1-e^{-ia}\left(\dfrac{1-z\bar{\xi}e^{-ia\gamma_j}}{1-z\bar{\xi}e^{ia\gamma_j}}\,e^{ia\gamma_j}\right)^{1/\gamma_j}}{e^{-ia}-\left(\dfrac{1-z\bar{\xi}e^{-ia\gamma_j}}{1-z\bar{\xi}e^{ia\gamma_j}}\,e^{ia\gamma_j}\right)^{1/\gamma_j}} \qquad (j=1,2)\ ^{6}), \tag{27}$$

où

$$\gamma_1 = \frac{2\pi}{\pi-\alpha}, \qquad \gamma_2 = \frac{2\pi}{3\pi-\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\gamma_j = \frac{2\pi}{(2j-1)\pi-\alpha} \qquad (j=1,2). \tag{27'}$$

Pour calculer les fonctions (27), on procède comme suit:

On constate que les arcs L_1 et L_2 de la circonférence $K^*(\xi,\delta)$ (à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle $K(0,1)$) forment avec la circonférence $K^*(0,1)$ des angles

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}, \quad \beta_2 = \frac{3\pi}{2} - \frac{a}{2}.$$

---

[6]) On prend ici une telle branche de la puissance $1/\gamma_j$, qui ait, pour $z=0$, la valeur e^{ia}.

On voit immédiatement que la fonction linéaire

$$w = l(u) = e^{i\alpha}\frac{1 - u\bar{\xi}e^{-i\alpha}}{1 - u\bar{\xi}e^{i\alpha}}$$

transforme la circonférence $K^*(0,1)$ en une droite réelle, le point ξ_1 en ∞, le point ξ_2 en 0, l'arc L_j en une demi-droite partant du point 0 et formant avec la demi-droite réelle positive un angle β_j. Il résulte de là que le domaine $G^{(j)}_{\delta\xi}$ se transforme en l'intérieur de l'angle compris entre les demi-droites citées. On transforme maintenant le domaine obtenu en demi-plan supérieur $\Im\{\zeta\}>0$ au moyen de la fonction $\zeta=\varphi(w)=w^{\pi/\beta_j}$ (où on prend la branche principale de la puissance); ensuite on transforme ce demi-plan en cercle $K(0,1)$ au moyen de la fonction linéaire

$$z = L(\zeta) = \frac{\zeta - e^{i\frac{\pi\alpha}{\beta_j}}}{\zeta - e^{-i\frac{\pi\alpha}{\beta_j}}}\, e^{-i\frac{\pi\alpha}{\beta_j}}\xi.$$

Ainsi la fonction composée

$$z = L\{\varphi[l(u)]\} = e^{-i\frac{\pi\alpha}{\beta_j}}\xi\,\frac{\left[e^{i\alpha}\dfrac{1 - u\bar{\xi}e^{-i\alpha}}{1 - u\bar{\xi}e^{i\alpha}}\right]^{\frac{\pi}{\beta_j}} - e^{i\frac{\pi\alpha}{\beta_j}}}{\left[e^{i\alpha}\dfrac{1 - u\bar{\xi}e^{-i\alpha}}{1 - u\bar{\xi}e^{i\alpha}}\right]^{\frac{\pi}{\beta_j}} - e^{-i\frac{\pi\alpha}{\beta_j}}}$$

transforme conformément le domaine $G^{(j)}_{\delta\xi}$ en $K(0,1)$. En prenant la fonction inverse, c'est-à-dire en résolvant la dernière équation par rapport à la variable u, on aura les fonctions cherchées (27).

En considérant les expressions (27), pour ξ et δ fixes, comme des fonctions d'une seule variable z, on a

$$\chi_j[K(0,1),\delta,\xi] = G^{(j)}_{\delta\xi}. \tag{28}$$

On a, en outre, ce qui est facile à vérifier,

$$\chi_j(0,\delta,\xi) = 0, \tag{28'}$$

$$\left[\frac{\partial\chi_j(z,\delta,\xi)}{\partial z}\right]_{z=0} = \chi'_j(0,\delta,\xi) = \frac{\sin\alpha\gamma_j}{\gamma_j\sin\alpha} > 0, \tag{28''}$$

car il résulte, de (26′) et (27′), que $0<\alpha\gamma_j<\pi$ pour $j=1,2$.

Le calcul suivant montre que, pour ξ fixe, la limite

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\chi_j(z,\delta,\xi) - z}{\delta^2} = c_j(-1)^j z\,\frac{1+z\bar{\xi}}{1-z\bar{\xi}} \qquad (j=1,2) \tag{29}$$

existe, la convergence étant presque uniforme par rapport à $|z|<1$, où, pour la symétrie des notations, on a posé

$$c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = \frac{5}{54}. \tag{29'}$$

La formule (29) peut être déduite comme suit:
On écrit la formule (27) sous la forme équivalente

$$\chi_j(z,\delta,\xi) = \frac{(1-z\bar{\xi}e^{i\alpha\gamma_j})^{1/\gamma_j} - (1-z\bar{\xi}e^{-i\alpha\gamma_j})^{1/\gamma_j}}{e^{-i\alpha}(1-z\bar{\xi}e^{i\alpha\gamma_j})^{1/\gamma_j} - e^{i\alpha}(1-z\bar{\xi}e^{-i\alpha\gamma_j})^{1/\gamma}} \cdot \xi \qquad (j=1,2), \tag{I}$$

où α et γ_j sont des fonctions de la variable δ d'après les formules (26') et (27'). On considère l'expression du côté droit de la formule (I) comme fonction de trois variables complexes indépendantes z, α, γ_j (pour ξ fixe) et on pose

$$\begin{aligned} P(z,\alpha,\gamma_j) &= (1-z\bar{\xi}e^{i\alpha\gamma_j})^{1/\gamma_j} - (1-z\bar{\xi}e^{-\alpha\gamma_j})^{1/\gamma_j}, \\ Q(z,\alpha,\gamma_j) &= e^{-i\alpha}(1-z\bar{\xi}e^{i\alpha\gamma_j})^{1/\gamma_j} - e^{i\alpha}(1-z\bar{\xi}e^{-\alpha\gamma_j})^{1/\gamma_j}. \end{aligned} \tag{II}$$

On voit aisément qu'en supposant, par exemple,

$$|z| \leqslant r, \qquad |\alpha| \leqslant \frac{1}{6}\lg\frac{1}{r}, \qquad |\gamma_j| \leqslant 3 \tag{III}$$

(où $0<r<1$ — nombre quelconque), les fonctions (II) (en raison de l'inégalité $|ze^{\pm i\alpha\gamma_j}| \leqslant |z|e^{\frac{1}{2}\lg\frac{1}{r}} < \sqrt{r} < 1$ seront holomorphes et continues dans le domaine (III); ainsi on peut les développer, dans le voisinage du point $\alpha = 0$, en séries entières par rapport à la variable α, ce qui donne

$$\begin{aligned} P(z,\alpha,\gamma_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z,\gamma_j)\alpha^n, \\ Q(z,\alpha,\gamma_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z,\gamma_j)\alpha^n. \end{aligned} \tag{IV}$$

En désignant par M_P et M_Q les maxima correspondants des fonctions (II) dans le domaine (III), et en posant

$$M = \max\,[M_P, M_Q],$$

on a de l'inégalité de Cauchy,

$$|p_n(z,\gamma_j)| \leqslant \frac{M}{\alpha_0^n}, \qquad |q_n(z,\gamma_j)| \leqslant \frac{M}{\alpha_0^n}, \quad \text{où } \alpha_0 = \frac{1}{6}\lg\frac{1}{r} \qquad (n=0,1,\ldots). \tag{V}$$

En outre (en dérivant trois fois), on peut facilement calculer les quatre premiers coefficients des développements (IV). En effet

$$\begin{aligned} p_0(z,\gamma_j) &= 0, \qquad p_1(z,\gamma_j) = 2i(1-z\bar{\xi})^{1/\gamma_j}\left(\frac{-z\bar{\xi}}{1-z\bar{\xi}}\right), \\ p_2(z,\gamma_j) &= 0, \qquad p_3(z,\gamma_j) = \frac{2i(1-z\bar{\xi})^{1/\gamma_j}}{3!}\left[\frac{z^3\bar{\xi}^3 - z^2\bar{\xi}^2(3\gamma_j-\gamma_j^2) + z\bar{\xi}\gamma_j^2}{(1-z\bar{\xi})^3}\right], \end{aligned} \tag{VI}$$

$$q_0(z,\gamma_j)=0, \qquad q_1(z,\gamma_j)=2i(1-z\bar{\xi})^{1/\gamma_j}\left(\frac{-1}{1-z\bar{\xi}}\right),$$

(VI′)

$$q_2(z,\gamma_j)=0, \qquad q_3(z,\gamma_j)=\frac{2i(1-z\bar{\xi})^{1/\gamma_j}}{3!}\left[\frac{z^2\bar{\xi}^2\gamma_j^2-z\bar{\xi}(3\gamma_j-\gamma_j^2)+1}{(1-z\bar{\xi})^3}\right].$$

Il résulte de là que, pour α suffisamment petit, on a

$$Q(z,\alpha,\gamma_j)\neq 0,$$

d'où il suit

$$\text{(VII)} \qquad \frac{P(z,\alpha,\gamma_j)}{Q(z,\alpha,\gamma_j)}-z\bar{\xi}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}[p_n(z,\gamma_j)-z\bar{\xi}q_n(z,\gamma_j)]\alpha^n}{\sum_{n=0}^{\infty}q_n(z,\gamma_j)\alpha^n}.$$

D'autre part, d'après (VI), (VI′), on aura (ce qui est facile à vérifier)

$$\text{(VIII)} \qquad p_n(z,\gamma_j)-z\bar{\xi}q_n(z,\gamma_j)=0 \qquad (n=0,1,2),$$

$$p_3(z,\gamma_j)-z\bar{\xi}q_3(z,\gamma_j)=\frac{2i(\gamma_j^2-1)}{3!}z\bar{\xi}\frac{1+z\bar{\xi}}{(1-z\bar{\xi})^2}(1-z\bar{\xi})^{1/\gamma_j}$$

et l'égalité (VII) prend, par rapport à (VIII), (VI) et (VI′), la forme

$$\text{(IX)} \qquad \frac{P(z,\alpha,\gamma_j)}{Q(z,\alpha,\gamma_j)}-z\bar{\xi}=\alpha^2\frac{\sum_{n=3}^{\infty}[p_n(z,\gamma_j)-z\bar{\xi}q_n(z,\gamma_j)]\alpha^{n-3}}{\sum_{n=1}^{\infty}q_n(z,\gamma_j)\alpha^{n-1}}.$$

Si l'on pose maintenant, d'après (26′) et (27′),

$$\alpha=\alpha(\delta)=2\arcsin\frac{\delta}{2}, \qquad \gamma_j=\gamma_j(\delta)=\frac{2\pi}{(2j-1)\pi-2\arcsin\frac{\delta}{2}},$$

on aura évidemment, en raison de (I) et (II),

$$\text{(X)} \qquad \chi_j(z,\alpha,\gamma_j)=\xi\frac{P[z,\alpha(\delta),\gamma_j(\delta)]}{Q[z,\alpha(\delta),\gamma_j(\delta)]},$$

ainsi que

$$\text{(XI)} \qquad \lim_{\delta\to 0}\alpha(\delta)=0, \qquad \lim_{\delta\to 0}\gamma_j(\delta)=\frac{2}{2j-1}=\gamma_j(0).$$

De même, en raison de (VIII), (VI), (VI′) et (XI) les limites suivantes existent:

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{n=3}^{\infty}[p_n(z,\gamma_j(\delta))-z\bar{\xi}q_n(z,\gamma_j(\delta))][\alpha(\delta)]^{n-3}$$

$$=p_3(z,\gamma_j(0))-z\bar{\xi}q_3(z,\gamma_j(0))$$

(XII)
$$=2i(1-z\bar{\xi})^{j-\frac{1}{2}}z\bar{\xi}\frac{1+z\bar{\xi}}{(1-z\bar{\xi})^2}\cdot\frac{1}{3!}\left[\frac{4}{(2j-1)^2}-1\right]$$

$$=-(-1)^j c_j\cdot 2i(1-z\bar{\xi})^{j-\frac{1}{2}}z\bar{\xi}\frac{1+z\bar{\xi}}{(1-z\bar{\xi})^2},$$

(XII′) $$\lim_{\delta\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}q_n(z,\gamma_j(\delta))[\alpha(\delta)]^{n-1}=q_1(z,\gamma_j(0)]=-2i(1-z\bar{\xi})^{j-\frac{1}{2}}\frac{1}{1-z\bar{\xi}},$$

où les nombres c_j ont des valeurs définies dans (29′). De (IX), (XI), (XII), (XII′) résulte

(XIII) $$\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{1}{[\alpha(\delta)]^2}\left\{\frac{P[z,\alpha(\delta),\gamma_j(\delta)]}{Q(z,\alpha(\delta),\gamma_j(\delta)]}-z\bar{\xi}\right\}\right]=(-1)^j c_j z\bar{\xi}\frac{1+z\bar{\xi}}{1-z\bar{\xi}};$$

en même temps, d'après (V) les convergences (XII), (XII′) et, par conséquent, (XIII) ont lieu uniformément dans le cercle $|z|\leqslant r$. On obtient donc facilement le résultat désiré. De (X), en tenant compte de la relation

$$\lim_{\delta=0}\frac{\alpha(\delta)}{\delta}=1,$$

on a

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\chi_j(z,\delta,\xi)-z}{\delta^2}=\lim_{\delta\to 0}\left\{\xi\left(\frac{P[z,\alpha(\delta),\gamma_j(\delta)]}{Q[z,\alpha(\delta),\gamma_j(\delta)]}-z\bar{\xi}\right)\frac{1}{[\alpha(\delta)]^2}\cdot\frac{[\alpha(\delta)]^2}{\delta^2}\right\}$$

(XIV)
$$=\xi\left(\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{1}{[\alpha(\delta)]^2}\left\{\frac{P(z,\alpha(\delta),\gamma_j(\delta)]}{Q[z,\alpha(\delta),\gamma_j(\delta)]}-z\bar{\xi}\right\}\right]\right)\left(\lim_{\delta\to 0}\frac{[\alpha(\delta)]^2}{\delta^2}\right)=(-1)^j c_j z\frac{1+z\bar{\xi}}{1-z\bar{\xi}}$$

uniformément dans le cercle $|z|\leqslant r$, et, comme le nombre r est arbitraire, on déduit que la convergence (XIV) a lieu presque uniformément dans le cercle $|z|<1$, c. q. f. d.

Evidemment, on a de même

(29″) $$\lim_{\delta\to 0}\chi_j(z,\delta,\xi)=z.$$

Désignons les fonctions inverses aux fonctions (27) par

$$\chi_j^{-1}(u,\delta,\xi)\quad\text{pour}\quad u\in G_{\delta\xi}^{(j)}\qquad(j=1,2).$$

En vertu de (28) et (28′), on a

(30) $$\chi_j^{-1}(G_{\delta\xi}^{(j)},\delta,\xi)=K(0,1),$$

$$\chi_j^{-1}(0,\delta,\xi)=0, \tag{30'}$$

$$\left[\frac{\partial\chi_j^{-1}(u,\delta,\xi)}{\partial u}\right]_{u=0}=\chi_j^{-1'}(0,\delta,\xi)=\frac{\gamma_j\sin\alpha}{\sin\alpha\gamma_j}>0, \tag{30''}$$

et il résulte immédiatement de (29''), que

$$\lim_{\delta\to 0}\chi_j^{-1}(u,\delta,\xi)=u, \tag{31}$$

presque uniformément dans le cercle $|u|<1$.

En outre, l'égalité $\chi_j[\chi_j^{-1}(u,\delta,\xi),\delta,\xi]=u$ étant évidente, on a l'identité

$$\frac{\chi_j^{-1}(u,\delta,\xi)-u}{\delta^2}=-\frac{\chi_j[\chi_j^{-1}(u,\delta,\xi),\delta,\xi]-\chi_j^{-1}(u,\delta,\xi)}{\delta^2}.$$

Par conséquent, en raison de (31) et de (29), on a, en vertu du lemme 1, pour un ξ fixe,

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\chi_j^{-1}(u,\delta,\xi)-u}{\delta^2}=(-1)^{j-1}c_j u\frac{1+u\bar{\xi}}{1-u\bar{\xi}} \tag{31'}$$

presque uniformément dans le cercle $|u|<1$.

Nous pouvons résumer les résultats obtenus, en vertu des formules (28)-(28''), (29)-(29'') comme suit:

Lemme 4. *Il y a deux fonctions*

$$\chi_j(z,\delta,\xi) \qquad (j=1,2),$$

définies pour toutes les valeurs $|z|<1$, $0<\delta<1$, $|\xi|=1$, *qui, pour des valeurs quelconques fixes* δ *et* ξ, *étant considérées comme des fonctions d'une seule variable* z, *transforment conformément le cercle* $K(0,1)$ *en des domaines* $G_{\delta\xi}^{(j)}$ *déterminés par les notations* (25), (25'). *En outre, les conditions suivantes sont satisfaites pour* $j=1,2$:

$$\chi_j(0,\delta,\xi)=0, \qquad \chi_j'(0,\delta,\xi)>0,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\chi_j(z,\delta,\xi)=z,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\chi_j(z,\delta,\xi)-z}{\delta^2}=(-1)^j c_j z\frac{1+z\bar{\xi}}{1-z\bar{\xi}},$$

où les convergences sont presque uniformes dans le cercle $|z|<1$.

On a tout-à-fait de la même façon, en raison de (30)-(30''), (31)-(31'), le lemme suivant:

Lemme 4'. *Il y a deux fonctions*

$$\chi_j^{-1}(u,\delta,\xi) \qquad (j=1,2),$$

définies pour toutes les valeurs $u\in G_{\delta\xi}^{(j)}$, $0<\delta<1$, $|\xi|=1$, *qui, pour des valeurs quelconques fixes* δ *et* ξ, *étant considérées comme des fonctions d'une seule variable* u, *transforment les domaines* $G_{\delta\xi}^{(j)}$ *en cercle* $K(0,1)$. *En outre les propriétés suivantes sont satisfaites pour* $j=1,2$:

$$\chi_j^{-1}(0,\delta,\xi)=0, \qquad \chi_j^{-1'}(0,\delta,\xi)>0,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\chi_j^{-1}(u,\delta,\xi)=u,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\chi_j^{-1}(u,\delta,\xi)-u}{\delta^2}=(-1)^{j-1}c_j u\frac{1+u\bar{\xi}}{1-u\bar{\xi}},$$

où les convergences sont presque uniformes dans le cercle $|u|<1$.

5. Propriétés générales des fonctions extrémales.

Soit une fonction extrémale $f^*(z)$ pour laquelle la fonctionnelle (1), définie au début, atteigne la plus grande valeur dans la famille F_T. On admettra ici les désignations (1), (1'), (5''), (6), (6') introduites plus haut.

Démontrons le lemme suivant:

Lemme aux variations. *Soient une suite de fonctions* $f_k(z)\in F_T$ $(k=1,2,\ldots)$ *et une suite de nombres positifs* d_k $(k=1,2,\ldots)$, *convergente vers zéro, telles que*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_k(z)-f^*(z)}{d_k}=V(z)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n z^n, \tag{32}$$

où la convergence est presque uniforme dans le cercle $|z|<1$ *et la fonction* $V(z)$ *est holomorphe dans ce cercle. On a l'inégalité*

$$\Re\left\{\sum_{n=2}^{N}(B_n-B_1A_n^*)H_n^*\right\}\leqslant 0. \tag{33}$$

Démonstration. Posons pour simplifier, pour $k=1,2,\ldots$,

$$f_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(k)}z^n=a_1^{(k)}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(k)}z^n,$$

$$f_k(z)-f^*(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{(k)})-a_n^*)z^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\delta_k a_n^*)z^n=\delta_k f^*(z), \tag{34}$$

$$A_n^{(k)}-A_n^*=\frac{a_n^{(k)}}{a_1^{(k)}}-\frac{a_n^*}{a_1^*}=\delta_k A_n^* \qquad (n=2,3,\ldots), \tag{34'}$$

$$H_{f_k}-H_{f^*}=\delta_k H_{f^*}. \tag{35}$$

On remarque que, d'après la définition de la fonction $f^*(z)$, on a les inégalités

$$\delta_k H_{f^*}\leqslant 0 \qquad (k=1,2,\ldots),$$

d'où il s'ensuit

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\delta_k H_{f^*}}{d_k}\leqslant 0. \tag{36}$$

D'autre part, on a, d'après (32) et (34),

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\delta_k a_n^*}{d_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_n^{(k)}-a_n^*}{d_k}=B_n \qquad (n=2,3,\ldots,N)$$

et, par conséquent,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\delta_k A_n^*}{d_k}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\delta_k a_n^*}{d_k}a_1^*-\frac{\delta_k a_1^*}{d_k}a_n^*\right]\frac{1}{a_1^{(k)}a_1^*}=\frac{1}{a_1^*}[B_n-B_1A_n^*], \tag{37}$$

ainsi que (puisque a_1^* est un nombre réel)

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\frac{\delta_k A_n^*}{d_k}}=\frac{1}{\bar{a}_1^*}[\bar{B}_n-\bar{B}_1\bar{A}_n^*]. \tag{37'}$$

Posons pour abréger

$$X_n^{(k)}=\frac{A_n^{(k)}+\bar{A}_n^{(k)}}{2}, \qquad Y_n^{(k)}=\frac{A_n^{(k)}-\bar{A}_n^{(k)}}{2i} \qquad (n=2,3,\ldots,N). \tag{38}$$

En appliquant le théorème de Lagrange, on a, pour k suffisamment grands

$$\frac{\delta_k H_{f^*}}{d_k}=\frac{1}{d_k}[H(X_2^{(k)},X_3^{(k)},\ldots,Y_N^{(k)})-H(X_2^*,X_3^*,\ldots,Y_N^*)] \tag{39}$$

$$=\sum_{n=2}^{N}\left[H'_{X_n}(\dot{X}_2^{(k)},\dot{X}_3^{(k)},\ldots,\dot{Y}_N^{(k)})\frac{\delta_k X_n^*}{d_k}+H'_{Y_n}(\dot{X}_2^{(k)},\dot{X}_3^{(k)},\ldots,\dot{Y}_N^{(k)})\frac{\delta_k Y_n^*}{d_k}\right],$$

où on a posé, pour $n=2,3,\ldots,N$ et $k=1,2,\ldots,$

$$\delta_k X_n^* = X_n^{(k)} - X_n^*, \qquad \delta_k Y_n^* = Y_n^{(k)} - Y_n^*, \tag{40}$$

$$\dot{X}_n^{(k)} = X_n^* + \Theta_k \delta_k X_n^*, \qquad \dot{Y}_n^{(k)} = Y_n^* + \Theta_k \delta_k Y_n^* \quad (0 < \Theta_k < 1). \tag{40'}$$

De (37), (37'), (38) et (40), il résulte

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{\delta_k X_n^*}{d_k} &= \frac{1}{a_1^*}\left[\frac{B_n - B_1 A_n^*}{2} + \frac{\bar{B}_n - \bar{B}_1 \bar{A}_n^*}{2}\right], \\ \lim_{k\to\infty} \frac{\delta_k Y_n^*}{d_k} &= \frac{1}{a_1^*}\left[\frac{B_n - B_1 A_n^*}{2i} - \frac{\bar{B}_n - \bar{B}_1 \bar{A}_n^*}{2i}\right]. \end{aligned} \tag{41}$$

En même temps, on a

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k X_n^* = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \delta_k Y_n^* = 0, \tag{41'}$$

donc, d'après (40'),

$$\lim_{k\to\infty} \dot{X}_n^{(k)} = X_n^*, \qquad \lim_{k\to\infty} \dot{Y}_n^{(k)} = Y_n^*. \tag{41''}$$

Les dérivées partielles de la fonction (1') étant continues, on a, d'après (41'') et (6'),

$$\lim_{k\to\infty} [H'_{X_n}(\dot{X}_2^{(k)}, \dot{X}_3^{(k)}, \ldots, \dot{Y}_N^{(k)}) - i H'_{Y_n}(\dot{X}_2, \dot{X}_3, \ldots, \dot{Y}_N)] = H_n^*. \tag{42}$$

En passant à la limite dans l'expression (39), on a, après un calcul facile, en tenant compte de (42) et (41),

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{\delta_k H_{f^*}}{d_k} &= \frac{1}{2a_1^*} \sum_{n=2}^{N} [H_n^*(B_n - B_1 A_n^*) + \bar{H}_n^*(\bar{B}_n - \bar{B}_1 A_n^*)] \\ &= \frac{1}{a_1^*} \Re\left\{\sum_{n=2}^{N} H_n^*(B_n - B_1 A_n^*)\right\}. \end{aligned} \tag{43}$$

Les formules (43) et (36) donnent l'inégalité (33), c. q. f. d.

En se basant sur ce dernier lemme, on aura dans la suite, en appliquant des suites spéciales $f_{jk}^*(z)$ (voir la partie 7 de la démonstration), l'équation (2) pour les fonctions extrémales.

Démontrons le lemme suivant:

Lemme 5. *Etant donnée une fonction extrémale, comme ci-dessus, il existe sur la circonférence* $K^*(0,1)$ *un arc ouvert* D *(correspondant à* $f^*(z)$*) tel qu'aucun point de cet arc ne soit point d'accumulation de l'ensemble* $K(0,1) - G_{f^*}$.

Autrement dit, aucun point de l'arc D n'est la limite d'une suite de points essentiels de l'ensemble complémentaire CG_{f^*} [7]).

Démonstration. Supposons le contraire. Il existe donc, pour chaque point $w_0 \in K^*(0,1)$ une suite de points $\{w_k\}$ de l'ensemble $K(0,1)-G_{f^*}$ qui converge vers w_0. Ecrivons

$$G_{f^*}=G^*, \qquad G_k=G^* \qquad (k=1,2,\ldots)^{8})$$

et formons, pour les suites $\{G_k\}$ et $\{w_k\}$ une suite de fonctions correspondantes

$$\Omega_k(u), \quad \text{où} \quad u \in G_k,$$

analogue à (22), où, pour simplifier les notations, on pose comme avant

$$\Omega_k(u)=\Omega_{G_k w_k}(u)=\Omega_{G^* w_k}.$$

Soit la suite de fonctions

$$f_k^*(z)=\Omega_k[f^*(z)], \qquad \text{où} \quad |z|<1 \qquad (k=1,2,\ldots).$$

On voit facilement que, la fonction $\Omega_k(u)$ étant déterminée et univalente dans l'ensemble G^*, la fonction $f_k^*(z)$ est déterminée et univalente dans le cercle $|z|<1$.

On a encore (voir (18)-(18'))

$$f_k^*(0)=\Omega_k[f^*(0)]=\Omega_k(0)=0,$$

$$f_k^{*\prime}(0)=\Omega_k'(0)f^{*\prime}(0)=\frac{1+|w_k|}{2|\sqrt{w_k}|}\,a_1^*>a_1^*>T,$$

ainsi que

$$f_k^*[K(0,1)]=\Omega_k\{f^*[K(0,1)]\}=\Omega_k(G^*)\subset \bar{K}(0,1),$$

c'est-à-dire

$$|f_k^*(z)|<1 \quad \text{pour} \quad |z|<1.$$

Il en résulte immédiatement que $f_k^*(z)$ appartient à la famille F_T pour $k=1,2,\ldots$

Remarquons enfin qu'en vertu du lemme 3', la limite

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Omega_k(u)-u}{(1-|w_k|)^2}=\frac{1}{8}\,u\,\frac{1+u\bar{w}_0}{1-u\bar{w}_0},$$

[7]) Voir p. 10.

[8]) Les ensemble G_k^* sont donc tous identiques.

où la convergence est presque uniforme dans G^*, existe. Par conséquent, la convergence presque uniforme suivante:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_k^*(z)-f^*(z)}{(1-|w_k|)^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{\Omega_k[f^*(z)]-f^*(z)}{(1-|w_k|)^2}=\frac{1}{8}f^*(z)\frac{1+f^*(z)\overline{w}_0}{1-f^*(z)\overline{w}_0}$$

a lieu dans le cercle $|z|<1$ (voir le lemme 1).

Désignons l'expression du côté droit de la dernière relation par

$$V^*(z)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*z^n.$$

Pour la fonction $f^*(z)$ ainsi que les suites $(1-|w_k|)^2$ et $f_k^*(z)$, on peut appliquer le lemme aux variations duquel résulte [9])

$$\Re\left\{\sum_{n=1}^{N}H_n^*(B_n^*-B_1^*A_n^*\right\}\leqslant 0. \tag{44}$$

Admettons les notations (5'). Entre les coefficients des développements (5) et (5'), il existe évidemment des relations algébriques, et on trouve, en particulier,

$$a_p^{*(p)}=(a_1^*)^p \qquad (p=2,3,\ldots). \tag{45}$$

En appliquant ces notations, on peut exprimer la fonction $V^*(z)$ sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}V^*(z)&=\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*z_n=\frac{1}{8}f^*(z)\frac{1+f^*(z)\overline{w}_0}{1-f^*(z)\overline{w}_0}\\&=\frac{1}{8}\left(f^*(z)+2\sum_{p=2}^{\infty}[f^*(z)]^p\overline{w}_0^{p-1}\right)\\&=\frac{1}{8}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^*z^n\right)+2\sum_{p=2}^{\infty}\left(\sum_{n=p}^{\infty}a_n^{*(p)}z^n\right)\overline{w}_0^{p-1}\right]\\&=\frac{1}{8}\left[a_1^*z+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n^*+2a_n^{*(2)}\overline{w}_0+2a_n^{*(3)}\overline{w}_0^2+2a_n^{*(4)}\overline{w}_0^3+\ldots+2a_n^{*(n)}\overline{w}_0^{n-1})z^n\right].\end{aligned}$$

De là, on trouve immédiatement

$$B_1^*=\frac{1}{8}a_1^*,$$

$$B_n=\frac{1}{8}(a_n^*+2a_n^{*(2)}\overline{w}_0+\ldots+2a_n^{*(n)}\overline{w}_0^{n-1}) \qquad (n=2,3,\ldots)$$

[9]) en posant $(1-|w_k|)^2=d_k$, $f_k^*(z)=f_k(z)$, $B_n=B_n^*$.

et, par conséquent,

$$B_n^* - B_1^* A_n^* = B_n^* - B_1^* \frac{a_n^*}{a_1^*}$$

$$(46) \qquad = \frac{1}{8}(a_n^* + 2a_n^{*(2)}\overline{w}_0 + \ldots + 2a_n^{*(n)}\overline{w}_0^{n-1}) - \frac{1}{8}a_n^*$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{p=2}^{n} a_n^{*(p)}\overline{w}_0^{p-1} \qquad (n=2,3,\ldots).$$

Par la substitution des expressions (46) à la formule (44) et le groupement des termes suivant les puisasnces de $\overline{w}_0$, on a

$$\Re\left\{\frac{1}{4}\sum_{p=2}^{N}\left(\overline{w}_0^{p-1}\sum_{n=p}^{N} a_n^{*(p)}H_n^*\right)\right\} \leqslant 0.$$

Le point w_0 étant un point arbitraire de la circonférence, on déduit encore

$$\sum_{n=p}^{N} a_n^{*(p)}H_n^* = 0 \qquad (p=2,3,\ldots,N);$$

ainsi, en écrivant ces équations les unes après les autres (à partir de la N-ième), on aura

$$(47) \qquad \begin{aligned} &a_N^{*(N)}H_N^* = 0,\\ &a_{N-1}^{*(N-1)}H_{N-1}^* + a_N^{(N-1)}H_N^* = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_2^{*(2)}H_2^* + a_3^{*(2)}H_3^* + \ldots + a_N^{*(2)}H_N^* = 0. \end{aligned}$$

Vu que $a_p^{*(p)} = (a_1^*)^p \neq 0$ pour $p=2,3,\ldots$, on trouve de la première équation $H_N^* = 0$, de la seconde $H_{N-1}^* = 0$, etc. En général

$$(48) \qquad H_n^* = 0 \qquad (n=2,\ldots,N).$$

Les égalités (48) sont en désaccord avec la condition que dans aucun point du domaine les dérivées partielles de la fonction (1′) ne sont pas toutes égales à zéro. Le lemme se trouve ainsi démontré.

Il en résulte, en particulier, que

$$a_1^* = T.$$

En effet, supposons le contraire, c'est-à-dire que $a_1^* > T$. Prenons dans ce cas un $0 < d < 1$ de manière que $da_1^* > T$ et formons une nouvelle fonction $f^{**}(z) = df^*(z)$; il est évident que $f^{**}(z) \in F_T$ et $|f^{**}(z)| < d$ pour $|z| < 1$. D'autre part, en posant $f^{**}(z) = a_1^{**} z + a_2^{**} z^2 + \ldots$, on a $a_n^{**} = da_n^*$ et, par conséquent,

$$\frac{a_n^{**}}{a_1^{**}} = \frac{a_n^*}{a_1^*}.$$

De là, on a

$$H_{f^{**}} = H_{f^*},$$

c'est-à-dire que la fonction $f^{**}(z)$ est aussi une fonction extrémale. Mais c'est impossible, car, d'après l'inégalité $|f^{**}(z)| < d$, il n'existe aucun arc D correspondant à $f^{**}(z)$, qui satisfasse aux conditions du lemme.

Du lemme 5 résultent d'autres propriétés de la fonction $f^*(z)$, que voici:

Il existe sur la circonférence $|z| = 1$ un arc C qui est transformé par la fonction $f^*(z)$ d'une manière continue et biunivoque en l'arc D.

En effet, l'arc D se compose de points accessibles; par conséquent, en vertu d'un théorème connu[10]), il existe sur la circonférence $|z| = 1$ un arc C qui satisfait aux conditions exigées, c. q. f. d.

D'après la remarque précédente, la fonction $f^*(z)$ peut être étendue, en vertu du principe de symétrie de Schwarz, à l'ensemble des points z situés en dehors de la circonférence $|z| = 1$ pour lesquels on définira les valeurs de la fonction $f^*(z)$ par la formule connue

$$f^*(z) = \frac{1}{f^*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \quad \text{pour} \quad |z| > 1. \tag{49}$$

De cette manière, la fonction $f^*(z)$ sera définie et holomorphe en chaque point z qui vérifie l'une des conditions suivantes:

$$|z| < 1, \qquad z \in C, \qquad |z| > 1. \tag{50}$$

L'ensemble de tous les points définies par (50) sera désigné par P.

La fonction $f^*(z)$ est univalente dans l'ensemble P.

[10]) C. Carathéodory, Math. Ann. 73, p. 323-370.

En effet, il suffit de remarquer que

(a) dans le cercle $|z|<1$ la fonction $f^*(z)$ est univalente *ex definitione*;

(b) sur l'arc C la fonction $f^*(z)$ est univalente d'après la remarque plus haut;

(c) dans l'ensemble $|z|>1$ la fonction est univalente en vertu de (49).

De plus, on a

$$\begin{aligned} &|f^*(z)|<1 \quad \text{pour} \quad |z|<1, \\ &|f^*(z)|=1 \quad \text{pour} \quad z\in C, \\ &|f^*(z)|>1 \quad \text{pour} \quad |z|>1. \end{aligned} \tag{51}$$

Si l'on avait $f^*(z_1)=f^*(z_2)$ pour $z_1\in P$, $z_2\in P$, où $z_1\neq z_2$, l'une des conditions suivantes devrait être satisfaite:

(a') $|f^*(z_1)|=|f^*(z_2)|<1$, donc, d'après (51), $|z_1|<1$, $|z_2|<1$, ce qui, vu (a), est impossible;

(b') $|f^*(z_1)|=|f^*(z_2)|=1$, donc, d'après (51), $z_1\in C$, $z_2\in C$, ce qui, vu (b), est impossible;

(c') $|f^*(z_1)|=|f^*(z_2)|>1$, donc, d'après (51), $|z_1|>1$, $|z_2|>1$, ce qui, vu (c), est impossible.

On a donc $f^*(z_1)\neq f^*(z_2)$ pour tous les points $z_1\neq z_2$, c. q. f. d.

Déduisons encore une formule qui exprime la valeur absolute de la dérivée de la fonction $f^*(z)$ sur l'arc C. Soit

$$z=e^{i\vartheta} \qquad (\vartheta_1<\vartheta<\vartheta_2),$$

une représentation paramétrique de l'arc C. On a donc

$$|f^*(e^{i\vartheta})|=1, \qquad \overline{f^*(e^{i\vartheta})}=\frac{1}{f^*(e^{i\vartheta})} \qquad (\vartheta_1<\vartheta<\vartheta_2). \tag{52}$$

En dérivant la fonction $\overline{f^*(e^{i\vartheta})}$ par rapport à ϑ, on a

$$\frac{d}{d\vartheta}\left[\overline{f^*(e^{i\vartheta})}\right]=\left[\overline{\frac{d}{d\vartheta}f^*(e^{i\vartheta})}\right]=-\overline{f^{*\prime}(e^{i\vartheta})}\,e^{-i\vartheta}i. \tag{53}$$

D'autre part, en vertu de (52),

$$\frac{d}{d\vartheta}\left[\overline{f^*(e^{i\vartheta})}\right]=\frac{d}{d\vartheta}\left[\frac{1}{f^*(e^{i\vartheta})}\right]=-\frac{f^{*\prime}(e^{i\vartheta})e^{i\vartheta}i}{[f^*(e^{i\vartheta})]^2}. \tag{54}$$

Les formules (53) et (54) donnent

$$\overline{f^{*\prime}(e^{i\vartheta})}e^{-i\vartheta} = \frac{f^{*\prime}(e^{i\vartheta})e^{i\vartheta}}{[f^{*}(e^{i\vartheta})]^2}. \tag{55}$$

En multipliant les deux côtés de cette équation par $f^{*\prime}(e^{i\vartheta})e^{i\vartheta}$ et en remplaçant $e^{i\vartheta}$ par z, on aura la formule annoncée

$$|f^{*\prime}(z)|^2 = \frac{[f^{*\prime}(z)]^2}{[f^{*}(z)]^2}z^2 \quad \text{pour} \quad z \in C. \tag{56}$$

Nous allons nous en servir dans la suite.

Remarquons encore que, d'après un théorème connu, on a de plus

$$|f^{*\prime}(z)| > 1 \quad \text{pour} \quad z \in C \text{ [11])}. \tag{56'}$$

6. Détermination des suites variationnelles $f^{*}_{jk}(z)$.

Soit comme avant, une fonction extrémale $f^{*}(z)$. Désignons par D, C et P les arcs correspondants et le domaine, décrits dans la partie 5. Admettons dans tous ce qui suit que la fonction $f^{*}(z)$ est étendue sur tout l'ensemble P. Soient encore

(57) ξ_0 — un point quelconque sur l'arc C,

(57′) $R_0 > 0$ — un rayon tel que $\overline{K(\xi_0, R_0)} \subset P$,

$$M_0 = \max_{z \in \overline{K(\xi_0,R_0)}} [|f^{*}(z)|], \tag{57''}$$

$$\eta_0 = f^{*}(\xi_0), \qquad Q_0 = |f^{*\prime}(\xi_0)| > 1 \text{ [12])}. \tag{57'''}$$

Soient enfin

(58) $\varepsilon > 0$ — un nombre quelconque tel que $Q_0^2(1-\varepsilon)^2 - 1 - \varepsilon > 0$,

(58′) ν — un point quelconque sur la circonférence $K^{*}(0,1)$,

(58″) $\tau > 0$ — un paramètre variable [13]).

Remarquons, qu'en vertu du lemme 2, il existe un nombre $\tau_0 = r_0(\varepsilon, M_0, Q_0, R_0)$ [14]) tel que pour chaque cercle de centre ξ_0

$$K(\xi_0, \tau) \subset K(\xi_0, R_0), \quad \text{où} \quad 0 < \tau < \tau_0, \tag{58'''}$$

[11]) L. Bieberbach, *Funktionentheorie II*, p. 124-125.

[12]) Comp. la formule (56′).

[13]) Remarquons que, dans la suite des déductions (jusqu'à un certain moment), on considère la fonction $f^{*}(z)$, les arcs D, C, l'ensemble P et les nombres $\xi_0, R_0, M_0, \eta_0, Q_0, \varepsilon, \nu$, comme fixes. Seul le paramètre τ est variable.

[14]) où r_0 est la fonction déterminée dans le lemme 2.

on ait les relations

$$f^*[\overline{K(\xi_0,\tau}]\supset \overline{K[\eta_0,Q_0(1-\varepsilon)\tau]}, \tag{59}$$

$$f^*[K(\xi_0,\tau)]\subset K[\eta_0,Q_0(1+\varepsilon)\tau]. \tag{59'}$$

Posons

$$\tau_0'=\min\left[\tau_0,\frac{1}{Q_0(1+\varepsilon)},1\right] \tag{59''}$$

et

$$\varphi_{1\tau}(z)=\chi_1(z,\tau,\xi_0)\ ^{15}) \quad \text{pour} \quad |z|<1 \quad (0<\tau<\tau_0'), \tag{60}$$

$$\psi_{1\tau}(u)=\chi_1^{-1}(u,h_1,\eta_0) \quad \text{pour} \quad u\,\epsilon\, G^{(1)}_{h_1,\eta_0} \quad (0<\tau<\tau_0'), \tag{60'}$$

où, pour abréger, on a posé

$$h_1=h_1(\tau)=Q_0(1-\varepsilon)\tau\ ^{16}). \tag{60''}$$

Puisque, pour tout τ de l'intervalle $(0,\tau_0')$, d'après (59''), ont lieu les inégalités

$$\tau<1, \qquad h_1(\tau)<1,$$

et, comme on a

$$|\xi_0|=1, \qquad |\eta_0|=1\ ^{17}),$$

donc, en vertu des lemmes 4 et 4', on déduit que

(61) *la fonction* $\varphi_{1\tau}(z)$ *est, pour* τ *quelconque, déterminée dans le cercle* $|z|<1$, *et transforme* $K(0,1)$ *en le domaine*

$$\varphi_{1\tau}[K(0,1)]=G^{(1)}_{\tau\xi_0}=K(0,1)-\overline{K(\xi_0,\tau)}; \tag{61'}$$

on a de plus

---

[15]) Dans les expressions $\varphi_{1\tau}(z)$, $\psi_{1\tau}(u)$, on pose le signe τ avant la parenthèse (au lieu d'écrire simplement $\varphi_1(z,\tau)$, $\psi_1(z,\tau)$) pour indiquer d'une façon plus distincte la dépendance de ces fonctions des variables z ou u, ce qui sera utile dans la suite.

[16]) Les expressions (60) et (60') sont un cas particulier des fonctions déterminées dans les lemmes 4 et 4'. Dans l'expression (60) le rôle de ξ est joué par ξ_0 et celui de δ par le paramètre τ. Dans l'expression (60') le rôle de ξ est joué par le nombre η_0, et celui de δ par le nombre h_1. La même chose a lieu pour les domaines correspondants déterminés par (25) et (25').

[17]) Puisque $\xi_0\,\epsilon\, C$ et, de même, $\eta_0=f^*(\xi_0)\,\epsilon\, D$ (comparer la partie 5), on doit avoir évidemment $|\xi_0|=1$ et $|\eta_0|=1$.

$$(61'') \qquad \varphi_{1\tau}(0)=0, \qquad \varphi'_{1\tau}(0)>0, \qquad \lim_{\tau\to 0}\varphi_{1\tau}(z)=z,$$

$$(61''') \qquad \lim_{\tau\to 0}\frac{\varphi_{1\tau}(z)-z}{\tau^2}=-c_1 z\frac{1+z\bar{\xi}_0}{1-z_0\bar{\xi}},$$

où la convergence est presque uniforme dans le cercle $|z|<1$;

(62) *la fonction* $\psi_{1\tau}(u)$ *est, pour* τ *quelconque, déterminée pour*

$$u\in G^{(1)}_{h_1\eta_0}=K(0,1)-\overline{K[\eta_0,h_1]},$$

et transforme le domaine $G^{(1)}_{h_1\eta_0}$ *en* $K(0,1)$, *c'est-à-dire*

$$(62') \qquad \psi_{1\tau}[G^{(1)}_{h_1\eta_0}]=K(0,1);$$

on a en outre

$$(62'') \qquad \psi_{1\tau}(0)=0, \qquad \psi'_{1\tau}(0)>0, \qquad \lim_{\tau\to 0}\psi_{1\tau}(u)=u,$$

$$(62''') \qquad \lim_{\tau\to 0}\frac{\psi_{1\tau}(u)-u}{\tau^2}=\lim_{\tau\to 0}\frac{\chi_1^{-1}(u,h_1,\eta_0)-u}{h_1^2}\cdot\frac{h_1^2}{\tau^2}$$

$$=c_1Q_0^2(1-\varepsilon)^2u\frac{1+u\eta_0}{1-u\eta_0}\ [18]),$$

où la convergence est presque uniforme dans le cercle $|u|<1$.

Formons maintenant une fonction composée

$$(63) \qquad f^*[\varphi_{1\tau}(z)], \qquad \text{où} \quad |z|<1, \quad 0<\tau<\tau'_0.$$

Puisque, d'après (61'), on a

$$(63') \qquad \varphi_{1\tau}[K(0,1)]\subset K(0,1)\subset P,$$

donc la fonction (63) est déterminée dans le cercle $|z|<1$. Elle transforme $K(0,1)$ en un domaine que nous désignerons par

$$(63'') \qquad B_{1\tau}=f^*\{\varphi_{1\tau}[K(0,1)]\}=f^*(G^{(1)}_{\tau\xi_0}).$$

De plus, puisque la fonction $f^*(z)$ est univalente dans l'ensemble P [19]), on déduit de (61') que

$$f^*[G^{(1)}_{\tau\xi_0}]=f^*[K(0,1)-\overline{K(\xi_0,\tau)}]=f^*[K(0,1)]-f^*[\overline{K(\xi_0,\tau)}],$$

et, en tenant compte de (59),

[18]) car on a, d'après (60''), $h_1/\tau=Q_0(1-\varepsilon)$.

[19]) Comp. la partie 5.

$$f^*[G^{(1)}_{\tau\xi_0}] \subset K(0,1) - \overline{K[\eta_0, h_1]}\ ^{20}),$$

c'est-à-dire

$$B_{1\tau} \subset G^{(1)}_{h_1\eta_0}. \tag{63'''}$$

Posons maintenant

$$f_{1\tau}(z) = \psi_{1\tau}\{f^*[\varphi_{1\tau}(z)]\}, \quad \text{où} \quad |z|<1,\ 0<\tau<\tau_0'. \tag{64}$$

C'est évidemment une fonction composée des fonctions (60') et (63). Il en résulte, d'après (63''') et (62) que

(64') *la fonction* $f_{1\tau}(z)$ *est déterminée dans le cercle* $|z|<1$.

Désignons le domaine, dans lequel la fonction (64) transforme $K(0,1)$, par

$$B'_{1\tau} = f_{1\tau}[K(0,1)] = \psi_{1\tau}(B_{1\tau}).$$

En raison de (63''') et (62'), on a

$$\psi_{1\tau}(B_{1\tau}) \subset \psi_{1\tau}(G^{(1)}_{h_1\eta_0}) = K(0,1),$$

c'est-à-dire $B'_{1\tau} \subset K(0,1)$, donc

$$|f_{1\tau}(z)|<1. \tag{64''}$$

De plus, on a, suivant (61'') et (62''),

$$f_{1\tau}(0)=0, \qquad f'_{1\tau}(0) = \psi'_{1\tau}(0)\cdot f^{*\prime}(0)\varphi'_{1\tau}(0) > 0. \tag{64'''}$$

Enfin, puisque d'après (64) la fonction $f_{1\tau}(z)$ est une superposition de trois fonctions univalentes, on a immédiatement

(64'''') *la fonction* $f_{1\tau}(z)$ *est univalente dans le cercle* $|z|<1$.

Déterminons la fonction $f_{2\tau}(z)$ de la même façon. Posons

$$\varphi_{2\tau}(z) = \chi_2(z,\tau,\xi_0), \quad \text{où} \quad |z|<1 \qquad (0<\tau<\tau_0'), \tag{65}$$

$$\psi_{2\tau}(u) = \chi_2^{-1}(u,h_2,\eta_0), \quad \text{où} \quad u \in G^{(2)}_{h_2\eta_0} \qquad (0<\tau<\tau_0'), \tag{65'}$$

$$h_2 = h_2(\tau) = Q_0(1+\varepsilon)\tau. \tag{65''}$$

On constate, comme tout-à-l'heure, que, d'après (59''),

$$\tau<1, \qquad h_2(\tau)<1.$$

On en déduit que

(66) *la fonction* $\varphi_{2\tau}(z)$ *est déterminée dans le cercle* $|z|<1$, *et transforme* $K(0,1)$ *en le domaine*

[20]) On profite ici de la relation évidente $f^*[K(0,1)] \subset K(0,1)$.

$$(66') \qquad \varphi_{2\tau}[K(0,1)] = G^{(2)}_{\tau\xi_0} = K(0,1) + K(\xi_0,\tau);$$

on a en outre

$$(66'') \qquad \varphi_{2\tau}(0) = 0, \qquad \varphi'_{2\tau}(0) > 0, \qquad \lim_{\tau\to 0} \varphi_{2\tau}(z) = z,$$

$$(66''') \qquad \lim_{\tau\to 0} \frac{\varphi_{2\tau}(z) - z}{\tau^2} = c_2 z \frac{1 + z\bar{\xi}_0}{1 - z\bar{\xi}_0},$$

où la convergence est presque uniforme dans le cercle $|z|<1$;

(67) *la fonction* $\psi_{2\tau}(u)$ *est déterminée pour*

$$u \in G^{(2)}_{h_2\eta_0} = K(0,1) + K(\eta_0,h_2)$$

et transforme le domaine $G^{(2)}_{h_2,\eta_0}$ *en* $K(0,1)$, *c'est-à-dire*

$$(67') \qquad \psi_{2\tau}(G^{(2)}_{h_2\eta_0}) = K(0,1).$$

De plus

$$(67'') \qquad \psi_{2\tau}(0) = 0, \qquad \psi'_{2\tau}(0) > 0, \qquad \lim_{\tau\to 0} \psi_{2\tau}(u) = u,$$

$$(67''') \qquad \lim_{\tau\to 0} \frac{\psi_{2\tau}(u) - u}{\tau^2} = \lim_{\tau\to 0} \frac{\chi_2^{-1}(u,h_2,\eta_0) - u}{h_2^2} \frac{h_2^2}{\tau^2}$$

$$= -c_2 Q_0^2 (1+\varepsilon)^2 u \frac{1 + u\bar{\eta}_0}{1 - u\bar{\eta}_0},$$

où la convergence est presque uniforme dans le cercle $|u|<1$.

Formons la fonction composée

$$(68) \qquad f^*[\varphi_{2\tau}(z)], \quad \text{où} \quad |z|<1, \ 0<\tau<\tau'_0;$$

comme on a

$$(68') \qquad \varphi_{2\tau}[K(0,1)] = K(0,1) + K(\xi_0,\tau) \subset P \text{ [21]},$$

donc la fonction (68) est déterminée dans le cercle $|z|<1$. Elle transforme $K(0,1)$ en un domaine que nous désignerons par

$$(68'') \qquad B_{2\tau} = f^*\{\varphi_{2\tau}[K(0,1)]\} = f^*(G^{(2)}_{\tau\xi_0}).$$

Comme tout-à-l'heure, la fonction $f^*(z)$ étant univalente dans P, on déduit de (66')

$$f^*[G^{(2)}_{\tau,\xi_0}] = f^*[K(0,1) + K(\xi_0,\tau)] = f^*[K(0,1)] + f^*[K(\xi_0,\tau)]$$

[21]) car $K(\xi_0,\tau) \subset K(\xi_0,R_0) \subset P$ (comp. (58''')).

et, d'après (59′)

$$f^*[G^{(2)}_{\tau\xi_0}] \subset K(0,1) + K(\eta_0, h_2),$$

c'est-à-dire

$$B_{2\tau} \subset G^{(2)}_{h_2\eta_0}. \tag{68'''}$$

Posons enfin

$$f_{2\tau}(z) = \psi_{2\tau}\{f^*[\varphi_{2\tau}(z)]\}, \quad \text{où} \quad |z|<1,\ 0<\tau<\tau_0'. \tag{69}$$

De (67) et (68‴) il résulte alors que

(69′) *$f_{2\tau}(z)$ est déterminée dans le cercle $|z|<1$ et transforme $K(0,1)$ en un domaine*

$$B'_{2\tau} = f_{2\tau}[K(0,1)] = \psi_{2\tau}(B_{2\tau}).$$

De plus, en raison de (68‴) et (67′), on a

$$\psi_{2\tau}(B_{2\tau}) \subset \psi_\tau(G^{(2)}_{h_2\eta_0}) = K(0,1),$$

c'est-à-dire

$$B'_{2\tau} \subset K(0,1),$$

donc

$$|f_{2\tau}(z)|<1 \quad \text{pour} \quad |z|<1. \tag{69''}$$

En outre, d'après (66″) et (67″),

$$f_{2\tau}(0)=0, \qquad f'_{2\tau}(0)>0, \tag{69'''}$$

et, comme dans le cas précédent, on constate que

(69⁗) *$f_{2\tau}(z)$ est univalente dans le cercle $|z|<1$.*

En résumé, deux familles de fonctions $f_{j\tau}(z)$ $(j=1,2)$ ont été déterminées par les formules (64) et (69); elles dépendent d'un paramètre $0<\tau<\tau_0'$ de manière que, pour τ quelconque, la fonction $f_{j\tau}(z)$ satisfaisse aux conditions (64′)-(64⁗) ou (69′)-(69⁗).

En nous servant des familles $f_{j\tau}(z)$, nous définirons les suites citées au début $f^*_{jk}(z)$. Nous démontrerons aussi que les limites suivantes ont lieu :

$$\lim_{\tau\to 0} f_{j\tau}(z) = f^*(z), \tag{70}$$

$$(70') \qquad \lim_{\tau\to 0}\frac{f_{j\tau}(z)-f^*(z)}{\tau^2} = (-1)^j c_j\left[z\frac{1+z\bar{\xi}_0}{1-z\bar{\xi}_0}f^{*\prime}(z)-Q_0^2(1\pm\varepsilon)^2 f^*(z)\frac{1+f^*(z)\bar{\eta}_0}{1-f^*(z)\bar{\eta}_0}\right]^{22}),$$

où la convergence est presque uniforme dans le cercle $|z|<1$.

En effet, d'après le lemme 1 la formule (70) est une conséquence immédiate des côtés droits des formules (61″) et (62″) ou (66″) et (67″). Pour démontrer la convergence (70′) remarquons que

$$(71) \qquad \frac{f_{j\tau}(z)-f^*(z)}{\tau^2} = \frac{\psi_{j\tau}\{f^*[\varphi_{j\tau}(z)]\}-f^*(z)}{\tau^2}$$
$$= \frac{\psi_{j\tau}\{f^*[\varphi_{j\tau}(z)]\}-f^*[\varphi_{j\tau}(z)]}{\tau^2} + \frac{f^*[\varphi_{j\tau}(z)]-f^*(z)}{\varphi_{j\tau}(z)-z}\cdot\frac{\varphi_{j\tau}(z)-z}{\tau^2}.$$

Ensuite, on a de (61″) ou (66″) et de (62‴) ou (67‴), en appliquant le lemme cité,

$$(72) \qquad \lim_{\tau\to 0}\frac{\psi_{j\tau}\{f^*[\varphi_{j\tau}(z)]\}-f^*[\varphi_{j\tau}(z)]}{\tau^2}$$
$$= -(-1)^j c_j Q_0^2(1\pm\varepsilon)^2 f^*(z)\frac{1+f^*(z)\bar{\eta}_0}{1-f^*(z)\bar{\eta}_0}\ ^{23}).$$

De la même façon, on a de (61″) ou (66″)

$$(72') \qquad \lim_{\tau\to 0}\frac{f^*[\varphi_{j\tau}(z)]-f^*(z)}{\varphi_{j\tau}(z)-z} = f^{*\prime}(z)\ ^{24})$$

et enfin, de (61‴) ou (66‴),

$$(72'') \qquad \lim_{\tau\to 0}\frac{\varphi_{j\tau}(z)-z}{\tau^2} = (-1)^j c_j z\frac{1+z\bar{\xi}_0}{1-z\bar{\xi}_0},$$

où toutes les convergence sont presque uniformes dans le cercle $|z|<1$. Les formules (72)-(72″) en comparaison avec (71), donnent tout de suite (70′).

---

22) On prend le signe $-$ pour $j=1$, et le signe $+$ pour $j=2$.

23) Dans ce cas, le rôle des fonctions $g_\tau(z)$ est joué par les fonctions $f^*[\varphi_{j\tau}(z)]$, celui des fonctions $h_\tau(w)$ — par les quotiens $(\psi_{j\tau}(w)-w)/\tau^2$, et celui de $h(w)$ ou $g(z)$ par $(-1)^j c_j Q_0^2(1\pm\varepsilon)^2 w\dfrac{1+w\bar{\eta}_0}{1-w\bar{\eta}_0}$ ou $f^*(z)$.

24) On a évidemment $\varphi_{j\tau}(z)\neq z$ d'après le lemme de Schwarz.

Définissons à présent les suites $f^*_{jk}(z)$. Considérons pour ce but la fonction $f_{2\tau}(z)$ et le domaine correspondant

$$B'_{2\tau}=f_{2\tau}[K(0,1)]$$

pour $0<\tau<\tau'_0$. Soit la convergence (70); on en déduit

$$\lim_{\tau\to 0} a_{1f_{2\tau}}=a_{1f^*}<1.$$

Il existe donc un nombre $\overset{*}{\tau}_0<\tau'_0$ tel que

$$a_{1f_{2\tau}}<q<1 \quad \text{pour} \quad 0<\tau<\overset{*}{\tau}_0 \text{ [25]}. \tag{73}$$

On a (comp. la partie 2)

$$f^*_{2\tau}(z)\in F^q \quad \text{pour} \quad 0<\tau<\overset{*}{\tau}_0. \tag{74}$$

De là, en vértu des remarques de la partie 2, il suit, que, pour τ suffisamment petits

$$0<\tau<\overset{**}{\tau}_0 \qquad (\overset{**}{\tau}_0<\overset{*}{\tau}_0<\tau'_0), \tag{75}$$

il existe au moins un point essentiel de l'ensemble complémentaire (correspondant au nombre τ)

$$\mu(\tau)\in K(0,1)-B'_{2\tau}$$

tel que

$$|\mu(\tau)|=1-\tau\left|\sqrt{8c_2[Q_0^2(1+\varepsilon)^2-1+\varepsilon]}\right| \text{ [26]}. \tag{76}$$

Si on fait correspondre à chaque τ de l'intervalle (75) un point quelconque $\mu(\tau)$ satisfaisant à la condition (76), on aura une fonction déterminée dans $(0,\overset{**}{\tau}_0)$ qui, en général, peut être irrégulière. Mais, comme la fonction $\mu(\tau)$ est bornée, il existe évidemment dans (75) une suite de nombres $\{\tau_k\}$ convergente vers zéro, telle que la suite

[25]) où q est un nombre arbitraire de l'intervalle $(a_{1f^*}, 1)$.

[26]) En effet, il suffit de prendre le nombre $\overset{**}{\tau}_0$ de manière que

$$1-\tau\left|\sqrt{8c_2[Q^2(1+\varepsilon)^2-1+\varepsilon]}\right|>e(q) \quad \text{(comp. la partie 2)}$$

pour $\tau<\overset{**}{\tau}_0$, c'est-à-dire qu'il suffit de prendre

$$\overset{**}{\tau}_0=\frac{1-e(q)}{\left|\sqrt{8c_2[Q_0^2(1+\varepsilon)^2-1+\varepsilon]}\right|}.$$

de points correspondants $\{\mu(\tau_k)\}$ tend vers un point μ_0 sur la circonférence, c'est-à-dire

$$\lim_{k\to\infty}\mu(\tau_k)=\mu_0\in K^*(0,1). \tag{76'}$$

Posons maintenant pour simplifier ($k=1,2,\ldots$)

$$f_{2\tau_k}(z)=f_{2k}(z), \tag{77}$$

$$B'_{2\tau_k}=B'_{2k}, \tag{78}$$

$$\mu(\tau_k)=\mu_k. \tag{79}$$

D'après (69')-(69''') et (70), (70') on a évidemment les relations

$$f_{2k}[K(0,1)]=B'_{2k}\subset K(0,1), \qquad f_{2k}(0)=0, \qquad f'_{2k}(0)>0, \tag{80}$$

$$\lim_{k\to\infty}f_{2k}(z)=f^*(z), \tag{80'}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_{2k}(z)-f^*(z)}{\tau_k^2} \tag{80''}$$

$$=c_2\left[z\frac{1+z\bar{\xi}_0}{1-z\bar{\xi}_0}f^{*\prime}(z)-Q_0^2(1+\varepsilon)^2f^*(z)\frac{1+f^*(z)\bar{\eta}_0}{1-f^*(z)\bar{\eta}_0}\right],$$

où la convergence est presque uniforme dans le cercle $|z|<1$. De plus, d'après (76') et (76), les limites

$$\lim_{k\to\infty}\mu_k=\mu_0, \tag{81}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(1-|\mu_k|)^2}{\tau_k^2}=8c_2[Q_0^2(1+\varepsilon)^2-1+\varepsilon] \tag{81'}$$

existent.

Considérons maintenant des suites de fonctions déterminées comme ci-dessous:

$$\Phi_{2k}(w)=\Omega_{B'_{2k}\mu_k}(w) \quad \text{pour} \quad w\in B'_{2k}, \tag{82}$$

$$f^*_{2k}(z)=\Phi_{2k}[f_{2k}(z)] \quad \text{pour} \quad |z|<1. \tag{83}$$

En vertu de (79) et de l'étude de la fonction Ω [27]), on déduit que, pour tout nombre naturel k,

(84) *la fonction $\Phi_{2k}(w)$ est déterminée et univalente dans le domaine B'_{2k},*

[27]) voir la partie 3.

ainsi que

$$\Phi_{2k}(0)=0, \qquad \Phi'_{2k}(0)>0, \qquad |\Phi_{2k}(w)|<1. \tag{84'}$$

Il en résulte, d'après (78) et (80) que

(85) *la fonction* $f^*_{2k}(z)$ *est déterminée dans le cercle* $|z|<1$; *de plus, on a, d'après* (84') *et* (80)

$$|f^*_{2k}(z)|<1 \quad \textit{pour} \quad |z|<1. \tag{85'}$$

En outre, de (84') et de (80), il résulte

$$f^*_{2k}(0)=0, \qquad f^{*\prime}_{2k}(0)>0 \tag{85''}$$

et, puisque les fonctions $f_{2k}(z)$ et $\Phi_{2k}(w)$ sont univalentes, donc de même

(85''') *la fonction* $f^*_{2k}(z)$ *est univalente dans le cercle* $|z|<1$.

Je dis qu'il existe une limite

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{f^*_{2k}(z)-f^*(z)}{\tau_k^2} &= c_2\Big\{z\frac{1+z\bar{\xi}_0}{1-z\bar{\xi}_0}f^{*\prime}(z)-Q_0^2(1+\varepsilon)^2 f^*(z)\frac{1+f^*(z)\bar{\eta}_0}{1-f^*(z)\bar{\eta}_0}\\ &\quad +[Q_0^2(1+\varepsilon)^2-1+\varepsilon]f^*(z)\frac{1+f^*(z)\bar{\mu}_0}{1-f^*(z)\bar{\mu}_0}\Big\},\end{aligned} \tag{85''''}$$

où la convergence est presque uniforme dans le cercle $|z|<1$.

En effet, on a

$$\begin{aligned}&\frac{f^*_{2k}(z)-f^*(z)}{\tau_k^2}\\ &=\frac{\Phi_{2k}[f_{2k}(z)]-f_{2k}(z)}{(1-|\mu_k|)^2}\cdot\frac{(1-|\mu_k|)^2}{\tau_k^2}+\frac{f_{2k}(z)-f^*(z)}{\tau_k^2}.\end{aligned} \tag{86}$$

Prenons un ensemble quelconque fermé $H\subset G_{f^*}$[28]. D'après (80'), on déduit[29] que pour les indices k suffisamment grands, on a

$$H\subset B'_{2k}.$$

Par conséquent, en vertu du lemme 3' la convergence presque uniforme

[28]) où $G_{f^*}=f^*[K(0,1)]$ (voir la partie 2).

[29]) C. Carathéodory, Math. Ann. 72, p. 107-139.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Phi_{2k}(w)-w}{(1-|\mu_k|)^2}=\frac{w}{8}\cdot\frac{1+w\bar{\mu}_0}{1-w\bar{\mu}_0} \tag{87}$$

a lieu pour w parcourant l'ensemble G_{f^*}. En s'appuyant sur (80′) et (87), on a facilement, en vertu du lemme 1,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Phi_{2k}[f_{2k}(z)]-f_{2k}(z)}{(1-|\mu_k|)^2}=\frac{1}{8}f^*(z)\frac{1+f^*(z)\bar{\mu}_0}{1-f^*(z)\bar{\mu}_0}, \tag{88}$$

où la convergence est presque uniforme dans le cercle $|z|<1$.

En tenant compte de (88), (80″) et de (81′), on a, en vertu de (86) la formule cherchée (85″″), c. q. f. d.

Ainsi, par la formule (83), l'une des suites annoncées a été déterminée. Posons maintenant pour $k=1,2,\ldots$

$$f_{1\tau_k}(z)=f_{1k}(z)\ ^{30}), \tag{89}$$

$$B'_{1\tau_k}=B_{1k}, \tag{89'}$$

$$s_k=\left|\sqrt{Q_0^2(1-\varepsilon)^2-1-\varepsilon}\right|\tau_k\ ^{31}). \tag{90}$$

On a donc, d'après (64′)-(64‴) et (70), (70′),

$$f_{1k}[K(0,1)]=B'_{1k}\subset K(0,1),\qquad f_{1k}(0)=0,\qquad f'_{1k}(0)>0, \tag{91}$$

$$\lim_{k\to\infty}f_{1k}(z)=f^*(z), \tag{91'}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_{1k}(z)-f^*(z)}{\tau_k^2} \tag{91″}$$

$$=-c_1\left[z\frac{1+z\bar{\xi}_0}{1-z\bar{\xi}_0}f^{*\prime}(z)-Q_0^2(1-\varepsilon)^2f^*(z)\frac{1+f^*(z)\bar{\eta}_0}{1-f^*(z)\bar{\eta}_0}\right],$$

et, d'après (90)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{s_k^2}{\tau_k^2}=[Q_0^2(1-\varepsilon)^2-1-\varepsilon]. \tag{92}$$

Considérons les suites de fonctions, analogues aux précédentes,

$$\Phi_{1k}(w)=\chi_1(w,s_k,\nu)\quad\text{pour}\quad|w|<1, \tag{93}$$

$$f^*_{1k}(z)=\Phi_{1k}[f_{1k}(z)]\quad\text{pour}\quad|z|<1\ ^{32}). \tag{94}$$

30) où $\{\tau_k\}$ est la même suite qu'avant.

31) Comp. (58).

32) Comp. la partie 4 et (58′).

Puisque $\tau_k < \tau_0'$, on voit que $0 < s_k < 1$ [33]), d'où il résulte, vu (58'), que

(95) *la fonction* $\Phi_{1k}(w)$ *est déterminée et univalente dans le cercle* $|w|<1$.

En outre, on a, en vertu du lemme 4,

$$\Phi_{1k}(0)=0, \qquad \Phi'_{1k}(0)>0, \qquad |\Phi_{1k}(w)|<1, \tag{96}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Phi_{1k}(w)-w}{s_k^2}=-c_1 w\frac{1+w\bar{\nu}}{1-w\bar{\nu}}. \tag{97}$$

De la première formule (91) et de (95), on déduit immédiatement que

(98) *la fonction* $f^*_{1k}(z)$ *est déterminée dans le cercle* $|z|<1$.

En même temps, d'après (91), (96), on a

$$|f^*_{1k}(z)|<1 \quad \text{pour} \quad |z|<1, \tag{98'}$$

$$f^*_{1k}(0)=0, \qquad f^{*\prime}_{1k}(0)>0. \tag{98''}$$

En outre, les fonctions $f_{1k}(z)$ et $\Phi_{1k}(w)$ étant univalentes, on voit, que

(98''') *la fonction* $f^*_{1k}(z)$ *est univalente dans le cercle* $|z|<1$.

Je dis que dans ce cas la limite

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f^*_{1k}(z)-f^*(z)}{\tau_k^2}$$

$$=-c_1\Big\{z\frac{1+z\bar{\xi}_0}{1-z\bar{\xi}_0}f^{*\prime}(z)-Q_0^2(1-\varepsilon)^2 f^*(z)\frac{1+f^*(z)\bar{\eta}_0}{1-f^*(z)\bar{\eta}_0} \tag{98''''}$$

$$+[Q_0^2(1-\varepsilon)^2-1-\varepsilon]f^*(z)\frac{1+f^*(z)\bar{\nu}}{1-f^*(z)\bar{\nu}}\Big\},$$

où la convergence est presque uniforme dans le cercle $|z|<1$, existe.

Pour le démontrer, remarquons que

$$\frac{f^*_{1k}(z)-f^*(z)}{\tau_k^2}=\frac{\Phi_{1k}[f_{1k}(z)]-f_{1k}(z)}{s_k^2}\cdot\frac{s_k^2}{\tau_k^2}+\frac{f_{1k}(z)-f^*(z)}{\tau_k^2}; \tag{99}$$

cette identité est analogue à (86). D'autre part, il résulte de (97) et (91'), en vertu de lemme 1, que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Phi_{1k}[f_{1k}(z)]-f_{1k}(z)}{s_k^2}=-c_1 f^*(z)\frac{1+f^*(z)\bar{\nu}}{1-f^*(z)\bar{\nu}}. \tag{99'}$$

[33]) Comp. (75) et (59'').

Les formules (99′), (91″), (92) et (99) donnent immédiatement (98‴′), c. q. f. d.

Par (94), la seconde suite annoncée a été déterminée.

Remarquons ici qu'on peut exprimer les côtés droits des formules (85‴′) ou (98‴′) d'une autre manière. En appliquant les notations (5), (5′), on voit que, pour tout nombre complexe $|y|<1$, l'égalité suivante a lieu:

$$f^*(z)\frac{1+f^*(z)y}{1-f^*(z)y}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{B}_n^*(y)z^n, \tag{100}$$

où

$$\mathfrak{B}_1^*(y)=a_1^*\ ^{34}), \tag{100′}$$

$$\mathfrak{B}_n^*(y)=a_n^*+2a_n^{*(2)}y+2a_n^{*(3)}y^2+\ldots+2a_n^{*(n)}y^{n-1}\quad(n=2,3,\ldots)$$

et, de même,

$$z\frac{1+zy}{1-zy}f^{*\prime}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{C}_n^*(y)z^n, \tag{101}$$

où

$$\mathfrak{C}_1^*(y)=a_1^*, \tag{101′}$$

$$\mathfrak{C}_n^*(y)=na_n^*+2(n-1)a_{n-1}^*y+\ldots+2\cdot 2a_2^*y^{n-2}+2a_1^*y^{n-1}\qquad(n=2,3,\ldots).$$

En se servant de ces désignations, on peut écrire les formules (85‴′) ou (98‴′) sous la forme suivante:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_{1k}^*(z)-f^*(z)}{\tau_k^2} \tag{102}$$

$$=-c_1\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\mathfrak{C}_n^*(\bar{\xi}_0)-Q_0^2(1-\varepsilon)^2\mathfrak{B}_n^*(\bar{\eta}_0)+[Q_0^2(1-\varepsilon)^2-1-\varepsilon]\mathfrak{B}_n^*(\bar{\nu})\right\}z^n,$$

---

34) Comp. les formules analogues dans le lemme 5. Les fonctions $\mathfrak{B}_n^*(y)$ sont tout à fait analogues aux fonctions respectives B_n^* dans ce lemme, avec la seule différence qu'ici leur dépendance de y est nettement marquée, ce qui, pour $\bar{w}_0$ dans les expressions B_n^*, n'avait pas lieu. Bien que le coefficient $\mathfrak{B}_1^*(y)$ ne dépend pas de y, j'emploie la forme $\mathfrak{B}_1^*(y)$ pour garder la symétrie avec les coefficients suivants qui eux dépendent de y.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f^*_{2k}(z)-f^*(z)}{\tau_k^2}$$

(102′)

$$=c_2\sum_{n=1}^{\infty}\{\mathfrak{C}^*_n(\bar{\xi}_0)-Q_0^2(1+\varepsilon)^2\mathfrak{B}^*_n(\bar{\eta}_0)+[Q_0^2(1+\varepsilon)^2-1+\varepsilon]\mathfrak{B}^*_n(\bar{\mu}_0)\}z^n.$$

Démontrons enfin que, pour k suffisamment grand, l'inégalité suivante a lieu:

$$a_{1f^*_{jk}}>T \qquad (j=1,2). \tag{103}$$

En effet, en vertu de (102), on a, pour $j=1$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{1f^*_{jk}}-a_1^*}{\tau_k^2}=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{f^*_{1k}(z)-f^*(z)}{\tau_k^2}\right]_{z=0}\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left[\lim_{k\to\infty}\frac{f^*_{1k}(z)-f^*(z)}{\tau_k^2}\right]_{z=0}$$

$$=-c_1\{\mathfrak{C}^*_1(\bar{\xi}_0)-Q_0^2(1-\varepsilon)^2\mathfrak{B}^*_1(\bar{\eta}_0)+[Q_0^2(1-\varepsilon)^2-1-\varepsilon]\mathfrak{B}^*_1(\bar{\nu})\}=c_1a_1^*\varepsilon>0$$

et, par un même calcul, on trouve, pour $j=2$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{1f^*_{2k}}-a_1^*}{\tau_k^2}=c_2a_1^*\varepsilon>0.$$

Il en résulte que, pour k naturel suffisamment grand,

$$a_{1f^*_{jk}}>a_1^* \quad \text{pour} \quad j=1,2,$$

ce qui donne, vu que $a_1^*\geqslant T$, l'inégalité (103).

Les résultats obtenus peuvent être, d'après (85)-(85′′′′) ou (98)-(98′′′′) et (102), (102′), (103), résumés comme suit:

Lemme 6. *Il existe deux suites de fonctions*

$$f^*_{jk}(z) \qquad (k=1,2,\ldots;\ j=1,2),$$

déterminées par (94) *et* (83) *et une suite de nombres positifs*

$$\tau_k^2 \qquad (k=1,2,\ldots)$$

qui tend vers zéro, telles que

(a) *les fonctions $f^*_{jk}(z)$ appartiennent, pour les indices k suffisamment grands à la famille F_T;*

(b) *les convergences déterminées par les formules* (102), (102′) *ont lieu presque uniformément dans le cercle $|z|<1$;*

(c) *les expressions du côté droit des formules* (102), (102′) *sont déterminées par* (100′), (101′), (29′), (57‴) *et elles dépendent de paramètres arbitraires*, (57), (58), (58′) *et d'un point* μ_0 *sur la circonférence* $K^*(0,1)$.

7. Déduction de l'équation fondamentale.

En raison du lemme précédent, on peut appliquer à la fonction $f^*(z)$ et aux suites $\{f^*_{jk}(z)\}$, $\{\tau^2_k\}$ le lemme aux variations, d'où résultent, d'après (33), (102) ou (102′), les inégalités

$$\Re\Big\{-c_1\sum_{n=2}^{N} H^*_n[\mathfrak{C}^*_n(\bar\xi_0)-\mathfrak{C}^*_1(\bar\xi_0)A^*_n-Q_0^2(1-\varepsilon)^2(\mathfrak{B}^*_n(\bar\eta_0)-\mathfrak{B}^*_1(\bar\eta_0)A^*_n)$$
$$+(Q_0^2(1-\varepsilon)^2-1-\varepsilon)(\mathfrak{B}^*_n(\bar\nu)-\mathfrak{B}^*_1(\bar\nu)A^*_n)]\Big\}\leqslant 0,$$
(104)
$$\Re\Big\{c_2\sum_{n=2}^{N} H^*_n[\mathfrak{C}^*_n(\bar\xi_0)-\mathfrak{C}^*_1(\bar\xi_0)A^*_n-Q_0^2(1+\varepsilon)^2(\mathfrak{B}^*_n(\bar\eta_0)-\mathfrak{B}^*_1(\bar\eta_0)A^*_n)$$
$$+(Q_0^2(1+\varepsilon)^2-1+\varepsilon)(\mathfrak{B}^*_n(\bar\mu_0)-\mathfrak{B}^*_1(\mu_0)A^*_n)]\Big\}\leqslant 0.$$

Le nombre ε étant arbitraire, on obtient de ces formules[35]), en passant à la limite avec $\varepsilon\to 0$, les inégalités plus simples suivantes:

$$\Re\Big\{-\sum_{n=2}^{N} H^*_n[\mathfrak{C}^*_n(\bar\xi_0)-\mathfrak{C}^*_1(\bar\xi_0)A^*_n-Q_0^2(\mathfrak{B}^*_1(\bar\eta_0)-\mathfrak{B}^*_1(\bar\eta_0)A^*_n)$$
$$+(Q_0^2-1)(\mathfrak{B}^*_n(\bar\nu)-\mathfrak{B}^*_1(\bar\nu)A^*_n)]\Big\}\leqslant 0,$$
(105)
$$\Re\Big\{\sum_{n=2}^{N} H^*_n[\mathfrak{C}^*_n(\bar\xi_0)-\mathfrak{C}^*_1(\bar\xi_0)A^*_n-Q_0^2(\mathfrak{B}^*_n(\bar\eta_0)-\mathfrak{B}_1(\bar\eta_0)A^*_n)$$
$$+(Q_0^2-1)(\mathfrak{B}^*_n(\bar\mu_0)-\mathfrak{B}^*_1(\bar\mu_0)A^*_n)]\Big\}\leqslant 0.$$

A l'aide de transformations analoques à celles du lemme 5, on a, de (100′) ou (101′),

$$\mathfrak{B}^*_n(y)-\mathfrak{B}^*_1(y)A^*_n=\mathfrak{B}^*_n(y)-\mathfrak{B}^*_1(y)\frac{a^*_n}{a^*_1}=2\sum_{p=2}^{n}a^{*(p)}_n y^{p-1},$$
(106)
$$\mathfrak{C}^*_n(y)-\mathfrak{C}^*_1(y)A^*_n=\mathfrak{C}^*_n(y)-\mathfrak{C}^*_1(y)\frac{a^*_n}{a^*_1}$$

[35]) en divisant les deux côtés des inégalités par le nombre c_1 ou c_2.

$$= (n-1)a_n^* + 2\sum_{p=2}^{n}(n-p+1)a_{n-p+1}^* y^{p-1}$$

pour $n=2,3,\ldots$, et, par conséquent,

$$\sum_{n=2}^{N} H_n^*[\mathfrak{B}_n^*(y) - \mathfrak{B}_1^*(y)A_n^*] = 2\sum_{n=2}^{N}(H_n^* \sum_{p=2}^{n} a_n^{*(p)} y^{p-1}),$$

$$\sum_{n=2}^{N} H_n^*[\mathfrak{C}_n^*(y) - \mathfrak{C}_1^*(y)A_n^*] \tag{107}$$

$$= \left[\sum_{n=2}^{N}(n-1)a_n^* H_n^*\right] + 2\sum_{n=2}^{N}(H_n^* \sum_{p=2}^{n}(n-p+1)a_{n-p+1}^* y^{p-1}).$$

En groupant les termes suivant les puissances de y, on trouve, après une transformation facile,

$$\sum_{n=2}^{N} H_n^*[\mathfrak{B}_n^*(y) - \mathfrak{B}_1^*(y)A_n^*] = 2\sum_{p=2}^{N}(y^{p-1}\sum_{n=p}^{N} a_n^{*(p)} H_n^*),$$

$$\sum_{n=2}^{N} H_n^*[\mathfrak{C}_n^*(y) - \mathfrak{C}_1^*(y)A_n^*] \tag{108}$$

$$= \left[\sum_{n=2}^{N}(n-1)a_n^* H_n^*\right] + 2\sum_{p=2}^{N}(y^{p-1}\sum_{n=p}^{N}(n-p+1)a_{n-p+1}^* H_n^*).$$

Admettons maintenant les notations (7), (8) introduites tout à l'heure. Si on les emploie, les formules (108) prendront la forme

$$\sum_{n=2}^{N} H_n^*[\mathfrak{B}_n^*(y) - \mathfrak{B}_1^*(y)A_n^*] = \sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-1}^* y^{p-1},$$

$$\sum_{n=2}^{N} H_n^*[\mathfrak{C}_n^*(y) - \mathfrak{C}_1^*(y)A_n^*] = \sum_{p=1}^{N}\mathfrak{E}_{p-1}^* y^{p-1}. \tag{109}$$

A l'aide de ces formules les inégalités (105) peuvent être écrites comme suit:

$$-\Re\left\{\sum_{p=1}^{N}\mathfrak{E}_{p-1}^*\bar{\xi}_0^{p-1}\right\} + Q_0^2\,\Re\left\{\sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-1}^*\bar{\eta}_0^{p-1}\right\} \tag{110}$$

$$-(Q_0^2-1)\,\Re\left\{\sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-1}^*\bar{\nu}^{p-1}\right\} \leqslant 0,$$

$$\Re\left\{\sum_{p=1}^{N}\mathfrak{E}_{p-1}^*\bar{\xi}_0^{p-1}\right\} - Q_0^2\,\Re\left\{\sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-1}^*\bar{\eta}_0^{p-1}\right\} \tag{110'}$$

$$+(Q_0^2-1)\,\Re\left\{\sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-1}^*\bar{\mu}_0^{p-1}\right\} \leqslant 0.$$

Par l'addition des deux côtés des inégalités (110), (110′), on a

$$(111)\quad (Q_0^2-1)\Re\left\{\sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-1}^{*}\bar{\mu}_0^{p-1}\right\}-(Q_0^2-1)\Re\left\{\sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-1}^{*}\bar{\nu}^{p-1}\right\}\leqslant 0,$$

et, comme (Q_0^2-1)[36]) est un nombre positif, on trouve

$$(112)\qquad \Re\left\{\sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-1}^{*}\bar{\mu}^{p-1}\right\}\leqslant\Re\left\{\sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-1}^{*}\bar{\nu}^{p-1}\right\}.$$

Rappelons que ν est un point quelconque sur la circonférence $K^{*}(0,1)$ (comp. (58′)). Vu qu'en outre $\mu_0\in K^{*}(0,1)$, l'inégalité (112) donne immédiatement (en posant $\bar{\nu}=e^{ix}$ pour $0\leqslant x\leqslant 2\pi$)

$$(113)\qquad \Re\left\{\sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-1}^{*}\bar{\mu}_0^{p-1}\right\}=\min_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}\Re\left\{\sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-2}^{*}e^{ix(p-1)}\right\}.$$

Comme, d'après (5″), (6), (6′), (7) et la remarque avant (45), les nombres $\mathfrak{D}_1^{*},\mathfrak{D}_2^{*},\ldots,\mathfrak{D}_{N-1}^{*}$ dépendent uniquement des coefficients $a_1^{*},a_2^{*},\ldots,a_N^{*}$, on remarque que l'expression

$$(114)\qquad \mathfrak{P}^{*}=\Re\left\{\sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-1}^{*}\bar{\mu}_0^{p-1}\right\}$$

ne dépend que des coefficients $a_1^{*},a_2^{*},\ldots,a_N^{*}$ [37]).

Posons maintenant $\nu=\mu_0$ dans la formule (110). L'inégalité ainsi obtenue donne avec l'inégalité (110′) l'égalité

$$(115)\quad \Re\left\{\sum_{p=1}^{N}\mathfrak{E}_{p-1}^{*}\bar{\xi}_0^{p-1}\right\}-Q_0^2\,\Re\left\{\sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-1}^{*}\bar{\eta}_0^{p-1}\right\}+(Q_0^2-1)\mathfrak{P}^{*}=0,$$

qu'on peut exprimer encore sous une autre forme. Remarquons, notamment, que les égalités suivantes ont lieu pour $|y|=1$:

$$(116)\qquad \begin{aligned}\Re\left\{\sum_{p=2}^{N}\mathfrak{D}_{p-1}^{*}y^{p-1}\right\}&=\frac{1}{2}\sum_{p=2}^{N}\left(\mathfrak{D}_{p-1}^{*}y^{p-1}+\overline{\mathfrak{D}}_{p-1}^{*}\cdot\frac{1}{y^{p-1}}\right),\\ \Re\left\{\sum_{p=1}^{N}\mathfrak{E}_{p-1}^{*}y^{p-1}\right\}&=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\left(\mathfrak{E}_{p-1}^{*}y^{p-1}+\overline{\mathfrak{E}}_{p-1}^{*}\cdot\frac{1}{y^{p-1}}\right).\end{aligned}$$

En appliquant les formules (116), on a de (115), après un calcul facile

[36]) Comp. (57‴).

[37]) Cela ne veut pas dire que $\mathfrak{P}^{*}$ soit une fonction rationnelle de coefficients $a_1^{*},\ldots,a_N^{*}$.

$$
\begin{aligned}
&Q_0^2\left[\sum_{p=2}^{N}\left(\overline{\mathfrak{D}}_{p-1}^{*}\eta_0^{p-1}+\mathfrak{D}_{p-1}^{*}\frac{1}{\eta_0^{p-1}}\right)-2\mathfrak{P}^{*}\right]\\
&=\sum_{p=1}^{N}\left(\overline{\mathfrak{E}}_{p-1}^{*}\xi_0^{p-1}+\mathfrak{E}_{p-1}^{*}\frac{1}{\xi_0^{p-1}}\right)-2\mathfrak{P}^{*}.
\end{aligned}
\tag{117}
$$

Revenons maintenant à la définition des nombres η_0 et Q_0. D'après (57‴), on a

$$
\eta_0=f^{*}(\xi_0),\qquad Q_0=|f^{*\prime}(\xi_0)|.
\tag{118}
$$

Par conséquent, en vertu de la formule (56), on peut écrire

$$
Q_0^2=|f^{*\prime}(\xi_0)|^2=\frac{[f^{*\prime}(\xi_0)]^2}{[f^{*}(\xi_0)]^2}\,\xi_0^2.
\tag{119}
$$

Substituons (118) et (119) à l'égalité (117). On a immédiatement

$$
\begin{aligned}
&\frac{[f^{*\prime}(\xi_0)]^2}{[f^{*}(\xi_0)]^2}\left[\left(\sum_{p=2}^{N}\left(\overline{\mathfrak{D}}_{p-1}^{*}(f^{*}(\xi_0))^{p-1}+\mathfrak{D}_{p-1}^{*}\frac{1}{(f^{*}(\xi_0))^{p-1}}\right)\right)-2\mathfrak{P}^{*}\right]\\
&=\frac{1}{\xi_0^2}\left[\left(\sum_{p=1}^{N}\left(\overline{\mathfrak{E}}_{p-1}^{*}\xi_0^{p-1}+\mathfrak{E}_{p-1}^{*}\frac{1}{\xi_0^{p-1}}\right)\right)-2\mathfrak{P}^{*}\right].
\end{aligned}
\tag{120}
$$

Remarquons ici que le point ξ_0 a été choisi arbitrairement sur l'arc C. Il en résulte que l'égalité (120) a lieu pour tous les points ξ_0 de cet arc.

Considérons les expressions des deux côtés de la formule (120). Ce sont évidemment des fonctions de la variable ξ_0 [38]), déterminées et holomorphes pour ξ_0 parcourant l'ensemble P [39]), sauf $\xi_0=0$. Ces expressions étant égales pour tout $\xi_0\in C$, elles doivent l'être pour tout $\xi_0\in P$, en particulier, pour tout $\xi_0\in K(0,1)$, sauf pour $\xi_0=0$. A l'aide de ce qui précède, l'égalité (120) donne, en posant $\xi_0=z$, l'équation fondamentale (2) du théorème.

8. Propriétés des fonctions $\mathfrak{M}(w)$, $\mathfrak{N}(z)$ et du premier coefficient de la fonction extrémale.

Remarquons d'abord que, pour la fonction $\mathfrak{M}(w)$, les propriétés citées dans le théorème sont une conséquence immédiate de la définition du nombre $\mathfrak{P}^{*}$. Il reste donc à démontrer ces propriétés pour la fonction $\mathfrak{N}(z)$ seulement.

[38]) Il faut remarquer que les expressions $\mathfrak{D}_1^{*},\ldots,\mathfrak{D}_{N-1}^{*}$ ou $\mathfrak{E}_0^{*},\mathfrak{E}_1^{*},\ldots,\mathfrak{E}_{N-1}^{*}$ ne dépendent pas de ξ_0, de même que $\mathfrak{P}^{*}$.

[39]) Comp. la définition de l'ensemble P dans la partie 5.

Dans ce but, on construit une suite de fonctions $f_k^*(z)$ pareille à celle de (83). et on applique le lemme aux variations comme il suit:

Soit la fonction extrémale $f^*(z)$, la même que ci-dessus; on prend une suite quelconque $\{\mu_k\}$ de points essentiels de l'ensemble complémentaire CG_{f^*} qui tend vers un point μ sur la circonférence. Posons, pour $k=1,2,\ldots,$

$$\tau_k = \frac{1-|\mu_k|}{2(1+\varepsilon)},$$

$$\varphi_k(z) = \chi_1(z,\tau_k,\xi) \quad \text{pour} \quad |z|<1,$$

$$\Phi_k(w) = \Omega_{Gf^*\mu_k}(w) \quad \text{pour} \quad w \in G_{f^*},$$

où $\varepsilon>0$, $\xi \in K^*(0,1)$ sont des nombres quelconques fixes; ensuite

$$f_k^*(z) = \Phi_k\{f^*[\varphi_k(z)]\} \quad \text{pour} \quad |z|<1.$$

On voit immédiatement que

(121) *la fonction $f_k^*(z)$ est déterminée et univalente dans le cercle $|z|<1$;*

(121′) *on a les relations*

$$f_k^*(0)=0, \qquad f_k^{*\prime}(0)>0, \qquad |f_k^*(z)|<1$$

pour $|z|<1$;

(121″) *la limite*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_k^*(z)-f^*(z)}{\tau_k^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\Phi_k\{f^*[\varphi_k(z)]\}-f^*[\varphi_k(z)]}{(1-|\mu_k|)^2}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{(1-|\mu_k|)^2}{\tau_k^2}$$

$$+\lim_{k\to\infty}\frac{f^*[\varphi_k(z)]-f^*(z)}{\varphi_k(z)-z}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi_k(z)-z}{\tau_k^2}$$

$$= \frac{1}{8}f^*(z)\frac{1+f^*(z)\bar{\mu}}{1-f^*(z)\bar{\mu}}\,4(1+\varepsilon)^2 - \frac{1}{2}f^{*\prime}(z)z\frac{1+z\bar{\xi}}{1-z\bar{\xi}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(1+\varepsilon)^2\mathfrak{B}_n(\bar{\mu})-\mathfrak{C}_n(\bar{\xi})]z^n$$ [40])

existe (comp. (61‴) et (88));

[40]) Comp. (100)-(100′) et (101)-(101′).

(121''') $a_{1f_k^*} > a_{1f^*} \geqslant T$ *pour* k *naturel suffisamment grand* (comp. (103)).

D'après les propriétés citées ci-dessus, on peut appliquer à la fonction $f^*(z)$ et à la suite $f_k^*(z)$ le lemme aux variations, ce qui donne l'inégalité

$$\Re\left\{\sum_{n=2}^{N}(1+\varepsilon)^2[\mathfrak{B}_n(\bar{\mu})-\mathfrak{B}_1(\bar{\mu})A_n^*]H_n^*-[\mathfrak{C}_n(\bar{\xi})-\mathfrak{C}_1(\bar{\xi})A_n^*]H_n^*\right\}\leqslant 0$$

et, en passant à la limite avec $\varepsilon\to 0$,

$$\Re\left\{\sum_{n=2}^{N}[\mathfrak{B}_n(\bar{\mu})-\mathfrak{B}_1(\bar{\mu})A_n^*]H_n^*-[\mathfrak{C}_n(\bar{\xi})-\mathfrak{C}_1(\bar{\xi})A_n^*]H_n^*\right\}\leqslant 0.$$

En tenant compte des formules (109), (116) et (3), (4), on peut exprimer cette dernière inégalité sous la forme équivalente

$$\mathfrak{M}(\mu)-\mathfrak{N}(\xi)\leqslant 0.$$

Il en résulte, $\mathfrak{M}(\mu)$ étant un nombre non négatif et ξ un point arbitraire sur la circonférence $|z|=1$, que la fonction $\mathfrak{N}(z)$ est non négative sur cette circonférence.

Je dis que $\mathfrak{N}(z)$ *admet au moins une racine* (qui est, d'après ce qui précède, une racine double) *sur la circonférence.*

En effet, on voit sans difficulté que le nombre de racines des fonctions $\mathfrak{M}(w)$ ou $\mathfrak{N}(z)$, qui se trouvent à l'intérieur des circonférences $|w|=1$ ou $|z|=1$ est égal au nombre de racines à l'extérieur de ces circonférences.

De plus, on voit, d'après (2) que si le point z_0 est une racine de la fonction $\mathfrak{N}(z)$, située dans le cercle $|z|<1$, le point $w_0=f^*(z_0)$ est une racine de la fonction $\mathfrak{M}(w)$ (au même degré de multiplicité), située dans le cercle $|w|<1$.

En outre, on vérifie facilement, vu les formules (2), (3) et (4), que le nombre de toutes les racines est le même pour les fonctions $\mathfrak{M}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$.

En résumant, on dira que le nombre de racines de la fonction $\mathfrak{M}(w)$ sur la circonférence $|w|=1$ ne dépasse pas le nombre analogue de racines de $\mathfrak{N}(z)$ sur la circonférence $|z|=1$.

La fonction $\mathfrak{N}(z)$ doit donc admettre des racines sur la circonférence $|z|=1$, car $\mathfrak{M}(w)$ en admet sur la circonférence $|w|=1$, c. q. f. d.

Après avoir obtenu les propriétés demandées des fonctions $\mathfrak{M}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$, passons au coefficient a_1^*.

Constatons ici que la propriété de ce coefficient, énoncée dans le théorème, a été déjà démontrée dans la partie 5. La démonstration du théorème est donc dans les parties 1 - 8 terminée.

Remarques.

1. Le théorème fondamental présenté plus haut a été généralisé par W. Janowski et moi pour le cas, où on remplace la fonctionnelle (1) par une fonctionnelle quelconque qui a une différentielle au sens analogue à celui de Fréchet [41]).

2. En particulier, en supposant que la fonction (1′) ait la forme

$$H(X_2, \ldots, Y_N) = X_2, \qquad N = 2,$$

ou

$$H(X_2, \ldots, Y_N) = X + \frac{1}{2} Y_2^2, \qquad N = 3,$$

on a du théorème fondamental les relations suivantes, concernant les coefficients de la fonction extrémale correspondante

$$a_2^* = 2T(1 - T)$$ [42])

ou

$$a_3^* = \begin{cases} T(1 + T^2 + 2\lambda^2 - 4T\lambda) & \text{pour} \quad T \leqslant \dfrac{1}{e}, \\ T(1 - T^2) & \text{pour} \quad T \geqslant \dfrac{1}{e}, \end{cases}$$

où le nombre λ satisfait à l'équation

$$\lambda \ln \lambda = -T$$ [43]).

Ce dernier résultat a été obtenu par W. Janowski à l'aide d'un calcul assez long; il ne l'a pas publié jusqu'à présent.

3. A l'aide du théorème fondamental généralisé, cité dans la remarque 1, W. Janowski a eu des limites précises pour l'argument d'une fonction univalente bornée, et non bornée [44]).

---

[41]) Z. Charzyński et W. Janowski, *Sur l'équation générale des fonctions extrémales*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Lublin-Polonia, IV, 1950.

[42]) G. Pieck, Wien. Ber. 126, Abtlg IIa (1917), p. 247 - 263.

[43]) A. C. Schaeffer et D. C. Spencer, *The coefficients of Schlicht functions*, Duke Math. Journal 12 (1945), p. 107-125.

[44]) W. Janowski, *Le maximum d'argument des fonctions univalentes*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Lublin-Polonia, IV. 1950.

II. Orthogonalité des coefficients des puissances entières positives de fonctions univalentes bornées.

Soit une fonction univalente bornée quelconque

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots, \qquad |z|<1. \tag{1}$$

Admettons que la fonction $f(z)$ transforme le cercle $K=K(0,1)$ en l'ensemble $G=f[K(0,1)]$ de la même mesure, c'est-à-dire

$$m(G)=m(K), \quad \text{où} \quad m(K-G)=0. \tag{1'}$$

Introduisons en outre les désignations suivantes:

$$[f(z)]^p=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(p)}z^p \qquad (p=1,2,\ldots). \tag{1''}$$

En supposant tout ceci, on trouve le résultat suivant:

Théorème I. *Les coefficients des puissances entières de la fonction* (1), *décrits par les égalités* (1'') *satisfont aux conditions d'orthogonalité*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{k}\, a_n^{(k)}\, \overline{\sqrt[n]{l}\, a_n^{(l)}} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k\neq l \\ 1 & \text{pour } k=l \end{cases} \qquad (k,l=1,2,\ldots). \tag{2}$$

Démonstration. Prenons un polynôme quelconque

$$W(\zeta)=\lambda_1\zeta+\lambda_2\zeta^2+\ldots+\lambda_N\zeta^N \tag{3}$$

univalent dans le cercle $|\zeta|<1$, et formons la fonction composée

$$\psi(z)=W[f(z)].$$

La mesure de l'ensemble $K-G$ étant nulle d'après la supposition précédente, il en est de même pour l'image $W(K-G)$ de cet ensemble, et on a immédiatement, vu l'univalence du polynôme (3),

$$\begin{aligned} m[W(K)] &= m\{W[G+(K-G)]\} \\ &= m[W(G)+W(K-G)] = m[W(G)]+m[W(K-G)] \\ &= m[W(G)] = m\{W[f(K)]\} = m[\psi(K)]. \end{aligned} \tag{4}$$

On a ensuite, en tenant compte de formules bien connues,

$$(5)\qquad m[W(K)] = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} W(re^{i\vartheta})\,\overline{\frac{d}{d\vartheta}\,W(re^{i\vartheta})}\,d\vartheta = \sum_{h=1}^{N}\pi h\lambda_h\bar{\lambda}_h,$$

$$m[\psi(K)] = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\psi(re^{i\vartheta})\,\overline{\frac{d}{d\vartheta}\,\psi(re^{i\vartheta})}\,d\vartheta$$

$$(5')\qquad = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^{N}\lambda_k[f(re^{i\vartheta})]^k\,\overline{\sum_{l=1}^{N}\lambda_l\frac{d}{d\vartheta}[f(re^{i\vartheta})]^l}\right\}d\vartheta$$

$$= \lim_{r\to 1}\sum_{k,l=1}^{N}\lambda_k\bar{\lambda}_l\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\left\{[f(re^{i\vartheta})]^k\,\overline{\frac{d}{d\vartheta}[f(re^{i\vartheta})]^l}\right\}d\vartheta.$$

En tenant compte de (4), (5), (5′) et des égalités évidentes

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\left\{[f(re^{i\vartheta})]^k\,\overline{\frac{d}{d\vartheta}[f(re^{i\vartheta})]^l}\right\}d\vartheta = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,a_n^{(k)}\,\overline{\sqrt{n}\,a_n^{(l)}},$$

on a l'égalité fondamentale suivante:

$$(6)\qquad \sum_{h=1}^{N}\pi h\lambda_h\bar{\lambda}_h = \sum_{k,l=1}^{N}\pi\lambda_k\bar{\lambda}_l\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,a_n^{(k)}\,\overline{\sqrt{n}\,a_n^{(l)}}\right).$$

En supposant, par exemple $\lambda_1=1$, et que le degré N du polynôme (3) soit un nombre quelconque, fixe pour le moment, on vérifie très facilement qu'il existe un nombre positif suffisamment petit ε tel que le polynôme (3) soit univalent pour tous les coefficients qui satisfont à la seule condition suivante:

$$|\lambda_2|<\varepsilon, \qquad \ldots, \qquad |\lambda_N|<\varepsilon.$$

Puisque l'égalité (6) a lieu pour tous ces coefficients et que le nombre N est arbitraire, on en déduit immédiatement les relations demandées (2).

A l'aide du théorème précédent, on peut avoir d'autres résultats.

Admettons les suppositions et les désignations (1), (1′) du théorème. Considérons la famille H composée de toutes les fonctions holomorphes de la forme

$$(7)\qquad h(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots, \qquad |z|<1$$

telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sqrt{n}\, b_n|^2 < +\infty. \tag{7'}$$

En introduisant, pour chaque fonction (7) de la famille H, la norme de cette fonction par la formule

$$|h(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\sqrt{n}\, b_n|^2, \tag{8}$$

on a, ce qui est facile à vérifier, un espace H du type (B) et on trouve ensuite, par un calcul simple, que chaque fonctionnelle linéaire dans cet espace

$$L[h(z)], \quad \text{où} \quad h(z) \in H, \tag{9}$$

peut être exprimée sous la forme

$$L[h(z)] = \sum_{n=1}^{\infty} X_n b_n, \tag{9'}$$

où

$$\{X_n\} \tag{9''}$$

est une suite quelconque de nombres complexes telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{X_n}{\sqrt{n}} \right|^2 < +\infty \text{ [45]}.$$

Introduisons enfin, pour symétrie, la notation

$$t(z) = z, \qquad |z| < 1.$$

En supposant ceci, on trouve le résultat suivant:

Théorème II. *Etant donnée une fonction quelconque $f(z)$ univalente, bornée qui transforme le cercle K en un ensemble G de la même mesure, l'inégalité suivante*:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{|L\{[f(z)]^p\}|^2}{p} \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|L\{[t(z)]^p\}|^2}{p} \tag{10}$$

a lieu pour chaque fonctionnelle linéaire $L[h(z)]$, définie dans l'espace H.

Démonstration. Etant donnée une fonctionnelle (9), on a, d'après (9')

[45]) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932; comp. p. 53, 67-68.

$$\frac{1}{\sqrt{p}} L\{[f(z)]^p\} = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^{\infty} X_n a_n^{(p)}$$

(11)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n}{p}}\, a_n^{(p)} \qquad (p = 1,2,\ldots).$$

En outre,

$$\frac{1}{\sqrt{p}} L\{[t(z)]^p\} = \frac{X_p}{\sqrt{p}} \qquad (p = 1,2,\ldots). \tag{11'}$$

Les suites (vecteurs)

$$\left\{\sqrt{\frac{n}{p}}\, a_n^{(p)}\right\} \qquad (p=1,2,\ldots)$$

étant orthogonales d'après le théorème I, on en déduit très facilement, pour la suite (vecteur)

$$\left\{\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right\}$$

l'inégalité pithagorèenne [46])

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n}{p}}\, a_n^{(p)} \right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{X_n}{\sqrt{n}} \right|^2,$$

équivalente, vu (11), (11'), à l'inégalité demandée (10).

---

[46]) G. Kowalewski, *Determinantentheorie*, Leipzig 1909, p. 455.

Remarques.

1. On voit sans difficulté que le théorème I se rattache au théorème plus général suivant, caractéristique pour les homéomorphies:

Etant donné un système de fonctions ayant les dérivées partielles du premier ordre continues

$$\xi(x,y), \qquad \eta(x,y),$$

qui transforment d'une façon homéomorphe un ensemble G de points du plan en un ensemble de points du plan compris dans G, l'inégalité suivante

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy \geqslant \iint_G f[\xi(x,y)\eta(x,y)]\left|\frac{D[\xi(x,y),\eta(x,y)]}{D(x,y)}\right| dx\,dy$$

a lieu pour chaque fonction non négative $f(x,y)$ dont l'intégrale double existe dans G.

Ce théorème reste évidemment vrai sous une forme analogue pour les transformations homéomorphes dans l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

2. En prenant, au lieu de la suite générale (9''), une suite particulière, on obtient de la formule (10) certains résultats particuliers.

Par exemple, en prenant dans (9'')

$$X_n = z_0^n, \qquad |z_0| < 1,$$

on a dans ce cas

$$L\{[f(z)]^p\} = [f(z_0)]^p, \qquad L\{[t(z)]^p\} = z_0^p \quad (p = 1,2,\ldots),$$

d'où

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{|f(z_0)|^{2p}}{p} \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|z_0|^{2p}}{p},$$

ce qui est équivalent avec l'inégalité faible de Schwarz

$$|f(z_0)| \leqslant |z_0|$$

pour une fonction (1) satisfaisant à la condition (1').

En prenant un nombre naturel quelconque N et en posant dans (9'')

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad n \neq N, \\ 1 & \text{pour} \quad n = N, \end{cases}$$

on a dans ce cas

$$L\{[f(z)]^p\} = a_N^{(p)},$$

$$L\{[t(z)]^p\} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad p \neq N, \\ 1 & \text{pour} \quad p = N, \end{cases}$$

d'où suit l'inégalité

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{|a_N^{(p)}|^2}{p} \leqslant \frac{1}{N}.$$

Sur les transformations isométriques des espaces du type (F)

par

Z. CHARZYŃSKI (Łódź).

Introduction.

Dans ce travail je présente des recherches sur les transformations isométriques des espaces vectoriels du type (F), concernant la supposition générale, que chaque transformation isométrique de deux espaces du type (F), l'un en l'autre, telle que le point zéro passe en point zéro correspondant, doit être linéaire[1]).

Cette question n'est résolue affirmativement jusqu'aujourd'hui que pour certains cas particuliers où les espaces transformés satisfont à des conditions spéciales.

Les résultats obtenus vont dans deux directions: d'une part, on se borne aux espaces dont la norme satisfait à certaines conditions, d'autre part, laissant de côté des restrictions sur la norme, on introduit des conditions sur la dimension des espaces considérés.

En ce qui concerne le premier cas, S. MAZUR, S. ULAM et N. ARONSZAJN[2]) ont établi des théorèmes, qui vérifient la supposition citée pour les espaces admettant une norme homogène, ainsi que pour ceux de type plus général.

Pour le second cas, MAZUR a démontré que la supposition est vraie pour les espaces à une dimension[3]); néanmoins, pour les espaces au nombre de dimensions plus grand que un, la question reste ouverte.

---

[1]) Voir [1], p. 166 et 241.

[2]) Voir [1], p. 166 et [3], p. 812-813.

[3]) Ce résultat n'a pas été publié jusqu'aujourd'hui.

Le but de mon travail est de généraliser par une méthode différente le résultat de MAZUR pour les espaces à un nombre fini quelconque de dimensions.

§ 0. Termes et notations.

1. Nous emploierons les notions d'espace du type (F), de combinaison linéaire de points, de base de Hamel, d'opération biunivoque, d'opération additive, d'opération linéaire, de transformation isométrique, de translation, de rotation, d'isomorphie, d'ensemble compact, de sphère, mentionnées dans la monographie de BANACH [1]. De plus, nous admettrons les notions de norme, de norme homogène, de pseudonorme, mentionnées dans le travail de MAZUR et ORLICZ [2].

2. Etant donné un espace $\mathcal{E}$ du type (F), nous désignerons généralement par $\|x\|$ la norme dans $\mathcal{E}$ et par Θ_E, ou, pour qu'il n'y ait de malentendu, par Θ l'élément zéro de cet espace. Nous appellerons *rotations* de l'espace $\mathcal{E}$, les rotations de celui-ci autour du point Θ. Nous dirons que les points $x_1, x_2, \ldots, x_m$, de l'espace $\mathcal{E}$ sont *linéairement indépendants*, si aucun d'eux n'est une combinaison linéaire des autres.

3. Nous appellerons chaque espace du type (F) *espace à n dimensions* si la base de Hamel dans cet espace se compose de n points. Il est clair que dans ce cas chaque suite de n points linéairement indépendants de l'espace donné forme une base de Hamel dans cet espace.

4. Etant donné un espace $\mathcal{E}$ à un nombre fini n de dimensions, nous désignerons par η_E le rayon de la sphère compacte dans cet espace. Une telle sphère existe evidemment [4]).

On trouve facilement que, pour chaque suite $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de points linéairement indépendants et différents de Θ de l'espace $\mathcal{E}$, il existe un nombre Φ tel que, pour chaque suite $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ de nombres, l'inégalité

$$\|\tau_1 x_1 + \ldots + \tau_m x_m\| \leqslant \eta_E$$

entraîne

$$|\tau_1| < \Phi, \qquad \ldots, \qquad |\tau_m| < \Phi,$$

[4]) Voir [2], p. 185, 188 et comparer [4].

car, dans le cas contraire, la sphère décrite ci-dessus ne serait pas compacte [5]).

On en déduit en particulier que, pour chaque point x de $\mathcal{E}$ et chaque ensemble non borné T de nombres, les relations

$$\|\tau x\| \leqslant \eta_E,$$

pour tout $\tau \in T$, entraînent l'égalité

$$x = \Theta.$$

5. Étant donné un espace $\mathcal{E}$ décrit ci-dessus, nous poserons, pour tout nombre positif ε,

$$\varphi_E(\varepsilon) = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant \varepsilon, \\ |\xi| \leqslant 1}} \|\xi x\|.$$

On voit que la relation suivante a lieu:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_E(\varepsilon) = 0.$$

6. Nous dirons que la suite de nombres $\pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(P)}$ *est du type* (n) si tous ses termes appartiennent à l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$ et tout au plus n de ses termes se trouvent à l'intérieur de cet intervalle.

7. Nous poserons enfin, pour tout nombre réel γ,

$$\bar{\gamma} = 1 - \gamma.$$

§ 1. Transformations isométriques.

Théorème I. *Étant donné deux espaces quelconques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ du type (F), à un même nombre fini de dimensions, toute transformation isométrique de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$*

$$y = U(x), \tag{1}$$

où $x \in \mathcal{E}$ et $y \in \mathcal{H}$, telle que

$$U(\Theta_E) = \Theta_H,$$

est une opération linéaire.

Démonstration. Remarquons d'abord que pour démontrer ce théorème on peut se borner au cas particulier où $\mathcal{H} = \mathcal{E}$, c'est-à-dire qu'il suffit de démontrer que toute rotation $V(x)$ de $\mathcal{E}$ est linéaire.

[5]) Voir [2], p. 185 et 188.

En effet, en supposant que le théorème soit vérifié dans ce cas, on voit que pour chaque transformation isométrique (1) de l'espace $\mathcal{E}$ en un autre $\mathcal{H}$, l'opération de la variable $x \in \mathcal{E}$

$$U^{-1}[U(x)+U(z)]-z, \tag{2}$$

où z est un point arbitraire fixe de $\mathcal{E}$, est une rotation de $\mathcal{E}$ autour de Θ_E, c'est-à-dire qu'on a, d'après la supposition admise

$$U^{-1}[U(x)+U(z)]-z=L_z(x), \tag{3}$$

où $L_z(x)$ est une opération linéaire de la variable x dépendant du paramètre z.

D'autre part, en transposant x et z, on peut aussi écrire

$$U^{-1}[U(x)+U(z)]-x=L_x(z), \tag{3'}$$

où $L_x(z)$ est une opération linéaire de la variable z, dépendant du paramètre x.

Il vient de (3) et (3')

$$L_z(x)-x=L_x(z)-z, \tag{4}$$

pour tous les x et z de $\mathcal{E}$, et nous allons démontrer que les expressions (4), que nous désignerons par le même symbole $S(x,z)$, sont identiquement égales à Θ_E.

Les opérations (3) et (3') étant linéaires, on voit que l'on a, pour tout nombre réel π, les égalités

$$S\left(\pi x,\frac{z}{\pi}\right)=L_{z/\pi}(\pi x)-\pi x=\pi[L_{z/\pi}(x)-x]$$

$$=\pi\left[L_x\left(\frac{z}{\pi}\right)-\frac{z}{\pi}\right]=L_x(z)-z=S(x,z),$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de l'isométrie des opérations (3) et (3'),

$$\|\pi x\|=L_{z/\pi}(\pi x)\|=\left\|\pi x+S\left(\pi x,\frac{z}{\pi}\right)\right\|=\|\pi x+S(x,z)\|\geqslant\|S(x,z)\|-\|\pi x\|,$$

ou bien

$$\left\|\frac{z}{\pi}\right\|=\left\|L_{\pi x}\left(\frac{z}{\pi}\right)\right\|=\left\|\frac{z}{\pi}+S\left(\pi x,\frac{z}{\pi}\right)\right\|$$

$$=\left\|\frac{z}{\pi}+S(x,z)\right\|\geqslant\|S(x,z)\|-\left\|\frac{z}{\pi}\right\|.$$

En passant à la limite avec π convergeant vers 0 ou ∞, on en obtient la relation demandée

$$S(x,z)=\Theta_E,$$

vu les propriétés connues de la norme dans les espaces du type (F).

Les expressions (4) étant égales à Θ_E, les équations (3) ou (3′) donnent

$$U^{-1}[\,U(x)+U(z)\,]=x+z, \tag{5}$$

par suite,

$$U(x)+U(z)=U(x+z). \tag{5′}$$

De là, la transformation (1) est additive, et, d'après sa continuité, linéaire, c. q. f. d.

Ceci remarqué, passons à la démonstration du théorème pour le cas particulier cité ci-dessus.

On s'appuiera sur deux lemmes qui suivent; en même temps, on suppose pour la suite que $\mathcal{C}$ désigne un espace quelconque du type (F) à n dimensions, n étant un nombre naturel arbitraire.

Lemme. *Pour chaque suite de points de l'espace* $\mathcal{C}$

$$a^{(1)},\ldots,a^{(P)}, \tag{6}$$

et pour chaque suite de nombres

$$\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(P)}, \tag{6′}$$

qui appartiennent à l'intervalle

$$\langle 0,1\rangle, \tag{7}$$

il existe une suite du type (n)

$$\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(P)}, \tag{8}$$

telle que

$$\sum_{s=1}^{P}\pi^{(s)}a^{(s)}=\sum_{s=1}^{P}\alpha^{(s)}a^{(s)}. \tag{9}$$

En particulier, pour tout nombre δ *de l'intervalle* (7), *il existe une suite du type* (n)

$$\varrho^{(1)},\ldots,\varrho^{(P)},$$

telle que

$$\sum_{s=1}^{P}\varrho^{(s)}a^{(s)}=\delta\sum_{s=1}^{P}a^{(s)}.$$

Démonstration. On peut se borner au cas particulier d'une suite (6) satisfaisant à la condition que tous les n points choisis de cette suite soient linéairement indépendants.

En effet, en supposant que le lemme soit vérifié pour ce cas, et en rapprochant les termes d'une suite quelconque (6) par les termes respectifs d'une autre suite satisfaisant à la condition citée, on a le lemme pour un cas général, en passant à la limite.

Ceci remarqué, posons

$$b=\sum_{s=1}^{P}\alpha^{(s)}a^{(s)},$$

et considérons la classe C composée de toutes les suites de nombres

$$\chi^{(1)},\ldots,\chi^{(P)},$$

dont les termes appartiennent à l'intervalle (7) et telle que l'on ait l'égalité

$$\sum_{s=1}^{P}\chi^{(s)}a^{(s)}=b.$$

Désignons, pour chaque suite (c) de la classe C, par $I(c)$ le nombre de tous les termes de cette suite, qui se trouvent à l'intérieur de l'intervalle (7), et posons

$$M=\inf_{(c)\,\epsilon\,C} I(c). \tag{10}$$

Il suffit de démontrer, que le nombre M n'est pas plus grand que n.

Supposons à cet effet

$$M>n, \tag{11}$$

et prenons la classe C_M composée de toutes les suites (c) de la classe C, telles que

$$I(C)=M.$$

Désignons, pour chaque suite (c) de la classe C_M, par $\Omega(c)$ le nombre égal au plus petit terme, différent de zéro, de cette suite, et posons

$$\Phi=\inf_{(c)\,\epsilon\,C_M}\Omega(c). \tag{12}$$

On déduit facilement, vu la définition du nombre (10), qu'il existe une suite (c_1) de la forme

$$\chi_1^{(1)},\dots,\chi_1^{(P)}, \tag{13}$$

appartenant à la classe C_M telle que

$$\Omega(c_1)=\Phi. \tag{14}$$

En désignant par

$$\chi_1^{(s_1)},\dots,\chi_1^{(s_M)} \tag{14'}$$

tous les termes de la suite (13), qui se trouvent à l'intérieur de l'intervalle (7), on déduit, en tenant compte de la définition de $\Omega(c)$, qu'il existe un terme $\chi_1^{(s_h)}$ de la suite (14'), tel que

$$\Omega(c_1)=\chi_1^{(s_h)}. \tag{15}$$

Il résulte ensuite de (11) et de la condition supposée au début de la démonstration pour la suite (6), que l'on peut choisir une suite de nombres $\omega^{(1)},\dots,\omega^{(M)}$, telle que

$$\sum_{k=1}^{M}\omega^{(k)}a^{(s_k)}=\Theta$$

et

$$\omega^{(h)}<0.$$

Choisissons maintenant une suite (c_2) de la forme

$$\chi_2^{(1)},\dots,\chi_2^{(P)}, \tag{16}$$

telle que

$$\chi_2^{(s_1)},\dots,\chi_2^{(s_M)} \tag{17}$$

soient donnés par les égalités

$$\chi_2^{(s_k)}=\chi_1^{(s_k)}+\tau\omega^{(k)} \qquad (k=1,\dots,M), \tag{18}$$

et les autres termes soient identiques aux termes respectifs de la suite (13).

Le symbole τ désigne dans (18) un nombre positif, tel que les termes (17) puissent se trouver à l'intérieur de l'intervalle (7).

On voit sans difficulté, que la suite (16) appartient à la classe C_M, et que

$$\chi_2^{(s_h)}<\chi_1^{(s_h)}. \tag{19}$$

D'après la définition de $\Omega(c)$, on a évidemment

$$\Omega(c_2)\leqslant\chi_2^{(s_h)},$$

et, par conséquent, vu (19), (15), et (14),

$$\Omega(c_2)<\Phi.$$

Cette dernière relation étant contraire à (12), la démonstration est ainsi terminée.

Lemme fondamental. *On peut définir dans l'espace* $\mathcal{C}$ *une pseudonorme* $|x|_*$ *qui satisfasse pour tous les points* x, x_1, x_2 *de* $\mathcal{C}$ *aux conditions suivantes*:

1. $|x|_* \geqslant 0$,
2. $|x_1+x_2|_* \leqslant |x_1|_* + |x_2|_*$,
3. $|\tau x|_* = |\tau||x|_*$ *pour tout nombre réel* τ,
4. $|V(x_2)-V(x_1)|_* = |x_2-x_1|_*$ *pour toute rotation* $V(x)$ *de l'espace* $\mathcal{C}$,
5. $|x|_*$ *n'est pas identiquement égal a zéro.*

Démonstration. Nous la décomposons en deux parties, I et II.

I. La ε-norme. Soient donnés un nombre positif ε et un point quelconque x de l'espace $\mathcal{C}$.

Nous appellerons *ε-représentation du point x* chaque système composé d'une suite

$$z^{(1)}, \ldots, z^{(L)}, \tag{20}$$

de points de l'espace $\mathcal{C}$ et d'une suite

$$\nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(L)}, \tag{20'}$$

du type (n), telle que

$$\|z^{(s)}\| \leqslant \varepsilon \qquad (s=1, \ldots, L)$$

et

$$\sum_{s=1}^{L} \nu^{(s)} z^{(s)} = x.$$

Nous appellerons *ordre de la ε-représentation* décrite le nombre L des termes des suites (20), (20').

Il est facile de voir que, pour chaque nombre ε et chaque point x, il existe une ε-representation de ce point.

En efffet, d'après une propriété connue de la norme dans l'espace $\mathcal{C}$, il existe un nombre naturel L tel que

$$\left\| \frac{x}{L} \right\| \leqslant \varepsilon.$$

En posant

$$z^{(s)}=\frac{x}{L}, \qquad \nu^{(s)}=1 \qquad (s=1,\dots,L), \tag{21}$$

on vérifie que les suites (20) et (20′), dont les termes sont exprimés par les égalités (21), donnent une ε-représentation du point x.

On voit ensuite que, le nombre ε et le point x étant fixes pour le moment, il existe des représentations du point x d'ordre minimal. Nous appellerons *fondamentale* chacune de ces représentations.

Nous désignerons en même temps par

$$N(\varepsilon,x) \tag{22}$$

l'ordre des représentations fondamentales du point x, et nous l'appellerons *ε-norme du point x.*

Il est évident que, si les suites (20) et (20′) donnent une ε-représentation fondamentale du point x, tous les termes de la suite (20′) sont différents de zéro.

En effet, en supposant au contraire qu'un terme de la suite (20′) soit égal à zéro et en le supprimant dans la suite (20′) ainsi que le terme correspondant de la suite (20), on a une ε-représentation nouvelle du point x d'ordre moindre, ce qui est incompatible avec la définition du nombre (22).

La ε-norme introduite ci-dessus a plusieurs propriétés essentielles, que nous présentons dans la suite, en supposant que x,x_1,x_2 désignent des points arbitraires de l'espace $\mathcal{C}$, et ε — un nombre positif quelconque.

1° $N(\varepsilon,x)\geqslant 0$.

Cette propriété est évidente.

2° $N(\varepsilon,x_1+x_2)\leqslant N(\varepsilon,x_1)+N(\varepsilon,x_2)$.

Pour le démontrer, on prend des ε-représentation fondamentales des points x_k

$$z_k^{(1)},\dots,z_k^{(L_k)}, \tag{23}$$

$$\nu_k^{(1)},\dots,\nu_k^{(L_k)}, \tag{23′}$$

où

$$L_k=N(\varepsilon,x_k) \qquad (k=1,2), \tag{23″}$$

et on considère les suites

$$z^{(1)},\dots,z^{(L)}, \tag{24}$$

$$\nu^{(1)},\dots,\nu^{(L)}, \tag{24'}$$

où

$$L=L_1+L_2, \tag{24''}$$

et

$$z^{(s)}=\begin{cases} z_1^{(s)} & (s=1,\dots,L_1),\\ z_2^{(s-L_1)} & (s=L_1+1,\dots,L),\end{cases}$$

$$\nu^{(s)}=\begin{cases} \nu_1^{(s)} & (s=1,\dots,L_1),\\ \nu_2^{(s-L_1)} & (s=L_1+1,\dots,L).\end{cases}$$

Il résulte du lemme précédent qu'il existe une suite du type (n)

$$\sigma^{(1)},\dots,\sigma^{(L)}, \tag{25}$$

telle que

$$\sum_{s=1}^{L}\sigma^{(s)}z^{(s)}=\sum_{s=1}^{L}\nu^{(s)}z^{(s)}; \tag{26}$$

puisqu'on a, d'après la définition des suites (23), (23') et (24), (24'),

$$\sum_{s=1}^{L}\nu^{(s)}z^{(s)}=\sum_{s=1}^{L_1}\nu_1^{(s)}z_1^{(s)}+\sum_{s=1}^{L_2}\nu_2^{(s)}z_2^{(s)}=x_1+x_2,$$

$$\|z^{(s)}\|\leqslant\varepsilon \qquad (s=1,\dots,L),$$

on peut en déduire, vu (26), que le système de suites (24), (25) est une ε-représentation du point x_1+x_2. Il s'ensuit immédiatement que

$$N(\varepsilon,x_1+x_2)\leqslant L,$$

ce qui donne, d'après (23'') et (24''), la propriété demandée 2°.

3° (a) $N(\varepsilon,\delta x)+N(\varepsilon,\bar{\delta}x)\leqslant N(\varepsilon,x)+n$ *pour tout nombre* δ *de l'intervalle* $\langle 0,1\rangle$.

Pour la démonstration, on prend une ε-représentation fondamentale du point x

$$z^{(1)},\dots,z^{(L)}, \tag{27}$$

$$\nu^{(1)},\dots,\nu^{(L)}, \tag{27'}$$

où

$$L=N(\varepsilon,x). \tag{27''}$$

On choisit ensuite, vu le lemme précédent, une suite du type (n)

$$\varrho^{(1)},\dots,\varrho^{(L)} \tag{28}$$

telle que

$$\sum_{s=1}^{L}\varrho^{(s)}(\nu^{(s)}z^{(s)})=\delta\sum_{t=1}^{L}\nu^{(s)}z^{(s)}=\delta x, \tag{28'}$$

et on construit la suite

$$\bar{\varrho}^{(1)},\dots,\bar{\varrho}^{(L)}, \tag{29}$$

pour laquelle on a évidemment

$$\sum_{t=1}^{L}\bar{\varrho}^{(t)}(\nu^{(t)}z^{(t)})=\sum_{t=1}^{L}(1-\varrho^{(t)})(\nu^{(t)}z^{(t)})=\bar{\delta}x. \tag{29'}$$

Désignons respectivement par

$$\varrho^{(s_1)},\dots,\varrho^{(s_G)}, \tag{30}$$

$$\bar{\varrho}^{(t_1)},\dots,\bar{\varrho}^{(t_H)} \tag{31}$$

les suites partielles des suites (28), (29), composées de tous les termes différents de zéro de ces suites.

Il est facile de vérifier que

$$G+H\leqslant L+n, \tag{32}$$

car aux termes égaux à 1 de la suite (28) correspondent les termes égaux à 0 de la suite (29), et réciproquement, tandis que le nombre des autres termes, appartenant à l'intérieur de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$, ne dépasse pas n.

En appliquant encore le lemme précédent aux suites (30), (31) et aux suites respectives

$$z^{(s_1)},\dots,z^{(s_G)}, \tag{33}$$

$$z^{(t_1)},\dots,z^{(t_H)}, \tag{34}$$

on a, vu (28'), (29') et la définition des suites (30), (31), qu'il existe des suites du type (n)

$$\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(G)} \tag{33'}$$

et

$$\mu^{(1)},\dots,\mu^{(H)}, \tag{34'}$$

telles que

$$\sum_{p=1}^{G}\lambda^{(p)}z^{(s_p)}=\sum_{p=1}^{G}\varrho^{(s_p)}(\nu^{(s_p)}z^{(s_p)})=\sum_{p=1}^{L}\varrho^{(s)}(\nu^{(s)}z^{(s)})=\delta x,$$

$$\sum_{q=1}^{H}\mu^{(q)}z^{(t_q)}=\sum_{q=1}^{H}\varrho^{(t_q)}(\nu^{(t_q)}z^{(t_q)})=\sum_{q=1}^{L}\bar{\varrho}^{(t)}(\nu^{(t)}z^{(t)})=\bar{\delta}x.$$

Il en résulte facilement que les systèmes de suites (33), (33′) et (34), (34′) sont des ε-représentations des points δx et $\bar{\delta}x$ et, par conséquent, on a les inégalités

$$N(\varepsilon,\delta x)\leqslant G,$$

$$N(\varepsilon,\bar{\delta}x)\leqslant H,$$

ce qui donne, vu (32) et (27″), la propriété 3° (a).

3° (b) $N(\varepsilon,-x)=N(\varepsilon,x)$.

Cette propriété résulte facilement de ce qu'en changeant les signes des termes de la suite (20) dans une ε-représentation quelconque (20), (20′) du point x, on obtient une ε-représentation du point $-x$.

4° $N(\varepsilon,V(x))\leqslant N(\varepsilon,x)+M(\varepsilon)$,

où $V(x)$ est une rotation quelconque de l'espace $\mathcal{E}$ et

$$M(\varepsilon)=\sup_{\|y\|\leqslant n\varphi_E(\varepsilon)}N(\varepsilon,y). \tag{35}$$

Prenons une ε-représentation fondamentale du point x

$$z^{(1)},\dots,z^{(L)}, \tag{36}$$

$$\nu^{(1)},\dots,\nu^{(L)}, \tag{36'}$$

où

$$L=N(\varepsilon,x). \tag{36''}$$

Désignons par

$$\nu^{(f_1)},\dots,\nu^{(f_C)} \tag{37}$$

la suite de tous les termes (36′) qui appartiennent, s'ils existent, à l'intérieur de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$.

Posons

$$d^{(s)} = \begin{cases} \Theta & (s=0), \\ \sum_{j=1}^{s} z^{(j)} & (s=1,\dots,L), \end{cases}$$

et considérons les suites

$$w^{(1)},\dots,w^{(L)}, \tag{38}$$

$$\tau^{(1)},\dots,\tau^{(L)}, \tag{38'}$$

où

$$w^{(s)} = V(d^{(s)}) - V(d^{(s-1)}) \qquad (s=1,..,L),$$

$$\tau^{(s)} = 1 \qquad (s=1,\dots,L).$$

L'opération $V(x)$ étant une rotation, on a l'inégalité

$$\|w^{(s)}\| = \|d^{(s)} - d^{(s-1)}\| = \|z^{(s)}\| \leqslant \varepsilon \qquad (s=1,\dots,L). \tag{39}$$

Evidemment, on a en même temps

$$\sum_{s=1}^{L} \tau^{(s)} w^{(s)} = V(d^{(L)}). \tag{39'}$$

D'après la définition des suites (36), (36') et (37), il vient

$$\|x - d^{(L)}\| = \|\sum_{j=1}^{L} \nu^{(j)} z^{(j)} - \sum_{j=1}^{L} z^{(j)}\| = \|\sum_{e=1}^{C} \bar{\nu}^{(fe)} z^{(fe)}\|$$

$$\leqslant \sum_{e=1}^{C} \|\bar{\nu}^{(fe)} z^{(fe)}\| \leqslant C\varphi_E(\varepsilon) \leqslant n\varphi_E(\varepsilon)$$

et

$$\|V(x) - V(d^{(L)})\| = \|x - d^{(L)}\| \leqslant n\varphi_E(\varepsilon). \tag{40}$$

On voit en outre que les dernières relations subsistent aussi lorsque la suite (37) n'existe pas.

Il résulte de (39), (39') que le système (38), (38') est une ε-représentation du point $V(d^{(L)})$, d'où

$$N[\varepsilon, V(d^{(L)})] \leqslant L. \tag{41}$$

On a ensuite, d'après (40) et (35),

$$N[\varepsilon, V(x) - V(d^{(L)})] \leqslant M(\varepsilon). \tag{42}$$

En même temps il vient, d'après la propriété 2°, que

$$N[\varepsilon, V(x)] \leqslant N[\varepsilon, V(d^{(L)})] + N[\varepsilon, V(x) - V(d^{(L)})]. \tag{43}$$

Les relations (43), (42), (41), (36″) donnent immédiatement la propriété 4°.

5° $N(\varepsilon,x)\geqslant\dfrac{\|x\|}{\varphi_E(\varepsilon)}$.

En prenant une ε-représentation fondamentale du point x,

$$z^{(1)},\ldots,z^{(L)},\qquad \nu^{(1)},\ldots,\nu^{(L)},$$

où

$$L=N(\varepsilon,x),$$

on a

$$\|x\|\leqslant\sum_{s=1}^{L}\|\nu^{(s)}z^{(s)}\|\leqslant L\varphi_E(\varepsilon),$$

d'où résulte la propriété 5°.

II. La pseudonorme. Choisissons maintenant, dans l'espace $\mathcal{E}$, une base quelconque composée de points

$$e_1,e_2,\ldots,e_n \tag{44}$$

et posons

$$N(\varepsilon)=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}N(\varepsilon,e_i). \tag{45}$$

Faisons correspondre à chaque point x de $\mathcal{E}$ le nombre

$$|x|_*=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)}{N(\varepsilon)}. \tag{46}$$

C'est une fonctionnelle dans $\mathcal{E}$ aux valeurs finies ou infinies.

Nous allons démontrer qu'elle est toujours finie et qu'elle satisfait aussi à toutes les conditions citées 1-5 du lemme fondamental.

Bornons nous pour le moment aux points pour lesquels la limite (45) est finie. On a d'abord, pour tous tels points x,x_1,x_2 de $\mathcal{E}$, en s'appuyant sur les propriétés 1°, 2° de la ε-norme, les relations presque évidentes

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)}{N(\varepsilon)}\geqslant 0,$$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x_1+x_2)}{N(\varepsilon)}\leqslant\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x_1)+N(\varepsilon,x_2)}{N(\varepsilon)}$$

$$\leqslant\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x_1)}{N(\varepsilon)}+\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x_2)}{N(\varepsilon)},$$

équivalentes, d'après la définition (46), aux conditions 1 et 2 du lemme.

Démontrons maintenant la condition 3.

On voit d'abord, d'après (45), la propriété 5^0 de la ε-norme et la remarque contenue dans le § 0, que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} N(\varepsilon)=+\infty. \tag{47}$$

On en déduit, en tenant compte de la propriété 3^0(a) de la ε-norme, les inégalités

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,\delta x)}{N(\varepsilon)}\leqslant\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)+n}{N(\varepsilon)}=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)}{N(\varepsilon)}, \tag{48}$$

pour tout nombre

$$0\leqslant\delta\leqslant 1,$$

et

$$\begin{aligned}2\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x/2)}{N(\varepsilon)} &= \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x/2)+N(\varepsilon,x/2)}{N(\varepsilon)}\\ &\leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)+n}{N(\varepsilon)}=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)}{N(\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{49}$$

Par suite, on a, d'après (46), (48) et (49),

$$|\delta x|_*\leqslant|x|_*, \tag{48'}$$

$$\left|\frac{x}{2}\right|_*\leqslant\frac{1}{2}|x|_*, \tag{49'}$$

d'où, par induction,

$$\left|\frac{x}{2^p}\right|_*\leqslant\frac{1}{2^p}|x|_* \qquad (p=1,2,\ldots). \tag{49''}$$

En outre, on a évidemment, vu la propriété 3^0(b) de la ε-norme

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,-x)}{N(\varepsilon)}=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)}{N(\varepsilon)},$$

c'est-à-dire

$$|-x_*|=|x|_*. \tag{50}$$

Soit donné maintenant un nombre réel arbitraire τ. Prenons une suite de nombres naturels r_p $(p=1,2,\ldots)$, tels que

$$\frac{r_p}{2^p} > |\tau| \qquad (p=1,2,\ldots),$$

$$\lim_{p\to\infty} \frac{r_p}{2^p} = |\tau|.$$

En s'appuyant sur (50), (48′), (49″) et sur la propriété 2^0, on déduit que

$$|\tau x|_* = \big||\tau|x\big|_* \leqslant \left|\frac{r_p}{2^p}\, x\right| \leqslant \frac{r_p}{2^p}\,|x|_* \qquad (p=1,2,\ldots),$$

et, par conséquent,

$$|\tau x|_* \leqslant \lim_{p\to\infty} \frac{r_p}{2^p}\,|x|_* = |\tau|\,|x|_*. \tag{51}$$

En remplaçant dans (51) τ et x respectivement par $1/\tau$ et τx, il vient l'inégalité inverse

$$|\tau|\,|x|_* \leqslant |\tau x|_*,$$

ce qui donne, avec (51), la condition demandée 3.

Passons à la condition 4 du lemme. On voit d'abord que, d'après la formule (45),

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{N(\varepsilon, e_i)}{N(\varepsilon)} \leqslant 1 \qquad (i=1,\ldots,n),$$

c'est-à-dire

$$|e_i|_* \leqslant 1 \qquad (i=1,\ldots,n). \tag{52}$$

Désignons, pour tout nombre positif suffisamment petit ε, par $m(\varepsilon)$ le plus grand nombre entier tel que, pour chaque point

$$y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \tag{53}$$

de l'espace $\mathcal{C}$, l'inégalité

$$\|y\| \leqslant n\varphi(\varepsilon) \tag{54}$$

entraîne

$$|\eta_i| < \frac{1}{2^{m(\varepsilon)}} \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{54′}$$

L'existence d'une telle fonction $m(\varepsilon)$ résulte des remarques contenues dans le § 0 et il est clair que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} m(\varepsilon)=+\infty. \tag{55}$$

Remarquons en outre que, d'après la propriété 3°(a), on a

$$N\left(\varepsilon,\frac{x}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\,N(\varepsilon,x)+\frac{n}{2} \tag{55'}$$

et ensuite, par induction,

$$N\left(\varepsilon,\frac{x}{2^p}\right)\leqslant\frac{1}{2^p}\,N(\varepsilon,x)+\frac{n}{2^p}+\frac{n}{2^{p-1}}+\ldots+\frac{n}{2} \tag{55''}$$

$$<\frac{1}{2^p}N(\varepsilon,x)+n \qquad (p=1,2,\ldots).$$

En tenant compte de (55''), (54'), (45) et des propriétés 2°, 3°(a) et 3°(b) on voit que les relations

$$N(\varepsilon,y)\leqslant\sum_{i=1}^{n}N[\varepsilon,\eta_i e_i]=\sum_{i=1}^{n}N(\varepsilon,|\eta_i|e_i)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(N\left(\varepsilon,\frac{e_i}{2^{m(\varepsilon)}}\right)+n\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{m(\varepsilon)}}\,N(\varepsilon,e_i)+2n\right)\leqslant\frac{nN(\varepsilon)}{2^{m(\varepsilon)}}+2n^2$$

ont lieu pour chaque point (53) satisfaisant à la condition (54), et on en déduit l'inégalité

$$M(\varepsilon)\leqslant\frac{nN(\varepsilon)}{2^{m(\varepsilon)}}+2n^2,$$

où le premier terme est la fonction définie par (35). De là, on obtient, vu la propriété 4° et (55),

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N[\varepsilon,V(x)]}{N(\varepsilon)}\leqslant\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)+M(\varepsilon)}{N(\varepsilon)}=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)}{N(\varepsilon)},$$

c'est-à-dire

$$|V(x)|_*\leqslant|x|_*, \tag{56}$$

pour chaque rotation $V(x)$ de l'espace $\mathcal{C}$.

Cette dernière inégalité, étant vraie pour toutes les rotations et tous les points de $\mathcal{C}$, reste aussi vraie si l'on remplace dans (56) x et $V(x)$ respectivement par $V(x)$ et $V^{-1}(x)$, ce qui donne

$$|x|_*\leqslant|V(x)|_*. \tag{57}$$

En remplaçant ensuite dans (56) et (57) $V(x)$ par la rotation

$$V_1(x)=V(x+x_1)-V(x_1),$$

en traitant x_1 comme un paramètre, et en posant

$$x=x_2-x_1,$$

on trouve la condition 4 du lemme.

Remarquons maintenant que, d'après (45), on a

$$\sum_{i=1}^{n} N(\varepsilon, e_i)\geqslant N(\varepsilon)$$

et, par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{n} \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{N(\varepsilon, e_i)}{N(\varepsilon)} \geqslant \limsup_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{N(\varepsilon, e_i)}{N(\varepsilon)} \geqslant 1,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i|_* \geqslant 1. \tag{58}$$

Il en résulte immédiatement la condition 5 du lemme, car tous les membres de la somme (58) ne peuvent être égaux à zéro.

Il reste donc à démontrer que la fonctionnelle (46) est toujours finie. Pour ce but, on représente chaque point x de l'espace $\mathcal{E}$ sous la forme

$$x=\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i,$$

et on a, en tennant compte de (52) et des conditions 2 et 3,

$$|x|_* \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i e_i| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|\,|e_i|_* \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| < +\infty.$$

Ainsi, la démonstration du lemme fondamental est terminée.

Après ces raisonnements auxiliaires passons à la démonstration essentielle du théorème. On le déduit par induction relativement au nombre n de dimensions de l'espace $\mathcal{E}$.

I'. Supposons d'abord $n=1$. La base (44) se réduit donc au terme e_1 et chaque point x de l'espace $\mathcal{E}$ peut être exprimé sous la forme

$$x=\xi_1 e_1,$$

où ξ_1 est un nombre réel. En même temps, on a, d'après (45), (46),

$$|e_1|_*=1$$

et, par conséquent, vu la condition 3 du lemme fondamental,

$$|x|_*=|\xi_1|,$$

d'où

$$|x|_*>0 \quad \text{pour} \quad x\neq\Theta, \tag{59}$$

ce qui montre que la pseudonorme (46) est dans ce cas une norme homogène dans $\mathcal{E}$.

Puisque chaque rotation $V(x)$ de l'espace $\mathcal{E}$ est aussi, d'après la condition 4 du lemme fondamental, une „rotation" de $\mathcal{E}$ relativement à la norme homogène (46), on déduit, à l'aide du théorème de S. Mazur et S. Ulam[6]), que $V(x)$ est une opération linéaire. Le théorème est par cela vérifié dans la première étape.

II′. Supposons maintenant que $n>1$ et que le théorème soit vrai pour chaque espace du type (F) au nombre de dimensions moindre que n. On distinguera deux cas:

A. La pseudonorme (45) satisfait à la condition (59), c'est-à-dire qu'elle est une norme homogène dans $\mathcal{E}$. Alors la démonstration se réduit comme précédemment au théorème de Mazur et Ulam

B. Il existe un système de points linéairement indépendants

$$e_1', e_2', .., e_p' \qquad (p<n), \tag{60}$$

tel que

$$|e_i'|_*=0 \qquad (i=1,\ldots,p), \tag{60′}$$

tandis qu'on a

$$|x|_*>0 \tag{60″}$$

pour chaque point x de l'espace $\mathcal{E}$, indépendant linéairement des points (60). Prenons dans ce cas une base quelconque de $\mathcal{E}$ composée des points (60) et des points

$$e_1'', e_2'', \ldots, e_q'' \qquad (q=n-p) \tag{61}$$

indépendants linéairement des points (60′). Formons ensuite deux sous-espaces $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$ aux bases respectivement (60) et (61).

[6]) Voir [1], p. 166.

Il est clair, que chaque point x de $\mathcal{C}$ peut être exprimé d'une façon univoque sous la forme

$$x=x'+x'', \tag{62}$$

où

$$x' \in \mathcal{C}', \qquad x'' \in \mathcal{C}''.$$

En outre, en exprimant chaque point x' de l'espace $\mathcal{C}'$ sous la forme

$$x'=\sum_{i=1}^{p} \xi_i' e_i',$$

où ξ_i' $(i=1,\ldots,p)$ sont des nombres réels, on en déduit, vu les conditions 2 et 3 du lemme fondamental,

$$|x'|_* \leqslant \sum_{i=1}^{p} |\xi_i' e_i'|_* = \sum_{i=1}^{p} |\xi_i'|\,|e_i'|_*,$$

c'est-à-dire, d'après (60′),

$$|x'|_*=0. \tag{63}$$

En même temps, chaque point x'' de l'espace $\mathcal{C}''$ étant linéairement indépendant des points (60), on a, d'après (60″),

$$|x''|_*>0 \quad \text{pour} \quad x''\neq\Theta, \tag{64}$$

ce qui revient à ce que la pseudonorme (45) est une norme homogène dans l'espace $\mathcal{C}''$. On tire enfin, de (63) et de la condition 2 du lemme fondamental,

$$|x''|_*=|x''|_*-|x'|_* \leqslant |x'+x''|_* \leqslant |x''|+|x'|_*=|x''|_*, \tag{65}$$

c'est-à-dire, d'après (62),

$$|x|_*=|x''|_* \tag{66}$$

pour chaque point x exprimé sous la forme (62).

Soit maintenant $V(x)$ une rotation quelconque de $\mathcal{C}$. D'après ce qui précède, elle peut être aussi exprimée sous la forme

$$V(x)=V'(x)+V''(x), \tag{67}$$

où

$$V'(x) \in \mathcal{C}', \qquad V''(x) \in \mathcal{C}'' \tag{68}$$

sont des opérations univoques de la variable x, définies dans $\mathcal{C}$.

En appliquant les notations (62) et (67), représentons la rotation $V(x)$ sous la forme

$$V(x)=V'(x'')+[V'(x'+x'')-V'(x'')]+V''(x'+x''), \tag{69}$$

et considérons les trois membres de l'expression (69).

Je dis, que les deux derniers de ces membres dépendent d'une manière additive uniquement de la partie x' resp. x'' de la variable x, tandis que le premier terme est une fonction additive de la partie x''.

En effet, l'opération $V(x)$ étant une rotation de $\mathcal{C}$, on déduit de (67), (66) et de la condition 4 du lemme fondamental

$$\begin{aligned}|V(x_2+x_2')-V(x_1+x_1'')|_* &= |V''(x_2'+x_2'')-V''(x_1'+x_2'')|_* \\ &= |(x_2'+x_2'')-(x_1'+x_1'')|_* = |x_2''-x_1''|_*\end{aligned} \tag{70}$$

pour tous les points

$$x_k' \in \mathcal{C}', \qquad x_k'' \in \mathcal{C}'' \qquad (k=1,2).$$

En particulier, en posant dans (70)

$$x_2'=x', \qquad x_2''=x'', \qquad x_1'=\Theta, \qquad x_1''=x'',$$

il vient

$$|V''(x'+x'')-V''(x'')|_*=0,$$

c'est-à-dire, d'après (64),

$$V''(x'+x'')=V''(x'') \tag{71}$$

pour tous les points

$$x' \in \mathcal{C}', \qquad x'' \in \mathcal{C}'',$$

et, en posant

$$x_1'=\Theta, \qquad x_2'=\Theta,$$

on trouve

$$|V''(x_2'')-V''(x_1'')|_*=|x_2''-x_1''|_*. \tag{71'}$$

La relation (71) montre, que le dernier membre de (69) ne dépend que de la partie x'' de la variable x. En même temps, il résulte de (71') et de l'égalité évidente $V''(\Theta)=\Theta$, que l'opération définie dans l'espace $\mathcal{C}''$ par

$$\overline{\overline{V}}(x'')=V''(x''), \qquad \text{où} \quad x'' \in \mathcal{C}'', \tag{72}$$

est une rotation de $\mathcal{C}''$ relativement à la norme (46).

Le nombre de dimensions de $\mathcal{C}''$ étant moindre que n, on en déduit, d'après la supposition donnée au commencement de II′, que l'opération (72), resp. le dernier membre de l'expression (69), est une opération additive dans $\mathcal{C}''$, resp. $\mathcal{C}$.

Considérons maintenant le second membre de l'expression (69). En revenant à l'ancienne norme dans $\mathcal{C}$ on a, vu (71), les égalités

$$\|V(x_2'+x'')-V(x_1'+x'')\|$$

$$=\|[V'(x_2'+x'')-V'(x'')]-[V'(x_1'+x'')-V'(x'')]\|=\|x_2'-x_1'\| \tag{73}$$

pour tous les points

$$x_k' \in \mathcal{C}', \qquad x'' \in \mathcal{C}'' \qquad (k=1,2). \tag{73′}$$

On voit par là que, le point x'' étant fixe pour le moment, l'opération définie dans l'espace $\mathcal{C}'$ par la formule

$$\bar{V}(x')=V'(x'+x'')-V'(x''), \quad \text{où} \quad x' \in \mathcal{C}', \tag{74}$$

qui dépend du paramètre x'', est une rotation de $\mathcal{C}'$ relativement à la norme ancienne et, par conséquent, vu la supposition citée de II′, cette opération (74) est additive donc linéaire dans $\mathcal{C}'$. On peut montrer qu'elle ne dépend pas de x''.

En effet, l'opération $V(x)$ étant une rotation de l'espace $\mathcal{C}$, on trouve, d'après (66), (68), (69), (71) et ce qui précède,

$$\|V(\tau x'+x_2'')-V(\tau x'+x_1'')\|=\|[V'(\tau x'+x_2'')-V'(x_2'')]$$

$$-[V'(\tau x'+x_1'')-V'(x_1'')]+[V'(x_2'')-V'(x_1'')]+[V''(x_2'')-V''(x_1'')]\|$$

$$=\|\tau\{[V'(x'+x_2'')-V'(x_2'')]-[V'(x'+x_1'')-V'(x_1'')]\}+[V'(x_2'')-V'(x_1'')]$$

$$+[V''(x_2'')-V''(x_1'')]\|=\|(\tau x'+x_2'')-(\tau x'+x_1'')\|=\|x_2''-x_1''\|,$$

et de même

$$\|\tau\{[V'(x'+x_2'')-V'(x_2'')]+[V'(x'+x_1'')-V'(x_1'')]\}\|$$

$$\leqslant\|x_2''-x_1''\|+\|[V'(x_2'')-V'(x_1'')]+[V''(x_2'')-V''(x_1'')]\| \tag{74′}$$

pour tout nombre réel τ et tous les points

$$x' \in \mathcal{C}', \qquad x_k'' \in \mathcal{C}'' \qquad (k=1,2). \tag{74″}$$

On en déduit, d'après les remarques du § 0 que, pour les points

(74″) dont la distance est suffisamment petite[7]), le coefficient du nombre τ dans le premier terme de (74′) doit être égal à Θ. Un raisonnement très facile montre qu'il est aussi égal à Θ pour tous les points (74″) et, par suite, l'opération (74) est indépendante du paramètre x'', c. q. f. d.

Nous étudierons le premier membre de l'expression (69).

Considérons l'opération définie dans l'espace $\mathcal{C}''$ par la formule

$$V^*(x'')=V'(x''), \qquad \text{où} \quad x'' \in \mathcal{C}'', \tag{75}$$

et exprimons l'opération $V(x)$, vu (62), (69), (72), (74), (75) sous la forme

$$V(x)=V^*(x'')+\bar{V}(x')+\bar{\bar{V}}(x''). \tag{76}$$

Par un calcul facile on trouve l'opération inverse

$$V^{-1}(x)=-\bar{V}^{-1}\{V^*[\bar{\bar{V}}^{-1}(x'')]\}+\bar{V}^{-1}(x')+\bar{\bar{V}}^{-1}(x'')\ ^8). \tag{77}$$

Considérons ensuite, en appliquant (62), l'opération composée

$$\begin{aligned}\hat{V}(x)&=V^{-1}[V(x+y'')-V(y'')]\\ &=x+\bar{V}^{-1}[V^*(x''+y'')-V^*(x'')-V^*(y'')],\end{aligned} \tag{78}$$

où $x \in \mathcal{C}$ et y'' est un paramètre arbitraire appartenant à l'espace $\mathcal{C}''$, et formons les opérations iterées

$$\hat{V}^j(x)=x+j\bar{V}^{-1}[V^*(x''+y'')-V^*(x'')-V^*(y'')] \qquad (j=1,2,\ldots). \tag{79}$$

Les opérations (79) étant évidemment des rotations de l'espace $\mathcal{C}$ relativement à la norme ancienne, on a, par conséquent, les égalités

$$\|\hat{V}^j(x_2'')-\hat{V}^j(x_1'')\|=\|x_2''-x_1''\| \qquad (j=1,2,\ldots)$$

---

[7]) Il suffit choisir x_1'', x_2'' de telle façon que l'expression du côté droit de (74′) soit mondre que η_E.

[8]) En admettant (62) et en posant $V^{-1}(x'+x'')=y'+y''$, où $y' \in \mathcal{C}'$, $y'' \in \mathcal{C}''$, nous avons, en tenant compte de ce qui précède,

$$x'+x''=V(y'+y'')=V^*(y'')+\bar{V}(y')+\bar{\bar{V}}(y'')$$

et par conséquent $\bar{\bar{V}}(y'')=x''$, $y''=\bar{\bar{V}}^{-1}(x'')$, d'où ensuite

$$\bar{V}(y')=x'-V^*[\bar{\bar{V}}^{-1}(x'')], \qquad y'=\bar{V}^{-1}(x')-\bar{V}^{-1}\{V\ [\bar{\bar{V}}^{-1}(x'')]\},$$

ce qui donne immédiatement la formule (77).

pour tous les points

$$x_k'' \in \mathcal{C}'' \qquad (k=1,2).$$

On en déduit, comme dans le cas des formules (74′), que le coefficient du nombre j dans le second terme de (79) est identiquement égal à Θ, donc la fonction (75) est une opération additive.

Somme toute, tous les trois membres du côté droit de l'expression (76) étant additifs, l'opération $V(x)$ est aussi additive, donc linéaire.

Ainsi le théorème est aussi vérifié pour le cas B de la seconde étape, et la démonstration par induction est terminée.

§ 2. Complémentaires.

S. MAZUR a démontré que le théorème de ce travail est équivalent au suivant:

Théorème II. *Étant donné un groupe G composé des transformations homéomorphes d'un espace quelconque $\mathcal{C}$ du type (F) à un nombre arbitraire fini de dimensions en lui-même, tel que*

(A) *le groupe G contient toutes les translations de l'espace $\mathcal{C}$,*

(B) *le sous-groupe G_0, composé de toutes les transformations de G qui ont Θ comme point fixe, est compact*[9]),

toutes les transformations du groupe G_0 sont linéaires.

Chaque espace du type (F) à n dimensions étant évidemment isomorphe avec l'espace euclidien à n dimensions, on peut remplacer dans ce théorème, sans en restreindre la généralité, l'espace donné $\mathcal{C}$ par l'espace euclidien.

Voici la démonstration de l'équivalence des deux théorèmes, donnée par S. MAZUR.

I. Admettons le théorème I. Soit $\mathcal{C}$ un espace quelconque du type (F) à n dimensions. Considérons deux groupes G et G_0 des transformations homéomorphes de $\mathcal{C}$ en lui-même, satisfaisant aux conditions (A) et (B) du théorème II. Posons pour chaque x de $\mathcal{C}$,

$$\|x\|^* = \sup_{V(x) \in G_0} \|V(x)\|. \tag{80}$$

[9]) C'est-à-dire que chaque suite infinie des transformations du groupe G_0 contient une suite partielle tendant uniformément, relativement à la norme, vers une transformation de G_0 dans chaque ensemble compact de points de l'espace $\mathcal{C}$.

Nous étudierons ici quelques propriétés de la fonctionnelle (80). On voit d'abord que

$$\|x_1+x_2\|^* \leqslant \|x_1\|^* + \|x_2\|^*$$

pour tous les points x_1, x_2 de $\mathcal{C}$.

En efffet, en introduisant, pour chaque transformation $V(x)$ du groupe G_0, la transformation auxiliaire

$$V_1(x) = V(x+x_1) - V(x_1), \tag{81}$$

il vient de (B), que $V_1(x)$ appartient au groupe G_0 et que

$$\|V(x_1+x_2)\| \leqslant \|V_1(x_2)\| + \|V(x_1)\| \leqslant \|x_1\|^* + \|x_2\|^*,$$

d'où résulte immédiatement la relation demandée.

On voit ensuite que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0 \text{ entraîne } \lim_{n\to\infty} \|x_n\|^* = 0 \tag{82}$$

pour chaque suite $\{x_n\}$ de points de l'espace $\mathcal{C}$.

Pour le démontrer, remarquons que, pour chaque nombre positif ε, il existe un nombre positif δ tel que $\|x\|<\delta$ entraîne $\|V(x)\|<\varepsilon$, pour chaque point x de l'espace $\mathcal{C}$ et chaque transformation $V(x)$ du groupe G_0.

En effet, en supposant le contraire, il existerait une suite $\{\bar{x}_n\}$ de points de l'espace $\mathcal{C}$, et une suite $\{\bar{V}_n(x)\}$ de transformations du groupe G_0, telles que $\bar{x}_n \to \Theta$, tandis que $\bar{V}_n(\bar{x}_n)$ non $\to \Theta$; le groupe G_0 étant compact, on peut aussi supposer que la suite $\{\bar{V}_n(x)\}$ converge uniformément dans chaque ensemble compact de points de l'espace $\mathcal{C}$ vers une transformation $\bar{V}_0(x)$ du groupe G_0; en prenant en particulier, l'ensemble compact, composé de points de la suite $\{\bar{x}_n\}$ et de point Θ, on en déduit la relation $\bar{V}_n(\bar{x}_n) \to \bar{V}_0(\Theta) = \Theta$ [10]) contraire à la précédente. Cette remarque donne facilement la relation (82).

D'après les propriétés citées ci-dessus et d'autres évidentes, on voit que la fonctionnelle $\|x\|^*$ représente une norme dans $\mathcal{C}$.

Remplaçons maintenant la norme ancienne dans $\mathcal{C}$ par cette norme nouvelle. Il suit de là un espace nouveau $\mathcal{C}^*$ du type (F), et il est facile de vérifier qu'il est isomorphe avec l'espace précédent $\mathcal{C}$.

---

[10]) Voir [5], p. 108-109.

Les transformations des groupes cités peuvent être aussi considérées comme transformations biunivoques de l'espace $\mathcal{C}^*$ en lui-même et nous démontrerons que chaque transformation du groupe G_0 est une rotation de $\mathcal{C}^*$.

En effet, étant donnée une transformation quelconque $V_0(x)$ du groupe G_0, on a, pour tous les points x_1, x_2 de $\mathcal{C}$ resp. $\mathcal{C}^*$ et pour chaque autre transformation $V(x)$ du groupe G_0,

$$\|V[V_0(x_2)-V_0(x_1)]\|=\|V[V_{01}(x_2-x_1)]\|\leqslant\|x_2-x_1\|^*, \tag{83}$$

et, par conséquent,

$$\|V_0(x_2)-V_0(x_1)\|^*\leqslant\|x_2-x_1\|^*, \tag{83'}$$

où $V_{01}(x)$ désigne dans (83) la rotation auxiliaire correspondant à $V_0(x)$, analogue à celle de (81); en remplaçant, dans (83'), $V_0(x), x_1, x_2$ respectivement par $V_0^{-1}(x), V_0(x_1), V_0(x_2)$, on a l'inégalité inverse

$$\|x_2-x_1\|^*\leqslant\|V_0(x_2)-V_0(x_1)\|^*,$$

ce qui montre, avec ce qui précède, que la transformation $V_0(x)$ est une rotation de $\mathcal{C}^*$.

Toutes les transformations du groupe G_0 étant des rotations de l'espace $\mathcal{C}^*$, on trouve qu'elles sont, vu la supposition du comencement, additives donc linéaires, ce qui implique le théorème II.

II. Admettons le théorème II. Considérons les groupes G et G_0 composés respectivement de toutes les transformations isométriques d'un espace donné $\mathcal{C}$ du type (F) à n dimension en lui-même et de toutes les rotations de cet espace.

Nous démontrerons que les groupes décrits satisfont aux conditions (A) et (B) du théorème II.

La première condition étant évidente, passons à la seconde. On voit d'abord que toutes les transformations du groupe G sont uniformément continues dans l'espace $\mathcal{C}$, vu l'égalité

$$\|U(x_2)-U(x_1)\|=\|x_2-x_1\|, \tag{84}$$

qui a lieu pour tous les points x_1, x_2 de $\mathcal{C}$ et pour chaque transformation $U(x)$ du groupe G.

On peut montrer ensuite que, pour chaque suite $\{V_n(x)\}$ de transformations du groupe G_0 et pour chaque point x_0 de l'espace $\mathcal{C}$, il existe une suite partielle de la suite donnée convergente en le point x_0.

En effet, on peut choisir un nombre naturel suffisamment grand L tel que le point x_0/L appartienne à la sphère compacte décrite au § 0; on a dans ce cas

$$V_n(x_0)=\sum_{s=1}^{L} y_n^{(s)}, \tag{85}$$

où

$$y_n^{(s)}=V_n\left(\frac{s}{L}x_0\right)-V_n\left(\frac{s-1}{L}x_0\right) \quad (s=1,\dots,L;n=1,2,\dots), \tag{85'}$$

en même temps que

$$\|y_n^{(s)}\|=\left\|\frac{x_0}{L}\right\|\leqslant\eta_E; \tag{85''}$$

les points (85') appartenant, d'aprés (85''), à la sphère compacte, il existe une suite croissante d'indices $\{n_k\}$ telle que toutes les suites

$$\{y_{n_k}^{(s)}\} \qquad (s=1,\dots,L)$$

soient convergentes; il en résulte immédiatement, vu (85), qu'alors la suite partielle de transformations $\{V_{n_k}(x)\}$ est aussi convergente en x_0.

On peut montrer enfin que, pour chaque suite $\{V_n(x)\}$ de transformations du groupe G_0, tendant uniformément vers une opération $V_0(x)$ dans chaque ensemble compact de $\mathcal{E}$, la limite $V_0(x_0)$ de cette suite appartient aussi au groupe G_0.

En effet, on a d'une part, d'après (84),

$$\|V_n(x_2)-V_n(x_1)\|=\|x_2-x_1\|,$$

et, par suite,

$$\lim_{n\to\infty}\|V_n(x_2)-V_n(x_1)\|=\|V_0(x_2)-V_0(x_1)\|=\|x_2-x_1\|$$

pour tous les points x_1,x_2 de $\mathcal{E}$, ce qui montre que la transformation $V_0(x)$ est isométrique. D'autre part, étant donné un point quelconque y_0 de $\mathcal{E}$, on tire de ce qui précède, que la suite de points $\{x_n\}$, définis par les égalités

$$x_n=V_n^{-1}(y_0) \qquad (n=1,2,\dots), \tag{86}$$

contient une suite partielle $\{x_{n_k}\}$ tendant vers un point x_0 de $\mathcal{E}$.

Il en résulte immédiatement, en tenant compte de (86) et de la convergence uniforme de la suite $\{V_n(x)\}$ dans les ensembles compacts de $\mathcal{C}$, que

$$y_0 = \lim_{k\to\infty} V_{n_k}(x_{n_k}) = V_0(x_0)\ ^{11}),$$

ce qui montre que l'opération $V_0(x)$ transforme $\mathcal{C}$ tout entier en lui-même.

En somme cette opération est une rotation de l'espace $\mathcal{C}$, c. q. f. d.

A l'aide des propriétés mentionnées du groupe G on déduit, en appliquant la méthode bien connue, la seconde condition demandée.

Les transformations du groupe G satisfaisant aux deux conditions précédentes, on en déduit, d'après la supposition I, que chaque transformation du groupe G est linéaire, c'est-à-dire qu'on a le théorème I dans un cas particulier, ce qui équivaut, comme il l'a été démontré, au cas général de ce théorème.

Bibliographie.

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[2] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires (I)*, Studia Mathematica 10 (1948), p. 184-208.

[3] N. Aronszajn, *Caractérisation métrique de l'espace de Hilbert, des espaces vectoriels et de certains groupes métriques*, Comptes Rendus 201 (1935), p. 811-813.

[4] M. Eidelheit et S. Mazur, *Eine Bemerkung über Räume vom Typus (F)*, Studia Mathematica 7 (1937), p. 159-161.

[5] K. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa-Wrocław 1948.

---

[11]) Voir [5], p. 108-109.

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

(Reçu par la Rédaction le 15. 2. 1952)

POLSKA AKADEMIA NAUK · INSTYTUT MATEMATYCZNY

ROZPRAWY MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY
KAROL BORSUK redaktor
ANDRZEJ MOSTOWSKI MARCELI STARK
STANISŁAW TURSKI

X

ZYGMUNT CHARZYŃSKI

Sur les fonctions univalentes algébriques bornées

WARSZAWA 1955
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Introduction

Je présente ici une méthode d'approximation des fonctions univalentes bornées par des fonctions analogues algébriques vérifiant certaines équations simples.

Je considère ensuite des classes compactes de telles fonctions algébriques et je déduis les conditions nécessaires que doivent satisfaire dans ces classes des fonctions extrémales pour lesquelles certaines fonctionnelles atteignent des valeurs maxima*).

Notations et définitions

Désignons par $K(\xi,r)$ et $K^*(\xi,r)$ respectivement le cercle ouvert de centre ξ et de rayon r, et la circonférence de ce cercle.

Désignons par $\mathrm{Re}\{\zeta\}$ et $\mathrm{Im}\{\zeta\}$ respectivement la partie réelle et imaginaire du nombre complexe ζ. Pour la fonction $\varphi(\zeta)$ définie dans l'ensemble W, désignons par $\varphi(W)$ l'image de W obtenue à l'aide de $\varphi(\zeta)$.

Appelons *fonction univalente bornée* toute fonction univalente de la forme

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots, \qquad |z|<1,\ a_1>0,$$

telle que $|f(z)|<1$ pour $|z|<1$.

Appelons *fonction rationnelle spéciale* toute fonction de la forme

$$\varrho(\zeta)=\sum_{s=0}^{K}(C_s\zeta^{-s}+\bar{C}_s\zeta^s) \qquad (C_K\neq 0),$$

et le nombre $2K$ — le *degré* de cette fonction. Remarquons la propriété suivante des fonctions de ce genre: $\varrho(1/\bar{\zeta})=\overline{\varrho(\zeta)}$; en particulier $\mathrm{Im}\{\varrho(\zeta)\}=0$ pour $|\zeta|=1$.

Appelons *distance de deux ensembles plans*, par exemple de deux arcs simples S et T, la borne inférieure des nombres positifs ε tels que

$$S\subset\bigcup_{\xi\in T}K(\zeta,\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad T\subset\bigcup_{\xi\in S}K(\zeta,\varepsilon).$$

*) Ces résultats ont été communiqués à la séance de la Société Polonaise des Mathématiques à Łódź le 30 mars 1953.

1. Résultats auxiliaires

Nous présentons ci-dessous six lemmes qui se rendront utiles dans la suite.

LEMME 1. *Soit une suite quelconque de fonctions* $\{b_j(z)\}$ *satisfaisant aux cinq conditions suivantes*:

1. *Chaque fonction* $b_j(z)$ *est holomorphe dans le cercle* $|z|<\varrho_j$, *où* ϱ_j *est un nombre positif.*

2. *Chaque fonction* $b_j(z)$ *vérifie l'identité* $U_j(b_j(z))=V_j(z)$, *où*

$$U_j(w)=\sum_{t=-M_j}^{M_j} L_{tj}w^t, \qquad V_j(z)=\sum_{t=-M_j}^{M_j} K_{tj}z^t,$$

et les suites complexes finies L_{tj} *et* K_{tj} *satisfont aux conditions*

$$|L_{-M_j j}|>g, \quad |L_{M_j j}|>g, \quad |K_{-M_j j}|>g, \quad |K_{M_j j}|>g,$$

$$|L_{tj}|<G, \quad |K_{tj}|<G, \quad |M_j|<M_j \qquad (t=-M_j,\ldots,M_j;\ j=1,2,\ldots),$$

g, G *et* M *étant des constantes positives.*

3. *La suite des nombres* ϱ_j *est convergente vers une limite finie* ϱ_0 *non nulle.*

4. *La suite* $\{b_j(z)\}$ *est convergente presque uniformément dans le cercle* $|z|<\varrho_0$ *vers une fonction holomorphe* $b_0(z)$ [1]).

5. *Les suites* $\{U_j(w)\}$ *et* $\{V_j(z)\}$ *sont convergentes presque uniformément sur le plan complexe, excepté aux points zéro et l'infini, vers des fonctions non constantes* $U_0(w)$ *et* $V_0(z)$ *analogues à celles de la condition* 2.

Alors pour toute suite de points $\{z_j\}$ *convergente vers un point* z_0, *telle que* $|z_j|<\varrho_j$ *pour tout* j *et* $|z_0|=\varrho_0$, *la suite* $\{b_j(z_j)\}$ *converge vers un point* w_0 *qui ne dépend que de* z_0.

Démonstration. Soient w_h $(h=1,\ldots,R)$ toutes les différentes racines de l'équation $U_0(w)=V_0(z_0)$.

Choisissons un nombre positif ε de manière que tous les cercles $K(w_h,\varepsilon)$ $(h=1,\ldots,R)$ avec leurs circonférences soient disjoints. Il résulte

[1]) Voir [3], p. 3-4.

facilement des conditions 2,5 du lemme qu'il existe, pour ε ainsi choisi, un voisinage H du point z_0 et un indice J' tels que, pour tout paramètre $z \in H$, toutes les racines des équations

$$U_j(w) = V_j(z), \quad \text{où} \quad j > J', \tag{1.1}$$

$$U_0(w) = V_0(z) \tag{1.2}$$

sont situées dans la somme

$$S = \bigcup_h K(w_h, \varepsilon).$$

Puisque pour tout $z \in H \frown K(0, \varrho_j)$ ou $z \in H \frown K(0, \varrho_0)$ les nombres $b_j(z)$ ou $b_0(z)$ sont des racines des équations du type (1.1) ou (1.2) d'après les conditions 2, 4, 5 du lemme, on a

$$b_j\big(H \frown K(0, \varrho_j)\big) \subset S \quad \text{pour} \quad j > J', \tag{1.3}$$

$$b_0\big(H \frown K(0, \varrho_0)\big) \subset S. \tag{1.4}$$

Soit maintenant J un indice plus grand que J' et tel que les ensembles $H \frown K(0, \varrho_j)$ $(j > J)$ et $H \frown K(0, \varrho_0)$ aient un point commun ζ. Choisissons, en tenant compte de (1.4) et $j > J$ et de la définition de l'ensemble S, un indice h_0 tel que

$$b_0(\zeta) \in K(w_{h_0}, \varepsilon). \tag{1.5}$$

Comme les suites $\{b_j(z)\}$ et $\{z_j\}$ sont convergentes vers $b_0(z)$ et z_0, il existe donc un indice I plus grand que J tel que

$$b_j(\zeta) \in K(w_{h_0}, \varepsilon) \quad \text{pour} \quad j > I, \tag{1.6}$$

$$z_j \in H \frown K(0, \varrho_j) \quad \text{pour} \quad j > I. \tag{1.7}$$

Comme les ensembles des côtés gauches de (1.3), (1.4) sont connexes et ont suivant (1.6), (1.5) des points communs avec le cercle $K(w_{h_0}, \varepsilon)$ pour $j > I$, il résulte, des définitions des cercles $K(w_h, \varepsilon)$ $(h = 1, \ldots, R)$ et de l'ensemble S, qu'ils doivent être contenus dans le cercle $K(w_{h_0}, \varepsilon)$. En particulier, on a suivant (1.7)

$$b_j(z_j) \in K(w_{h_0}, \varepsilon) \quad \text{pour} \quad j > I. \tag{1.8}$$

Puisque enfin ε était choisi arbitrairement, la relation (1.8) prouve que la suite $\{b_j(z_j)\}$ est convergente, ce qui entraîne d'après cette relation et la définition des indices J et h_0, que le point w_{h_0} ne dépend pas de ε, donc qu'il dépend uniquement de z_0. En posant alors $w_0 = w_{h_0}$, il suit de (1.8) que la suite $\{b_j(z_j)\}$ converge vers w_0, c. q. f. d.

LEMME 2. *Soit une fonction $b(z)$ holomorphe dans le cercle $|z|<\varrho<\infty$ et y vérifiant l'identité $U(b(z))=V(z)$, où*

$$U(w)=\sum_{t=-M}^{M} L_t w^t, \qquad V(z)=\sum_{t=-M}^{M} K_t z^t,$$

et les suites L_t ($L_{-M}\neq 0$, $L_M\neq 0$), K_t ($K_{-M}\neq 0$, $K_M\neq 0$) ($t=-M,\ldots,M$) sont complexes finies.

La fonction $b(z)$ s'étend alors de manière continue sur tout le cercle fermé $|z|\leqslant\varrho$.

Pour la démonstration de ce lemme, il suffit de poser $b_j(z)=b(z)$, $U_j(w)=U(w)$, $V_j(z)=V(z)$ ($j=1,2,\ldots$), et d'appliquer le résultat précédent.

LEMME 3. *Soit une suite quelconque de fonctions $\{b_j(z)\}$ satisfaisant aux cinq conditions du lemme 1. La relation*

$$\lim_{j\to\infty} z_j = z_0$$

implique alors

$$\lim_{j\to\infty} b_j(z_j) = b_0(z_0)$$

pour toute suite de points $\{z_j\}$ convergente vers un point z_0 et telle que $|z_j|\leqslant\varrho_j$ ($j=1,2,\ldots$); l'on admet évidemment, suivant le lemme 2, que chacune des fonctions $b_j(z)$ et $b_0(z)$ est étendu sur le cercle $|z|\leqslant\varrho_j$.

Démonstration. Ce lemme résulte du lemme 2 et d'un raisonnement analogue à celui du lemme 1.

Soient $K+L$ fonctions complexes

$$g_p(z_1,\ldots,z_s,\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_s,t_1,\ldots,t_R) \qquad (p=1,\ldots,K) \tag{1.9}$$

$$h_q(z_1,\ldots,z_s,\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_s,t_1,\ldots,t_R) \qquad (q=1,\ldots,L) \tag{1.10}$$

et une fonction

$$f(z_1,\ldots,z_s,\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_s,t_1,\ldots,t_R) \tag{1.11}$$

toutes de $2s$ variables complexes et R variables réelles

$$z_1,\ldots,z_s,\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_s,t_1,\ldots,t_R,$$

définies dans un domaine V, où elles admettent les dérivés partielles du premier ordre continues. Supposons pour le moment que les variables complexes marquées d'un trait ne sont pas conjuguées aux autres, mais tout-à-fait indépendantes.

Considérons l'ensemble B composé de tous les points de V de la forme

$$z_1,\ldots,z_s,\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_s,t_1,\ldots,t_R, \tag{1.12}$$

tels que

$$g_p(z_1,\dots,z_s,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s,t_1,\dots,t_R)=0 \qquad (p=1,\dots,K) \tag{1.13}$$

$$h_q(z_1,\dots,z_s,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s,t_1,\dots,t_R)=0 \qquad (q=1,\dots,L), \tag{1.14}$$

qù les variables marquées d'un trait ont maintenant le sens habituel, contrairement à la supposition faite ci-dessus.

Supposons que pour les points de la forme (1.12) les fonctions (1.10) et (1.11) n'admettent que des valeurs réelles.

Supposons enfin que la fonction (1.11) atteint en un certain point $z_1^*,\dots,z_s^*,\bar{z}_1^*,\dots,\bar{z}_s^*,t_1^*,\dots,t_R^*$ de l'ensemble B son extrême local dans cet ensemble.

LEMME 4. *Il existe un système non trivial de multiplicateurs complexes et réels λ_p,μ_q,τ correspondant aux conditions* (1.13), (1.14) *et à la fonction* (1.11), *dans lequel μ_q et τ sont réels, $p=1,\dots,K$, $q=1,\dots,L$, et tel qu'ont lieu les relations suivantes*:

$$\left[\sum_{p=1}^{K}\left(\lambda_p\left(\frac{\partial g_p}{\partial z_j}\right)+\bar{\lambda}_p\left(\overline{\frac{\partial g_p}{\partial \bar{z}_j}}\right)\right)\right]+\left[\sum_{q=1}^{L}\left(\mu_q\left(\frac{\partial h_q}{\partial z_j}\right)+\mu_q\left(\overline{\frac{\partial h_q}{\partial \bar{z}_j}}\right)\right)\right]$$

$$=\tau\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)+\tau\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}}\right) \qquad (j=1,\dots,S), \tag{1.15}$$

$$\left[\sum_{p=1}^{K}\left(\lambda_p\left(\frac{\partial g_p}{\partial t_m}\right)+\bar{\lambda}_p\left(\overline{\frac{\partial g_p}{\partial \bar{t}_m}}\right)\right)\right]+\left[\sum_{q=1}^{L}\left(\mu_q\left(\frac{\partial h_q}{\partial t_m}\right)+\mu_q\left(\overline{\frac{\partial h_q}{\partial \bar{t}_m}}\right)\right)\right]$$

$$=\tau\left(\frac{\partial f}{\partial t_m}\right)+\tau\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{t}_m}}\right) \qquad (m=1,\dots,R). \tag{1.16}$$

Pour symétrie, nous adoptons ici les notations doubles t_m et $\bar{t}_m$ pour les variables réelles; les dérivées partielles se rattachent aux valeurs extrémales $z_1^*,\dots,z_s^*,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s^*,t_1^*,\dots,t_R^*$.

Démonstration. Posons

$$z_j=u_j+iv_j \qquad (j=1,\dots,S), \tag{1.17}$$

$$z_j^*=u_j^*+iv_j^* \qquad (j=1,\dots,S), \tag{1.18}$$

et remplaçons les conditions (1.13) par les suivantes qui leur sont équivalentes:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\{g_p(z_1,\dots,z_s,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s,t_1,\dots,t_R)\}=0 \qquad (p=1,\dots,K),\\ &\operatorname{Im}\{g_p(z_1,\dots,z_s,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_s,t_1,\dots,t_R)\}=0 \qquad (p=1,\dots,K).\end{aligned} \tag{1.19}$$

En considérant, d'après (1.17), l'expression (1.11) et les côtés gauches de (1.19) et (1.14) comme des fonctions réelles des variables réelles

$u_1,\dots,u_s,v_1,\dots,v_s,t_1,\dots,t_R$, on voit facilement que (1.11) atteint pour $u_1^*,\dots,u_s^*,v_1^*,\dots,v_s^*,t_1^*,\dots,t_R^*$ son extrême local dans l'ensemble des points $u_1,\dots,u_s,v_1,\dots,v_s,t_1,\dots,t_R$ qui satisfont aux conditions (1.19) et (1.14).

En vertu de la méthode connue des multiplicateurs, il existe un système non trivial de $2K+L+1$ nombres réels α_p,β_p $(p=1,\dots,K),\mu_q$ $(q=1,\dots,L),\tau$ tel que

$$(1.20)\qquad \left[\sum_{p=1}^{K}\left(\alpha_p\frac{\partial\,\mathrm{Re}\{g_p\}}{\partial u_j}+\beta_p\frac{\partial\,\mathrm{Im}\{g_p\}}{\partial u_j}\right)\right]+\left[\sum_{q=1}^{L}\mu_q\frac{\partial h_q}{\partial u_j}\right]=\tau\frac{\partial f}{\partial u_j}\qquad (j=1,\dots,S),$$

$$(1.21)\qquad \left[\sum_{p=1}^{K}\left(\alpha_p\frac{\partial\,\mathrm{Re}\{g_p\}}{\partial v_j}+\beta_p\frac{\partial\,\mathrm{Im}\{g_p\}}{\partial v_j}\right)\right]+\left[\sum_{q=1}^{L}\mu_q\frac{\partial h_q}{\partial v_j}\right]=\tau\frac{\partial f}{\partial v_j}\qquad (j=1,\dots,S),$$

$$(1.22)\qquad \left[\sum_{p=1}^{K}\left(\alpha_p\frac{\partial\,\mathrm{Re}\{g_p\}}{\partial t_m}+\beta_p\frac{\partial\,\mathrm{Im}\{g_p\}}{\partial t_m}\right)\right]+\left[\sum_{q=1}^{L}\mu_q\frac{\partial h_q}{\partial t_m}\right]=\tau\frac{\partial f}{\partial t_m}\qquad (m=1,\dots,R),$$

où les dérivées partielles doivent être calculées ici, ainsi que dans la suite, pour les valeurs extrémales $u_1^*,\dots,u_s^*,v_1^*,\dots,v_s^*,t_1^*,\dots,t_R^*$. On a en même temps, pour tous les indices p,q,j,m,

$$\frac{\partial\,\mathrm{Re}\{g_p\}}{\partial u_j}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial\bar z_j}\right\},\qquad \frac{\partial\,\mathrm{Im}\{g_p\}}{\partial u_j}=\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial\bar z_j}\right\},$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{Re}\{g_p\}}{\partial v_j}=-\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial\bar z_j}\right\},\qquad \frac{\partial\,\mathrm{Im}\{g_p\}}{\partial v_j}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial z_j}\right\}-\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial\bar z_j}\right\},$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{Re}\{g_p\}}{\partial t_m}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial t_m}\right\},\qquad \frac{\partial\,\mathrm{Im}\{g_p\}}{\partial t_m}=\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial g_p}{\partial t_m}\right\},$$

$$\frac{\partial h}{\partial u_j}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial h}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial h}{\partial\bar z_j}\right\},\qquad \frac{\partial h}{\partial v_j}=-\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial h}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial h}{\partial\bar z_j}\right\},$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_j}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial f}{\partial\bar z_j}\right\},\qquad \frac{\partial f}{\partial v_j}=-\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\}+\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial f}{\partial\bar z_j}\right\},$$

où les dérivées partielles des fonctions (1.9), (1.10), (1.11) doivent être calculées pour les valeurs extrémales $z_1^*,\ldots,z_s^*,\bar{z}_1^*,\ldots,\bar{z}_s^*,t_1^*,\ldots,t_R^*$.

En substituant dans les égalités (1.20), (1.21), (1.22) les côtés droits des dernières équations obtenues, en multipliant chaque côtés des égalités (1.21) par i et en soustrayant ensuite celles-ci des égalités respectives (1.20), on a, en posant encore $\lambda_p=\alpha_p-i\beta_p$ $(p=1,\ldots,K)$, les égalités (1.15) et (1.16), c. q. f. d.

Soit une fonction holomorphe quelconque $q(\zeta)$ dans un ensemble ouvert U. Supposons que U soit symétrique par rapport à l'axe réel et que $q(\bar{\zeta})=\overline{q(\zeta)}$ pour $\zeta\in U$.

Soit un ensemble E symétrique par rapport à l'axe réel, contenu dans le complémentaire de U, et tel que sa fermeture ait des points communs avec toutes les composantes du complémentaire de U. Soit un ensemble fermé quelconque V contenu dans U.

LEMME 5. *On peut, dans l'ensemble V, approximer arbitrairement la fonction $q(\zeta)$ par une fonction rationnelle $\varkappa(\zeta)$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

1. *Tous les pôles de $\varkappa(\zeta)$ appartiennent à E;*
2. *Pour tout ζ on a $\varkappa(\bar{\zeta})=\overline{\varkappa(\zeta)}$.*

Démonstration. Il est évident que l'on peut approximer arbitrairement $q(\zeta)$ par une fonction rationnelle $\varkappa(\zeta)$ qui a uniquement des pôles du premier ordre situés à l'extérieur de V, et qui satisfait à la condition 2.

On peut ensuite déplacer chaque couple de pôles conjugués de $\varkappa(\zeta)$ le long de deux chaînes de points conjugués jusqu'à des points conjugués de l'ensemble E de manière que la condition 2 reste toujours satisfaite.

Soit maintenant une fonction univalente $r(\zeta)$ dans un ensemble fermé W. Soient une fonction holomorphe quelconque $s(\zeta)$ dans cet ensemble et un ensemble fermé Z contenu à l'intérieur de W.

LEMME 6. *Si la fonction $s(\zeta)$ est suffisamment proche de $r(\zeta)$ dans W, elle est univalente dans Z.*

Démonstration. Supposons au contraire qu'il existe dans W une suite de fonctions holomorphes $\{s_n(\zeta)\}$ convergente uniformément vers $r(\zeta)$ dans cet ensemble et telle que

$$s_n(\zeta_n')=s_n(\zeta_n'') \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{1.23}$$

où $\{\zeta_n'\}$ et $\{\zeta_n''\}$ sont des suites de points de Z différentes terme par terme. En choisissant éventuellement des suites partielles on peut supposer que $\{\zeta_n'\}$ et $\{\zeta_n''\}$ tendent respectivement vers les limites x_0' et x_0''. Ces li-

mites doivent être toutes les deux égales à un certain nombre x_0, car dans le cas contraire, on aurait $r(x_0')=r(x_0'')$, ce qui est impossible vu l'hypothèse faite au début.

Considérons la fonction $r(\zeta)$ sur une circonférence quelconque K^* de centre x_0 et d'un rayon suffisamment petit, et désignons par m la borne inférieure de $|r(\zeta)-r(x_0)|$ sur cette circonférence. Comme la fonction $r(\zeta)$ est univalente dans W, donc m est un nombre positif et on a

$$|r(\zeta)-s_n(\zeta)|<\frac{1}{3}m \quad \text{pour } \zeta\in K^*, \tag{1.24}$$

par conséquent,

$$|s_n(\zeta)-r(x_0)|>\frac{2}{3}m \quad \text{pour } \zeta\in K^* \tag{1.25}$$

pour n suffisamment grands. En désignant par s_n les valeurs consécutives de (1.23), on voit que la suite $\{s_n\}$ tend vers $r(x_0)$ et, par conséquent,

$$|s_n-r(x_0)|<\frac{1}{3}m \tag{1.26}$$

pour n suffisamment grands. D'après (1.25) et (1.26), on a

$$|s_n(\zeta)-s_n|>\frac{1}{3}m \quad \text{pour } \zeta\in K^* \tag{1.27}$$

pour n suffisamment grands.

Mais alors, en vertu de (1.24) et (1.27), la somme $(s_n(\zeta)-s_n)+(r(\zeta)-s_n(\zeta))=r(\zeta)-s_n$ doit avoir à l'intérieur de K^* le même nombre de racines que la différence $s_n(\zeta)-s_n$, donc au moins deux vu la définition de ζ_n', ζ_n'' et s_n. Ceci est cependant impossible, et la démonstration du lemme se trouve ainsi terminée.

2. Approximation des fonctions univalentes bornées par des fonctions univalentes algébriques bornées

Pour T quelconque entre 0 et 1, désignons par F_T la famille de toutes les fonctions univalentes bornées dont le premier coefficient est plus grand ou égal à T. Désignons par F la somme des familles F_T, c'est-à-dire la famille de toutes les fonctions univalentes bornées. Pour tout T entre 0 et 1 et M naturel, désignons par $\mathfrak{A}_{TM}$ la famille de toutes les fonctions de la forme

$$a(z)=a_1 z+a_2 z^2+\dots \qquad (|z|<1), \tag{2.1}$$

qui satisfont aux conditions suivantes:

1. $a_1 \geqslant T$;

2. Il existe deux fonctions rationnelles spéciales

$$\Omega(w)=\sum_{s=0}^{L}(D_s w^{-s}+\bar{D}_s w^s) \qquad \text{et} \qquad \chi(z)=\sum_{s=0}^{L}(E_s z^{-s}+\bar{E}_s z^s),$$

où $D_L \neq 0$, $E_L \neq 0$, $1 \leqslant L \leqslant M$, telles que $\Omega\big(a(z)\big)=\chi(z)$.

Remarquons que chacune des fonctions (2.1) appartient à la famille F. Cela résulte de la condition 2 en vertu de laquelle a lieu l'équation

$$\left(\frac{a'(z)z}{a(z)}\right)^2\Big(\Omega'\big(a(z)\big)\,a(z)\Big)^2=\big(\chi'(z)z\big)^2$$

qui est un cas particulier d'équations plus générales étudiées en détail[2]).

Remarquons aussi que, d'après le lemme 2, chaque fonction $a(z)$ de la famille $\mathfrak{A}_{TM}$ s'étend de manière continue sur tout le cercle $|z| \leqslant 1$.

Désignons encore, pour T quelconque entre 0 et 1, par $\mathfrak{A}_T$ la somme de toutes les familles $\mathfrak{A}_{TM}$ qui correspondent à tous les M naturels, et par $\mathfrak{A}$ la somme de toutes les familles $\mathfrak{A}_T$.

Il sera naturel d'appeler les éléments de la famille $\mathfrak{A}$ *fonctions univalentes algébriques bornées.*

On voit aisément que les familles $\mathfrak{A}_T$ et $\mathfrak{A}$ sont contenues respectivement dans les familles F_T et F. On peut prouver de plus qu'elles y sont denses. C'est ce que nous dit le résultat suivant:

[2]) Voir [2], p. 657-662.

LEMME FONDAMENTAL 7. *Toute fonction univalente bornée $f(z)$ peut être approximer arbitrairement par une fonction univalente algébrique bornée $a(z)$.*

Démonstration. Remarquons qu'il suffit de démontrer le lemme dans le cas particulier où la fonction $f(z)$ transforme le cercle unitaire $K(0,1)$ en l'ensemble G de la forme $G=K(0,1)-S$, où S est un arc simple partant d'un point de la circonférence $K^*(0,1)$ vers l'intérieur de $K(0,1)$ et ne contenant pas de point zéro [3]).

Prenons à cet effet une fonction homographique quelconque $l(w)$ qui transforme le cercle unitaire en le demi-plan supérieur de manière que les points 0 et ∞ passent respectivement en des points a et $\bar{a}$. L'arc S se transforme à l'aide de $l(w)$ en un arc analogue $C=l(S)$. Formons l'arc $\bar{C}$ symétrique à C par rapport à l'axe réel. Les arcs C et $\bar{C}$ forment ensemble un arc simple F situé symétriquement par rapport à l'axe réel. Cet arc a exactement un point commun avec l'axe et ne contient pas les points a et $\bar{a}$. On peut l'approximer par un arc analytique analogue H représenté paramétriquement sous la forme

$$\zeta = p(t) \qquad (t \in I),$$

où I est l'intervalle imaginaire $\langle -i, i\rangle$ et $p(t)$ une fonction univalente définie dans un domaine simplement connexe B symétrique par rapport à l'axe réel et contenant I; en outre $p(t)=\overline{p(t)}$ pour $t \in B$ et l'image $D=p(B)$ ne contient pas les points a et $\bar{a}$. Considérons dans l'ensemble D la fonction inverse $p^{-1}(\zeta)$. On remarque, d'après ce qui précède, que $p^{-1}(\bar{\zeta})=\overline{p^{-1}(\zeta)}$ pour $\zeta \in D$. En vertu de ceci et des lemmes 5 et 6, on peut trouver une fonction rationnelle $\pi(\zeta)$ avec uniquement deux pôles aux points a et $\bar{a}$, telle que

$$\pi(\bar{\zeta}) = \overline{\pi(\zeta)} \tag{2.2}$$

pour tout ζ, et qui est univalente, arbitrairement proche de $p^{-1}(\zeta)$ dans un ensemble fermé Q_0 compris dans D et tel que $\pi(Q_0)$ contient I à son intérieur. Posons $\pi_0(\zeta)=\pi(\zeta)$ pour $\zeta \in Q_0$ et

$$T = \pi_0^{-1}(I). \tag{2.3}$$

On voit que T est un arc analytique simple, symétrique par rapport à l'axe réel, et arbitrairement proche de l'arc H. En outre, si $\pi(\zeta)$ est suffisamment proche de $p^{-1}(\zeta)$ dans Q_0, l'arc T n'a qu'un point commun avec l'axe réel. Cela résulte du fait que l'arc H a, au point commun avec l'axe réel, la tangente perpendiculaire à ce dernier. Supposons pour la suite que l'arc T a la propriété ci-dessus et qu'il ne contient pas les points a et $\bar{a}$.

[3]) Voir [1], p. 105-106.

Considérons la fonction composée $\pi(l(w))$. On vérifie facilement, en vertu de ce qui précède, que c'est une fonction rationnelle spéciale. En posant

$$R = l^{-1}(P), \tag{2.4}$$

où P est la partie de T située dans le demi-plan supérieur fermé, on constate que R est un arc simple, arbitrairement proche de S.

Soit maintenant une fonction univalente bornée $a(z)$ qui transforme le cercle $K(0,1)$ en l'ensemble $E = K(0,1) - R$. Cette fonction est évidemment proche arbitrairement de $f(z)$ et il suffit de démontrer qu'elle vérifie une identité du type $\Omega(a(z)) = \chi(z)$, où $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ sont des fonctions rationnelles spéciales, non constantes.

A cet effet posons

$$\Omega(w) = \varphi\left(\pi(l(w))\right), \tag{2.5}$$

où

$$\varphi(x) = x^2, \tag{2.6}$$

et considérons l'expression

$$\chi(z) = \Omega(a(z)). \tag{2.7}$$

La fonction (2.5) étant évidemment une fonction rationnelle spéciale non constante, il ne nous reste qu'à prouver la même chose pour la fonction (2.7). En considérant cette dernière sur la circonférence unitaire, on remarque qu'elle n'y admet que des valeurs réelles. En effet, en prenant un point quelconque sur la circonférence unitaire, on voit que $a(z)$ appartient à $K^*(0,1)$ ou à R. Mais, d'après (2.2), (2.6) et la définition de $l(w)$, la circonférence $K^*(0,1)$ se transforme à l'aide de (2.5) en un segment de l'axe réel, et l'arc R, en vertu de (2.3), (2.4), (2.6) et de la définition de I, se transforme lui aussi en un segment de l'axe réel. En outre on remarque que la fonction (2.7) est régulière dans le cercle unitaire et n'y a qu'un seul pôle au point zéro. Il en résulte que (2.7) doit être une fonction rationnelle spéciale, c. q. f. d.

Ce résultat montre que diverses recherches effectuées sur les familles F_T et F peuvent être réduites à des recherches analogues sur les familles $\mathfrak{A}_{TM}, \mathfrak{A}_T, \mathfrak{A}$. En particulier ceci trouve application au problème des extrèmes des fonctionnelles réelles, continues dans les familles F_T et F. Pour cette raison, nous nous occuperons dans la suite des fonctions univalentes algébriques bornées parcourant les familles $\mathfrak{A}_{TM}$.

3. Propriétés générales des fonctions univalentes algébriques bornées

Nous démontrons maintenant

LEMME 8. *Toute famille* $\mathfrak{A}_{TM}$ *est compacte en elle-même.*

Démonstration. La famille est évidemment normale; il suffit donc de démontrer qu'elle est aussi fermée.

Soit une suite quelconque de fonctions de cette famille $\{a_j(z)\}$ convergente vers une fonction $a_0(z)$. Il est clair que $a_0(z)$ satisfait à la condition 1 de la définition de la famille $\mathfrak{A}_{TM}$. Désignons par

$$\Omega_j(w)=\sum_{s=0}^{L_j}(D_{sj}w^{-s}+\overline{D}_{sj}w^s) \qquad (j=1,2,\ldots),$$

$$\chi_j(z)=\sum_{s=0}^{L_j}(E_{sj}z^{-s}+\overline{E}_{sj}z^s) \qquad (j=1,2,\ldots),$$

où $D_{L_jj}\neq 0$, $E_{L_jj}\neq 0$, $1\leqslant L_j\leqslant M$ $(j=1,2,\ldots)$, les suites respectives de fonctions rationnelles spéciales, analogues à $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ de la définition citée, telles que

$$\Omega_j\big(a_j(z)\big)=\chi_j(z) \qquad (j=1,2,\ldots). \tag{3.1}$$

En additionnant éventuellement les fonctions $\Omega_j(w)$ et $\chi_j(z)$ à des constantes réelles et en les multipliant par des facteurs réels, on peut supposer que $D_{0j}=0$ $(j=1,2,\ldots)$ et que

$$\sum_{s=0}^{L_j}D_{sj}\overline{D}_{sj}+\sum_{s=0}^{L_j}E_{sj}\overline{E}_{sj}=1 \qquad (j=1,2,\ldots). \tag{3.2}$$

Puis en choisissant des suites partielles on peut supposer encore que les suites $\Omega_j(w)$ et $\chi_j(z)$ sont convergentes respectivement vers les limites

$$\Omega_0(w)=\sum_{s=0}^{L_0'}(D_{s0}w^{-s}+\overline{D}_{s0}w^s), \qquad \chi_0(z)=\sum_{s=0}^{L_0''}(E_{s0}z^{-s}+\overline{E}_{s0}z^s), \tag{3.3}$$

où

$$D_{L_0'0}\neq 0 \quad \text{si } L_0'\neq 0, \quad \text{et} \quad E_{L_0''0}\neq 0 \quad \text{si } L_0''\neq 0, \tag{3.4}$$

et où, d'après les conditions $1 \leqslant L_j \leqslant M$, $D_{0j}=0$ $(j=1,2,\ldots)$ et (3.2) on a

$$D_{00}=0, \tag{3.5}$$

$$0 \leqslant L_0' \leqslant M, \qquad 0 \leqslant L_0'' \leqslant M, \tag{3.5'}$$

$$\sum_{s=0}^{L_0'} D_{s0}\overline{D}_{s0} + \sum_{s=0}^{L_0''} E_{s0}\overline{E}_{s0} = 1. \tag{3.6}$$

En passant à la limite dans (3.1) on obtient l'identité

$$\Omega_0\big(a_0(z)\big) = \chi_0(z). \tag{3.7}$$

La fonction $a_0(z)$ n'étant pas constante, alors d'après (3.7) et (3.5), ou bien les deux limites $\Omega_0(w)$ et $\chi_0(z)$ se réduisent à la même constante égale à zéro, ou bien elles sont non constantes. Mais la première éventualité est impossible en vertu de (3.6). Reste donc la seconde et, d'après (3.4), (3.7), $1 \leqslant L_0' = L_0''$.

Ainsi, d'après (3.7), (3.3), (3.4), (3.5') et la dernière relation, la fonction $a_0(z)$ satisfait aussi à la condition 2 de la définition de $\mathfrak{A}_{TM}$. Donc elle appartient à cette famille, c. q. f. d.

Nous déduirons à présent quelques relations concernant les fonctions rationnelles spéciales $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ que l'on a déjà rencontrées dans la définition des fonctions univalentes algébriques bornées.

Soit une fonction univalente algébrique bornée quelconque

$$a^*(z) = a_1^* z + a_2^* z^2 + \ldots$$

Désignons par

$$\Omega^*(w) = \sum_{s=0}^{L^*} (D_s^* w^{-s} + \overline{D}_s^* w^s) \qquad \text{et} \qquad \chi^*(z) = \sum_{s=0}^{L^*} (E_s^* z^{-s} + \overline{E}_s^* z^s)$$

des fonctions rationnelles spéciales telles que

$$\Omega^*\big(a^*(z)\big) = \chi^*(z) \tag{3.8}$$

et

$$D_{L^*}^* \neq 0, \qquad E_{L^*}^* \neq 0, \qquad 1 \leqslant L^*. \tag{3.9}$$

En posant $T^* = a_1^*$ on voit, de (3.8), qu'il doit être

$$D_{L^*}^* = T^{*L^*} E_{L^*}^*, \tag{3.10}$$

c'est-à-dire

$$D_{L^*}^* - T^{*L^*} E_{L^*}^* = 0. \tag{3.11}$$

Considérons toutes les racines de l'équation

$$\Omega^{*\prime}(w)=0 \tag{3.12}$$

se trouvant dans le cercle fermé $\overline{K(0,1)}$. Posons pour abréger $A=a^*\big(K(0,1)\big)$, $A^*=a^*\big(K^*(0,1)\big)$, et désignons respectivement par

$$w_k \quad (k=1,\ldots,Q), \qquad v_h \quad (h=1,\ldots,P), \qquad e^{i\omega} \quad (l=1,\ldots,R) \tag{3.13}$$

toutes les différentes racines de l'équation (3.8) qui appartiennent à $A, A^*\frown K(0,1)$ et $K^*(0,1)$ respectivement, et par

$$\gamma_k \quad (k=1,\ldots,Q), \qquad \delta_h \quad (h=1,\ldots,P), \qquad \sigma_l \quad (l=1,\ldots,R) \tag{3.14}$$

les ordres de multiplicité de ces racines.

Pour tout $k=1,\ldots,Q$, désignons par z_k le point z situé à l'intérieur de $K(0,1)$ tel que $a^*(z_k)=w_k$. Il résulte des relations évidentes:

$$a^{*\prime}(z)\,\Omega^{*\prime}\big(a^*(z)\big)=\chi^{*\prime}(z), \tag{3.15}$$

$$a^{*\prime}(z)\neq 0 \quad \text{pour} \quad |z|<1, \tag{3.16}$$

que chaque point z_k est une racine de l'équation $\chi^{*\prime}(z)=0$, dont l'ordre de multiplicité est égal à celui de la racine w_k.

Désignons pour tous les h, l de (3.13) par

$$e^{i\varphi_{hj}} \quad (j=1,\ldots,I_h;h=1,\ldots,P) \quad \text{ou} \quad e^{i\psi_{lj}} \quad (j=1,\ldots,G_l;l=1,\ldots,R) \tag{3.17}$$

tous les points z situés sur la circonférence $K^*(0,1)$, tels que

$$\chi^{*\prime}(z)=0, \tag{3.18}$$

$$a^*(z)=v_h, \tag{3.19}$$

ou

$$a^*(z)=e^{i\omega_l}. \tag{3.20}$$

Les points (3.17) sont par définition des racines de l'équation (3.18). Désignons leurs ordres de multiplicité respectivement par

$$\xi_{hj} \quad (j=1,\ldots,I_h;h=1,\ldots,P), \quad \eta_{lj} \quad (j=1,\ldots,G_l;l=1,\ldots,R). \tag{3.21}$$

Admettons encore les notations $Q=0$, $P=0$, $I_h=0$, $G_l=0$ pour les cas exceptionnels où les racines $w_k, v_h, z_k, e^{i\varphi_{hj}}, e^{i\psi_{lj}}$ (voir (3.13) et (3.17)) n'existent pas.

En raison de tout cela et de (3.8), pour les fonctions $\Omega^*(w)$ et $\chi^*(z)$ et les racines $w_k, v_h, e^{i\varphi_{hj}}, e^{i\psi_{lj}}$ ont lieu les relations suivantes:

$$
\begin{aligned}
&\Omega^*(w_k)-\chi^*(z_k)=0 && (k=1,\dots,Q),\\
&\Omega^{*(m)}(w_k)=0 && (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
&\chi^{*(m)}(z_k)=0 && (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
&\frac{1}{i}\left(\Omega^*(v_h)-\Omega^*\left(\frac{1}{\overline{v}_h}\right)\right)=0 && (h=1,\dots,P),\\
&\Omega^*(v_h)-\chi_1^*(\varphi_{hj})=0 && (j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\Omega^{*(m)}(v_h)=0 && (m=1,\dots,\delta_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\chi_1^{*(m)}(\varphi_{hj})=0 && (m=1,\dots,\xi_{hj};\ j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\Omega_1^*(\omega_l)-\chi_1^*(\psi_{lj})=0 && (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),\\
&\Omega_1^{*(m)}(\omega_l)=0 && (m=1,\dots,\sigma_l;\ l=1,\dots,R),\\
&\chi_1^{*(m)}(\psi_{lj})=0 && (m=1,\dots,\eta_{lj};\ j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

où l'on a posé pour abréger

$$\Omega_1^*(x)=\Omega^*(e^{ix}), \tag{3.23}$$

$$\chi_1^*(y)=\chi^*(e^{iy}), \tag{3.24}$$

et d'où l'on rejette éventuellement les relations qui correspondent aux cas exceptionnels $Q=0$, $P=0$, $I_h=0$, $G_l=0$[4]).

On peut considérer les relations obtenues (3.11) et (3.22) comme des conditions nécessaires auxquelles doivent satisfaire les fonctions $\Omega^*(w)$ et $\chi^*(z)$ pour qu'il existe une fonction univalente bornée $a^*(z)$ qui vérifie l'identité $\Omega^*(a^*(z))=\chi^*(z)$ et la condition $T^*=a_1^*$.

Ces conditions s'avèrent être aussi localement suffisantes ce que prouve le lemme suivant:

LEMME 9. *Etant donné un système de nombres complexes et réels* (S'):

$$
\begin{aligned}
&D_s && (s=0,\dots,L^*),\\
&E_s && (s=0,\dots,L^*),\\
&w_k && (k=1,\dots,Q),\\
&v_h && (n=1,\dots,P),\\
&w_l\text{-réel} && (l=1,\dots,R),\\
&z_k && (k=1,\dots,Q),\\
&\varphi_{hj}\text{-réel} && (j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\psi_{lj}\text{-réel} && (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

[4]) Remarquons que pour tout $w=e^{ix}$ et tout s naturel les conditions: $\Omega^{*(m)}(w)=0$ et $\Omega_1^{*(m)}(x)=0$ $(m=1,\dots,S)$ sont équivalentes et ceci de même pour les fonctions $\chi_1^*(z)$ et $\chi_1^*(y)$.

dont les termes sont suffisamment proches des termes respectifs du système (S^*):

$$
\begin{aligned}
&D_s^* && (s=0,\dots,L^*),\\
&E_s^* && (s=0,\dots,L^*),\\
&w_k && (k=1,\dots,Q),\\
&v_h && (h=1,\dots,P),\\
&\omega_l && (l=1,\dots,R),\\
&\varphi_{hj} && (j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\psi_{lj} && (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

de $\Omega^*(w)$, $\chi^*(z)$ *et* (3.13), (3.17), *et satisfont aux conditions suivantes, analogues à* (3.11) *et* (3.22):

$$D^{\cdot}_{L^*} - T^{*L^*} E^{\cdot}_{L^*} = 0, \tag{3.27}$$

$$
\begin{aligned}
&\Omega^{\cdot}(w^{\cdot}_k) - \chi^{\cdot}(z^{\cdot}_k) = 0 && (k=1,\dots,Q),\\
&\Omega^{\cdot(m)}(w^{\cdot}_k) = 0 && (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
&\chi^{\cdot(m)}(z^{\cdot}_k) = 0 && (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
&\frac{1}{i}\left(\Omega^{\cdot}(v^{\cdot}_h) - \Omega^{\cdot}\left(\frac{1}{\bar v_h}\right)\right) = 0 && (h=1,\dots,P),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Omega^{\cdot}(v^{\cdot}_h) - \chi^{\cdot}_1(\varphi^{\cdot}_{hj}) = 0 && (j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\Omega^{\cdot(m)}(v^{\cdot}_h) = 0 && (m=1,\dots,\delta_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\chi_1^{\cdot(m)}(\varphi^{\cdot}_{hj}) = 0 && (m=1,\dots,\xi_{hj};\ j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\Omega^{\cdot}_1(w^{\cdot}_l) = 0 && (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),\\
&\Omega_1^{\cdot(m)}(w^{\cdot}_l) = 0 && (m=1,\dots,\sigma_l;\ l=1,\dots,R),\\
&\chi_1^{\cdot(m)}(\psi^{\cdot}_{lj}) = 0 && (m=1,\dots,\eta_{lj};j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

où

$$\Omega^{\cdot}(w) = \sum_{s=0}^{L^*} D^{\cdot}_s w^{-s} + \bar D^{\cdot}_s w^s, \qquad \Omega^{\cdot}_1(x) = \Omega^{\cdot}(e^{ix}), \tag{3.29}$$

$$\chi^{\cdot}(z) = \sum_{s=0}^{L^*} E^{\cdot}_s z^{-s} + \bar E^{\cdot}_s z^s, \qquad \chi^{\cdot}_1(y) = \chi^{\cdot}(e^{iy}), \tag{3.30}$$

il existe alors exactement une fonction univalente, algébrique bornée

$$a^{\cdot}(z) = a^{\cdot}_1 z + a^{\cdot}_2 z^2 + \dots$$

satisfaisant à l'identité

$$\Omega^{\cdot}\left(a^{\cdot}(z)\right) = \chi^{\cdot}(z) \tag{3.31}$$

et à la condition $a^{\cdot}_1 = T^*$. *Cette fonction appartient à la famille* $\mathfrak{A}_{T^*L^*}$.

Démonstration. Choisissons une suite quelconque de systèmes du type précédent (S_f):

$$\begin{aligned}
&D_{sf} && (s=0,\dots,L^*),\\
&E_{sf} && (s=0,\dots,L^*),\\
&w_{kf} && (k=1,\dots,Q),\\
&v_{hf} && (h=1,\dots,P),\\
&\omega_{lf} \text{ - réel} && (l=1,\dots,R),\\
&z_{kf} && (k=1,\dots,Q),\\
&\varphi_{hjf} \text{ - réel} && (j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\psi_{ljf} \text{ - réel} && (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

dont les termes convergent vers les termes respectifs de (S^*) et satisfont pour tout f les conditions suivantes, analogues à (3.27) et (3.28):

$$D_{L^*f} - T^{*L^*} E_{L^*f} = 0, \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
&\Omega_f(w_{kf}) - \chi_f(z_{kf}) = 0 && (k=1,\dots,Q),\\
&\Omega_f^{(m)}(w_{kf}) = 0 && (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
&\chi_f^{(m)}(z_{kf}) = 0 && (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
&\frac{1}{i}\left(\Omega_f(v_{hf}) - \Omega_f\left(\frac{1}{\bar{v}_{hf}}\right)\right) = 0 && (h=1,\dots,P),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Omega_f(v_{hf}) - \chi_{1f}(\varphi_{hjf}) = 0 && (j=1,\dots I_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\Omega^{(m)}(v_{hf}) = 0 && (m=1,\dots,\delta_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\chi_{1f}^{(m)}(\varphi_{hjf}) = 0 && (m=1,\dots,\xi_{hj};\ j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\Omega_{1f}(\omega_{lf}) - \chi_1(\psi_{ljf}) = 0 && (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),\\
&\Omega_1^{(m)}(\omega_{lf}) = 0 && (m=1,\dots,\sigma_l;\ l=1,\dots,R),\\
&\chi_{1f}^{(m)}(\psi_{ljf}) = 0 && (m=1,\dots,\eta_{lj};\ j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),
\end{aligned} \tag{3.34}$$

où

$$\Omega_f(w)=\sum_{s=0}^{L^*} D_{sf}w^{-s}+\overline{D}_{sf}\,w^s, \qquad \Omega_{1f}(x)=\Omega_f(e^{ix}), \tag{3.35}$$

$$\chi_f(z)=\sum_{s=0}^{L^*} E_{sf}z^{-s}+\overline{E}_{sf}\,z^s, \qquad \chi_{1f}(y)=\chi_f(e^{iy})\ ^5). \tag{3.36}$$

On voit de (3.33), (3.35), (3.36), qu'il existe, pour tout f suffisamment grand, exactement une fonction holomorphe dans un entourage du point zéro:

$$a_f(z)=a_{1f}z+a_{2f}z^2+\dots$$

satisfaisant à l'identité

$$\Omega_f\big(a_f(z)\big)=\chi_f(z) \tag{3.37}$$

et à la condition $a_{1f}=T^*$.

Soit r_f le rayon de convergence de la série $a_f(z)$. Il suffit de démontrer que r_f est non moindre que 1 pour f suffisamment grands. A cet effet supposons le contraire, c'est-à-dire qu'on a toujours, en choisissant éventuellement des suites partielles, $r_f<1$. En outre, en raison du lemme 2, on peut admettre que toutes les fonctions $a_f(z)$ sont continues dans tout le cercle fermé $|z|\leqslant r_f$. On remarque facilement qu'il existe toujours sur la circonférence $|z|=r_f$ un point y_f dans lequel la fonction $a_f(z)$ n'est pas holomorphe. Par conséquent, en posant $x_f=a_f(y_f)$, on a $\Omega'_f(x_f)=0$, car dans le cas contraire la fonction $a_f(z)$ serait holomorphe au point y_f en vertu de (3.37).

On peut supposer ici, en tenant compte de (3.37) et des relations évidentes

$$\lim_{f\to\infty}\Omega_f(w)=\Omega^*(w), \qquad \lim_{f\to\infty}\chi_f(z)=\chi^*(z), \tag{3.38}$$

---

[5]) Remarquons qu'il doit être ici, vu la définition des ordres (3.14), (3.21):

$$\Omega_f^{(m)}(w_{kf})\neq 0 \qquad (m=\delta_k+1;\ k=1,\dots,Q),$$

$$\chi_f^{(m)}(z_{kf})\neq 0 \qquad (m=\gamma_k+1;\ k=1,\dots,Q),$$

$$\Omega_f^{(m)}(v_h)\neq 0 \qquad (m=\delta_k+1;\ h=1,\dots,P),$$

$$\chi_{1f}^{(m)}(\varphi_{hjf})\neq 0 \qquad (m=\xi_{hj}+1;\ j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),$$

$$\Omega_{1f}^{(m)}(w_{lf})\neq 0 \qquad (m=\sigma_l+1;\ l=1,\dots,R),$$

$$\chi_{1f}^{(m)}(\psi_{ljf})\neq 0 \qquad (m=\eta_{lj}+1;\ j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R)$$

pour f suffisamment grands.

et, en choisissant éventuellement des suites partielles, que

$$\lim_{f\to\infty} r_f = r_0, \tag{3.39}$$

$$\lim_{f\to\infty} y_f = y_0, \tag{3.40}$$

$$\lim_{f\to\infty} a_f(z) = a_0(z), \tag{3.41}$$

où $r_0 > 0$, $|y_0| = r_0$ et $a_0(z)$ est une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < r_0$. Les convergences (3.38) et (3.41) sont presque uniformes respectivement dans tout le plan sans les points 0 et ∞, et dans le cercle $|z| < r_0$. La fonction $a_0(z)$ coïncide avec la fonction $a^*(z)$ dans le cercle $|z| < r_0$, en conséquence, elle s'étend avec $a^*(z)$ de manière continue sur tout le cercle $|z| \leqslant r_0$. D'après le lemme 3, les formules (3.37), (3.40), (3.41), (3.38), on a

$$\lim_{f\to\infty} x_f = x_0 = a^*(y_0), \tag{3.42}$$

$$\Omega^{*\prime}(x_0) = 0. \tag{3.43}$$

Par conséquent, il doit être, d'après (3.42), (3.43) et la définition des nombres (3.13)

$$x_0 = w_k \quad \text{et} \quad y_0 = z_k \tag{3.44}$$

ou

$$x_0 = v_h \quad \text{et} \quad |y_0| = 1 \tag{3.45}$$

ou

$$x_0 = e^{i\omega_l} \quad \text{et} \quad |y_0| = 1, \tag{3.46}$$

où k, h, l désignent respectivement certains indices de (3.13).

J'affirme que dans le premier cas (3.44) ont lieu les égalités $x_f = w_{kf}$ et $y_f = z_{kf}$ pour f suffisamment grands. En effet, en supposant $x_f \neq w_{kf}$ pour une infinité de f, il résulterait des relations (3.34), (3.42), (3.44) et de la définition des suites (3.32) et $\{x_f\}$ que

$$\Omega_f^{(m)}(w_{kf}) = 0 \qquad (m = 1, \ldots, \gamma_k;\ f = 1, 2, \ldots),$$

$$\Omega_f'(x_f) = 0 \qquad (f = 1, 2, \ldots),$$

et

$$\lim_{f\to\infty} w_{kf} = w_k \quad \text{et} \quad \lim_{f\to\infty} x_f = w_k.$$

Ceci donnerait, en passant à la limite et en tenant compte de

$$\lim_{f\to\infty} \Omega_f'(w) = \Omega^{*\prime}(w)$$

et $x_f \neq w_{kf}$ que w_k est une racine de l'équation $\Omega^{*\prime}(w)=0$ d'ordre au moins γ_k+1, contrairement à la définition du nombre γ_k. Donc l'égalité $x_f=w_{kf}$ doit avoir lieu. De la même manière on prouve l'égalité $y_f=z_{kf}$.

Quant au deuxième cas (3.45), j'affirme qu'il est impossible. En effet, on a, d'après (3.34), (3.42), (3.45) et la définition des suites (3.32) et $\{x_f\}$:

$$\Omega_f^{(m)}(v_{hf})=0 \quad (m=1,\dots,\delta_h;f=1,2,\dots), \qquad \Omega_f'(x_f)=0 \quad (f=1,2,\dots),$$

et

$$\lim_{f\to\infty} v_{hf}=v_h, \qquad \lim_{f\to\infty} x_f=v_h, \tag{3.47}$$

ce qui donne, comme ci-dessus, $x_f=v_{hf}$ pour f suffisamment grands. On voit qu'ici $\chi^{*\prime}(y_0)=0$, car il résulte dn (3.47), (3.34), (3.37) et $x_f=a_f(y_f)$, $r_f<1$ ainsi que de la définition de y_f que:

$$\chi_f(y_f)=\Omega_f(v_{hf}), \qquad \chi_f\left(\frac{1}{\overline{y}_f}\right)=\Omega_f(v_{hf}), \qquad y_f\neq\frac{1}{\overline{y}_f} \tag{3.48}$$

pour f suffisamment grands; ceci implique, en passant à la limite et en tenant compte de (3.38), (3.47), (3.40) que l'équation

$$\chi^*(z)-\Omega^*(v_h)=0$$

a, au point y_0, une racine multiple, donc $\chi^{*\prime}(y_0)=0$ a lieu.

D'après $\chi^{*\prime}(y_0)=0$, les formules (3.42), (3.45) et la définition des nombres $e^{i\varphi_{hj}}$, on peut supposer que

$$y_0=e^{i\varphi_{hj}}, \tag{3.49}$$

où j est certain indice entre 1 et I_h.

En même temps on a, d'après (3.34),

$$\chi_f(e^{i\varphi_{hjf}})=\Omega_f(v_{hf}), \qquad \chi_f^{(m)}(e^{i\varphi_{hjf}})=0 \qquad (m=1,\dots,\xi_{hj};f=1,2,\dots)^{6}) \tag{3.50}$$

et, d'après la définition des nombres (3.32), (3.40), (3.49),

$$\lim_{f\to\infty} e^{i\varphi_{hjf}}=e^{i\varphi_{hj}}, \qquad \lim_{f\to\infty} y_f=e^{i\varphi_{hj}}.$$

Comme il résulte de $r_f<1$ que

$$y_f\neq e^{i\varphi_{hjf}}, \qquad \frac{1}{\overline{y}_f}\neq e^{i\varphi_{hjf}}, \qquad y_f\neq\frac{1}{\overline{y}_f},$$

pour f suffisamment grands, on trouve, d'après (3.47), (3.48), (3.50), (3.38), en passant à la limite, que l'équation

$$\chi^*(z)-\Omega^*(v_h)=0$$

---

[6]) Voir remarque p. 17.

a, au point $e^{i\varphi_{hj}}$, une racine d'ordre au moins $\xi_{hj}+3$, contrairement à la définition du nombre ξ_{hj}.

Pour le troisième cas (3.46), on constate de la même manière qu'il est impossible lui aussi.

Les relations (3.44) et, par conséquent, $x_f=w_{kf}$, $y_f=z_{kf}$ étant uniquement possibles, on obtient, en tenant compte de $x_f=a_f(y_f)$, des formules (3.37), (3.34) et de la définition des nombres (3.32):

$$\Omega_f(x_f)=\chi_f(y_f)$$

et

$$\Omega_f^{(m)}(x_f)=0 \qquad (m=1,\ldots,\gamma_k), \qquad \Omega_f^{(\gamma_k+1)}(x_f)\neq 0,$$

$$\chi_f^{(m)}(y_f)=0 \qquad (m=1,\ldots,\gamma_k), \qquad \chi_f^{(\gamma_k+1)}(y_f)\neq 0 \ ^{6'})$$

pour tout f suffisamment grand. On voit de là que la fonction $a_f(z)$ serait holomorphe au point y_f, contrairement à la définition de ce point. La démonstration se trouve ainsi achevée.

$^{6'})$ Voir remarque p. 20.

4. Les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes algébriques bornées

Soit, pour N entier plus grand que 1, une fonction analytique réelle $H(X_2,\dots,X_N,Y_2,\dots,Y_N)$ définie dans un domaine suffisamment grand de variables réelles $X_2,\dots,X_N,Y_2,\dots,Y_N$, et dont les dérivées partielles du premier ordre ne s'annullent nulle part simultanément.

Soit une famille quelconque $\mathfrak{A}_{TM}$ telle que $M>N-1$.

Définissons dans $\mathfrak{A}_{TM}$ pour chaque fonction $a(z)=a_1z+a_2z^2+\dots$, $|z|<1$, la fonctionnelle H_a comme suit:

$$H_a=H(\lambda_2,\dots,\lambda_N,\mu_2,\dots,\mu_N),$$

où $\lambda_n+i\mu_n=a_n$ $(n=2,\dots,N)$.

Choisissons pour $a(z)$ des fonctions rationnelles spéciales $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ décrites dans la condition 2 de la définition de $\mathfrak{A}_{TM}$.

Comme le quotient D_L par E_L est positif, les coefficients de $a(z)$ pour $L>N-1$ peuvent être exprimés par les coefficients des fonctions $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ comme suit:

$$\frac{a_n}{a_1}=a_{nL}(D_{G_n},\dots,D_L,E_{G_n},\dots,E_L) \qquad (n=2,\dots,N),$$

où $G_n=L-n+1$ $(n=2,\dots,N)$ et les expressions

$$a_{nL}(\xi_{G_n},\dots,\xi_L,\eta_{G_n},\dots,\eta_L) \qquad (n=2,\dots,N) \tag{4.1}$$

sont des fonctions analytiques des variables indépendantes $\xi_G,\dots,\xi_L$, $\eta_G,\dots,\eta_L$, où $G=L-N+1$. La forme de (4.1) dépend uniquement de L et de n.

En vertu de tout cela, on peut pour $a(z)$ et les fonctions correspondantes $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ exprimer la fonctionnelle H_a sous la forme

$$H_a=J_L(D_G,\dots,D_L,\bar{D}_G,\dots,\bar{D}_L,E_G,\dots,E_L,\bar{E}_G,\dots,\bar{E}_L), \tag{4.2}$$

où l'expression

$$J_L(\xi_G,\dots,\xi_L,\hat{\xi}_G,\dots,\hat{\xi}_L,\eta_G,\dots,\eta_L,\hat{\eta}_G,\dots,\hat{\eta}_L) \tag{4.2'}$$

est une fonction analytique des variables indépendantes $\xi_G, \ldots, \xi_L, \hat{\xi}_G, \ldots, \hat{\xi}_L, \eta_G, \ldots, \eta_L, \hat{\eta}_G, \ldots, \hat{\eta}_L$. On l'obtient de $H(X_2, \ldots, X_N, Y_2, \ldots, Y_N)$ en substituant

$$X_n = \frac{1}{2}\left(a_{nL}(\xi_{G_n}, \ldots, \xi_L, \eta_{G_n}, \ldots, \eta_L) + \hat{a}_{nL}(\hat{\xi}_{G_n}, \ldots, \hat{\xi}_L, \hat{\eta}_{G_n}, \ldots, \hat{\eta}_L)\right) \qquad (n=2, \ldots, N),$$

$$Y_n = \frac{1}{2i}\left(a_{nL}(\xi_{G_n}, \ldots, \xi_L, \eta_{G_n}, \ldots, \eta_L) - \hat{a}_{nL}(\hat{\xi}_{G_n}, \ldots, \hat{\xi}_L, \hat{\eta}_{G_n}, \ldots, \hat{\eta}_L)\right) \qquad (n=2, \ldots, N),$$

où

$$\hat{a}_{nL}(\hat{\xi}_{G_n}, \ldots, \hat{\xi}_L, \hat{\eta}_{G_n}, \ldots, \hat{\eta}_L) = \overline{a_{nL}(\hat{\xi}_{G_n}, \ldots, \hat{\xi}_L, \hat{\eta}_{G_n}, \ldots, \hat{\eta}_L)} \qquad (n=2, \ldots, N).$$

La forme de la fonction (4.2′) dépend uniquement de la fonction $H(X_2, \ldots, X_N, Y_2, \ldots, Y_N)$ et de L.

Après avoir remarqué ceci, nous présentons le résultat suivant:

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Il existe dans $\mathfrak{A}_{TM}$ des fonctions extrémales $a^*(z)$ pour lesquelles la fonctionnelle H_a atteint sa valeur la plus grande dans cette famille.*

En même temps, si

$$\Omega^*(w) = \sum_{s=0}^{L^*} (D_s^* w^{-s} + \bar{D}_s^* w^s), \tag{4.3}$$

$$\chi^*(z) = \sum_{s=0}^{L^*} (E_s^* z^{-s} + \bar{E}_s^* z^s), \tag{4.3′}$$

désignent des fonctions rationnelles spéciales telles que

$$D_{L^*}^* \neq 0, \qquad E_{L^*}^* \neq 0, \qquad N-1 < L^* \leqslant M \qquad \text{et} \qquad \Omega^*(a^*(z)) = \chi^*(z),$$

alors ont lieu les équations des moments

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(w)}{\Omega^{*\prime}(w)w}(\Omega^*(w))^f \frac{dw}{w}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Psi(z)}{\chi^{*\prime}(z)z}(\chi^*(z))^f \frac{dz}{z}\right\} \tag{4.4}$$

$$(f=1,2,\ldots),$$

ou

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\left(\frac{a^{*\prime}(z)}{a^*(z)}\right)^2 \Phi(a^*(z)) - \frac{1}{z^2}\psi(z)\right] \frac{1}{\chi^{*\prime}(z)}(\chi^*(z))^f dz\right\} = 0 \tag{4.4′}$$

$$(f=1,2,\ldots),$$

où c est une circonférence de centre zéro et d'un rayon suffisamment petit, et

$$\Phi(w)=\tau\left(\sum_{p=2}^{N}\frac{\mathfrak{D}^*_{p-1}}{w^{p-1}}+\overline{\mathfrak{D}}^*_{p-1}w^{p-1}\right)-g, \tag{4.5}$$

$$\Psi(z)=\tau\left(\sum_{p=1}^{N}\frac{\mathfrak{E}^{*p-1}}{z^{p-1}}+\overline{\mathfrak{E}}^*_{p-1}z^{p-1}\right)-g, \tag{4.6}$$

$$\mathfrak{D}^*_{p-1}=2\sum_{n=p}^{N}a_n^{*(p)}H^*_n \qquad (p=2,\dots,N),$$

$$\mathfrak{E}^*_0=\sum_{n=2}^{N}(n-1)\,a^*_nH^*_n,$$

$$\mathfrak{E}^*_{p-1}=2\sum_{n=p}^{N}(n-p+1)\,a^*_{n-p+1}H^*_n \qquad (p=2,\dots,N), \tag{4.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^*_nz^n=a^*(z), \qquad \sum_{n=p}^{\infty}a_n^{*(p)}z^n=(a^*(z))^p \qquad (p=2,\dots,N), \tag{4.7'}$$

$$\lambda^*_n+i\mu^*_n=\frac{a^*_n}{a^*_1},$$

$$H^*_n=H'_{X_n}(\lambda^*_2,\dots,\mu^*_N)-iH'_{Y_n}(\lambda^*_2,\dots,\mu^*_N) \qquad (n=2,\dots,N), \tag{4.7''}$$

tandis que τ et g sont des nombres réels ne s'annulant pas simultanément[7]).

Démonstration. L'existence des fonctions extrémales $a^*(z)$ résulte de la continuité de la fonctionelle H_a et de la compacité de la famille $\mathfrak{A}_{TM}$ (lemme 8). Il suffit donc de déduire les formules (4.4), (4.4'). On le fera en deux étapes.

I. Application de la méthode des multiplicateurs

Soient une fonction extrémale quelconque $a^*(z)$ et les deux fonctions correspondantes $\Omega^*(w)$ et $\chi^*(z)$ décrites ci-dessus. Toutes les notions et notations de paragraphe 3 sont valables pour ces fonctions.

Considérons l'ensemble $\mathfrak{S}$ composé de tous les systèmes de nombres — tout court points — $(S^\cdot)$ de (3.25) satisfaisant aux conditions (3.27), (3.28). En posant

$$\Omega^\cdot(w,D^\cdot_0,\dots,D^\cdot_{L^*},\bar{D}^\cdot_0,\dots,\bar{D}^\cdot_{L^*})=\sum_{s=0}^{L^*}(D^\cdot_s w^{-s}+\bar{D}^\cdot_s w^s), \tag{4.8}$$

$$\chi^\cdot(z,E^\cdot_0,\dots,E^\cdot_{L^*},\bar{E}^\cdot_0,\dots,\bar{E}^\cdot_{L^*})=\sum_{s=0}^{L^*}(E^\cdot_s z^{-s}+\bar{E}^\cdot_s z^s), \tag{4.9}$$

[7]) Remarquons que les fonctions $\Phi(w)$ et $\Psi(z)$ de (4.4) et (4.4') sont tout à fait semblables à celles que j'ai obtenues dans les équations de fonctions extrémales dans F_T; voir [3], p. 5-6.

où l'on considère pour le moment w,z et $D_s^{\cdot},\bar{D}_s^{\cdot},E_s^{\cdot},\bar{E}_s^{\cdot}$ $(s=0,\dots,L^*)$ comme $2+2(L^*+1)$ variables indépendantes, on peut représenter les conditions (3.28) sous la forme équivalente suivante:

$$\Omega^{\cdot}(w_k,D_0^{\cdot},\dots,\bar{D}_{L^*}^{\cdot})-\chi^{\cdot}(z_k,E_0^{\cdot},\dots,\bar{E}_{L^*}^{\cdot})=0 \qquad (k=1,\dots,Q),$$

$$\Omega_w^{\cdot(m)}(w_k^{\cdot},D_0^{\cdot},\dots,\bar{D}_{L^*}^{\cdot})=0 \qquad (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),$$

$$\chi_z^{\cdot(m)}(z_k^{\cdot},E_0^{\cdot},\dots,\bar{E}_{L^*}^{\cdot})=0 \qquad (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),$$

$$\frac{1}{i}\left(\Omega^{\cdot}(v_h^{\cdot},D_0^{\cdot},\dots,\bar{D}_{L^*}^{\cdot})-\Omega^{\cdot}\left(\frac{1}{\bar{v}_h},D_0^{\cdot},\dots,\bar{D}_{L^*}^{\cdot}\right)\right)=0 \qquad (h=1,\dots,P), \tag{4.10}$$

$$\Omega^{\cdot}(v_h^{\cdot},D_0^{\cdot},\dots,\bar{D}_{L^*}^{\cdot})-\chi_1^{\cdot}(q_{hj}^{\cdot},E_0^{\cdot},\dots,\bar{E}_{L^*}^{\cdot})=0 \qquad (j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),$$

$$\Omega_w^{\cdot(m)}(v_h^{\cdot},D_0^{\cdot},\dots,\bar{D}_{L^*}^{\cdot})=0 \qquad (m=1,\dots,\delta_h;\ h=1,\dots,P),$$

$$\chi_1^{\cdot(m)}(q_{hj}^{\cdot},E_0^{\cdot},\dots,\bar{E}_{L^*}^{\cdot})=0 \qquad (m=1,\dots,\xi_{hj};\ j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),$$

$$\Omega_1^{\cdot}(\omega_l^{\cdot},D_0^{\cdot},\dots,\bar{D}_{L^*}^{\cdot})-\chi_1^{\cdot}(\psi_{lj}^{\cdot},E_0^{\cdot},\dots,\bar{E}_{L^*}^{\cdot})=0 \qquad (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),$$

$$\Omega_{1x}^{\cdot(m)}(\omega_l^{\cdot},D_0^{\cdot},\dots,\bar{D}_{L^*}^{\cdot})=0 \qquad (m=1,\dots,\sigma_l;\ l=1,\dots,R),$$

$$\chi_{1y}^{\cdot(m)}(\psi_{lj}^{\cdot},E_0^{\cdot},\dots,\bar{E}_{L^*}^{\cdot})=0 \qquad (m=1,\dots,\eta_{lj};\ j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),$$

où

$$\Omega_1^{\cdot}(x,D_0^{\cdot},\dots,\bar{D}_{L^*}^{\cdot})=\Omega^{\cdot}(e^{ix},D_0^{\cdot},\dots,\bar{D}_{L^*}^{\cdot}),$$

$$\chi_1^{\cdot}(y,E_0^{\cdot},\dots,\bar{E}_{L^*}^{\cdot})=\chi^{\cdot}(e^{iy},E_0^{\cdot},\dots,\bar{E}_{L^*}^{\cdot}).$$

Il résulte du lemme 9 qu'à chaque point $(S^{\cdot})$ de l'ensemble $\mathfrak{S}$, suffisamment proche du point (S^*) de (3.26), correspond une fonction $a^{\cdot}(z)=a_1^{\cdot}z+a_2^{\cdot}z^2+\dots$ satisfaisant aux conditions (3.31) et $a_1^{\cdot}=T^*$, qui appartient à $\mathfrak{A}_{T^*L^*}$ et donc aussi à $\mathfrak{A}_{TM}$. Pour cette fonction a lieu l'inégalité $H_{a^{\cdot}}\leqslant H_{a^*}$, car $a^*(z)$ est extrémale. En même temps, il résulte de (4.2) que les valeurs $H_{a^{\cdot}}$ et H_{a^*} peuvent être représentées pour $(S^{\cdot})$ suffisamment proche de (S^*) sous la forme

$$H_{a^{\cdot}}=J_{L^*}(D_{G^*}^{\cdot},\dots,D_{L^*}^{\cdot},\bar{D}_{G^*}^{\cdot},\dots,\bar{D}_{L^*}^{\cdot},E_{G^*}^{\cdot},\dots,E_{L^*}^{\cdot},\bar{E}_{G^*}^{\cdot},\dots,\bar{E}_{L^*}^{\cdot}), \tag{4.11}$$

$$H_{a^*}=J_{L^*}(D_{G^*}^{*},\dots,D_{L^*}^{*},\bar{D}_{G^*}^{*},\dots,\bar{D}_{L^*}^{*},E_{G^*}^{*},\dots,E_{L^*}^{*},\bar{E}_{G^*}^{*},\dots,\bar{E}_{L^*}^{*}), \tag{4.12}$$

où $G^*=L^*-N+1$.

En considérant le côté droit de (4.11) comme une fonction du point variable $(S^{\cdot})$ dans l'ensemble $\mathfrak{S}$, il résulte de l'inégalité $H_{a^{\cdot}}\leqslant H_{a^*}$ et (4.12) que cette fonction atteint au point (S^*) son maximum local dans $\mathfrak{S}$. Mais comme l'ensemble $\mathfrak{S}$ est défini par les conditions (3.27) et (4.10) pour les variables (3.25), on peut considérer le maximum local en question comme étant en outre lié. Le lemme 4 prouve qu'il existe un système

non trivial de multiplicateurs complexes et réels correspondant aux conditions (4.10), (3.27) et à la fonction (4.11)[8]):

$$
\begin{aligned}
&\nu_k && (k=1,\dots,Q),\\
&\lambda_k^{(m)} && (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
&\mu_k^{(m)} && (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
&g_h \text{ - réel} && (h=1,\dots,P),\\
&u_{hj} && (j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\vartheta_h^{(m)} && (m=1,\dots,\delta_h;\ h=1,\dots,P),\\
&d_{hj}^{(m)} \text{ - réel} && (m=1,\dots,\xi_{hj};\ j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots P),\\
&r_{lj} \text{ - réel} && (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),\\
&p_l^{(m)} \text{ - réel} && (m=1,\dots,\sigma_l;\ l=1,\dots,R),\\
&q_{lj}^{(m)} \text{ - réel} && (m=1,\dots,\eta_{lj};\ j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),\\
&\varkappa &&\\
&t \text{ - réel}, &&
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

tel que les égalités suivantes ont lieu:

(4.14)

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\nu_k\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_k}{\partial\zeta}\right)+\overline{\nu}_k\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{E}}_k}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right]+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\gamma_k}\left(\lambda_k^{(m)}\left(\frac{\partial\mathfrak{M}_k^{(m)}}{\partial\zeta}\right)+\overline{\lambda}_k^{(m)}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}_k^{(m)}}{\partial\zeta}\right)\right)\right)\right]\\
&+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\gamma_k}\left(\mu_k^{(m)}\left(\frac{\partial\mathfrak{N}_k^{(m)}}{\partial\zeta}\right)+\overline{\mu}_k^{(m)}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{N}}_k^{(m)}}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right)\right]+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(g_h\left(\frac{\partial\mathfrak{P}_h}{\partial\zeta}\right)+g_h\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{P}}_h}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right]\\
&+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(u_{hj}\left(\frac{\partial\mathfrak{G}_{hj}}{\partial\zeta}\right)+\overline{u_{hj}}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{G}}_{hj}}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right)\right]\\
&+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{m=1}^{\delta_h}\left(\vartheta_h^{(m)}\left(\frac{\partial\mathfrak{A}_h^{(m)}}{\partial\zeta}\right)+\overline{\vartheta}_h^{(m)}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{A}}_h^{(m)}}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right)\right]\\
&+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(\sum_{m=1}^{\xi_{hj}}\left(d_{hj}^{(m)}\left(\frac{\partial\mathfrak{W}_{hj}^{(m)}}{\partial\zeta}\right)+\overline{d}_{hj}^{(m)}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{W}}_{hj}^{(m)}}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

[8]) **Puisque** les fonctions (4.8) et (4.9) sont envers w et z des fonctions rationnelles spéciales, on constate facilement que les 4-ième, 7-ième, 8-ième, 9-ième, 10-ième côtés gauches de (4.10) sont toujours réels.

$$+\left[\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\left(r_{lj}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_{lj}}{\partial\zeta}\right)+r_{lj}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}}_{lj}}{\partial\bar{\sigma}}\right)\right)\right)\right]$$

$$+\left[\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{m=1}^{\sigma_l}\left(p_l^{(m)}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_l^{(m)}}{\partial\zeta}\right)+p_l^{(m)}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}}_l^{(m)}}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right)\right]$$

$$+\left[\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\left(\sum_{m=1}^{\eta_{lj}}\left(q_{lj}^{(m)}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_{lj}^{(m)}}{\partial\zeta}\right)+q_{lj}^{(m)}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}}_{lj}^{(m)}}{\partial\bar{\zeta}}\right)\right)\right)\right)\right]$$

$$=\varkappa\left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\zeta}\right)+\bar{\varkappa}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{R}}}{\partial\bar{\zeta}}\right)+t\left(\frac{\partial\mathfrak{I}_{L^*}}{\partial\zeta}\right)+\dot{t}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{I}}_{L^*}}{\partial\bar{\zeta}}\right);$$

les symboles $\mathfrak{E}_k$, $\mathfrak{M}_k^{(m)}$, $\mathfrak{N}_k^{(m)}$, $\mathfrak{P}_h$, $\mathfrak{G}_{hj}$, $\mathfrak{U}_h^{(m)}$, $\mathfrak{V}_{hj}^{(m)}$, $\mathfrak{B}_{lj}$, $\mathfrak{E}_l^{(m)}$, $\mathfrak{W}_{lj}^{(m)}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{I}_{L^*}$, désignent ici respectivement les côtés gauches de (4.10), (3.27) et le côté droit de (4.11) que l'on considère ici comme des fonctions des variables indépendantes complexes et réelles (3.25) et des variables conjuguées avec celles-ci. Le symbole ζ doit être remplacé dans (4.14) respectivement par les variables citées, sauf les conjuguées. Les dérivées partielles doivent être calculées pour les valeurs extrémales (3.26) et les valeurs conjuguées avec elles, en respectant la convention du lemme 4 pour les variables réelles.

En examinant les relations (4.14), on constate, en substituant $\zeta=w_k$ puis $\zeta=z_k$ qu'elles se réduisent aux suivantes:

$$v_k\Omega_w^{\cdot\prime}(w_k,D_0^*,\ldots,\overline{D_{L^*}^*})+\sum_{m=1}^{\gamma_k}\lambda_k^{(m)}\,\Omega_w^{\cdot(m+1)}(w_k,D_0^*,\ldots,\overline{D_{L^*}^*})=0 \qquad (k=1,\ldots,Q),$$

$$-v_k\,\chi_z^{\cdot\prime}(z_k,E_0^*,\ldots,\overline{E_{L^*}^*})+\sum_{m=1}^{\gamma_k}\lambda_k^{(m)}\,\chi_z^{\cdot(m+1)}(z_k,E_0^*,\ldots,\overline{E_{L^*}^*})=0 \qquad (k=1,\ldots,Q),$$

d'où, d'après (4.10)[9]),

$$\lambda_k^{(m)}=0, \qquad \mu_k^{(m)}=0 \qquad (m=\gamma_k;\ k=1,\ldots,Q). \tag{4.15}$$

En posant $\zeta=v_h^{\cdot}$ et $\zeta=\varphi_{hj}^{\cdot}$ $(j=1,\ldots,I_h;\ h=1,\ldots,P)$, on obtient

$$g_h\frac{1}{i}\,\Omega_w^{\cdot\prime}(v_h,D_0^*,\ldots,\overline{D_{L^*}^*})+g_h\frac{1}{i}\,\Omega_w^{\cdot\prime}(v_h,D_0^*,\ldots,\overline{D_{L^*}^*})$$

$$+\Omega_w^{\cdot\prime}(v_h,D_0^*,\ldots,\overline{D_{L^*}^*})\left(\sum_{j=1}^{I_h}u_{hj}\right)+\sum_{m=1}^{\delta_h}\vartheta_h^{(m)}\Omega_w^{\cdot(m+1)}(v_h,D_0^*,\ldots,\overline{D_{L^*}^*})$$

[9]) Voir remarque p. 20.

$$-(u_{hj}+\overline{u}_{hj})\chi_{1y}^{\cdot\prime}(\varphi_{hj},E_0^*,\ldots,E_{L^*}^*)$$

$$+2\sum_{m=1}^{\xi_{hj}} d_{hj}^{(m)}\chi_1^{\cdot(m+1)}(\varphi_{hj},E_0^*,\ldots,E_{L^*}^*)=0 \qquad (j=1,\ldots,I_h;\ h=1,\ldots,P)\ ^{10}),$$

d'où, d'après (4.10),

$$\begin{aligned} &\vartheta_h^{(m)}=0 \qquad (m=\delta_h;\ h=1,\ldots,P),\\ &d_{hj}^{(m)}=0 \qquad (m=\xi_{hj};\ j=1,\ldots,I_h;\ h=1,\ldots,P). \end{aligned} \tag{4.16}$$

En posant $\zeta=\omega_l^{\cdot}$, $\zeta=\psi_{lj}^{\cdot}$ $(j=1,\ldots,G_l;\ l=1,\ldots,R)$, on obtient comme plus haut

$$2\Omega_{1x}^{\cdot\prime}(w_l,D_0^*,\ldots,\overline{D_{L^*}^*})\sum_{j=1}^{\sigma_l} r_{lj}+2\sum_{m=1}^{G_l} p_l^{(m)}\Omega_{1x}^{\cdot(m+1)}(\omega_l,D_0^*,\ldots,D_{L^*}^*)=0$$

$$(l=1,\ldots,R),$$

$$-2r_{lj}\chi_{1y}^{\cdot\prime}(\psi_{lj},E_0^*,\ldots,\overline{E_{L^*}^*})+2\sum_{m=1}^{\eta_{lj}} q_{lj}^{(m)}\chi_{1y}^{\cdot(m+1)}(\psi_{lj},E_0^*,\ldots,\overline{E_{L^*}^*})=0$$

$$(j=1,\ldots,G_l;\ l=1,\ldots,R),$$

d'où, d'après (4.10),

$$\begin{aligned} &p_l^{(m)}=0 \qquad (m=\sigma_l;\ l=1,\ldots,R),\\ &q_{lj}^{(m)}=0 \qquad (m=\eta_{lj};\ j=1,\ldots,G_l;\ l=1,\ldots,R). \end{aligned} \tag{4.17}$$

En posant $\zeta=D_s^{\cdot}$ et $\zeta=E_s^{\cdot}$ $(s=0,\ldots,L^*)$, on obtient, après un calcul simple et en tenant compte de (4.15), (4.16), (4.17), les relations suivantes:

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{k=1}^{Q}(\nu_k w_k^{-s}+\overline{\nu}_k\overline{w}_k^{s})\right]+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\gamma_k-1}\left(\lambda_k^{(m)}F_{-s}^{(m)}w_k^{-s-m}+\overline{\lambda}_k^{(m)}F_s^{(m)}\overline{w}_k^{s-m}\right)\right)\right]\\ &+\left[2\sum_{k=1}^{P} g_k\frac{1}{i}\left(v_k^{-s}-\overline{v}_k^{s}\right)\right]+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(u_{hj}v_h^{-s}+\overline{u}_{hj}\overline{v}_h^{s}\right)\right)\right]\\ &+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{m=1}^{\delta_h-1}\left(\vartheta_h^{(m)}F_{-s}^{(m)}v_h^{-s-m}+\overline{\vartheta}_h^{(m)}F_s^{(m)}\overline{v}_h^{s-m}\right)\right)\right]+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l} r_{lj}e^{-i\omega_l s}\right)\right]\\ &+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{m=1}^{\sigma_l-1} p_l^{(m)}\Gamma_{-s}^{(m)}e^{-i\omega_l s}\right)\right]=\begin{cases} X_s & (s=0,\ldots,L^*-1),\\ X_s+\varkappa & (s=L^*); \end{cases} \end{aligned} \tag{4.18}$$

[10]) Remarquons qu'on a toujours

$$\Omega_w^{\cdot\prime}\left(\frac{1}{w},D_0^*,\ldots,\overline{D}_{L^*}^*\right)\frac{1}{w}=-\overline{\Omega_w^{\cdot\prime}(w,D_0^*,\ldots,\overline{D}_{L^*}^*)w}.$$

$$(4.19)\quad -\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\nu_k z_k^{-s}+\bar{\nu}_k \bar{z}_k^{s}\right)\right]+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\gamma_k-1}\left(\mu_k^{(m)} F_{-s}^{(m)} z_k^{-s-m}+\bar{\mu}_k^{(m)} F_s^{(m)} \bar{z}_k^{s-m}\right)\right)\right]$$

$$-\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(u_{hj}+\bar{u}_{hj}\right) e^{-i\varphi_{hj}s}\right)\right]+\left[2\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(\sum_{m=1}^{\varepsilon_{hj}-1} d_{hj}^{(m)} \Gamma_{-s}^{(m)} e^{-i\varphi_{hj}s}\right)\right)\right]$$

$$-\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l} r_{lj} e^{-i\varphi_{lj}s}\right)\right]+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\left(\sum_{m=1}^{\eta_{lj}-1} q_{lj}^{(m)} \Gamma_{-s}^{(m)} e^{-i\varphi_{lj}s}\right)\right)\right]$$

$$=\begin{cases} Y_s & (s=0,\ldots,L^*-1),\\ Y_s-z\,T^{*L^*} & (s=L^*),\end{cases}$$

où

$$(4.20)\qquad X_s=\begin{cases} 0 & (s=0,\ldots,G^*-1),\\ t\left(\dfrac{\partial J_{L^*}}{\partial D_s^{\cdot}}\right)+t\left(\overline{\dfrac{\partial J_{L^*}}{\partial \bar{D}_s^{\cdot}}}\right) & (s=G^*,\ldots,L^*),\end{cases}$$

et

$$(4.20')\qquad Y_s=\begin{cases} 0 & (s=0,\ldots,G^*-1),\\ t\left(\dfrac{\partial J_{L^*}}{\partial E_s^{\cdot}}\right)+t\left(\overline{\dfrac{\partial J_{L^*}}{\partial \bar{E}_s^{\cdot}}}\right) & (s=G^*,\ldots,L^*),\end{cases}$$

et où

$$F_s^{(m)}=s(s-1)\ldots(s-m+1),$$

$$\Gamma_s^{(m)}=(si)^m \qquad (s=0,\pm1,\pm2,\ldots;\ m=1,2,\ldots).$$

II. Déduction des formules fondamentales

Considérons les côtés gauches de (4.18) et (4.19) pour les indices s plus grands que L^* et désignons les respectivement par

$$(4.21)\qquad X_s \qquad (s=L^*+1,L^*+2,\ldots),$$

$$(4.21')\qquad Y_s \qquad (s=L^*+1,L^*+2\ldots).$$

Posons

$$(4.22)\qquad X(w)=\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(-\frac{\nu_k w}{w-w_k}+\frac{\bar{\nu}_k\overline{w}_k w}{1-w\overline{w}_k}\right)\right]$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\gamma_k-1}\left(\lambda_k^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial\zeta^m}\frac{1}{1-\frac{w}{\zeta}}\right)_{\zeta=w_k}\right)+\bar{\lambda}_k^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial\zeta^m}\frac{1}{1-w\zeta}\right)_{\zeta=\overline{w}_k}\right)\right)\right)\right]$$

$$+\left[2\sum_{h=1}^{P}\left(-\frac{\frac{g_h}{i}w}{w-v_h}+\frac{-\frac{g_h}{i}w\overline{v}_h}{1-w\overline{v}_h}\right)\right]+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(-\frac{u_{hj}w}{w-v_h}+\frac{\overline{u}_{hj}\overline{v}_h w}{1-w\overline{v}_h}\right)\right)\right]$$

$$+\left[\sum_{p=1}^{P}\left(\sum_{m=1}^{\delta_h-1}\left(\vartheta_h^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial\zeta^m}\frac{1}{1-\frac{w}{r_h}}\right)_{\zeta=v_h}\right)+\bar{\vartheta}_h^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial\zeta^m}\frac{1}{1-w\zeta}\right)_{\zeta=\overline{v}_h}\right)\right)\right)\right]$$

$$+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\frac{r_{lj}}{1-we^{-i\omega_l}}\right)\right]+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{m=1}^{\sigma_l-1}\mu_l^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{1}{1-we^{-ix}}\right)_{x=\omega_l}\right)\right)\right]$$

et

$$(4.22')\qquad Y(z)=-\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(-\frac{\nu_k z}{z-z_k}+\frac{\bar{\nu}_k\bar{z}_k z}{1-z\bar{z}_k}\right)\right]$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\gamma_k-1}\left(\mu_k^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial\zeta^m}\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}\right)_{\zeta=z_k}\right)+\bar{\mu}_k^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial\zeta^m}\frac{1}{1-z\zeta}\right)_{\zeta=\bar{z}_k}\right)\right)\right)\right]$$

$$-\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\frac{u_{hj}+\overline{u}_{hj}}{1-ze^{-i\varphi_{hj}}}\right)\right]+\left[2\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(\sum_{m=1}^{\xi_{hj}-1}d_{hj}^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial y^m}\frac{1}{1-ze^{-iy}}\right)_{y=\varphi_{hj}}\right)\right)\right)\right]$$

$$-\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\frac{r_{lj}}{1-ze^{-i\varphi_{hj}}}\right)\right]+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\left(\sum_{m=1}^{\eta_{lj}-1}q_{lj}^{(m)}\left(\left(\frac{\partial^m}{\partial y^m}\frac{1}{1-ze^{-iy}}\right)_{y=\psi_{lj}}\right)\right)\right)\right].$$

On vérifie facilement en vertu de (4.22), (4.22′) et de la définition des nombres (4.20), (4.21) et (4.20′), (4.21′) que

$$X\left(\frac{1}{\overline{w}}\right) = -\overline{X(w)}, \tag{4.24}$$

$$Y\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = -\overline{Y(z)}\ ^{11}), \tag{4.24′}$$

et

$$X(w) = \left(\sum_{s=G^*}^{\infty} X_s w^s\right) + \varkappa w^{L^*}, \tag{4.25}$$

$$Y(z) = \left(\sum_{s=G^*}^{\infty} Y_s z^s\right) - \varkappa T^{*L^*} z^{L^*} \tag{4.25′}$$

pour w et z suffisamment petits. En posant ensuite

$$\Phi(w) = -\Omega^{*\prime}(w) w X(w), \tag{4.26}$$

$$\Psi(z) = +\chi^{*\prime}(z) z Y(z), \tag{4.26′}$$

il résulte de (3.22), (4.22), (4.24), (4.25) et (4.22′), (4.24′), (4.25′) ainsi que des relations évidentes

$$\Omega^{*\prime}\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)\frac{1}{\overline{w}} = -\overline{\Omega^{*\prime}(w) w}, \tag{4.27}$$

$$\chi^{*\prime}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\frac{1}{\overline{z}} = -\overline{\chi^{*\prime}(z) z}, \tag{4.27′}$$

que les expressions (4.26) et (4.26′) n'admettent des pôles qu'aux points zéro et l'infini et que $\Phi(1/\overline{w}) = \overline{\Phi(w)}$ et $\Psi(1/\overline{z}) = \overline{\Psi(z)}$. Ces expressions sont donc des fonctions rationnelles spéciales. En outre, en considérant les identités

$$X(w) = -\frac{\Phi(w)}{\Omega^*(w) w}, \tag{4.28}$$

$$Y(z) = +\frac{\psi(z)}{\chi^{*\prime}(z) z} \tag{4.28′}$$

pour w et z suffisamment petits, on déduit de (4.25) et (4.25′) que les degrés des fonctions (4.26) et (4.26′) ne sont pas plus grands que $2N-2$.

---

11) Remarquons qu'en vertu de (4.18) et (4.19), la somme

$$\left[\sum_{k=1}^{Q}(v_k + \overline{v}_k)\right] + \left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}(u_{hj} + \overline{u}_{hj})\right)\right] + \left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l} r_{lj}\right)\right]$$

doit être nulle.

Posons

$$\Phi(w)=\sum_{p=0}^{N}\frac{\mathfrak{D}_{p-1}}{w^{p-1}}+\overline{\mathfrak{D}}_{p-1}w^{p-1}\qquad(\mathfrak{D}_0=\overline{\mathfrak{D}}_0), \tag{4.29}$$

$$\Psi(z)=\sum_{p=0}^{N}\frac{\mathfrak{E}_{p-1}}{z^{p-1}}+\overline{\mathfrak{E}}_{p-1}z^{p-1}\qquad(\mathfrak{E}_0=\overline{\mathfrak{E}}_0), \tag{4.29'}$$

et examinons les coefficients dans les côtés droits de ces expressions. On a, d'après (4.29), (4.26), (4.25), (4.3) et (4.29') (4.26'), (4.25'), (4.3'),

$$2\mathfrak{D}_0=\left(\sum_{s=G^*}^{L^*}X_s s D_s^*\right)+\varkappa L^* D_{L^*}^*, \tag{4.30}$$

$$2\mathfrak{E}_0=-\left(\sum_{s=G^*}^{L^*}Y_s s D_s^*\right)+\varkappa L^* D_{L^*}T^{*L^*}, \tag{4.30'}$$

et

$$\mathfrak{D}_{p-1}=\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}X_s(s+p-1)D_{s+p-1}^*\qquad(p=2,\ldots,N), \tag{4.31}$$

$$\mathfrak{E}_{p-1}=-\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}Y_s(s+p-1)E_{s+p-1}^*\qquad(p=2,\ldots,N). \tag{4.31'}$$

Revenons aux fonctions (4.8) et (4.9), et considérons y w, z et $D_s^{\cdot},\overline{D_s^{\cdot}}$, $E_s^{\cdot},\overline{E_s^{\cdot}}$ $(s=0,\ldots,L^*)$ comme des variables indépendantes suffisamment proches de 0,0 et $D_s^*,\overline{D_s^*},E_s^*,\overline{E_s^*}$ $(s=0,\ldots,L^*)$. On voit facilement qu'il existe une fonction

$$w=a^{\cdot}(z,D_0^{\cdot},\ldots,D_{L^*}^{\cdot},\overline{D_0^{\cdot}},\ldots,\overline{D_{L^*}^{\cdot}},E_0^{\cdot},\ldots,E_{L^*}^{\cdot},\overline{E_0^{\cdot}},\ldots,\overline{E_{L^*}^{\cdot}}) \tag{4.32}$$

holomorphe envers les variables citées et telle que identiquement

$$\Omega^{\cdot}\left(a^{\cdot}(z,D_0^{\cdot},\ldots,\overline{E_{L^*}^{\cdot}}),D_0^{\cdot},\ldots,\overline{D_{L^*}^{\cdot}}\right)=\chi^{\cdot}(z,E_0^{\cdot},\ldots,\overline{E_{L^*}^{\cdot}}), \tag{4.33}$$

en outre $a^{\cdot}(0,D_0^{\cdot},\ldots,\overline{E_{L^*}^{\cdot}})=0$ et $-\pi/L<\arg a_z^{\cdot}(0,D_0^{\cdot},\ldots,\overline{E_{L^*}^{\cdot}})<\pi/L$. En posant dans un entourage du point $z=0$

$$a^{\cdot}(z,D_0^{\cdot},\ldots,\overline{E_{L^*}^{\cdot}})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\cdot}(D_0^{\cdot},\ldots,\overline{E_{L^*}^{\cdot}})z^n, \tag{4.34}$$

on a en particulier

$$\frac{a_n^{\cdot}(D_0^{\cdot},\ldots,\overline{E}_{L^*}^{\cdot})}{a_1^{\cdot}(D_0^{\cdot},\ldots,\overline{E}_{L^*}^{\cdot})}=a_{nL^*}(D_{G_n}^{\cdot},\ldots,D_{L^*}^{\cdot},E_{G_n}^{\cdot},\ldots,E_{L^*}^{\cdot})\quad(n=2,\ldots,N), \tag{4.35}$$

où les expressions du côté droit coïncident avec celles de (4.1).

Enfin on calcule facilement de (4.33), (4.34) et (4.8), (4.9):

$$(4.36)\quad \frac{\partial a_n^{\cdot}}{\partial D_s^{\cdot}} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial D_s^{\cdot}}\left(\left(\frac{\partial^n a^{\cdot}}{\partial z^n}\right)_{z=0}\right)\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{\partial a^{\cdot}}{\partial D_s^{\cdot}}\right)\right)_{z=0}$$

$$(n=2,\dots,N;\ s=G^*,\dots,L^*),$$

$$\frac{\partial a^{\cdot}}{\partial D_s^{\cdot}}\,\Omega_w''(a^{\cdot}, D_0^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}) + \frac{\partial \Omega^{\cdot}}{\partial D_s^{\cdot}} = 0 \qquad (s=G^*,\dots,L^*),$$

$$\frac{\partial \Omega^{\cdot}}{\partial D_s^{\cdot}} = \frac{1}{a^{\cdot s}} \qquad (s=G^*,\dots,L^*)$$

et

$$\frac{\partial a_n^{\cdot}}{\partial E_s^{\cdot}} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial E_s^{\cdot}}\left(\left(\frac{\partial^n a^{\cdot}}{\partial z^n}\right)_{z=0}\right)\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{\partial a^{\cdot}}{\partial E_s^{\cdot}}\right)\right)_{z=0}$$

$$(4.36')\qquad (n=2,\dots,N;\ s=G^*,\dots,L^*),$$

$$\frac{\partial a^{\cdot}}{\partial E_s^{\cdot}}\,\Omega_w''(a^{\cdot}, D_0^{\cdot},\dots,\overline{D}_{L^*}^{\cdot}) - \frac{\partial \chi^{\cdot}}{\partial E_s^{\cdot}} = 0 \qquad (s=G^*,\dots,L^*),$$

$$\frac{\partial \chi^{\cdot}}{\partial E_s^{\cdot}} = \frac{1}{z^s} \qquad (s=G^*,\dots,L^*),$$

où $a^{\cdot}, \Omega^{\cdot}, \chi^{\cdot}$ et $a_n^{\cdot}$ désignent respectivement les expressions (4.32), (4.8), (4.9) et les coefficients de (4.34). On obtient de là, après un calcul simple et d'après (4.35), (4.20), (4.20′) et la définition de (4.2′) et (4.7″)

$$\frac{\partial a_1^{\cdot}}{\partial D_s^{\cdot}} = \begin{cases} 0 & (s=G^*,\dots,L^*-1), \\ \dfrac{a_1^{\cdot}}{L^* D_{L^*}^{\cdot}} & (s=L^*), \end{cases}$$

$$\frac{\partial a_1^{\cdot}}{\partial E_s^{\cdot}} = \begin{cases} 0 & (s=G^*,\dots,L^*-1), \\ \dfrac{-a_1^{\cdot} a_1^{\cdot L^*}}{L^* D_{L^*}^{\cdot}} & (s=L^*), \end{cases}$$

$$\frac{\partial a_{nL^*}}{\partial D_s^{\cdot}} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_1^{\cdot}}\dfrac{\partial a_n^{\cdot}}{\partial D_s^{\cdot}} & (s=G^*,\dots,L^*-1), \\ \dfrac{1}{a_1^{\cdot}}\left(\dfrac{\partial a_n^{\cdot}}{\partial D_s^{\cdot}} - \dfrac{a_n^{\cdot}}{L^* D_{L^*}^{\cdot}}\right) & (s=L^*), \end{cases}$$

$$\frac{\partial a_{nL^*}}{\partial E_s^{\cdot}} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_1^{\cdot}}\dfrac{\partial a_n^{\cdot}}{\partial E_s^{\cdot}} & (s=G^*,\dots,L^*-1), \\ \dfrac{1}{a_1^{\cdot}}\left(\dfrac{\partial a_n^{\cdot}}{\partial E_s^{\cdot}} + \dfrac{a_1^{\cdot L^*} a_n^{\cdot}}{L^* D_{L^*}^{\cdot}}\right) & (s=L^*), \end{cases}$$

3*

où a_{nL^*} désignent les fonctions des côtes droits de (4.35), et ensuite

$$X_s = \begin{cases} \dfrac{t}{T^*}\sum_{n=2}^{N} H_n^*\left(\dfrac{\partial \dot{a_n}}{\partial \dot{D_s}}\right) & (s=G^*,\dots,L^*-1), \\ \dfrac{t}{T^*}\left(\sum_{n=2}^{N} H_n^*\left(\dfrac{\partial \dot{a_n}}{\partial \dot{D_s}}\right) - \dfrac{1}{L^* D_{L^*}^*}\sum_{n=2}^{N} H_n^* a_n^*\right) & (s=L^*), \end{cases} \tag{4.38}$$

$$Y_s = \begin{cases} \dfrac{t}{T^*}\sum_{n=2}^{N} H_n^*\left(\dfrac{\partial \dot{a_n}}{\partial \dot{E_s}}\right) & (s=G^*,\dots,L^*-1), \\ \dfrac{t}{T^*}\left(\sum_{n=2}^{N} H_n^*\left(\dfrac{\partial \dot{a_n}}{\partial \dot{E_s}}\right) + \dfrac{T^* L^*}{L^* D_{L^*}^*}\sum_{n=2}^{N} H_n^* a_n^*\right) & (s=L^*), \end{cases} \tag{4.38'}$$

où les dérivées partielles se rattachent aux valeurs extrémales $D_s^*, \bar{D}_s^*$, $E_s^*, \bar{E}_s^*$ $(s=0,\dots,L^*)$. En appliquant les formules (4.36), (4.38), (4.36'), (4.38') on obtient de (4.31) et (4.31'):

$$\mathfrak{D}_{p-1} = \frac{t}{T^*}\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}\left(\sum_{n=2}^{N} H_n^*\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{\Omega^{*\prime}(a^*(z))(a^*(z))^s}\right)_{z=0}\right]\right)(s+p-1)D_{s+p-1}^*$$

$$= -\frac{t}{T^*}\sum_{n=2}^{N} H_n^*\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left((a^*(z))^p \frac{1}{\Omega^{*\prime}(a^*(z))}\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}(s+p-1)D_{s+p-1}^*\frac{1}{(a^*(z)^{s+p})}\right)\right)_{z=0}\right]$$

$$(p=2,\dots,N),$$

$$\mathfrak{E}_{p-1} = -\frac{t}{T^*}\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}\left(\sum_{n=2}^{N} H_n^*\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\,\frac{1}{\Omega^{*\prime}(a^*(z))z^s}\right)_{z=0}\right]\right)(s+p-1)E_{s+p-1}^*$$

$$= -\frac{t}{T^*}\sum_{n=2}^{N} H_n^*\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z_n}\left(a^{*\prime}(z)z^p\frac{1}{\chi^{*\prime}(z)}\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}(s+p-1)E_{s+p-1}^*\frac{1}{z^{s+p}}\right)\right)_{z=0}\right]$$

$$(p=2,\dots,N).$$

Puisqu'on a, en introduisant les notations (4.7'),

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left((a^*(z))^p\frac{1}{\Omega^{*\prime}(a^*(z))}\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}(s+p-1)D_{s+p-1}^*\frac{1}{(a^*(z))^{s+p}}\right)\right)_{z=0} = -a_n^{*(p)}$$

$$(n,p=2,\dots,N),$$

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(a^{*\prime}(z)z^p\frac{1}{\chi^{*\prime}(z)}\sum_{s=G^*}^{L^*-p+1}(s+p-1)E_{s+p-1}^*\frac{1}{z^{s+p}}\right)\right)_{z=0} = -(n-p+1)a_{n-p+1}^*$$

$$(n,p=2,\dots,N),$$

on en déduit

$$\mathfrak{D}_{p-1} = \frac{t}{T^*} \sum_{n=1}^{N} H_n^* a_n^{*(p)} \qquad (p = 2, \dots, N), \tag{4.39}$$

$$\mathfrak{E}_{p-1} = \frac{t}{T^*} \sum_{n=p}^{N} H_n^* (n-p+1) a_{n-p+1}^* \qquad (p = 2, \dots, N). \tag{4.39'}$$

On calcule de la même manière de (4.36), (4.38), (4.30), (4.36'), (4.38'), (4.30') et (3.10)

$$2\mathfrak{D}_0 = \frac{t}{T^*} \sum_{n=2}^{N} H_n^* a_n^* - \frac{t}{T^*} \sum_{n=2}^{N} H_n^* a_n^* + \varkappa L^* D_{L^*}^* = \varkappa L^* D_{L^*}^*, \tag{4.40}$$

$$2\mathfrak{E}_0 = \frac{t}{T^*} \sum_{n=2}^{N} H_n^* a_n^* - \frac{t}{T^*} \sum_{n=2}^{N} H_n^* a_n^* + \varkappa T^{*L^*} L^* E_{L^*}^* \tag{4.40'}$$

$$= \frac{t}{T^*} \sum_{n=2}^{N} H_n^* (n-1) a_n^* + \varkappa T^{*L^*} L_{L^*}^* E_{L^*}^*.$$

En posant donc

$$\tau = \frac{t}{2T^*}, \qquad g = -\varkappa L^* D_{L^*}^* = -\varkappa T^{*L^*} L^* E_{L^*}^*,$$

on vérifie, suivant (4.39), (4.40), (4.29) et (4.39'), (4.40'), (4.29') que les fonctions (4.26) et (4.26') ont la forme (4.5) et (4.6).

Passons maintenant à la déduction des formules (4.4). On déduit de (4.22), (4.25) et (4.22'), (4.25') que

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_C X(w) \left(\Omega^*(w)\right)^f \frac{dw}{w}\right\} \tag{4.41}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sum_{s=G^*}^{L^*f} \left(X_s D_s^{*(f)} + \bar{X}_s \bar{D}_s^{*(f)}\right)\right) + \frac{1}{2} \left(\varkappa D_{L^*}^{*(f)} + \varkappa \bar{D}_{L^*}^{*(f)}\right),$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_C Y(z) \left(\chi^*(z)\right)^f \frac{dz}{z}\right\} \tag{4.41'}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sum_{s=G^*}^{L^*f} \left(Y_s E_s^{*(f)} + \bar{Y}_s \bar{E}_s^{*(f)}\right)\right) - \frac{1}{2} \left(\varkappa E_{L^*}^{*(f)} + \bar{\varkappa} \bar{E}_{L^*}^{*(f)}\right) T^{*L^*},$$

où C désigne une circonférence suffisamment petite de centre zéro, et f un nombre naturel quelconque et où nous admettons les notations

$$(4.42)\qquad \left(\Omega^*(w)\right)^f = \sum_{s=0}^{L^*f} D_s^{*(f)} w^{-s} + \bar{D}_s^{*(f)} w^s = \Omega_f^*(w) \qquad (f=1,2,\ldots),$$

$$(4.42')\qquad \left(\chi^*(z)\right)^f = \sum_{s=0}^{L^*f} E_s^{*(f)} z^{-s} + \bar{E}_s^{*(f)} z^s = \chi_f^*(z) \qquad (f=1,2,\ldots).$$

On vérifie facilement, en tenant compte de (4.42), (4.18) et (4.42′), (4.18′) et de la définition des nombres (4.21) et (4.21′) que les côtes droits de (4.41) et (4.41′) se reduisent à la forme

$$(4.43)\qquad \left[\sum_{k=1}^{Q}\left(v_k\Omega_f^*(w_k)+\bar{v}_k\overline{\Omega_f^*(w_k)}\right)\right]$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\gamma_k-1}\left(\lambda_k^{(m)}\Omega_f^{*(m)}(w_k)+\overline{\lambda_k^{(m)}\Omega_f^{*(m)}(w_k)}\right)\right)\right]$$

$$+\left[2\sum_{h=1}^{P}\left(\frac{g_h}{i}\Omega_f^*(v_h)-\frac{g_h}{i}\overline{\Omega_f^*(v_h)}\right)\right]+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(u_{hj}\Omega_f^*(v_h)+\bar{u}_{hj}\overline{\Omega_f^*(v_h)}\right)\right)\right]$$

$$+\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{m=1}^{\delta_h-1}\left(\vartheta_h^{(m)}\Omega_f^{*(m)}(v_h)+\bar{\vartheta}_h^{(m)}\overline{\Omega_f^{*(m)}(v_h)}\right)\right)\right]$$

$$+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}r_{lj}\Omega_{f1}^*(\omega_l)\right)\right]+2\left[\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{m=1}^{\delta_l}p_l^{(m)}\Omega_{f1}^{*(m)}(\omega_l)\right)\right] \qquad (f=1,2,\ldots),$$

$$(4.43')$$

$$-\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(v_k\chi_f^*(z_k)+\bar{v}_k\overline{\chi_f^*(z_k)}\right)\right]+\left[\sum_{k=1}^{Q}\left(\sum_{m=1}^{\gamma_k-1}\left(\mu_k^{(m)}\chi_f^{*(m)}(z_k)+\bar{\mu}_k^{(m)}\overline{\chi_f^{*(m)}(z_k)}\right)\right)\right]$$

$$-\left[\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}(u_{hj}+\bar{u}_{hj})\chi_{f1}^*(\varphi_{hj})\right)\right]+\left[2\sum_{h=1}^{P}\left(\sum_{j=1}^{I_h}\left(\sum_{m=1}^{\xi_{hj}-1}d_{hj}^m\chi_{f1}^{*(m)}(\varphi_{hj})\right)\right)\right]$$

$$-\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}r_{lj}\chi_{f1}^*(\psi_{lj})\right)\right]+\left[2\sum_{l=1}^{R}\left(\sum_{j=1}^{G_l}\left(\sum_{m=1}^{\eta_{lj}-1}q_{lj}^{(m)}\chi_{f1}^{*(m)}(\psi_{lj})\right)\right)\right] \qquad (f=1,2,\ldots),$$

où $\Omega_{f1}^*(x)=\Omega_f^*(e^{ix})$ et $\chi_{f1}^*(y)=\chi_f^*(e^{iy})$. Mais revenant aux relations (4.21′), on obtient pour (4.42), (4.42′) et tout f naturel les égalités

$$
\begin{aligned}
&\Omega_f^*(w_k)=\chi_f^*(z_k) && (k=1,\dots,Q),\\
&\Omega_f^{*(m)}(w_k)=0 && (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
&\chi_f^{*(m)}(z_k)=0 && (m=1,\dots,\gamma_k;\ k=1,\dots,Q),\\
&\Omega_f^*(v_h)=\overline{\Omega_f^*(v_h)} && (h=1,\dots,P),\\
&\Omega_f^*(v_h)=\chi_{f1}^*(\varphi_{hj}) && (j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\Omega_f^{*(m)}(v_h)=0 && (m=1,\dots,\delta_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\chi_{f1}^{*(m)}(\varphi_{hj})=0 && (m=1,\dots,\xi_{hj};\ j=1,\dots,I_h;\ h=1,\dots,P),\\
&\Omega_{f1}^*(\omega_l)=\chi_{f1}^*(\psi_{lj}) && (j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R),\\
&\Omega_{f1}^{*(m)}(\omega_l)=0 && (m=1,\dots,\sigma_l;\ l=1,\dots,R),\\
&\chi_{f1}^{*(m)}(\psi_{lj})=0 && (m=1,\dots,\eta_{lj};\ j=1,\dots,G_l;\ l=1,\dots,R).
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

Donc, en comparant les formules (4.44), (4.28), (4.41), (4.43) et (4.28′), (4.41′), (4.43′) on a immédiatement les formules cherchées (4.4).

En faisant une substitution dans les intégrales à gauche dans (4.4), et en profitant de l'identité évidente

$$a^{*\prime}(z)\,\Omega^{*\prime}\big(a^*(z)\big)=\chi^{*\prime}(z),$$

on parvient aux formules (4.4′). Enfin, en passant aux nombres τ et g, nous voyons facilement de (4.39), (4.40), (4.29), (4.28), (4.22) et de (4.39′), (4.40′), (4.29′), (4.28′), (4.22′), qu'ils ne peuvent s'annuler simultanément, car dans ce cas les multiplicateurs (4.13) devraient être tous égaux à zéro.

BULL MATH. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R.
Tome 1 (49), n° 3, 1957

MÉTHODES VARIATIONELLES DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS UNIVALENTES

PAR

Z. CHARZYŃSKI (Łódź)

(Communication au Congrès des mathématiciens roumains, Bucarest, mai-juin 1956)

1. Introduction

Je vais présenter certains résultats de la théorie des fonctions univalentes basés sur les méthodes de variations. Ils concèrnent le problème connu, des coefficients, dont je m'occupe avec mon collègue Mr. J a n o w s k i à l'Université de Łódź, depuis quelques années.

Considérons la famille F_M de fonctions de la forme

$$F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots, \qquad |z| < 1, \tag{1}$$

univalentes et bornées, c.à.d. telles que

$$F(z_1) \neq F(z_2) \text{ si } z_1 \neq z_2 \text{ et } |F(z)| < M \text{ pour } |z| < 1, \tag{2}$$

$1 \leqslant M \leqslant +\infty$ étant un nombre arbitraire ou l'infini.

Prenons un nombre N naturel quelconque et faisons correspondre à chaque fonction (1) le point

$$P = (\lambda_2 \ldots, \lambda_N, \mu_2 \ldots, \mu_N), \text{ où } \lambda_k + i\mu_k = A_k, \; k = 2, \ldots, N, \tag{3}$$

de l'espace euclidien à $2N-2$ dimensions. Si la fonction (1) parcourt la famille F_M, on obtient dans l'espace cité un ensemble $V_N^{(M)}$ de points (3). Nous l'appellerons *la N-ième région de coefficients*, correspondant à la famille F_M. La caractérisation de l'ensemble $V_N^{(M)}$ est le problème fondamental de la théorie.

Pour l'étudier on peut appliquer la méthode des fonctions extrémales comme suit.

On prend une fonction quelconque réelle de variables réelles

$$H(X_2, \ldots, X_N, Y_2, \ldots, Y_N) \tag{4}$$

définie dans une région suffisamment grande et y possédant les derivées partielles du premier ordre continues, qui ne s'annullent nulle part simultanément. On fait correspondre à chaque fonction (1) le nombre réel

$$H_F = H(\lambda_2, \ldots, \mu_N). \tag{5}$$

On voit que (5) est une fonctionnelle définie dans F_M. Mais cette famille étant compacte, il existe dans F_M des fonctions extrémales

$$F^*(x) = z + A_2^* z^2 + \ldots, \quad |z| < 1, \tag{6}$$

pour lesquelles la fonctionelle (5) atteint la valeur la plus grande, c.à.d. telle que

$$H_{F^*} = \max_{F \in F_M} H_F. \tag{7}$$

Ceci peut-être interprété d'une façon géométrique comme suit.

Supposons pour simplifier, que $V_N^{(M)}$ est un ensemble plan et que (4) est definie dans tout le plan. En posant comme ci-dessous:

$$P^* = (\lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_N^*),$$
$$\lambda_k^* + i\mu_k^* = A_k^*, \; k = 2, \ldots, N,$$

on voit bien que les relations

$$H(X_2, \ldots, Y_N) \lessgtr H(\lambda_2^*, \ldots, \mu_N^*) = H_{F^*}$$

décomposent le plan en trois parties I, II, III, et il est clair que l'ensemble $V_N^{(M)}$ doit être situé en dehors de la partie III.

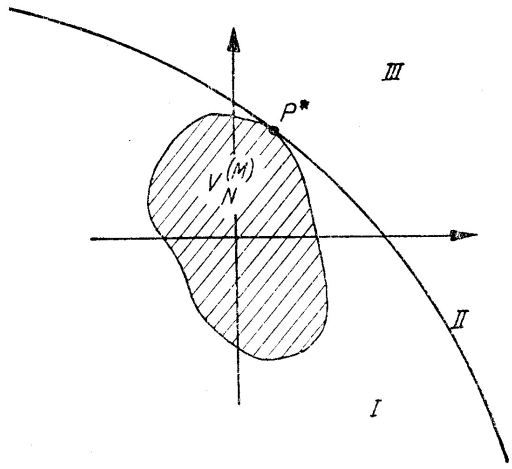


Fig. 1

En outre, on voit que le point P^* est situé sur la frontière de $V_N^{(M)}$.

En prenant une autre fonctionnelle $\hat{H}_F$ on obtient que $V_N^{(M)}$ est situé en dehors d'une autre partie $\widehat{\text{III}}$ du plan et on trouve un autre point $\hat{P}^*$ de la frontière etc. En résumé, le problème fondamental de la caractérisation de $V_N^{(M)}$ se réduit au problème suivant: pour une fonction arbitraire (4) et la fonctionelle (5) trouver la

fonction extrémale (6). Il faut remarquer ici, que ce problème est intéressant par lui-même. Par exemple, en posant:

$$H(X_2, \ldots, Y_N) = X_N \text{ et } H_F = \lambda_N = \operatorname{Re}\{A_N\} \tag{9}$$

on voit que l'hypothèse que le maximum de H_F est égal à N, est tout simplement l'hypothèse connue de B i e b e r b a c h.

Le programme naturel pour résoudre ce problème est le suivant:

En premier lieu I: En appliquant des méthodes variationelles trouver dans le cas général d'une fonctionnelle quelconque (5) des conditions nécessaires qui doivent être satisfaites par les extrémales (6).

En second lieu II: en tenant compte de ces conditions, déterminer effectivement les fonctions extrémales pour des cas de fonctionnelles particulières.

2. Première méthode de variations

En ce qui concerne le point I du programme, une méthode de variations basée sur les transformations conformes proches de l'identité, nous donne le

T h é o r è m e g é n é r a l. *Étant donnée une fonctionnelle* (5) *et une extrémale* (6), *cette extrémale satisfait à une équation différentielle de la forme*

$$\left(\frac{F^{*\prime}(z)}{F^{*}(z)}\right)^2 \mathfrak{M}\left(\frac{F^{*}(z)}{M}\right) = \frac{1}{z^2}\,\mathfrak{N}(z), \tag{1}$$

où

$$\mathfrak{M}(w) = \frac{\mathfrak{D}_{N-1}}{w^{N-1}} + \ldots + \frac{\mathfrak{D}_1}{w} + \mathfrak{D}_0 + \overline{\mathfrak{D}}_0 + \overline{\mathfrak{D}}_1 w + \ldots + \overline{\mathfrak{D}}_{N-1} w^{N-1},$$

$$\mathfrak{N}(z) = \frac{\mathfrak{E}_{N-1}}{z^{N-1}} + \ldots + \frac{\mathfrak{E}_1}{z} + \mathfrak{E}_0 + \overline{\mathfrak{E}}_0 + \overline{\mathfrak{E}}_1 z + \ldots + \overline{\mathfrak{E}}_{N-1} z^{N-1}$$

désignent ici des fonctions rationelles dont les coefficients s'expriment par les coefficients de (6). Ce théorème a été publié dans mon travail « *Sur les fonctions univalentes bornées* », Rozpr. Matem. 1953. Il fut communiqué au IV-ème Congrès des mathématiciens polonais (1946). Pour le cas $M = +\infty$ le théorème analogue a été obtenu par Mr. Mr. S p e n c e r, S c h a e f f e r par une autre méthode dans les travaux « *The coefficients of schlicht functions* », I, II, III. Duke Math. Journal et Amer. Coll. Publ. (1943—1950). Le théorème cité a été généralisé pour le cas de fonctionelles qui dépendent d'une infinité de coefficients et qui possèdent une différentielle au sens analogue de celui de F r é c h e t, par Mr. J a n o w s k i et moi-même, dans le travail « *Sur l'équation générale des fonctions extrémales* », Ann. Univ. Curie-Sklodowska (1950).

Ces théorèmes généraux constituent une base pour l'étude des cas particuliers du point II du programme. Voici les résultats particuliers obtenus par mon collègue Mr. J a n o w s k i par l'intégration de l'équation (1).

Soit une fonction univalente quelconque $F(z)$ de la famille F_M; on a

1) $$|A_2| \leqslant 2\left(1-\frac{1}{M}\right);$$

1') $$|A_3| \leqslant \begin{cases} 2\lambda^2+1-\dfrac{4\lambda}{M}+\dfrac{1}{M^2} & M \geqslant e \\ 1-\dfrac{1}{M^2} & M \leqslant e \end{cases} \quad \text{pour}$$

où

$$\lambda \ln \lambda = -\frac{1}{M}$$

(e — le nombre de E u l e r);

2) $$\arg \frac{F(z)}{z} \leqslant \frac{1-\left(\frac{\rho_M}{M}\right)^2}{1+\left(\frac{\rho_M}{M}\right)^2} \ln\left(\frac{1-\frac{\rho_M}{M}}{1+\frac{\rho_M}{M}} : \frac{1-|z|}{1+|z|}\right),$$

$$1 \leqslant M < +\infty,$$

où le nombre ρ_M satisfait à l'équation

$$\frac{2\left(\frac{\rho_M}{M}\right)^2}{1+\left(\frac{\rho_M}{M}\right)^2} \ln\left(\frac{1-\frac{\rho_M}{M}}{1+\frac{\rho_M}{M}} : \frac{1-|z|}{1+|z|}\right) + \ln M \; \frac{1-|z|^2}{|z|\left(\frac{M}{\rho_M}-\frac{\rho_M}{M}\right)} = 0,$$

z étant un point donné fixe; en particulier on trouve:

2') $$\arg \frac{F(z)}{z} \leqslant \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}, \qquad M = +\infty;$$

on obtient les inégalitées analogues pour Re $\{F(z)\}$, Im $\{F(z)\}$ et pour les coefficients des fonctions k-symétriques.

Ces relations sont précises, c.à.d. il existe des fonctions, à savoir les fonctions extrémales, pour lesquelles on a dans les relations citées, le signe d'égalité. Ces résultats ont été publie par Mr. W. J a n o w s k i dans les *Ann. Univ. Curie-Sklodowska* (1950) et dans les *Ann. Pol. Math.* (1955).

En revenant au problème de caractérisation de $V_N^{(M)}$, on trouve très facilement, que la frontière de $V_2^{(M)}$ est la circonférence de centre 0 et de rayon $2\left(1-\frac{1}{M}\right)$. A l'aide du théorème général, Mr. Mr. S p e n c e r et S c h a e f f e r ont obtenu des équations paramétriques de la frontière de $V_3^{(M)}$ pour le cas $M = +\infty$.

Pour le cas $M < +\infty$, Mr. J a n o w s k i et moi, nous avons obtenu les équations analogues pour la frontière de $V_3^{(M)}$. Ces équations sont tout à fait élémentaires, mais les formules sont assez longues.

Tout ces résultats particuliers concernent des cas simples où l'intégration de l'équation différentielle (1) nous conduit aux intégrales abéliennes. Mais dans autres cas, cette intégration est pratiquement impossible. Le problème de $V_N^{(M)}$ pour $N>3$ reste ouvert. Il faut chercher une autre méthode de variations — une autre idée.

3. Seconde méthode de variations

Dernièrement je me suis occupé d'une méthode nouvelle basée sur la notion de fonction univalente algébrique, introduite dans mon travail « *Sur les fonctions univalentes algébriques* », Rozpr. Matem. (1955). Ces recherches durent jusqu'à présent et je vais en présenter seulement la dernière partie qui n'est pas publiée.

Soit une fonction univalente

$$w = F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots, \quad |z| < 1, \tag{1}$$

qui transforme le cercle unité en un ensemble H.

Prenons ensuite la fonction $z = G(w)$ inverse à (1). Cette fonction peut être approchée arbitrairement d'après le théorème de R u n g e, par un polynôme

$$P(w) = w + C_2 w^2 + \ldots + C_L w^L \tag{2}$$

qui transforme un ensemble voisin de H en cercle unité d'une façon univalente. En même temps, la fonction inverse à ce polynôme $A(z)$ est voisine à (1). En outre, elle satisfait à l'équation algébrique

$$P(A(z)) = z. \tag{3}$$

Ceci nous permet de nous borner aux fonctions univalentes, algébriques

$$A(z) = z + \alpha_2 z^2 + \ldots, \quad |z| < 1, \tag{4}$$

qui satisfont à une équation du type (3). Dans cette équation les coefficients du polynôme (2) jouent le rôle de paramétres. Mais ils ne peuvent pas être tout à fait arbitraires. Ils sont liés par des conditions essentielles comme ci-desous.

T h é o r è m e I. *Soit un polynôme quelconque du type* (2) *et soit* μ *le plus grand domaine contenant* 0 *et tel que* $|P(w)| < 1$ *pour* $w \in \mu$. *Alors, pour qu'il existe une fonction univalente du type* (4) *satisfaisant à* (3), *transformant évidemment le cercle unité en l'ensemble* μ, *il faut et il suffit que toutes les racines de* $P(w)$ *sauf* 0 *et toutes les racines de* $P'(w)$ *soient situées en dehors ou sur la frontière de* μ.

Désignons ensuite par $\mathfrak{A}_S$ la famille de toutes les fonctions (4) qui satisfont à une équation du type (3) où le degré de (2) ne dépasse pas S. Considérons dans $\mathfrak{A}_S$ une fonctionnelle analytique de la forme

$$H_A = \mathrm{Re}\,\{K(\alpha_2, \ldots, \alpha_N)\}, \tag{5}$$

où $K(\zeta_2, \ldots, \zeta_N)$ désigne une fonction quelconque analytique. On trouve qu'il existe dans $\mathfrak{A}_S$ des extrémales $A^*(z)$ pour lesquelles la fonctionnelle (5) atteint dans $\mathfrak{A}_S$ sa valeur la plus grande. Soit $A^*(z)$ une telle extrémale satisfaisant à l'équation analogue à (3)

$$P^*\{A^*(z)\} = z. \tag{6}$$

En appliquant le principe du maximum et la méthode élémentaire de variations (les multiplicateurs de L a g r a n g e) on arrive au second résultat.

T h é o r è m e II. *L'extrémale* $A^\star(z)$ *et le polynôme* $P^\star(w)$ *satisfont aux conditions suivantes*

1. $|P^\star(w_k)| = 1$, $k = 1, \ldots, Q$,

2. *le résidu au point* w_k *de* $\dfrac{\Phi(w)}{P^{\star\prime}(w)w^2 i'}$ *est un nombre réel, non négatif,* $k = 1, \ldots, Q$.

w_k, $k = 1, \ldots, Q$, *désignent toutes les racines distinctes de* $P^{\star\prime}(w)$; $\Phi(w)$ *est une fonction rationelle analogue à celle de* (1), *dont les coefficients s'expriment simplement par les coefficients de* $A^{\star\prime}(z)$, *ou bien par ceux de* $P^\star(w)$. *En outre, le degré de* $P^\star(w)$ *est égal à* S.

Ce théorème concerne évidemment le point I du programme précédent. En ce qui concerne le point II, c.à.d. les conséquences des conditions 1—2, je n'ai pas obtenu de résultats jusqu'aujourd'hui.

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ
Classe III De Sciences Mathématiques et Naturelles
1957 Vol. VIII, 2

Z. Charzyński et H. Śmiałkówna

Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions holomorphes dans le cercle-unité soient univalentes et bornées

Introduction

En généralisant le théorème connu de L. Bieberbach sur l'aire[1]) M. Biernacki et G. M. Goluzin ont obtenu des certaines conditions nécessaires de l'univalence des fonctions régulieres à l'extérieur du cercle-unite[2]). W. Wolibner a démontré ensuite que certaines conditions sont aussi suffisantes.[3])

A côté de cela, un des auteurs a déduit des certaines relations d'orthogonalité entre les coefficients des puissances naturelles des fonctions univalentes et bornées transformant le cercle-unité en un ensemble de la même mesure[4]).

En partant, dans ce travail, des conditions généralisées de l'orthogonalité des coefficients, nous donnons les conditions pour que les fonctions holomorphes soient univalentes et bornées dans le cercle-unité.

Termes et notations

Désignons par $K(z_0, r)$ ou $|z-z_0| < r$ le cercle de centre z_0 et de rayon r.

Pour chaque ensemble de points du plan E, mesurable dans le sens de Lebesgue, $m(E)$ désignera sa mesure.

---

[1]) Voir [1] p. 72.
[2]) Voir [2] p. 5, [4] p. 277-284.
[3]) Voir [6] p. 250-253.
[4]) Voir [3] p. 52-54.

Nous dirons que la fonction de la forme

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \qquad |z| < 1, \qquad a_1 > 0, \tag{1}$$

est univalente, si pour chaque paire de valeurs $z_1 \neq z_2$ est $f(z_1) \neq f(z_2)$.

En même temps, nous dirons que la fonction de la forme précédente (1) est bornée si elle satisfait les conditions

$$|f(z)| < 1 \quad \text{pour} \quad |z| < 1. \tag{1'}$$

Enfin, pour chaque fonction holomorphe de la forme (1) nous determinons les coefficients $a_n^{(p)}$ par les relations suivantes

$$[f(z)]^p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(p)} z^n, \qquad \text{pour} \qquad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2}$$

1. *Conditions généralisées de l'orthogonalité*

Soit donnée une fonction holomorphe de la forme (1).

Admettons que cette fonction soit univalente et bornée et quelle satisfait, en outre, la condition

$$m\{f[K(0,1)]\} = m[K(0,1)]. \tag{3}$$

En s'appuyant sur ce qu'on à dit plus haut nous obtenons le

Lemme. Les coefficients des puissances entières de la fonction (1) décrites par les égalités (2) satisfont les conditions générales d'orthogonalité suivantes

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{|k|\,|l|}} a_n^{(k)} \overline{a_n^{(l)}} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l. \end{cases} \tag{4}$$

Démonstration. Prenons une fonction quelconque de la forme

$$w(\zeta) = \sum_{p=-N}^{N} \lambda_p \zeta^p. \tag{5}$$

En supposant pour le moment que le nombre naturel quelcon que N est fixe et que par exemple $\lambda_1 = 1$, nous trouvons facilement, qu'il existe un nombre positif suffisament petit ε, tel que la fonction (5) est univalente dans l'anneau

$$\frac{\varrho_f}{2} < |\zeta| < \frac{2}{\varrho_f}\ ^{5}),$$

[5]) Comparer [3], p. 53.

pour touts les coefficients qui satisfont à la seule condition

$$|\lambda_p| < \varepsilon, \qquad p = 0, \pm 1, \ldots, \pm N, \qquad p \neq 1.$$

Nous en déduisons ensuite, que pour les valeurs réelles r suffisament proches de 1, la fonction composée

$$\psi(z) = W[f(z)] \tag{6}$$

est univalente dans l'anneau

$$r < |z| < 1.$$

En désignant pour

$$0 < r < 1$$

$$G_r = f[\overline{K(0, r)}],$$

nous obtenons, vu (1′), (3) que

$$\lim_{r \to 1} m[W(K - G_r)] = 0. \tag{7}$$

En même temps, l'ensemble

$$W(K - G_r)$$

étant limité par les courbes fermées

$$W\{f[K(0, r)]\}, \qquad W[K(0, 1)],$$

nous obtenons sans difficulté que

$$m[W(K - G_r)] = -\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \left\{\sum_{k=-N}^{k=N} \lambda_k e^{ki\vartheta}\right\} \overline{\left\{\sum_{l=-N}^{l=N} \lambda_l \frac{d}{d\vartheta} e^{li\vartheta}\right\}}\, d\vartheta \tag{8}$$

$$+ \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \left\{\sum_{k=-N}^{N} \lambda_k [f(re^{i\vartheta})]^k\right\} \overline{\left\{\sum_{l=-N}^{N} \lambda_l \frac{d}{d\vartheta} [f(re^{i\vartheta})]^l\right\}}\, d\vartheta.$$

Les relations (7) et (8) nous donnent, à l'aide du calcul et du raisonnement analogue à celui du travail cité[6]), les égalitées demandées (4).

---

[6]) Voir [3], p. 52-53.

2. *Déduction d'un théorème fondamental*

En nous basant sur les conditions données de l'orthogonalité, nous obtenons le

Théorème fondamental. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction holomorphe de la forme (1) soit univalente et bornée est que, pour chaque suite des nombres complexes

$$x_p, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{9}$$

telle que $-\infty < \sum_{p=-\infty}^{\infty} p\,|x_p|^2 < +\infty$ ait lieu l'inégalité

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \Big| \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p\, a_n^{(p)} \Big|^2 \leqslant \sum_{p=-\infty}^{\infty} p\,|x_p|^2. \tag{10}$$

Démonstration. Nous démontrerons d'abord que notre condition est neccesaire.

Supposons donée une fonction quelconque de la forme (1) univalente et bornée dans le cercle $|z| < 1$. Il est évident de (4) que si cette fonction satisfait la condition (3), alors la condtion (10) est satisfaite avec le signe d'égalité. On sait ensuite que chaque fonction univalente et bornée peut être representé avec l'approximation voulu par une fonction analogue qui satisfait la condition (3)[7]). Soit $\{f_j(z)\}$ une suite quelconque des fonctions qui satisfont à une condition analogue à (3) et telle que

$$\lim_{j\to\infty} f_j(z) = f(z) \qquad \text{pour} \qquad |z| < 1. \tag{11}$$

En prenant une suite quelconque (9) et des nombres naturels quelconques P et N fixes pour le moment, nous définissons une suite auxiliare

$$\hat{x}_p = \begin{cases} x_p & \text{pour} \quad p \geqslant -P, \\ 0 & \text{pour} \quad p < -P. \end{cases} \tag{12}$$

Nous avons pour chaque j

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \Big| \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{x}_p\, a_{nj}^{(p)} \Big|^2 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} p\,|\hat{x}_p|^2. \tag{13}$$

---

[7]) Voir [5], p. 103-121.

Alors tenant compte de

$$a_{nj}^{(p)} = 0 \quad \text{pour} \quad n < p,$$

nous aurons conformément à (12) et (13)

$$\sum_{n=-P}^{N} n \left| \sum_{p=-P}^{N} x_p a_{nj}^{(p)} \right|^2 \leqslant \sum_{p=-P}^{\infty} p |x_p|^2. \tag{14}$$

En passant à la limite ∞ dans (14) d'abord pour j, ensuite pour N, enfin pour P, nous obtenons conformément avec (11) l'inegalité (10).

Nous démontrerons maintenant que notre condition est suffisante. Supposons alors qu'il est donnée une fonction holomorphe de la forme (1) et qui satisfait la condition (10). Nous démontrerons d'abord que la fonction (1) est univalente. Dans ce but, prenons en considération la fonction

$$F(\zeta) = a_1 \left[\frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)} - a_0^{(-1)} \right] \quad \text{pour} \quad |\zeta| > 1. \tag{15}$$

Cette fonction est d'un type considéré dans le travail précité[8]). En même temps, nous voyons de (15) que si la fonction $F(\zeta)$ est univalente, alors la fonction (1) est aussi univalente. Soit maintenant un polynôme quelconque

$$W(y) = \sum_{h=1}^{P} a_h y^h \tag{16}$$

et soit la suite (9) de la forme

$$x_p = \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=-p}^{P} \binom{h}{-p} a_1^h (-a_0^{(-1)})^{h+p} a_h & \text{pour} \quad p = 0, -1, -2, \ldots, -P, \\ 0 & \text{pour} \quad p > 0, \; p < -P. \end{cases} \tag{17}$$

Vu (10) et (17), on obtient l'inégalité

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left| \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p a_n^{(p)} \right|^2 \leqslant \sum_{n=-P}^{\infty} n \left| \sum_{p=-P}^{0} x_p a_n^{(p)} \right|^2 \leqslant \sum_{p=-P}^{0} p |x_p|^2 \leqslant 0. \tag{18}$$

[8]) Voir [6], p. 250.

En égard à (15), (16), (17) nous démontrons facilement que

$$W[F(\zeta)] = \sum_{h=1}^{P} a_h \left[\frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)} - a_0^{(-1)}\right]^H a_1^h$$

$$= \sum_{q=0}^{P} \frac{1}{\left[f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]^q} \sum_{h=q}^{P} \binom{h}{q} a_1^h (-a_0^{(-1)})^{h-q} a_h$$

(18′)

$$= \sum_{n=-P}^{\infty} \left[\sum_{p=-P}^{0} a_n^{(p)} \sum_{h=-p}^{P} \binom{h}{-p} a_1^h (-a_0^{(-1)})^{h+p} a_h\right] \zeta^{-n} = \sum_{n=-P}^{\infty} c_n \zeta^{-n}$$

où on admet $a_0 = 0$ et

$$c_n = \sum_{p=-P}^{0} a_n^{(p)} \sum_{h=-p}^{P} \binom{h}{-p} a_1^{-h} (-a_0^{(-1)})^{h+p} a_{-h}$$

En tenant compte de (17), (18), (18′) nous obtenons que pour un polynôme quelconque (16) la fonction (15) satisfait la condition suffisante d'univalence

$$\sum_{n=-p}^{\infty} n |c_n|^2 \leqslant 0 \text{ [9]}.$$

Donc la fonction (15) est univalente et, par conséquent elle (1) l'est aussi.

Il reste à démontrer que la fonction (1) est bornée. Supposons donc que (1) est non bornée. Alors, il existe un cercle $K_\varepsilon = K(z_0, \varepsilon) \subset \subset K(0\ 1)$ et un nombre $\varrho > 1$ tel que

$$|f(z)| > \varrho \quad \text{pour} \quad z \in K(z_0, \varepsilon). \tag{19}$$

Pour un nombre naturel quelconque q nous avons donc

$$\iint_{K_\varepsilon} |\{f(z)\}^q|^2 d\sigma > \pi \varrho^{2q} \varepsilon^2.$$

D'autre part on à

$$\iint_{K_\varepsilon} |\{f(z)\}^q|^2 d\sigma < \iint_{K(0,1)} |\{f(z)\}^q|^2 d\sigma < \pi \sum_{n=q}^{\infty} n |a_n^{(q)}|^2.$$

[9]) Voir [6] p. 250.

Par conséquent, il résulte, pour q suffisamment grand, que

$$\sum_{n=q}^{\infty} n\,|a_n^{(q)}|^2 > q. \tag{20}$$

Presons maintenant une suite de nombres complexes $\{x_p\}$ telle que

$$x_p = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad p \neq q, \\ 1 & \text{pour} \quad p = q. \end{cases}$$

Pour une suite ainsi choisie nous obtenons conformement à (20) l'inègalité

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \Big| \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p a_n^{(p)} \Big|^2 = \sum_{n=q}^{\infty} n\,|a_n^{(q)}|^2 > q = \sum_{p=-\infty}^{\infty} p|x_p|^2,$$

qui est en contradiction avec l'inégalité (10). Donc la fonction (1) est bornée et la démonstration est achevé.

Bibliographie

[1] L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, II, (1931).

[2] M. Biernacki, Sur les fonctions en moyenne multivalentes, *Bulletin de la Société Mathématique de France* 70, (1946).

[3] Z. Charzyński, Sur les fonctions univalentes bornées, *Rozprawy Matematyczne* II, Warszawa, (1953).

[4] G. M. Goluzin, Über p-valente Funktionen, *Récueil Mathématique* 8, (1940).

[5] K. Löwner, Untersuchungen über schlichte, konforme Abbildungen des Einheitskreises, *Math. Ann.* 89, (1923).

[6] W. Wolibner, Sur certaines conditions nécessaires et suffisant pour qu'une fonction analytique soit univalente, *Colloquium Mathématicum*, vol. II, fasc. 3-4, Wrocław (1951).

Présenté le 24 mars 1956.

Zam. 93/57 – 500 – Wrocławska Drukarnia Naukowa

BULLETIN
DE LA SOCIÈTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ
Classe III De Sciences Mathématiques et Naturelles
1958 Vol. IX, 7

Zygmunt Charzyński

Fonctions univalentes inverses Polynomes univalentes

INTRODUCTION

La notion de fonction univalente, algébrique et bornée a été introduite et étudiée dans mon travail [1]. Mes collègues ont pu donner de l'extention a mes resultats ([2], [3], [4], [5], [6]) et le présent mémoire en est la continuation. Je m'y occupe de polynômes qui sont des inverses de fonctions univalentes dans un cercle. On y trouve une certaine caractéristique de ces polynômes et on établit la variation des paramètres. Il convient de remarquer que la relation entre les paramètres étant de nature analytique, on a pu appliquer le principe du maximum. D'autre part l'approximation a permis de ramener les problèmes extrémaux pour des fonctions univalentes inverses aux problèmes analogues concernant les dits polynômes.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

1. Nous designerons par

$$K(\xi, r) \quad \text{resp.} \quad K^*(\xi, r)$$

le cercle, respectivement la circonférence, de centre ξ et de rayon r.

2. Chaque polynôme de la forme

$$P(w) = w + C_2 w^2 + \ldots + C_L w^L$$

sera dit polynôme normal.

3. Les fonctions univalentes normalisées [7, II, p. 85] seront appelées univalentes tout court et leurs fonctions inverses-fonctions univalentes inverses.

4. Nous désignerons par

$$\operatorname{res}_{\zeta}\Psi(t)$$

le résidu au point ζ d'une fonction de variable complexe $\psi(t)$ dérivable dans un certain voisinage du point ζ.

§ 1. RÉSULTATS AUXILIAIRES

Soit donné un nombre naturel arbitraire L. Considérons un système arbitraire de nombres complexes distincts

$$w_h \qquad h = 0, \ldots, Q \tag{1.1}$$

et un système analogue de nombres naturels

$$\gamma_h \qquad h = 0, \ldots, Q \tag{1.2}$$

tels que

$$\sum_{h=0}^{Q} \gamma_h = L. \tag{1.2'}$$

Dans ces hypothèses le suivant résultat est prouvé.

Lemme 1. (Interpolation entre points fixes). Pour chaque système de nombres complexes

$$z_h \qquad h = 0, \ldots, Q \tag{1.3}$$

il existe exactement un polynôme $U(w)$ de degré au plus $L-1$ et prenant respectivement aux points donnés (1.1) les valeurs (1.3) données d'avance; on attribue a chacune de ces valeurs la multiplicité correspondante (1.2). Le polynôme s'exprime par la relation

$$U(w) = \pi(w)\left[\sum_{h=0}^{Q} z_h \operatorname{res}_{w_h}\left(\frac{1}{\pi(t)(w-t)}\right)\right], \tag{1.4}$$

où l'on pose

$$\pi(w) = C\prod_{h=0}^{L}(w-w_j)^{\gamma_j} \tag{1.5}$$

et C désigne une constante non nulle; notons que dans les termes se rapportant aux résidus t est traité de variable, tandis que w est un paramètre fixe pour le moment.

Démonstration. Pour un h arbitraire de (1.1) prenons la relation

$$\pi(w)\operatorname{res}_{w_h}\frac{1}{\pi(t)(w-t)} = I_h(w). \tag{1.6}$$

Il est facile de verifier, en s'appuyant sur (1.5) que la fonction (1.6) est un polynôme, tout au plus de degré $L-1$; elle a aux points w_j différents de w_h des racines d'ordre (1.2). Si l'on prend à présent une circonférence $K^* = K^*(w_h, r)$ de rayon suffisamment petit, on a, comme il est facile à voir en calculant les résidus, les égalités

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K^*}\frac{\pi(w)}{\pi(t)(w-t)}\,dt = -1+I_h(w) \quad \text{pour } w\in K(w_h, r) \tag{1.7}$$

et

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K^*}\left\{\frac{\partial^m}{\partial w^m}\left[\frac{\pi(w)}{\pi(t)(w-t)}\right]\right\}dt = I_h^{(m)}(w) \quad \text{pour } w\in K(w_h, r) \tag{1.7'}$$

$$m = 1, \ldots, \gamma_h-1.$$

Si dans les formules (1.7) et (1.7') on fait tendre w à w_h, on remarque que les premiers membres de ces formules tendent vers zéro, ce qui fait qu'on a les égalités

$$I_h(w_h) = 1, \tag{1.8}$$

$$I^{(m)}(w_h) = 0 \qquad m = 1, \ldots, \gamma_h-1. \tag{1.8'}$$

Les conditions (1.6), (1.8) et (1.8') prouvent que le polynôme (1.4) remplit les conditions du lemme. Comme son degré ne dépasse pas $L-1$, on conclut qu'il y a un seul polynôme qui réponde à ces conditions.

Considérons un polynôme normal arbitraire de forme

$$P(w) = w+C_2w^2+\ldots+C_Lw^L. \tag{1.9}$$

Soient

$$w_k \qquad k = 1, \ldots, Q \tag{1.10}$$

toutes les racines distinctes de la dérivée du polynôme (1.9) et

$$\gamma_k \qquad k = 1, \ldots, Q \tag{1.10'}$$

leurs ordres. Désignons par

$$\zeta_k \tag{1.11}$$

les valeurs respectives du polynôme (1.9) aux points (1.10). Sous ces hypothèses on démontre le résultat suivant.

Lemme 2. (Interpolation entre points variables). Pour chaque système de valeurs

$$\dot{\zeta}_k \qquad k = 1, \ldots, Q \tag{1.12}$$

suffisamment proches des valeurs (1.11), il existe exactement un polynôme normal de forme

$$P(w) = w + \dot{C}_2 w^2 + \ldots + \dot{C}_L w^L \tag{1.13}$$

dont les coefficients sont arbitrairement proches des coefficients du polynôme (1.9) et exactement un système de points

$$\dot{w}_k \qquad k = 1, \ldots, Q \tag{1.14}$$

arbitrairement proches des points (1.10) et tels que les points (1.14) sont des racines de la dérivée du polynôme (1.13) d'ordres respectifs (1.10') et que le polynôme (1.13) prend aux points (1.14) les valeurs données (1.12).

Les coefficients du polynôme (1.13) et les racines (1.14) de sa dérivée sont des fonctions analytiques des variables (1.12). En particulier les dérivées partielles des coefficients du polynôme (1.13) par rapport aux variables (1.12), calculées pout les valeurs (1.11), s'expriment par les formules

$$\frac{\partial \dot{C}_s}{\partial \dot{\zeta}_k} = \frac{1}{s!}\left[\frac{\partial^s}{\partial w^s}\left(w^2 P'(w) \operatorname{rés}_{w_k} \frac{1}{P'(t)t^2(w-t)}\right)_{w=0}\right] \tag{1.15}$$

$$k = 1, \ldots, Q; \qquad s = 2, \ldots, L.$$

Démonstration. On voit aisément que la première partie du lemme est équivalente à l'existence d'une solution univoque du sy-

stème d'équations

$$\sum_{s=1}^{L} C_s w_k^s = \zeta_k \qquad k = 1, \ldots, Q \tag{1.16}$$

$$\sum_{s=1}^{L} F_s^m C_s w_k^{s-m} = 0 \qquad m = 1, \ldots, \gamma_k; \; k = 1, \ldots, Q \tag{1.16'}$$

où

$$F_s^m = s(s-1)\ldots(s-m+1) \tag{1.17}$$

$$C_1 = 1. \tag{1.18}$$

Le système a comme inconnues

$$C_s \qquad s = 2, \ldots, L \tag{1.19}$$

et

$$w_k \qquad k = 1, \ldots, Q \tag{1.20}$$

qui doivent être arbitrairement proches des nombres

$$C_s \qquad s = 2, \ldots, L \tag{1.21}$$

et

$$w_k \qquad k = 1, \ldots, Q \tag{1.22}$$

pour les valeurs données (1.12) suffisamment proches des (1.11). Pour que cela arrive, il suffit, comme on le sait, que le jacobien J des premiers membres de (1.16), (1.16') par rapport aux inconnues (1.19), (1.20), calculé pour les valeurs (1.21), (1.22) soit non nul. Supposons que les lignes successives du jacobien J contiennent les dérivées partielles des premiers membres successifs de (1.16), (1.16') par rapport aux variables successives (1.19), (1.20). Admettons, pour le moment, que ce jacobien J soit nul. Il existe alors un système non trivial de nombres

$$\beta_s \qquad s = 2, \ldots, L \tag{1.23}$$

$$-t_k \qquad k = 1, \ldots, Q \tag{1.24}$$

tels que la somme des produits des termes successifs d'une ligne

arbitraire de J et des nombres successifs (1.23), (1.24) est égale à zéro. Si l'on effectue les calculs décrits, on obtient

$$\delta(w_k) = t_k P'(w_k) \qquad k = 1, \ldots, Q \tag{1.25}$$

$$\delta^{(m)}(w_k) = t_k P^{(m+1)}(w_k) \qquad m = 1, \ldots, \gamma_k;\ k = 1, \ldots, Q \tag{1.25'}$$

où on a posé

$$\delta(w) = \sum_{s=2}^{L} \beta_s w^s. \tag{1.26}$$

Des relations (1.25), (1.25') et des définitions de (1.10), (1.10'), il s'ensuit que

$$\delta(w_k) = 0 \qquad k = 1, \ldots, Q \tag{1.27}$$

$$\delta^{(m)}(w_k) = 0 \qquad m = 1, \ldots, \gamma_k - 1;\ k = 1, \ldots, Q, \tag{1.27'}$$

ce qui nous prouve que la fonction (1.26) est identiquement égale à zéro. Ceci, les relations (1.25') et les inégalites évidentes

$$P^{(\gamma_k+1)}(w_k) \neq 0 \qquad k = 1, \ldots, Q,$$

nous permettent de déduire que tous les nombres (1.24) sont aussi égaux à zero. En résumé, le système de nombres (1.23), (1.24) serait trivial contrairement à sa definition. Ainsi le jacobien J ne peut être nul et ceci termine la première partie de la démonstration du lemme.

Si l'on passe à la seconde partie du lemme, il résulte de ce qui précède, que les coefficients (1.19) et les points (1.20) sont des fonctions analytiques des variables (1.12).

En differentiant partiellement les relations (1.16) par rapport à une certaine variable $\zeta_k^{\cdot}$ de (1.12), on amène, compte tenu des relations évidentes,

$$\frac{\partial}{\partial w_h^{\cdot}} \sum_{s=1}^{L} C_s w_h^{\cdot s} = \sum_{s=1}^{L} C_s F_s^1 w_h^{\cdot s-1} = 0 \qquad k = 1, \ldots, Q,$$

$$\frac{\partial}{\partial w_h^{\cdot}} \sum_{s=1}^{L} C_s F_s^m w_h^{\cdot s-m} = \sum_{s=1}^{L} C_s F_s^{m+1} w_h^{\cdot s-m-1} = 0 \quad m = 1, \ldots, \gamma_h - 1;$$

$$h = 1, \ldots, Q,$$

aux équations suivantes

$$\sum_{s=2}^{L}\left(\frac{\partial C_s^{\cdot}}{\partial \zeta_k^{\cdot}}\right) w_h^{\cdot s} = \begin{cases} 1 & h = k \\ 0 & h \neq k \end{cases} \qquad h = 1, \ldots, Q, \tag{1.28}$$

$$\sum_{s=2}^{L}\left(\frac{\partial C_s^{\cdot}}{\partial \zeta_k^{\cdot}}\right) F_s^m w_h^{\cdot s-m} = 0 \quad m = 1, \ldots, \gamma_h - 1;\ h = 1, \ldots, Q. \tag{1.28'}$$

Si l'on rapporte les dérivées partielles aux valeurs (1.11) et qu'on pose

$$\sum_{s=2}^{L}\left(\frac{\partial C_s^{\cdot}}{\partial \zeta_k^{\cdot}}\right) w^s = U(w) \tag{1.29}$$

on a, conformément à (1.28), (1.28')

$$U(w_h) = \begin{cases} 1 & h = k \\ 0 & h \neq k \end{cases} \qquad h = 1, \ldots, Q \tag{1.30}$$

$$U^{(m)}(w_h) = 0 \quad m = 1, \ldots, \gamma_h - 1;\ h = 1, \ldots, Q \tag{1.30'}$$

et évidemment

$$U(0) = 0 \tag{1.31}$$

$$U'(0) = 0. \tag{1.31'}$$

Si l'on applique à (1.29) le lemme 1, on conclut d'aprés (1.30), (1.30'), (1.31), (1.31'), que la fonction (1.29) est de la forme (1.4), où l'on peut prendre pour $\pi(w)$ l'expression $w^2P'(w)$, pour le nombres (1.3) les valeurs 0 et (1.30), et comme les ordres respectifs (1.2) les nombres 2 et (1.10'). Un calcul facile aboutira aux formules (1.15).

§ 2. POLYNÔMES UNIVALENTS

Soit donné un polynôme normal arbitraire

$$P(w) = w + C_2 w^2 + \ldots + C_L w^L. \tag{2.1}$$

Considérons le plus grand domaine contenant le point zéro dans lequel le polynôme (2.1) remplisse la condition

$$|P(w)| < 1.$$

Ce domaine sera désigné par μ_P et nommé domaine lié au polynôme (2.1).

Si le polynôme (2.1) est univalent dans son domaine lié, il sera appelé univalent tout court.

On a pu obtenir les résultats suivants concernant les polynômes univalentes.

Lemme 1. Le domaine lié à un polynôme (2.1) est un domaine simplement connexe.

Démonstration. Si l'on prend une courbe de Jordan quelconque j parcourant le domaine μ_P, on a pour $w \in j$ l'inégalité $|P(w)| < 1$. Par conséquent ladite inégalité est aussi remplie, vu le principe du maximum, à l'intérieur δ, de la courbe j. Il s'ensuit que μ_P doit contenir δ et, par suite, μ_P est un domaine simplement connexe.

Lemme 2. Un polynôme univalent (2.1) transforme le domaine μ_P en cercle entier $K(0, 1)$. Ainsi (2.1) est une fonction univalente inverse.

Démonstration. Il résulte de la définition du domaine μ_P qu'on a sur frontiére $|P(w)| = 1$. Les théorèmes connus permettent de conclure que le polynôme (2.1) prend dans μ_P toutes les valeurs du cercle $K(0, 1)$ [7, I, p. 50]. Comme c'est un polynôme univalent, il existe dans $K(0, 1)$ une fonction holomorphe $A(z)$ qui est inverse du polynôme (2.1). En outre, on voit facilement que $A(0) = 0$ et $A'(0) = 1$. La fonction $A(z)$ est donc univalente, normalisée; par conséquent le polynôme (2.1) est une fonction univalente inverse.

Lemme 3. Si le polynôme (2.1) transforme d'une manière univalente un domaine U en cercle $K(0, 1)$, les domaines μ_P et U sont identiques.

Démonstration. Il résulte de l'hypothèse que $|P(w)| < 1$ pour $w \in U$; par conséquent U est compris dans μ_P. D'autre part il est clair que $|P(w)| = 1$ sur la frontière de U. Il s'ensuit qu'aucun point de cette frontière ne peut appartenir au domain μ_P. Si l'on compare les faits établis, on voit que l'identité des ensembles U et μ_P est prouvée.

Lemme 4. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme (2.1) soit univalent est que toutes ses racines différentes de zéro ou toutes les racines de sa dérivée se trouvent en dehors de μ_P.

Démonstration. Il résulte de l'univalence du polynôme (2.1) que la condition donnée est une condition nécessaire.

Pour prouver que la condition est aussi suffisante, considérons d'abord le cas où toutes les racines non nulles du polynôme (2.1) se trouvent en dehors de μ_P. Une seule racine est alors égale à 0 et se trouve à l'interieur de μ_P. Or, d'après un théorème connu cité ci-dessus, le polynôme (2.1) admet chaque valeur de $K(0, 1)$ dans le domaine μ_P exactement une fois. Comme on voit qu'il ne peu admettre dans μ_P d'autres valeurs, il est en effet un polynôme univalent.

Si l'on passe à l'étude du cas où toutes les racines de la dérivée du polynôme (2.1) sont en dthors de μ_P et l'on tient compte du fait que $|P(w)| = 1$ sur la frontière de μ_P, on obtient, conformément aux résultats connus, que le polynôme (2.1) ne peut avoir dans μ_P plus d'une racine [5, p. 122]. Elle en a donc là exactement une. Mais ce raisonnement nous a amené au cas précédent.

Lemme 5. Etant donnée une suite $\{P_n(w)\}$ de polynômes (2.1) convergeant presque uniformément dans le plan ouvert vers un polynôme analogue $P(w)$, le domaine lié à $P(w)$, soit μ_P, coincide avec le noyau des domaines liés $\{\mu_{P_n}\}$.

Démonstration. Soit ν le noyau de la suite $\{\mu_{P_n}\}$ et d un domaine arbitraire contenant 0 et contenu avec sa fermeture dans ν. Pour n suffisamment grand $d \subset \mu_{P_n}$. Comme $|P_n(w)| < 1$ pour $w \in d$, on a aussi en passant à la limite $|P(w)| \leqslant 1$ pour $w \in d$. D'après le principe du maximum, on a $|P(w)| < 1$ pour $w \in d$, car $P(w)$ n'est pas une constante. La définition du domaine lié nous permet de conclure $d \subset \mu_P$ et finalement, attendu que d était arbitraire, $\nu \subset \mu_P$. Si au contraire on prend un domaine arbitraire d contenu avec sa fermeture dans μ_P et contenant le point 0, le principe du maximum permettra de déduire $|P(w)| < q$ pour $w \in \bar{d}$, où q désigne un nombre plus petit que 1. Il s'ensuit $|P_n(w)| < 1$ pour $w \in \bar{d}$ et pour n suffisamment grand, donc $\bar{d} \subset \mu_{P_n}$ aussi pour les mêmes n. Comme d était un domaine quelconque, on a $\mu_P \subset \nu$. Ainsi ν coincide avec μ_P, ce qui termine la démonstration.

Théorème 1. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme donné (2.1) soit univalente est qu'il existe une fonction holomorphe dans le cercle unité

$$A(z) = z + \alpha_2 z^2 + \ldots \tag{2.2}$$

y satisfaisant à l'équation

$$P(A(z)) = z. \tag{2.3}$$

Démonstration. Supposons d'abord que le polynôme (2.1) est univalent, Il résulte alors du lemme 2 qu'il existe précisément dans le cercle $K(0, 1)$ une telle fonction (2.2) satisfaisant à l'equation (2.3).

Supposons à présent qu'il existe pour le polynôme (2.1) une fonction (2.2) vérifiant dans $K(0, 1)$ l'équation (2.3). Cette fonction est bornée et en vertu d'un lemme connu elle s'étend d'une manière continue sur tout le cercle unité fermé [1, p. 6]. Si l'on désigne par G l'image du cercle $K(0, 1)$ formée par fonction (2.2), on voit aisément à l'aide de (2.3) que le domaine G contenant 0 ne contient pas de racines non nulles du polynôme (2.1) et qu'on a respectivement

$$|P(w)| < 1 \quad \text{et} \quad |P(w)| = 1 \tag{2.4}$$

à l'intérieur et sur la frontière du domaine G. Il s'ensuit immédiatement que le domaine G est compris dans le domaine μ_P lié au polynôme (2.1). Cependant on peut aussi démontrer le contraire, à savoir que le domaine μ_P est compris dans le domaine G. En effet, dans le cas contraire le domaine μ_P aurait dû contenir des points n'appartenant pas à G, tout en contenant le point 0 qui appartient au domaine G. Il en résulte que le domaine μ_P aurait dû comprendre des points de la frontière du domaine G, ce qui est impossible vu (2.4). On en conclut que les domaines μ_P et G sont identiques. D'après ce qui précède et le lemme 4, le polynôme (2.1) est univalent.

Théorème 2. (Sur l'approximation). Chaque fonction univalente inverse peut être approchée autant qu'on veut par des polynômes univalentes.

Démonstration. Soit $\Phi(w)$ une fonction arbitraire univalente inverse. Cette fonction est définie dans un domaine simplement connexe H qu'elle transforme en $K(0, 1)$. Soit ensuite V un ensemble fermé arbitraire contenu dans H, ε un nombre positif arbitraire plus petit que 1, et $r < r_1 < r_2$ trois nombres arbitraires de l'intervalle $(1-\varepsilon/4,1)$ tels que $\Phi(V) \subset K(0, r)$ et $l(V) \subset U_2 = \Phi^{-1}(K(0, r_2))$ et que $|\Phi(wr)-\Phi(w)| < \varepsilon/12$ pour $w \varepsilon V$, où l'on à pose $l(\zeta) = r\zeta$.

Il résulte alors des théorèmes connus [7, I, p. 50], [1, p. 9-10] qu'il existe un polynôme $Q(w)$ univalent dans U_2 et tel que

$$(2.5) \qquad |Q(w)-\Phi(w)| < \frac{r_2-r_1}{12} \quad \text{et} \quad |Q(w)| < 1 \text{ pour } w \in U_2$$

et en particulier

$$(2.6) \qquad |Q(0)| = |Q(0)-\Phi(0)| < \frac{r_2-r_1}{12}$$

et qu'encore

$$(2.7) \qquad |Q'(0)-1| = |Q'(0)-\Phi'(0)| < \frac{r_2-r_1}{12}.$$

Si l'on pose

$$(2.8) \qquad R(w) = (Q(w)-Q(0))\frac{1}{Q'(0)},$$

on déduit facilement de (2.5), (2.6), (2.7) et de la définition de l'ensemble U_2 que l'image $R(U_2)$ contient le cercle $K(0, r_1)$ et par conséquent il existe un domaine U contenu dans U_2 tel que $R(U) = K(0, r)$. On voit ainsi que le polynôme normal

$$(2.9) \qquad P(w) = \frac{1}{r} R(wr)$$

transforme d'une manière univalente le domaine $l^{-1}(U)$ en cercle $K(0, 1)$. Il est aisé d'en déduire que $l^{-1}(U)$ coincide avec μ_P, c'est à dire que le polynôme (2.9) est univalent. En outre, on obtient immédiatement de (2.9), (2.8), (2.5), (2.6), (2.7) que

$$|P(w)-\Phi(w)| < \varepsilon \quad \text{pour } w \in V,$$

ce qui prouve notre théorème.

§ 3. VARIATION DES POLYNÔMES UNIVALENTS

Si l'on considère un polynôme univalent arbitraire, on remarque que ses coefficients et par suite les variations de ces coefficients, ne peuvent être arbitraires. On a vu, en effet, dans le lemme 4 que ces variations sont liées par des conditions géométriques. Notre but sera à présent de trouver les conditions arithmétiques pour lesdites variations.

Soit donné un polynôme univalent arbitraire

$$P^*(w) = w + C_2^* w^2 + \ldots + C_L^* w^L. \tag{3.1}$$

En même temps, nous désignerons par

$$w_k \qquad k = 1, \ldots, Q \tag{3.2}$$

et

$$t_l \qquad l = 1, \ldots, R \tag{3.3}$$

toutes les racines distinctes de la dérivee $P'(w)$, qui sont situées respectivement sur la frontière et à l'exterieur du domaine μ_{P^*}, tandis que

$$\gamma_k \qquad k = 1, \ldots, Q, \tag{3.4}$$

et

$$\delta_l \qquad l = 1, \ldots, R, \tag{3.5}$$

désigneront les ordres respectifs de ces racines. Nous pourrons caractériser lesdits points et leur position par rapport au domaine μ_P à l'aide de relations arithmétiques et partiellement géométriques, à savoir

$$P^*(w_k) = e^{i\varphi_k} \qquad k = 1, \ldots, Q, \tag{3.6}$$

$$P^{*(m)}(w_k) = 0 \qquad m = 1, \ldots, \gamma_k;\ k = 1, \ldots, Q, \tag{3.6'}$$

$$P^*(t_l) = \sigma_l \qquad l = 1, \ldots, R, \tag{3.7}$$

$$P^{*(m)}(t_l) = 0 \qquad m = 1, \ldots, \delta_l;\ l = 1, \ldots, R, \tag{3.7'}$$

où

$$\varphi_k \qquad k = 1, \ldots, Q$$

sont des nombres réels, et

$$\sigma_l = u_l + iv_l \qquad l = 1, \ldots, R$$

sont des nombres complexes soumis aux conditions géométriques

$$\sigma_l \notin \bar{\mu}_{P^*} \qquad l = 1, \ldots, R.$$

Ces dernières conditions, comme on le verra, ne jouent aucun rôle

dans le cas de variations. Ainsi celles-ci n'ont-elles à remplir que les conditions arithmétiques (3.6), (3.6′) et (3.7), (3.7′).

Théorème 3. (Sur les variations). Pour chaque système de nombres

$$\varkappa_k^{\cdot} = \omega_k^{\cdot} e^{i\varphi_k}, \quad \omega_k^{\cdot} \geqslant 1 \qquad k = 1, \ldots, Q, \tag{3.8}$$

$$\sigma_l^{\cdot} = u_l^{\cdot} + iv_l^{\cdot} \qquad l = 1, \ldots, R, \tag{3.9}$$

arbitrairement proches des nombres

$$e^{i\varphi_k} \qquad k = 1, \ldots, Q, \tag{3.10}$$

$$\sigma_l \qquad l = 1, \ldots, R, \tag{3.11}$$

il existe exactement un polynôme univalent

$$P^{\cdot}(w) = w + C_2^{\cdot} w^2 + \ldots + C_L^{\cdot} w^L \tag{3.12}$$

arbitrairement voisin de (3.1) et un système de nombres

$$w_k^{\cdot} \qquad k = 1, \ldots, Q, \tag{3.13}$$

$$t_l^{\cdot} \qquad l = 1, \ldots, R, \tag{3.14}$$

arbitrairement voisin de (3.2), (3.3) tels que

$$P^{\cdot}(w_k^{\cdot}) = \omega_k^{\cdot} e^{i\varphi_k} \qquad k = 1, \ldots, Q, \tag{3.15}$$

$$P^{\cdot(m)}(w_k^{\cdot}) = 0 \qquad m = 1, \ldots, \gamma_k; \; k = 1, \ldots, Q, \tag{3.15′}$$

$$P^{\cdot}(t_l^{\cdot}) = \sigma_l^{\cdot} \qquad l = 1, \ldots, R, \tag{3.16}$$

$$P^{\cdot(m)}(t_l^{\cdot}) = 0 \qquad m = 1, \ldots, \delta_l; \; l = 1, \ldots, R. \tag{3.16′}$$

Démonstration. Prenons une suite arbitraire de systèmes pareils à ceux qui ont été traités précédemment (S_f):

$$\varkappa_{kf}^{\cdot} \tag{3.17}$$

$$\sigma_{lf}^{\cdot} \tag{3.18}$$

dont les termes tendent aux termes respectifs du systeme (3.10), (3.11). Il résulte d'abord du § 1, lemme 2 qu'il existe pour f suffisamment grand pour chaque système (3.17), (3.18) un polynôme correspondent

$$P_f^{\cdot}(w) = w + C_{2f}^{\cdot} w^2 + \ldots + C_{Lf}^{\cdot} w^L \tag{3.19}$$

et un système de nombres

$$w_{kf}^{\cdot} \qquad k = 1, \ldots, Q, \tag{3.20}$$

$$t_{lf}^{\cdot} \qquad l = 1, \ldots, R \tag{3.21}$$

arbitrairement proches de (3.2), (3.3), tels que

$$P_f^{\cdot}(w_{kf}^{\cdot}) = \varkappa_{kf}^{\cdot} \qquad k = 1, \ldots, Q, \tag{3.22}$$

$$P_f^{\cdot(m)}(w_{kf}^{\cdot}) = 0 \qquad m = 1, \ldots, \gamma_k; \; k = 1, \ldots, Q, \tag{3.22'}$$

$$P_f^{\cdot}(t_{lf}^{\cdot}) = \sigma_{lf}^{\cdot} \qquad l = 1, \ldots, R, \tag{3.23}$$

$$P_f^{\cdot(m)}(t_{lf}^{\cdot}) = 0 \qquad m = 1, \ldots, \delta_l; \; l = 1, \ldots, R. \tag{3.23'}$$

On voit après que pour chaque polynôme (3.19), il existe une fonction holomorphe dans un certain entourage du point zéro

$$A_f^{\cdot}(z) = z + \alpha_{2f}^{\cdot} z^2 + \ldots \tag{3.24}$$

qui vérifie l'équation

$$P_f^{\cdot}(A_f^{\cdot}(z)) = z. \tag{3.24'}$$

Désignons par r_f le rayon de convergence de la série (3.24). Si l'on tient compte du théorème 1, il suffit de prouver que pour f suffisamment grand, on a $r_f = 1$. Supposons, à cet effet, le contraire. On pourra alors admettre constantement $r_f < 1$ en remplaçant, s'il le faut, la suite $\{(S_f)\}$ par une suite partielle. En outre, on pourra admettre, en vertu des résultats connus [1, p. 6], que la fonction (3.24) est continue dans le cercle fermé $|z| \leqslant r_f$. On voit bien que sur la circonference $|z| = r_f$ il doit se trouver un point y_f auquel la fonction (3.24) n'est pas holomorphe. Il s'ensuit immédiatement que si l'on pose

$$x_f = A_f(y_f) \tag{3.24''}$$

on aura

$$P_f'(x_f) = 0, \tag{3.24'''}$$

car s'il en était autrement, la fonction (3.24) aurait été d'apres (3.24')

holomorphe au point y_f. La convergence évidente

$$\lim_{f\to\infty} P_f^{\cdot}(w) = P^*(w) \tag{3.25}$$

entraîne les suivantes convergences, avec la restriction que, si c'est nécessaire, les suites en question seront extraites des suites respectives

$$\lim_{f\to\infty} r_f = r_0 \tag{3.26}$$

$$\lim_{f\to\infty} y_f = y_0 \tag{3.27}$$

$$\lim_{f\to\infty} A_f^{\cdot}(z) = A_0(z). \tag{3.28}$$

On voit que $r_0 > 0$, $|y_0| = r_0$, $A_0(z)$ est une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < r_0$ et y coincide avec la fonction univalente $A^*(z)$, qui remplit avec le polynôme univalent (3.1) l'équation[1]

$$P^*\big(A^*(z)\big) = z. \tag{3.29}$$

Les convergences (3.25) et (3.28) sont presque uniformes dans le plan et dans le cercle $|z| < r_0$. D'après les résultats connus, (3.25) et (3.29) la fonction $A_0(z)$ se laisse étendre comme fonction continue sur le cercle fermé $|z| \leqslant r_0$; les suivantes relations ont lieu en même temps (1, p. 2-5)

$$\lim_{f\to\infty} x_f = A_0(y_0) = A^*(y_0) = x_0 \in \bar{\mu}_{P^*)} \tag{3.30}$$

$$P^{*\prime}(x_0) = 0.$$

Par conséquent

$$x_0 = w_k \tag{3.31}$$

où k désigne un certain indice de (3.2). Nous affirmons que pour f suffisamment grand

$$x_f = w_{kf}^{\cdot}. \tag{3.32}$$

En effet, si

$$x_f \neq w_{kf}^{\cdot} \tag{3.33}$$

[1] Comp. le théorème 1.

pour une infinité d'indices f, on aurait, en se basant sur (3.24‴) (3.31) et la définition des suites (3.20), les relations

$$P_f^{(m)}(w_{kf}^{\cdot}) = 0 \qquad m = 1, \ldots, \gamma_k;\ f = 1, 2, \ldots$$

$$P_f^{\cdot}(x_f) = 0 \qquad f = 1, 2, \ldots$$

$$\lim_{f\to\infty} w_{kf}^{\cdot} = w_k$$

$$\lim_{f\to\infty} x_f = w_k.$$

Si l'on passait maintenant à la limite en tenant compte de la relation

$$\lim_{f\to\infty} P_f^{\cdot}(w) = P^{*\cdot}(w)$$

et de (3.33) w_k sera racine de la dérivée $P^{*\cdot}(w)$ d'ordre au moins γ_k+1, contrairement à la définition du nombre γ_k. Ainsi (3.32) doit avoir lieu pour f suffisamment grand. Mais alors on aura conformément à (3.24′) et (3.32), (3.22)

$$y_f = P_f(x_f) = P_f(w_{kf}^{\cdot}) = \varkappa_{kf}^{\cdot},$$

ce qui est incompatible avec

$$|y_f| = |r_f| < 1 \leqslant |\varkappa_{kf}^{\cdot}|,$$

qui découle de (3.17). Comme notre première supposition nous a amené à une contradiction, notre démonstration est terminée.

§ 4. FONCTIONS EXTRÉMALES DES FAMILLES DE POLYNÔMES UNIVALENTS

Désignons par $\mathfrak{P}_M$, pour M naturel arbitraire, la famille de tous les polynômes univalents dont le degré ne dépasse pas M. On voit bien que $\mathfrak{P}_M$ est compacte en elle même au sens analogue a celui de [1, p. 14-15]. Soit

$$G(X_2, \ldots, X_N, Y_2, \ldots, Y_N) \tag{4.1}$$

une fonction réelle, définie pour N entier plus grand que 1, dans une région suffisamment grande de variables réelles

$$X_2, \ldots, X_N, Y_2, \ldots, Y_N, \tag{4.2}$$

y possédant les dérivées partielles du premier ordre continues et ne s'annulant nulle part simultanément.

Formons pour la famille $\mathfrak{P}_M$, où $M > N-1$, une fonctionnelle G_P définie pour chaque polynôme univalent

$$P(w) = w + C_2 w^2 + \ldots + C_L w^L \qquad L \leqslant M$$

par la formule suivante

$$G_P = G(\xi_2, \ldots, \xi_N, \eta_2, \ldots, \eta_N), \tag{4.3}$$

où

$$\xi_n + i\eta_n = C_n \qquad n = 2, \ldots, N. \tag{4.4}$$

Les fonctionnelles ainsi définies seront appelées dans la suite fonctionnelles régulières.

Supposons maintenant que la fonction (4.1), définissant la fonctionnelle, est de la forme

$$G(X_2, \ldots, X_N, Y_2, \ldots, Y_N) = \operatorname{Re}\{E(X_2 + iY_2, \ldots, X_N + iY_N)\}, \tag{4.5}$$

où $E(Z_2, \ldots, Z_N)$ désigne une certaine fonction holomorphe des variables complexes $Z_2, \ldots, Z_N$. Nous dirons, dans ce cas, que la fonctionnelle (4.3) est harmonique.

On a pu obtenir le résultat suivant pour les fonctionnelles régulières.

Théorème 4. Dans la famille $\mathfrak{P}_M$, il existe des polynômes extrémaux qui rendent la fonctionnelle (4.3) maximale.

En outre, si (3.1) désigne un polynôme extrémal, ont lieu les relations suivantes

$$\operatorname{res}_{w_k} \frac{\mathfrak{U}(w)\, P^*(w)}{P^{*\prime}(w) w^2} = \varrho_k \qquad k = 1, \ldots, Q, \tag{4.6}$$

$$\operatorname{res}_{t_l} \frac{\mathfrak{U}(w)\, P^*(w)}{P^{*\prime}(w) w^2} = 0 \qquad l = 1, \ldots, R, \tag{4.7}$$

où l'on emploie les notations (3.1), (3.2), (3.3) et où

$$\varrho_k \qquad k = 1, \ldots, Q \tag{4.8}$$

sont des nombres non négatifs,

$$\mathfrak{U}(w) = \sum_{p=2}^{N} \frac{\mathfrak{Q}_{p-1}}{w^{p-1}}, \tag{4.9}$$

$$\mathfrak{Q}_{p-1} = \sum_{n=p}^{N} (n-p+1) C^*_{n-p+1} G^*_n, \tag{4.9'}$$

$$\left.\begin{aligned} G^*_n &= G'_{X_n}(\xi^*_2, \ldots, \eta^*_N) - iG'_{Y_n}(\xi^*_2, \ldots, \eta^*_N) \\ \xi^*_n + i\eta^*_n &= C^*_n \end{aligned}\right\} \quad n = 2, \ldots, N. \tag{4.9''}$$

Démonstration. L'existence des polynômes extrémaux resulte de la continuité de (4.3) et de la compacité de $\mathfrak{P}_M$.

Employons, pour un polynôme extrémal, toutes les définitions et les notations des pages 12-14. Prenons ensuite un système arbitraire (3.8), (3.9) et le polynôme (3.12) definis dans le théorème 3. Conformément au théorème 3, on aura

$$G_{P^\cdot} = H(\varphi^\cdot_1, \ldots, \varphi^\cdot_Q, \omega^\cdot_1, \ldots, \omega^\cdot_Q, u^\cdot_1, \ldots, u^\cdot_R, v^\cdot_1, \ldots, v^\cdot_R), \tag{4.10}$$

où le second membre est une fonction des variables de (3.8), (3.9) obtenue directement de (4.3) par la substitution aux arguments (4.4) des valeurs

$$\mathrm{Re}\{C^\cdot_n\}, \quad \mathrm{Im}\{C^\cdot_n\} \qquad n = 2, \ldots, N, \tag{4.11}$$

traitées comme fonctions des variables de (3.8), (3.9). Il est évident que le second membre de (4.10) atteint sont maximum pour les valeurs extrémales de (3.10), (3.11)[2]. Il s'ensuit, tenant compte de secondes relations de (3.8), que

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi^\cdot_k} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \omega^\cdot_k} \leqslant 0 \qquad k = 1, \ldots, Q, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u^\cdot_l} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial v^\cdot_l} = 0 \qquad l = 1, \ldots, R, \tag{4.13}$$

où les dérivées partielles sont calculées pour les valeurs extrémales

[2] On admet ici $\omega_k = 1, \quad k = 1, \ldots, Q$

de (3.10), (3.11). Si l'on calcule ces dérivées, on a suivant la définition du second membre de (4.10)

$$(4.14)\qquad \frac{\partial H}{\partial \varphi_k^{\cdot}} = \sum_{n=2}^{N}\left(G'_{X_n}\frac{\partial \operatorname{Re}\{C_n^{\cdot}\}}{\partial \varphi_k^{\cdot}} + G'_{Y_n}\frac{\partial \operatorname{Im}\{C_n^{\cdot}\}}{\partial \varphi_k^{\cdot}}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\sum_{n=2}^{N} G_n^*\left(\frac{\partial C_n^{\cdot}}{\partial \varphi_k^{\cdot}}\right)\right\} \qquad k = 1, \ldots, Q,$$

où

$$\left.\begin{aligned} G'_{X_n} = G'_{X_n}(\xi_2^*, \ldots, \eta_N^*),\ G'_{Y_n} = G'_{Y_n}(\xi_2^*, \ldots, \eta_N^*) \\ \xi_n^* + i\eta_n^* = C_n^* \\ G_n^* = G'_{X_n} - iG'_{Y_n} \end{aligned}\right\} \quad n = 2, \ldots, N.$$

Après avoir appliqué la formule (1.15) du § 1, lemme 2, on obtient

$$(4.14')\qquad \sum_{n=2}^{N} G_n^*\left(\frac{\partial C_n^{\cdot}}{\partial \varphi_k^{\cdot}}\right)$$

$$= \left\{\operatorname{res}_{w_k}\frac{1}{P^{*\prime}(t)t^2}\sum_{n=2}^{N} G_n^*\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial w^n}\frac{P^{*\prime}(w)w^2}{w-t}\right]_{w=0}\right\} ie^{i\varphi_k} \qquad k = 1, \ldots, Q.$$

On a encore

$$(4.14'')\qquad \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial w^n}\frac{P^{*\prime}(w)w^2}{w-t}\right]_{w=0} = -\sum_{p=2}^{n}(n-p+1)C_{n-p+1}^*\frac{1}{t^{p-1}}$$

$$n = 2, \ldots, N.$$

Enfin il résulte aisément de (3.6), (3.6′), que

$$(4.15)\qquad \left(\operatorname{res}_{w_k}\frac{\mathfrak{U}(w)}{P^{*\prime}(w)w^2}\right)e^{i\varphi_k} = \operatorname{res}_{w_k}\frac{\mathfrak{U}(w)P^*(w)}{P^{*\prime}(w)w^2}$$

Vu (4.9), les relations (4.14), (4.14′), (4.14″), (4.15) nous donnent les formules,

$$(4.16)\qquad \frac{\partial H}{\partial \varphi_k^{\cdot}} = \operatorname{Re}\left\{\operatorname{res}_{w_k}\frac{\mathfrak{U}(w)P^*(w)}{P^{*\prime}(w)w^2 i}\right\} \qquad k = 1, \ldots, Q.$$

Ensuite, un processus tout à fait analogue nous conduit à des égalités

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_k} = -\mathrm{Re}\left\{\mathrm{res}_{w_k} \frac{\mathfrak{U}(w)P^*(w)}{P^{*\prime}(w)w^2}\right\}. \tag{4.17}$$

Si l'on tient compte des relations (4.12), (4.16), (4.17), on obtient les formules cherchées (4.6). Les autres formules (4.7) s'obtiennent d'une manière analogue.

Prenons maintenant une fonctionnelle harmonique (4.3) pour laquelle la fonction (4.1) est definie par la formule (4.5). Dans ce cas, on peut appliquer non seulement la méthode précédente, mais de plus, le principe du maximum ce qui fournit des résultats un peu plus étendus que ceux qui suivent.

Théorème fondamental 5. Il existe dans la famille $\mathfrak{P}_M$ des polynômes extrémaux, pour lequels la fonctionnelle harmonique décrite ci-dessus atteint sa valeur maximale.

En outre, si $P^*(w)$ désigne un tel polynôme, toutes les racines de la dérivée $P^{*\prime}(w)$ se trouvent sur la frontière du domaine lié respectif μ_{P^*}. Si l'on désigne ces racines par

$$w_k \qquad k = 1, \ldots, Q, \tag{4.18}$$

et leurs ordres par

$$\gamma_k \qquad k = 1, \ldots, Q,$$

on a

$$\mathrm{res}_{w_k} \frac{\Phi(w)P^*(w)}{P^{*\prime}(w)w^2} = \varrho_k > 0 \qquad k = 1, \ldots, Q, \tag{4.19}$$

où

$$\Phi(w) = \sum_{p=2}^{N} \frac{\lambda_{p-1}}{w^{p-1}}, \tag{4.20}$$

$$\lambda_{p-1} = \sum_{n=\mathfrak{P}}^{N} (n-p+1) C^*_{n-p+1} E^*_n \qquad p = 2, \ldots, N, \tag{4.20'}$$

$$E^*_n = E'_{z_n}(C^*_2, \ldots, C^*_N) \qquad n = 2, \ldots, N. \tag{4.20''}$$

Démonstration. L'existence des polynômes extremaux résulte directement du théorème précédent.

Prenons un polynôme extrémal $P^*(w)$, et supposons que pas toutes les racines de la dérivée $P^{*\prime}(w)$ se trouvent sur la fontière

de μ_{P^*}. Si l'on se rapporte aux notations des pages 12-14 on voit que le nombre de racines (3.3) en comporte au moins une. En prenant un système arbitraire (3.8), (3.9) tel que

$$\varphi_k^{\cdot} = \varphi_k, \qquad \omega_k^{\cdot} = 1, \qquad\qquad k = 1, \ldots, Q$$

on s'assure, d'après § 1, lemme 2 et (4.5) que l'expression respective (4.10) sera une fonction harmonique des variables (3.9) parcourant un certain entourage des valeurs extrémales (3.11). De ce fait, conformément au principe du maximum, cette expression ne peut prendre aux points (3.11) sa valeur maximale, contrairement à l'hypothese. Ceci prouve que toutes les racines de la dérivée $P^{*\prime}(w)$ doivent se trouver sur la frontière de μ_{P^*}.

Les relations (4.19) découlent immédiatement de ce qui précéde et des formules du théorème précédent.

BIBLIOGRAPHIE

1. Z. Charzyński. Sur les fonctions univalentes, algébriques, bornées, *Rozprawy Matematyczne* X, 1955.
2. L. Siewierski. Sur les fonctions univalentes, algébriques dans le demi-plan, *Bull. de la Soc. de Sc. et de Lett. de Łódź*, Classe III, Vol. VII, 4, 1956.
3. L. Siewierski. Sur la variation locale des fonctions univalentes, algébriques dans le demi-plan, *Bull. de la Soc. de Sc. et de Lett. de Łódź*, Classe III, Vol VII, 3, 1957.
4. L. Siewierski. Sur les fonctions extrèmales dans les familles des fonctions univalentes, algébriques dans le demi-plan, *Bull. de la Soc. de Sc. et de Lett. de Łódź*, Classe III, Vol. VIII, 9, 1957.
5. R. Zawadzki. Sur les fonctions univalentes, algébriques, *Bull. de la Soc. de Sc. et de Lett. de Łódź*, Classe III, Vol. VIII, 1, 1957.
6. R. Zawadzki. Les équations des fonctions extremales dans les familles des fonctions univalentes, algebriques. non bornées, *Bull. de la Soc. de Sc. et de Lett. de Łódź*, Classe III, Vol. VIII, 10, 1957.
7. L. Bieberbach. Funktionentheorie I, II.
8. G. Pólya u. G. Szegö. Aufgaben u. Lehrsätze I, 1925.

L'Université de Łódź

Présenté le 20 décembre 1957 à la Séance par l'auteur

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ
Classe III De Sciences Mathématiques et Naturelles
1958 Vol. IX, 8

Zygmunt Charzyński

Uniformisation des fonctions
Remarque sur les courbes planes

INTRODUCTION

Soient deux fonctions réelles $f(x)$ et $g(y)$ continues et monotones au sens strict dans certains intervalles finis $\langle a, b\rangle$ et $\langle c, d\rangle$. Supposons encore que les minima et les maxima des $f(x)$ et $g(y)$ se couvrent respectivement.

On voit trés facilement que les fonctions données peuvent etre dans ce cas uniformisées intérieurement d'une façon continue. Cela veut dire qu'il existe deux fonctions $u(t)$ et $v(t)$ continues et monotones dans un intervalle $\langle p, q\rangle$ telles que les superpositions $f[u(t)]$ et $g[v(t)]$ sont identiques.

On peut s'occuper evidemment de ce problème de l'uniformisation, d'un autre point de vue, en remplaçant les conditions concernant les fonctions $f(x)$ et $g(y)$ resp. $u(t)$ et $v(t)$, par d'autres plus faibles ou plus fortes. Il faut remarquer ici les recherches de plussieurs auteurs [1], [3], [5], [6], [7][1].

Je présente dans cette note un théorème concernant le problème cité pour les fonctions continues non nécessairement monotones[2].

[1] Les problémes analogues ont été traites par W. Sierpiński [4] et S. Braun [2].

[2] Selon l'information de M. T. Ważewski ce probleme fut déjà etudié par W. Wilkosz, qui l'a résolu par une méthode combinatorique. Malheureusement ce résultat ne fut pas publié.

La methode employé est tout a fait automatique. On y trouve les fonctions inconnues, uniformisantes, comme solutions d'un systéme simple des équations differentielles.

Dans la suite je donne, comme une conséquence immédiate de ce resultat, un théorème relatif aux courbes planes, continues[3].

Je voudrais éxprimer ma grande reconaissance à Monsieur T. Ważewski pour ses remarques très interessantes concernant cet ouvrage.

UNIFORMISATION DES FONCTIONS

Théorème. Supposons que deux fonctions réelles $f(x)$ et $g(y)$, admettant des dérivées continues dans certains intervalles $\langle a, b\rangle$ et $\langle c, d\rangle$ respectivement, remplissent les conditions suivantes:

1. les dérivées $f'(x)$ resp. $g'(y)$ ne s'annulent que dans un nombre fini de points de l'intervalle $\langle a, b\rangle$ resp. $\langle c, d\rangle$;

2. si, pour deux pointes ξ et η, on a $f(\xi) = g(\eta)$, les dérivées correspondentes $f'(\xi)$ et $g'(\eta)$ ne sont pas toutes les deux égales à zéro;

3. les fonctions données prennent leurs valeurs minima et maxima absolues uniquement dans les points a et b resp. c et d (cela n'exclue pas, que ces fonctions admettent les minima et maxima locaux à interieur des intervalles);

4. les valeurs minima et maxima sont les mèmes pour les deux fonctions, c'est-à-dire

$$f(a) = g(c), \quad f(b) = g(d). \tag{0}$$

Il existe alors deux fonctions réelles „uniformisantes" $u(t)$ et $v(t)$ determinées dans un intervalle fini $\langle 0, T\rangle$, telles que:

I. elles admettent des dérivées continues;

II. elles transforment l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ respectivement en intervalles $\langle a, b\rangle$ et $\langle c, d\rangle$ de telle façon que $u(0) = a$, $v(0) = c$, $u(T) = b$, $v(T) = d$;

III. l'identité $f[u(t)] = g[v(t)]$ a lieu dans tout intervalle $\langle 0, T\rangle$.

---

[3] Ces resultats ont été communiqué a l'une des séances de la Soc. Pol. de Math. a Łódź en 1948.

Démonstration. Pour trouver les fonctions demandées $u = u(t)$, $v = v(t)$, considerons le système des équations différentielles

$$u' = \frac{du}{dt} = g'(v) \qquad v' = \frac{dv}{dt} = f'(u) \tag{1}$$

dans l'ensemble des variables t, u, v determiné par les inégalités

$$0 \leqslant t < +\infty \tag{1'}$$

$$a \leqslant u \leqslant b \qquad c \leqslant v \leqslant d, \tag{1''}$$

où les valeurs initiales des fonctions u et v pour $t = 0$ doivent être respectivement a et c.

Remarquons d'abord que d'aprés les conditions 1 et 3 les dérivées $f'(u)$ resp. $g'(v)$ doivent être positives pour u resp. v situés dans certains voisinages des points a resp. c, sauf eventuellement les points $u = a$ resp. $v = c$. Dans les points $u = a$ resp. $v = c$ ces dérivées sont non négatives

$$f'(a) \geqslant 0 \qquad g'(c) \geqslant 0 \tag{2}$$

èt ne s'annulent pas simultanement en raison des conditions 2 et 4. Il en résulte immédiatement en vertu des méthodes connues de la théorie des équations différentielles que le système (1) admet dans l'ensemble (1'—1'') au moins une solution

$$u = u(t), \qquad v = v(t), \tag{3}$$

définie dans un intervalle

$$0 \leqslant t < T, \tag{3'}$$

ayant comme valeurs initiales

$$u(0) = a, \qquad v(0) = c \tag{3''}$$

et telle qu'une des deux éventualités suivantes a lieu

$$T = +\infty, \tag{α}$$

où bien

$$T < +\infty \tag{β}$$

et dans ce cas le point aux coordonnées $u(T)$, $v(T)$ est situé sur la

frontiére du réctangle $a \leqslant u \leqslant b$, $c \leqslant v \leqslant d$ dans le plan des variables u, v[4].

Nous allons démontrer que T doit être fini et que dans ce cas les fonctions (3) présentent des fonctions uniformisantes désirées. Dans ce but observons quelques propriétés de la solution (3), à savoir:

A. On a identiquement

$$f[u(t)] \equiv g[v(t)]. \tag{4}$$

En effet nous avons d'après (1)

$$\{f[u(t)]-g[v(t)]\}' \equiv f'[u(t)]u'(t)-g'[v(t)]v'(t)$$
$$= f'[u(t)]g'[v(t)]-g'[v(t)]f'[u(t)] \equiv 0$$

et par conséquent, en raison de (3″) et de la condition 4

$$f[u(t)]-g[v(t)] \equiv f[u(0)]-g[v(0)] \equiv f(a)-g(c) = 0.$$

B. Les expressions $f'[u(t)]$ et $g'[v(t)]$ ne sont pas toutes les deux égales à zéro pour aucune valeur de t.

C'est une conséquence immédiate de l'identité (4) et de la condition 2.

C. La solution (3) est unique.

En prenant une valeur quelconque t_0 de l'intervalle, nous voyons facilement de (1) et des propositions A et B, que les fonctions (3) satisfont dans un voisinage suffisamment petit du point t_0 aux équations

$$u = f_0^{-1}[g(v)], \quad \frac{dv}{dt} = f'\{f_0^{-1}[g(v)]\} \qquad \text{si } f'(u_0) \neq 0$$

resp. aux équations

$$v = g_0^{-1}[f(u)], \quad \frac{du}{dt} = g'\{g_0^{-1}[f(u)]\} \qquad \text{si } g'(v_0) \neq 0;$$

---

[4] On admet ici

$$u(T) = \lim_{t \to T} u(t), \quad v(T) = \lim_{t \to T} v(T); \tag{*}$$

les dérivées $f'(x)$ et $g'(y)$ etant, évidemment bornées, il résulte de (1), que dans le cas considéré β) les limites (*) existent.

u_0 et v_0 désignent ici les valeurs $u(t_0)$ et $v(t_0)$, pendant que $f_0^{-1}(\xi)$ resp. $g_0^{-1}(\eta)$ désignent les fonctions localement inverses a des fonctions $f(x)$ resp. $g(y)$, considérées dans des voisinages suffisamment petits des points u_0 resp. v_0. Ceci nous montre, que les fonctions u et v sont determinées univoquement au sens local; nous en déduisons notre proposition d'une façon connue.

D. La courbe caractéristique plane déterminée par la solution (3) ne contient pas de points doubles.

Si l'on suppose le contraire, il existe deux points $t_1 < t_2$ tels que

$$u(t_1) = u(t_2)$$

$$v(t_1) = v(t_2).$$

Il en résulte, vu l'unicité de solution (3), que

$$u(t) = u[t-(t_2-t_1)], \quad v(t) = v[t-(t_2-t_1)] \qquad \text{pour } t \geqslant t_2-t_1$$

et en particulier, posant $\tau = t_2-t_1 > 0$,

$$u(\tau) = u(0) = a, \quad v(\tau) = v(0) = c. \tag{5}$$

Les fonctions (3) prennent donc dans le point τ, vu (1''), leurs valeurs minima; par suite les dérivées correspondantes

$$u'(\tau) = g'[v(\tau)] = g'(c) \qquad v'(\tau) = f'[u(\tau)] = f'(a)$$

doivent être toutes les deux non positives, contrairement aux inégalités (2) et ce qui les suit. Les relations (5) ne sont donc possibles pour aucune valeur $\tau > 0$ et notre proposition est ainsi démontrée.

E. Les dérivées des fonctions (3) ne s'annulent que dans un nombre fini de points de l'intervalle (3').

Nous ne démontrerons cette proposition que pour la première fonction $u(t)$ car la démonstration pour la seconde est tout à fait analogue.

Prenons dans ce but un point quelconque t_0, tel que

$$u'(t_0) = 0 \tag{6}$$

et considérons le système de valeurs

$$u(t_0), \quad v(t_0). \tag{6'}$$

On voit, en tenant compte de (1) et (4), que les équations suivantes ont lieu simultanément pour les valeurs (6′)

$$g'[v(t_0)] = 0 \qquad f[u(t_0)] = g[v(t_0)];$$

autrement dit, le système (6′) présente une solution des deux équations

$$g'(v) = 0, \qquad f(u) = g(v) \tag{7}$$

aux inconnues u, v. Comme d'après la condition 1 ce qui est facile à voir, les équations (7) n'admettent qu'un nombre fini de solutions et comme aux différentes valeurs de t_0 correspondent, vu la proposition D, les systèmes différents (6′), on en déduit immédiatement que le nombre de points t_0 satisfaisant à l'égalité (6) est fini.

En nous appuyant sur les propositions $A-E$ nous démontrons maintenant notre théorème comme il suit.

Nous remarquons que, d'après la proposition A, les fonctions (3) remplissent la condition III du théorème. Puisque elles satisfont évidemment aussi a la condition I et puisque la courbe caractéristique (3) parcourt dans l'ensemble (1″), il reste à démontrer, vu les égalités initiales (3″), que

$$T < +\infty \tag{8}$$

ainsi que

$$u(T) = b \quad \text{et} \quad v(T) = d. \tag{8′}$$

Supposons $T = +\infty$. Les fonctions (3) sont dans ce cas, pour les valeurs t suffisamment grandes, monotones, d'après la proposition E; par conséquent il existe les limites finies suivantes

$$\lim_{t=+\infty} u(t) = U, \qquad \lim_{t=+\infty} v(t) = V, \tag{9}$$

d'où on déduit, en vertu de la proposition A et de (1),

$$f(U) = g(V) \tag{9′}$$

et

$$\lim_{t=+\infty} u'(t) = g(V), \qquad \lim_{t=+\infty} v'(t) = f(U). \tag{9″}$$

Les nombres U et V étant finis, les dernières limites (9″) sont, comme

on le voit facilement de (9), toute les deux égales à zéro, ce qui est impossible vu l'égalité (9′) et la condition 2. La limite T ne peut être donc infinie et la relation (8) est de cette façon vérifiée. Pour démontrer les égalités (8′), remarquons que d'après β) au moins une des éventualités suivantes a lieu

$$\begin{aligned} &p)\ u(T) = a, \\ &p')\ v(T) = c, \\ &q)\ u(T) = b, \\ &q')\ v(T) = d. \end{aligned} \tag{10}$$

Ces quatres relations ne sont pas indépendentes; elles se réduisent à deux seulement, car les égalités (p, p') resp. (q, q') ont lieu simultanément, vu les conditions 3 et 4. Les égalités (p, p') étant impossibles d'après la proposition D, il reste donc les égalités (q, q') c'est-à-dire (8′).

La démonstration du théorème est ainsi terminée.

REMARQUE SUR LES COURBES PLANES

Théorème. Etant donné dans le plan une courbe continue C allant du point A au point B et représentée paramétriquement par les équations

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(s) \\ \eta &= \eta(s) \end{aligned} \quad \text{où} \quad \alpha \leqslant s \leqslant \beta \qquad \begin{aligned} A &= \{\xi(\alpha), \eta(\alpha)\} \\ B &= \{\xi(\beta), \eta(\beta)\}, \end{aligned}$$

il existe pour chaque nombre θ compris entre 0 et 1 un systéme de $2m$ points situés sur C

$$X_i = \{\xi(s_i), \eta(s_i)\}, \qquad i = 1, \ldots, 2m;\ 1 \leqslant m \leqslant 2, \tag{0}$$

tel que

$$\alpha \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_{2m} \leqslant \beta, \tag{0′}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (X_{2i} - X_{2i-1}) = \theta(B - A), \tag{0″}$$

où les différences dans les parenthèses sont traitées au sens vectoriel.

Démonstration. Il est évident que l'on peut admettre, en appliquant éventuellement une translation et une rotation de la courbe C, que le vecteur $B-A$ est parallèle à l'axe X c'est-à-dire, que

$$(1) \qquad \eta(\alpha) = \eta(\beta) \quad \text{et de même} \quad B-A = \{\xi(\beta)-\xi(\alpha), 0\}$$

et que la fonction $\eta(s)$ prend sa valeur maximum au moins dans un point intérieur s_M de l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$. Considérons deux cas différents suivants

I. la courbe C est située au dessus de la droite joignant les points A et B, c'est-à-dire

$$(1') \qquad \eta(s) \geqslant \eta(\alpha) = \eta(\beta) \quad \text{pour} \quad \alpha \leqslant s \leqslant \beta;$$

II. il existe des points de C situés au dessous de cette droite et par suite la fonction $\eta(s)$ prend sa valeur minimum dans un point intérieur s_0 de $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Si l'on suppose le premier cas on démontre que pour chaque $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ il existe sur C deux points (0) satisfaisant à (0') et à l'équation (0'').

En effet, posons

$$(2) \qquad \begin{aligned} f(x) &= \eta(\alpha+x) \quad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant s_M-\alpha = k, \\ g(y) &= \eta(\beta-y) \quad \text{pour } 0 \leqslant y \leqslant \beta-s_M = l. \end{aligned}$$

Comme les fonctions (2) sont continues et prennent les mêmes valeurs minima resp. maxima dans les points $x = 0$, $y = 0$ resp. $x = k$, $y = l$, il est possible de choisir deux suites de fonctions $\{f_n(x)\}$ et $\{g_n(y)\}$ convergentes uniformément vers $f(x)$ et $g(y)$ dans les intervalles $\langle 0, k \rangle$ et $\langle 0, l \rangle$ et telles, que chaque paire de ces fonctions $f_n(x)$ et $g_n(y)$ remplit les conditions 1-4 du théorème de la première partie de cet article. Par conséquent, d'après le théorème cité, il existe pour chaque n naturel deux fonctions $u_n(t)$ et $v_n(t)$ continues dans un certain intervalle $\langle 0, T_n \rangle$ et remplissant les conditions

$$(3) \qquad f_n[u_n(t)] \equiv g_n[v_n(t)],$$

$$(3') \qquad u_n(0) = 0, \quad v_n(0) = 0, \quad u_n(T_n) = k, \quad v_n(T_n) = l,$$

$$(3'') \qquad 0 \leqslant u_n(t) \leqslant k, \quad 0 \leqslant v_n(t) \leqslant l.$$

Considérons pour n naturel quelconque la fonction suivante

$$\varphi_n(t) = \xi[\beta - v_n(t)] - \xi[\alpha + u_n(t)]. \tag{4}$$

On voit immédiatement de (3'), (1) et (2) que

$$\varphi_n(0) = \xi(\beta) - \xi(\alpha), \quad \varphi_n(T_n) = \xi(s_M) - \xi(s_M) = 0, \tag{5}$$

d'où, la fonction (4) étant continue, il existe pour chaque nombre fixe θ entre 0 et 1, un point t_n dans l'intervalle $\langle 0, T_n \rangle$, tel que

$$\varphi(t_n) = \theta\varphi(0),$$

c'est-à-dire

$$\xi[\beta - v_n(t_n)] - \xi[\alpha + u_n(t_n)] = \theta[\xi(\beta) - \xi(\alpha)], \tag{6}$$

En outre, d'après l'identité (3), on a pour $t = t_n$

$$g_n[v_n(t_n)] - f_n[u_n(t_n)] = 0. \tag{7}$$

Comme le suites des nombres $\{u_n(t_n)\}$ et $\{v_n(t_n)\}$ sont bornées, vu (3''), chacune d'elles admet au moins un point d'accumulation x_0 et y_0 et il est évident, en tenant compte de (6), (7), (2) et de (3''), qu'on a

$$\xi(\beta - y_0) - \xi(\alpha + x_0) = \theta[\xi(\beta) - \xi(\alpha)], \tag{8}$$

$$g(y_0) - f(x_0) = \eta(\beta - y_0) - \eta(\alpha + x_0) = 0, \tag{8'}$$

$$0 \leqslant x_0 \leqslant k, \quad 0 \leqslant y_0 \leqslant 1. \tag{8''}$$

Les égalités obtenues (8) et (8') montrent que si l'on prend

$$m = 1, \quad s_1 = \alpha + x_0, \quad s_2 = \beta - y_0,$$

les deux points correspondants (0) satisfont vu (8), (8'), (1) et (8'') aux conditions (0'') et (0'); ainsi la démonstration du théorème est dans ce cas terminée.

En passant au seconde cas, nous le ramenons au cas précédent comme il suit. Nous désignons par Q le point de C, qui correspond à la valeur s_0 du paramètre, et nous décomposons la courbe donée C en deux parties C_1 et C_2 joignant les points A et Q resp. Q et B. Nous formons ensuite la courbe auxiliaire C^*, allant entre les points A^* et B^*, et composée de deux courbes partielles C_1^* et C_2^*, joignant respectivement les points A^*Q^* et Q^*B^*, telles que C_1^* est identique avec C_2 et C_2^* est une translation de C_1 le long du vecteur $B - A$.

Cette courbe peut être représentée, ce qui est facile à voir, par les équations paramétriques suivantes

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^*(s^*) \\ \eta &= \eta^*(s^*) \end{aligned} \qquad \alpha^* \leqslant s^* \leqslant \beta^*,$$

où

$$\alpha^* = \alpha + (s_0 - \alpha), \quad \beta^* = \beta + (s_0 - \alpha),$$

$$\xi^*(s^*) \begin{cases} = \xi(s^*) & \text{pour } \alpha^* \leqslant s^* \leqslant \beta \\ = \xi[\alpha + (s^* - \beta)] + \xi(\beta) - \xi(\alpha) & \text{pour } \beta \leqslant s^* \leqslant \beta^*, \end{cases}$$

$$\eta^*(s^*) \begin{cases} = \eta(s^*) & \text{pour } \alpha^* \leqslant s^* \leqslant \beta, \\ = \eta[\alpha + (s^* - \beta)] & \text{pour } \beta \leqslant s^* \leqslant \beta^*, \end{cases}$$

$$A^* = \{\xi^*(\alpha^*), \eta^*(\alpha^*)\}, \quad B^* = \{\xi^*(\beta^*), \eta^*(\beta^*)\},$$

$$Q^* = \{\xi^*(\beta), \eta^*(\beta)\} = B.$$

Il est clair, vu la construction de C^*, qu'on a

$$B^* - A^* = B - A, \tag{9}$$

et que C^* est situeé au dessus de la droite joignant les points A^* et B^*. Cela nous permet d'appliquer à C^* les résultats obtenus dans I, d'après lesquels, pour chaque $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, il existe sur C^* deux points X_i^* correspondant aux valeurs s_i^* $(i = 1, 2)$ du paramétre tels que

$$(X_2^* - X_1^*) = \theta(B^* - A^*) \quad \text{et} \quad s_1^* \leqslant s_2^*. \tag{10}$$

Nous distinguons maintenant deux éventualités différentes: la première où les points X_1^* et X_2^* sont tous les deux situés sur la mème courbe partielle $C_{i_0}^*$ ($i_0 = 1$ ou 2) de C^* et la seconde où ils sont situés respectivement sur C_1^* et C_2^*. Si l'on suppose le premier cas, nous voyons immédiatement, $C_{i_0}^*$ étant une translation d'une certaine courbe partielle C_{j_0} de C ($j_0 = 2$ ou 1), qu'il qxiste sur C_{j_0} et de même sur C deux points X_i, correspondant aux valeurs s_i du paramétre s, tels que

$$(X_2 - X_1) = (X_2^* - X_1^*) \quad \text{et} \quad s_1 \leqslant s_2$$

c'est-à-dire d'après (9) et (10)

$$\sum_{i=1}^{m}(X_{2i}-X_{2i-1}) = \theta(B-A), \qquad \text{où } m = 1. \tag{11}$$

Dans le second cas nous constatons, en posant

$$X_1^{**} = Q^*, \quad X_2^{**} = X_2^*, \quad X_3^{**} = X_1^*, \quad X_4^{**} = Q^*, \tag{12}$$

que pour $i = 1, 2$ les points X_{2i-1}^{**}, X_{2i}^{**} sont situés tous les deux respectivement sur les courbes partielles C_2^* et C_1^*. Il en résulte, par un raisonnement tout à fait pareil à celui qui précède, qu'il existe sur C des points X_{2i-1}, X_{2i} correspondant au valeurs s_{2i-1}, s_{2i}, $(i = 1, 2)$ du paramètre tels que

$$(X_2-X_1) = (X_4^{**}-X_3^{**}) \quad \text{et} \quad \alpha \leqslant s_1 \leqslant s_2 = s_0,$$

$$(X_4-X_3) = (X_2^{**}-X_1^{**}) \quad \text{et} \quad s_0 = s_3 \leqslant s_4 \leqslant \beta,$$

d'ou, vu (12), (10) et (9),

$$\sum_{i=1}^{m}(X_{2i}-X_{2i-1}) = \theta(B-A), \quad \text{où} \quad m = 2. \tag{13}$$

En résumé, d'après (11) et (13) il existe toujours $2m$ points X_i, $i = 1, \ldots, 2m$, satisfaisant aux conditions (0), (0'), (0''), ce qui prouve notre théorème dans le cas II.

BIBLIOGRAPHIE

1. Borsuk, K. — Sur la notion cinematique d'une courbe, *C. R. de séances de la Soc. de Sc. et de Lett. de Varsovie* XLI, 1948, Classe III, p. 23-39.
2. Braun, S. — Sur l'equation fonctionelle $g(x) = f(\varphi(x))$, *Fund. Math.* XXVIII, 1937, p. 296-302.
3. Homma, T. — A theoreme on continuons functions, *Kōdai Math. Sem. Reports* 1, 1952, p. 13-16.
4. Sierpiński, W. — Sur les fonctions dependantes, *Fund. Math.* XVIII, 1937, p. 66-70.
5. Sikorski, R. and Zarankiewicz, K. — On uniformisation of functions (I), *Fund. Math.* XLI, 1954, p. 339-344.

6. Sikorski, R. — On uniformisation of functions (II), *Fund. Math.* XLI, 1954, p. 345-350.
7. Zarankiewicz, K. — Un théorème sur l'uniformisation de fonctions continues et son application a la démonstration du théorème de F. J. Dyson sur les transformations de la surface sphérique, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, Cl. III, 2, 1954, p. 117-120.

L'Université de Łódź

Présenté le 20 décembre 1957 à la Séance par l'auteur

Zam. 1029/58 — 500 — Wrocławska Drukarnia Naukowa

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ
Classe III Des Sciences Mathématiques et Naturelles
1959 Vol. X, 4

Zygmunt Charzyński, Witold Janowski

Domaine de variation des coefficients A_2 et A_3 des fonctions univalentes et bornées

INTRODUCTION

On étudie dans cet article le domaine de variation du second et troisième coefficients des fonctions univalentes qui appartiennent à la classe des fonctions normalisées et bornées dans le cercle unité. Cet article fait suite à celui de A. C. Schaeffer et D. C. Spencer [1] qui ont traité le même problème dans la classe des fonctions non bornées. La méthode que nous y utilisons est d'ailleurs analogue à celle dont se sont servi les auteurs cités.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

1. La fonction univalente

$$F(z) = z + A_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

assujettie à la condition

$$|F(z)| < M \text{ pour } \quad |z| < 1 \tag{2}$$

où $M > 1$ est une constante, sera appelée fonction bornée et normalisée. La classe de toutes les fonctions de la forme (1) qui pour M arbitraire mais fixe satisfont à la condition (2) sera désignée par

F_M. Convenons de désigner par F_∞ la classe de toutes les fonctions univalentes de la forme (1):

2. La fonction univalente

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = a_1(z + A_2 z^3 + \ldots), \qquad a_1 > 0 \tag{3}$$

remplissant la condition

$$|f(z)| < 1 \quad \text{pour} \quad |z| < 1$$

sera dite bornée. La classe de toutes les fonctions de la forme (3) qui pour T donné, $0 < T < 1$, satisfont à la condition (4) ainsi qu'a la condition

$$a_1 \geqslant T$$

sera désignée par F_T.

3. N naturel étant donné, $N \geqslant 2$, on peut à chaque fonction de la forme (1) faire correspondre un point de l'espace euclidien respectif de $2N-2$ dimensions, soit

$$(A_2, \ldots, A_N).$$

L'ensemble de tous ces points, lorsque la fonction (1) parcourt la famille F_M (respectivement F_∞) sera dénommé domaine de variation de N coefficients des fonctions de cette famille et désigné par $V_{N,M}$ (respectivement $V_{N,\infty}$).

4. Pareillement l'ensemble de points

$$(A_2, \ldots, A_N)$$

associés aux fonctions de la famille F_T sera domaine de variation de N coefficients des fonctions de cette famille et désigné par $W_{N,T}$.

5. On voit immédiatement qu'on a toujours

$$V_{N,M} = W_{N,T} \text{ en posant } T = \frac{1}{M}. \tag{5}$$

Ainsi l'étude du domaine $V_{N,M}$ décrit au point 3 se ramène automatiquement à l'étude des domaines définis au point 4.

§ 1. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES DOMAINES $W_{N,T}$.

Soit donné, pour $N \geqslant 2$ et $0 < T < 1$ arbitraires un domaine respectif $W_{N,T}$.

Lemme 1. La condition suffisante et nécessaire pour qu'un point $(A_2, \ldots, A_N)$ soit un point intérieur de l'ensemble $W^{N,T}$, est qu'il appartienne à un certain ensemble W_{N,T_0}, où $T_0 > T$.

Démonstration. Si l'on prend un point intérieur $(A_2, \ldots, A_N)$ de l'ensemble $V_{N,M}$, puis un point analogue $(\varrho A_2, \ldots, \varrho^{N-1} A_N)$ où ϱ est un certain nombre plus grand que 1, et enfin une fonction $f(z) \epsilon F_T$ telle que

$$f(z) = a_1(z + A_2 \varrho z^2 + \ldots + A_N \varrho^{N-1} z^N + \ldots),$$

on constante d'après le lemme de Schwartz que la fonction

$$g(z) = \varrho f\left(\frac{z}{\varrho}\right) = a_1(z + A_2 z^2 + \ldots + A_N \varrho^{N-1} z^N + \ldots)$$

satisfait dans le cercle $|z < 1$ à l'inégalité $|g(z)| < q < 1$, où q est un certain nombre. Il résulte facilement que la fonction

$$f_0(z) = \frac{1}{q} g(z) = a_1^{(0)}(z + A_2 z^2 + \ldots), \qquad a_1^{(0)} = \frac{a_1}{q}$$

appartient à la famille F_{T_0} avec $T_0 = \dfrac{T}{q}$. Ceci prouve la nécessité de la condition.

Afin de prouver que la condition est suffisante, on prend la fonction

$$f_0(z) = a_1^{(0)}(z + A_2 z^2 + \ldots + A_N z^N + \ldots)$$

de la famille F_{T_0}, où $T_0 > T$ et l'on considère la fonction

$$fz = q f_0(z) = a_1(z + A_2 z^2 + \ldots)$$

avec $q = \dfrac{T}{T_0}$. A présent on choisit un point w_0 se trouvant en dehors du cercle $|w| = q$ et l'on forme les fonctions $G(w)$ comme l'avaient fait dans leur article Spencer et Schaeffer (voir [1], pg. 10). Il

faudra pourtant choisir les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (voir [1], pg. 10) assez petits pour que la fonction composée

$$G[f(z)] = h(z) = a_1'(z+A_2'z^2+\ldots+A_N'z^N+\ldots), \qquad a_1' = a_1$$

remplisse l'inégalité $|h(z)| < 1$ pour $|z| < 1$ et que le point $(A_2', \ldots, A_N')$ défini par des formules analogues à celles de (1.4.4) du travail cité soit arbitrairement choisi dans le voisinage $|w-w_0| < q$.

Le suivant lemme résulte du lemme précédant.

Lemme 2. L'ensemble $V_{N,T}$ est une sphère topologique fermée. La démonstration est analogue à celle du travail cité (voir [1] pg. 10—12).

Lemme 3. Soit

$$(1) \qquad (A_2^*, \ldots, A_N^*)$$

un point arbitraire de la frontière du domaine $W_{N,T}$. Il existe une fonction $f^*(x)$ appartenant à la famille F_T et telle que

$$(2) \qquad f^*(z) = T(z+A_2^*z^2+\ldots+A_N^*z^N+\ldots) = a_1^*(z+a_2^*z^2+\ldots+a_N^*z^N+\ldots).$$

Elle satisfait en outre à l'équation

$$\left[\frac{f^{*\prime}(z)}{f(z)}\right]^2 \mathfrak{M}(w) = \frac{1}{z^2}\mathfrak{N}(z)$$

où

$$\mathfrak{M}(w) = \sum_{x=2}^{N}\left(\frac{D_{p-1}^*}{w^{p-1}} + D_{p-1}^* w^{p-1}\right) - 2\mathfrak{P}^*$$

$$\mathfrak{N}(z) = \sum_{p=1}^{N}\left(\frac{\mathfrak{E}_{p-1}^*}{z^{p-1}} + \overline{\mathfrak{E}_{p-1}^*} z^{p-1}\right) - 2\mathfrak{P}^*$$

$$D_{p-1}^* = 2\sum_{n=p}^{N} a_n^{*(p)} H_n^* \qquad (p = 2, \ldots, N)$$

$$\mathfrak{E}_0 = \sum_{n=2}^{N}(n-1)a_n^* H_n^*$$

$$(2') \qquad \mathfrak{E}_{p-1} = 2\sum_{n=p}^{N}(n-p+1)a^*_{n-p+1}H^*_n \qquad (p=2,\ldots,N)$$

$$\mathfrak{P}^* = \operatorname*{Min}_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} R\Big\{\sum_{p=2}^{N} D^*_{p-1}e_{ix(p-1)}\Big\}$$

$$[f^*(z)]^p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{*(p)} z^n$$

H^*_n désignent ici certains nombres complexes pour lesquels

$$\Big(\sum_{n=2}^{N}|H^*_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} > 0$$

Les fonctions $\mathfrak{M}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$ prennent sur les circonférences $|w|=1$ et $|z|=1$ respectivement des valeurs réelles non négatives; chacune a sur ces circonférences au mois une racine double.

Démonstration. On constate facilement, en se badsant sur nos résultats obtenus dans [2], que sur la frontière de $W_{N,T}$ l'ensemble des points satisfaisant aux conditions du lemme est dense. Ce sont à savoir les point (1) qui correspondent aux fonctions extrémales (2), les fonctionnelles H_f étant définies par les fonctions

$$H(X_2,\ldots,Y_N) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=2}^{N}[(X_n-X'_n)^2+(Y_n-Y'_n)}}$$

Si l'on ferme l'ensemble dense en question on obtient immédiatement la thése du lemme sous sa forme générale.

§ 2. ÉQUATION DE LA FRONTIERE DU DOMAINE $V_{3,M}$ EXPRIMÉE AU MOYEN D'UN PARAMETRE

Étant donné $M>1$ arbitraire et le domaine respectif $V_{3,M}$, supposons que celui-ci ait été réduit par une rotation à un ensemble de trois dimensions, de sorte que les seconds coefficients des développements respectifs soient réels et non négatifs. On a obtenu le résultat suivant.

Théorème. La frontière du domaine $V_{3,M}$ est la somme de sept ensembles

$$B_1, B_2, B_3, C_{12}, C_{13}, C_{23}, P \tag{1}$$

définis respectivement par les suivantes équations paramétriques.

Équations — Paramètres

B_1: $\quad 0 < \varrho < 1$

$$A_2^* = (\lambda^2+\mu^2)^{1/2} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$A_3^* = \lambda^2+\mu^2+(C_1+iC_2)(\lambda-i\mu)+ \tag{2}$$

$$+\left[\varrho+\frac{1}{\varrho}+\cos 2\varphi-T^2\left(\tau+\frac{1}{\tau}+\cos 2\varphi\right)\right]\frac{\lambda-i\mu}{\lambda+i\mu}$$

où

$$C_1 = \frac{(\varrho+1)^2}{2\varrho}\cos\varphi, \qquad C_2 = \frac{(\varrho-1)^2}{2\varrho}\sin\varphi$$

$$\lambda = C_1\log\frac{\varrho(\tau+1)^2}{\tau(\varrho+1)^2}+C_2(\varphi-\psi)+\frac{(\varrho-1)^2}{2\varrho}\cos\varphi-T\frac{(\tau-1)^2}{2\tau}\cos\psi, \tag{2'}$$

$$\mu = C_2\log\frac{\varrho(\tau-1)^2}{\tau(\varrho-1)^2}-C_1(\varphi-\psi)+\frac{(\varrho+1)^2}{2\varrho}\sin\varphi-T\frac{(\tau+1)^2}{2\tau}\sin\psi, \tag{2''}$$

τ $(0<\tau<1)$ et $\psi\left(-\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2}\right)$ sont les racines du système d'équations

$$\frac{(\tau+1)^2}{\tau}\cos\psi = \frac{(\varrho+1)^2}{\varrho T}\cos\varphi, \quad \frac{(\tau-1)^2}{\tau}\sin\psi = \frac{(\varrho-1)^2}{\varrho T}\sin\varphi;$$

B_2: $\quad 0 \leqslant \varphi < \arccos T$

$$A_2^* = (\lambda^2+\mu^2)^{1/2} \qquad -2(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi) < \mu < 2(\sin\varphi-\varphi\operatorname{cgs}\varphi) \tag{3}$$

$$A_3^* = \lambda^2+\mu^2+2\cos\varphi\cdot(\lambda-i\mu)+(2\cos^2\varphi+1-4T^2)\frac{\lambda-i\mu}{\lambda+i\mu}$$

où

$$\lambda = 2\cos\varphi\cdot(\log\cos\varphi-1)+2T;$$

B_3: $\qquad \arccos T \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$-2\left\{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi-T\left[\sin\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)-\frac{1}{T}\cos\varphi\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)\right]\right\}$$

$$<\mu<2\left\{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi-T\left[\sin\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-T\cos\varphi\cdot\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)\right]\right\}$$

(4) $\qquad A_2^* = (\lambda^2+\mu^2)^{1/2}$

$$A_3^* = \lambda^2+\mu^2+2\cos\varphi(\lambda-i\mu)+(1-T^2)\frac{\lambda-i\mu}{\lambda+i\mu},$$

où

$$\lambda = 2\cos\varphi'\log T$$

C_{12}: $\qquad 0 \leqslant \varphi < \arccos T$

(5) $\qquad A_2^* = (\lambda^2+\mu^2)^{1/2}$

$$A_3^* = \lambda^2+\mu^2+2\cos\varphi(\lambda-i\mu)+(2\cos^2\varphi+1-4T\cos\varphi+T^2)\frac{\lambda-i\mu}{\lambda+i\mu},$$

où

(5′) $$\lambda = 2\cos\varphi(\log\cos\varphi-1)+2T,$$

(5) $$\mu = 2(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi);$$

C_{13}: $\qquad \arccos T \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$A_2^* = (\lambda^2+\mu^2)^{1/2}$$

(6) $$A_3 = \lambda^2+\mu^2+2\cos\varphi\cdot(\lambda-i\mu)+(1-T^2)\frac{\lambda-i\mu}{\lambda+i\mu}$$

où

(6′) $$\lambda = 2\cos\varphi\log T,$$

(6″) $$\mu = 2\left\{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi\right.$$

$$\left.-T\left[\sin\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)-\frac{1}{T}\cos\varphi\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)\right]\right\}$$

C_{23}: $$-2(\sin\arccos T - T\arccos T) \leqslant \mu \leqslant 2(\sin\arccos T - -T\arccos T)$$

(7) $$A_2^* = (\lambda^2+\mu^2)^{1/2}$$

$$A_3^* = \lambda^2+\mu^2+2T(\lambda-i\mu)+(1-T^2)\frac{\lambda-i\mu}{\lambda+i\mu},$$

où

(7′) $$\lambda = 2T\log T;$$

P:

(8) $$A_2^* = (2(1-T),$$

$$A_3^* = 5T^2-8T+3;$$

$$T = \frac{1}{M}.$$

Démonstration. Vu là relation (5) de la page 2, on se contentera de prouver le théorème pour le domaine $W_{3,T}$ qui pour $T = \frac{1}{M}$ est équivalent à $V_{3,M}$. On prouvera dans la première partie de la démonstration que chaque point de la frontière est contenu dans un des ensembles (1). Par conséquent ses coordonnées pourront être présentées sous une des dormes (2)-(8). Dans la seconde on démontrera que les expressions A_2^* et A_3^* définies par les formules (2)-(8) sont pour toutes les valeurs des paramétres respectifs les coefficients de la seconde et la troisiéme puissance du développement d'après la formule de Maclaurin d'une certaine fonction univalente dans le cercle unité et définissant le point de la frontière. Prenons à cet effet un point arbitraire de la frontière:

(9) $$(A_2^*, A_3^*)$$

et une fonction de la famille F_T qui lui est associée

(10) $$w = f^*(z) = T(z+A_2^*z^3+A_3^*z^3+\ldots),$$

satisfaisant d'après le lemme 3 à l'équation

(11) $$\frac{w'^2}{w^2}\mathfrak{M}(w) = \frac{1}{z^2}\mathfrak{N}(z)$$

où

$$\mathfrak{M}(w) = \frac{\bar{D}_2 w^4 + \bar{D}_1 w^3 + \tilde{D}_0 w^2 + D_1 w + D_2}{w^2} \tag{12}$$

$$\mathfrak{N}(z) = \frac{\bar{\mathfrak{E}}_2 z^4 + \bar{\mathfrak{E}}_1 z^3 + \hat{\mathfrak{E}}_0 z^2 + \mathfrak{E}_1 z + \mathfrak{E}_2}{z^2} \tag{13}$$

et

$$\hat{D}_0 = -2\mathfrak{y}^*, \quad \hat{\mathfrak{E}}_0 = \bar{\mathfrak{E}}_0 + \mathfrak{C}_0 - 2\mathfrak{y}^*$$

Dans le cas $N = 3$ on obtient vertu de (2)

$$D_2 = \mathfrak{E}_2 T^2 \tag{14}$$

et

$$D_1 = \mathfrak{E}_1 T \tag{15}$$

Afin d'étudier l'équation (11) il nous faudra discerner deux cas selon que D_2 s'annulle ou non. A. $D_2 = 0$. Dans ce cas $D_1 \neq 0$ et en effectuant une rotation appropriée (en remplacant w par w $e^{-i\vartheta}$ et z par $ze^{i\vartheta}$) on parvient à avoir $D_1 > 0$. Si l'on divise les deux membres de (11, par $\mathfrak{E}_1$, on a

$$T\frac{w'^2}{w^2}\left(w + D_0' + \frac{1}{w}\right) = \frac{1}{z}\left(z + \mathfrak{E}_0' + \frac{1}{z}\right) \tag{16}$$

où

$$D_0' = \frac{\hat{D}_0}{\mathfrak{E}_1} > 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{E}_0' = \frac{\hat{\mathfrak{E}}_0}{\mathfrak{E}_1} > 0.$$

Comme les fonctions $w + D_0' + \frac{1}{w}$ et $z + \mathfrak{E}_0' + \frac{1}{z}$ sont non négatives sur les circonférences $|w| = 1$ et $|z| = 1$ respectivement, et ont sur ces circonferences des racines doubles, $D_0' = 2$, $\mathfrak{E}_0' = 2$. Ainsi l'équation (16) peut s'écrire

$$T \cdot \frac{w'^2}{w^2} \cdot \frac{(w+1)^2}{w} = \frac{1}{z} \cdot \frac{(z+1)^3}{z}.$$

Si l'on extrait la racine carrée de chaque part de l'équation (16) et l'on intégre le résultat, on obtient l'équation

$$T^{1/2}\frac{l-w}{w^{1/2}} = \varepsilon\frac{l-z}{z^{1/2}} + C \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

où C est une constante arbitraire, La condition $w(0) = 0$ entraine $C = 0$.

Si l'on désigne par $\varphi(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ on a

$$(16') \qquad w = \varphi^{-1}[T\varphi(z)^2] = Tz + 2(l-T)z^2 + (5T^2 - 8t + 3)z^3 + \ldots$$

Dans le cas considéré le point limite (9) appartient à l'ensemble P. B. $D_2 \neq 0$. On a signalé que par une rotation on peut avoir $D_2 = T^2$. Il résulte des propriétés des fonctions $\mathfrak{M}(w)\cdot\mathfrak{N}(z)$ (voir page 5) et de (12), (13) que

$$\mathfrak{M}(w) = \frac{T^2}{w^2}(w - e^{i\theta})^2(w - \tau e^{-i\psi})\left(w - \frac{1}{\tau}e^{-i\psi}\right)$$

ainsi que

$$\mathfrak{N}(z) = \frac{1}{2^2}(z - e^{i\vartheta})^2(z - \varrho e^{-i\varphi})\left(z - \frac{1}{\varrho}e^{-i\varphi}\right)$$

où $0 < \tau \leqslant 1$, $\quad 0 < \varrho \leqslant 1$ et

$$(17) \qquad e^{2i(\theta-\psi)} = 1, \qquad e^{2i(\vartheta-\varphi)} = 1.$$

On peut écrire (17)

$$e^{i(\theta-\psi)} = \delta, \qquad e^{i(\vartheta-\varphi)} = \sigma$$

en posant

$$\delta = \pm 1, \qquad \sigma = \pm 1.$$

Si on pose

$$p = \tfrac{1}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right), \qquad q = \tfrac{1}{2}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)$$

on a

$$\hat{D}_0 = 2(2q\delta + \cos 2\psi)T^2, \qquad D_1 = -2(qe^{i\psi} + \delta e^{-i\psi})T^2$$

$$\hat{\mathfrak{E}}_0 = 2(2p\sigma + \cos 2\varphi), \qquad \mathfrak{E}_1 = -2(pe^{i\psi} + \delta T e^{-i\psi}).$$

Comme $\hat{\mathfrak{E}}_0 > 0$ et $\hat{D}_0 > 0$ il vient $\delta = \sigma = 1$; par suite

$$\mathfrak{M}(w) = \frac{T^2}{w^2}(w - e^{i\psi})^2(w - \tau e^{-i\psi})\left(w - \frac{1}{\tau}e^{-i\psi}\right) \tag{18}$$

$$\mathfrak{N}(z) = \frac{1}{z^2}(z - e^{i\varphi})^2(z - \varrho e^{-i\varphi})\left(z - \frac{1}{\varrho}e^{-i\varphi}\right) \tag{19}$$

et

$$\hat{D}_0 = 2(2q + \cos 2\psi)T^2, \quad D_1 = -2(qe^{i\psi} + eT^{-i\psi})T^2 \tag{20}$$

$$\hat{\mathfrak{E}}_0 = 2(2p + \cos 2\varphi) \qquad \mathfrak{E}_1 = -2(pe^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

Si l'on tient compte de l'dentité

$$\left[\frac{f^{*\prime}(z)}{f^*(z)}\right]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = \frac{1}{z^2}\mathfrak{N}(z)$$

et des égalités

$$[f^{*\prime}(z)]^2 = T^2 + 4T^2A_0^*z + (6A_3^* + 4A_2^{*2})T^2z^2 + \ldots$$

$$f^{*2}(z) = T^2z^2 + \ldots$$

$$f^{*4}(z) = T^4z\text{-} + 4T^4A_2^*z^5 + (4A_3^* + 6A_2^{*2})T^4z^6 + \ldots$$

on trouve les relations entre les coefficients des puissances z^6 des deux membres de l'identité, à savoir

$$5T^3D_1A_2^* + T^4\hat{D}_0 + 6T^2D_2A_3^* + 4T^2D_2A_2^{*2} = T^4(\hat{\mathfrak{E}}_0 + 4\mathfrak{E}_1A_2^* + 4\mathfrak{E}_2A_2^* + 6\mathfrak{C}_2A_3^{*2}).$$

Ainsi vu (14), (15), (17), (20) et la realtion $D_2 = T^2$ on a définitivement

$$A_3^* = A_2^{*2} + (C_1 + iC_2)A_2^* + \left[\varrho + \frac{1}{\varrho} + \cos 2\varphi - T^2\left(\tau + \frac{1}{\tau} + \cos 2\psi\right)\right] \tag{21}$$

où

$$C_1 = \frac{(\varrho+1)^2}{2\varrho}\cos\varphi, \quad C_2 = \frac{(\varrho-1)^2}{2\varrho}\sin\varphi. \tag{22}$$

La formule (21) établit la relation entre A_2^* et A_3^* dont nous nous servirons dans la suite.

Si dans l'équation différentielle on remplace z par $-z$, w par $-w$, on voit que $\mathfrak{E}_1$ peut être remplacé par $-\mathfrak{E}_1$. Pareilllement si l'on remplace $\mathfrak{E}_1$ par $-\mathfrak{E}_1$ et les coefficients de la fonction $w = f^*(z)$ par leurs nombres complexes conjugués, on peut admeettre que $\mathfrak{E}_1$ appartient à seul quadrant du plan. Des cosidérations identiqu3s ont lieu par rapport à D_1. Supposons que $\mathfrak{E}_1$ et D_1 se trouvent dans le troisième quadrant; on a dans ce cas

$$\mathfrak{M}(w) = \frac{T^2}{w^2}(w-e^{i\psi})^2(w-\tau e^{-i\psi})\left(w-\frac{1}{\tau}e^{-i\psi}\right)$$

$$\mathfrak{N}(z) = \frac{1}{z^2}(z-e^{i\varphi})^2(z-\varrho e^{-i\varphi})\left(z-\frac{1}{\varrho}e^{-i\varphi}\right)$$

(23)
$$\hat{D}_0 = 2\left(\tau+\frac{1}{\tau}+\cos 2\psi\right)T^2,$$

$$D_1 = -\left[\frac{(\tau+1)^2}{\tau}\cos\psi + i\frac{(\tau-1)^2}{\tau}\sin\psi\right]T^2,$$

$$\hat{\mathfrak{E}}_0 = 2\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}+\cos 2\varphi\right),$$

$$\mathfrak{E}_1 = -\left[\frac{(\varrho+1)^2}{\varrho}\cos\varphi + i\frac{(\varrho-1)^2}{\varrho}\sin\varphi\right]$$

où

(23′)
$$0 < \tau < 1, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

La condition $D_1 = \mathfrak{E}_1 T$ entraine

(24)
$$T\frac{(\tau+1)^2}{\tau}\cos\psi = \frac{(\varrho+1)^2}{\varrho}\cos\varphi,$$

$$T\frac{(\tau-1)^2}{\tau}\sin\psi = \frac{(\varrho-1)^2}{\varrho}\sin\varphi.$$

On prouvera que le système d'équations (24) a toujours une solution par rapport à τ et ψ qui satisfait à la condition (23). Il faudra à cet effet distinguer les cas suivants:

a) $\varphi = 0, \quad 0 < \varrho \leqslant 1.$

On constate facilement que $\psi = 0$ et $\tau (0 < \tau < 1)$ est une racine de l'équation

$$\frac{(\tau+1)^2}{\tau} = \frac{1}{T}\frac{(\varrho+1)^2}{\varrho} \tag{24a}$$

pour chaque $0 < \varrho < 1$ et $0 < T < 1.$

b) $\varphi = \frac{\pi}{2} \quad 0 < \varrho \leqslant 1.$

On déduit alors

$$\psi = \frac{\pi}{2} \tag{24'}$$

tandis que $\tau (0 < \tau \leqslant 1)$ est racine de l'équation

$$\frac{(\tau-1)^2}{\tau} = \frac{1}{T}\frac{(\varrho-1)^2}{\varrho} \tag{24''}$$

pour chaque $0 < \varrho \leqslant 1$ et $0 < T < 1.$

c) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \varrho = 1.$

Dand ce cas

$$\cos\psi = \frac{1}{T}\cos\varphi, \quad \tau = 1 \qquad \text{lorsque } \cos\varphi = T \tag{24^{III}}$$

$$\psi = 0 \quad \tau = 1 \qquad \text{lorsque } \cos\varphi = T \tag{24'^{IV}}$$

$$\psi = 0, \quad \frac{(\tau+1)^2}{\tau} = \frac{4}{T}\cos\varphi \qquad \text{lorsque } \cos\varphi > T \tag{24^{V}}$$

d) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varrho < 1.$

Si l'on utilise la notation de (22) le système 24) prendra la forme

$$T\frac{(\tau+1)^2}{2\tau}=\frac{C_1}{\cos\psi} \tag{25}$$

$$T\frac{(\tau-1)^2}{2\tau}=\frac{C_2}{\sin\psi}.$$

La soustraction membre à membre des équations (25) donne, après y avoir posé $u=\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$

$$g(u)=C_2u^4+2(C_1+2T)u^3+2(C_1-2T)u-C_2=0. \tag{26}$$

Vu que $g(0)=-C_2<0$ et $g(1)=4C_1>0$, l'équation (26) a au moins une racine dans l'intervalle (0,1). On prouvera qu'il existe une seule racine $u=u_0$ dans cet intervalle, et par conséquent une seule solution $\psi=\psi_0$ du système (24). On distinguera trois cas:

1^0 $\quad C_1>2T.$

Calculons

$$g'(u)=2[2C_2u^3+3(C_1+2T)u^2+C_1-2T].$$

On voit bien que dans ce cas $g'(0)>0$, $g'(1)>0$, $g''(u)>0$, la fonction $g'(u)$ prend donc dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ des valeurs positives, par conséquent la fonction $g(u)$ augmente dans cet intervalle à partir de la valeur $g(0)<0$ jusqu'à la valeur $g(1)>0$. L'équation (26) a donc dans l'intervalle (0,1) une racine $u=u_0$.

2^0. $\quad C_1=2T.$

En raissonant commen au point précédent on voit bien que $g'(0)=0$ $g'(1)>0$, $g''(u)>0$, donc $g'(u)>0$ pour $0<u\leqslant 1$. L'équation (26) a une racine dans l'intervalle (0,1).

3^0. $\quad C_1<2T.$

Vu que $g'(0)<0$, $g'(1)>0$, $g''(u)>0$, la fonction $g'(u)$ est croissante dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$, tout en prenant des valeurs négatives pour $0\leqslant u<u'$, où $g'(u')=0$ et des valeurs positives pour $u'<u\leqslant 1$. Comme $g(0)<0$, $g(1)>0$ la fonction $g(u)$ décroit dans l'intervalle

$0 < u < u'$ en prenant des valeurs négatives et croit lorsque $u' < u < 1$. On en déduit d'après $g'(u') < 0$ qu'il existe dans l'intervalle $u' < u < 1$ un seul nombre u_0 tel que $g(u_0) = 0$. Si l'on fait le carré de chacun des membres de l'équation (25), on somme membre à membre et l'on pose $v = \frac{1}{2}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)$, on est conduit, en faisant de faciles calculs, à l'équation

$$(27) \qquad h(v) = T^2 v^4 - (C_1^2 + C_2^2 + 2T^2) v^2 + 2(C_1^2 - C_2^2) v + T^2 - C_1^2 - C_2^2 = 0.$$

On a $h(l) = -4C_2^2 < 0$; l'équàtion (27) a donc au moins une racine supérieure à 1.

On prouvera que ladite équation a exactement une racine $v_0 > 1$. Il s'ensuivra qu'il existe une solution $\tau = \tau_0$ $(0 < \tau_0 < 1)$ du système (24). En effet $h'(1) < 0$ et

$$(28) \qquad h''(v) = 2[6T^2 v^2 - (C_1^2 + C_2^2 + 2T^2)].$$

Si l'on désigne par v' la racine positive de l'équation $h'(v) = 0$, on conclut que la dérivée $h'(v)$ décroit lorsque $v < v'$ et croit lorsque $v > v'$. Dans le cas où $v' > 1$ la fonction $h(v)$ décroit à partir de la valeur négative $h(1)$ pour $1 < v < v''$ où $h'(v'') = 0$ et croit lorsque $v > v''$ tend vers l'infini pour v augmentant indéfinimnéent. On en déduit qu'il il existe dans ce cas une seule racine $v_0 > 1$ de l'équation $h(v) = 0$. Par un procédé analogue on prouve le théorème dans le cas où $v' \leqslant 1$.

Afin d'étudier le cas B il faudra discerner trois évantualités:

I. $$0 < \varrho < 1, \quad 0 < \tau < 1.$$

Prenons la racine carrée de chaque membre de (11), intégrons-les et tenons compte des relations qui existent entre les coefficients des fonctions $\mathfrak{M}(w)$, $\mathfrak{N}(z)$. Il en résultera les formules

$$\frac{1}{2}\mathfrak{E}_1 \log \frac{\tau - \sqrt{\dfrac{w - \tau e^{-i\psi}}{w - \dfrac{1}{\tau} e^{-i\psi}}}}{\tau + \sqrt{\dfrac{w - \tau e^{-i\psi}}{w - \dfrac{1}{\tau} e^{-i\psi}}}} - \frac{1}{2}\mathfrak{E}_1 \log \frac{1 - \sqrt{\dfrac{w - \tau e^{-i\psi}}{w - \dfrac{1}{\tau} e^{-i\psi}}}}{1 + \sqrt{\dfrac{w - \tau e^{-i\psi}}{w - \dfrac{1}{\tau} e^{-i\psi}}}} +$$

$$+T\frac{1-\tau^2}{\tau}\cdot e^{-i\psi}\frac{\sqrt{\dfrac{w-\tau e^{-i\psi}}{w-\dfrac{1}{\tau}e^{-i\psi}}}}{\dfrac{w-\tau e^{-i\psi}}{w-\dfrac{1}{\tau}e^{-i\psi}}-1}+T(1-\tau^2)e^{i\psi}\frac{\sqrt{\dfrac{w-\tau e^{-i\psi}}{w-\dfrac{1}{\tau}e^{-i\psi}}}}{\dfrac{w-\tau e^{-i\psi}}{w-\dfrac{1}{\tau}e^{-i\psi}}-\tau^2}=$$

(29)

$$=\frac{1}{2}\mathfrak{E}_1\log\frac{\varrho-\sqrt{\dfrac{z-\varrho e^{-i\varphi}}{z-\dfrac{1}{\varrho}e^{-i\varphi}}}}{\varrho+\sqrt{\dfrac{z-\varrho e^{-i\varphi}}{z-\dfrac{1}{\varrho}e^{-i\varphi}}}}-\frac{1}{2}\hat{\mathfrak{E}}_1\log\frac{1-\sqrt{\dfrac{z-\varrho e^{-i\varphi}}{z-\dfrac{1}{\varrho}e^{-i\varphi}}}}{1+\sqrt{\dfrac{z-\varrho e^{-i\varphi}}{z-\dfrac{1}{\varrho}e^{-i\varphi}}}}+$$

$$+\frac{1-\varrho^2}{\varrho}\cdot e^{-i\varphi}\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{z-\varrho e^{-i\varphi}}{z-\dfrac{1}{\varrho}e^{-i\varphi}}}}{\dfrac{z-\varrho e^{-i\varphi}}{z-\dfrac{1}{\varrho}e^{-i\varphi}}-1}+(1-\varrho^2)e^{i\varphi}\frac{\sqrt{\dfrac{z-\varrho e^{-i\varphi}}{z-\dfrac{1}{\varrho}e^{-i\varphi}}}}{\dfrac{z-\varrho e^{-i\varphi}}{z-\dfrac{1}{\varrho}e^{-i\varphi}}-\varrho^2}+C,$$

où on a pris les branches des racines $\sqrt{\dfrac{w-\tau e^{-i\psi}}{w-\dfrac{1}{\tau}e^{-i\psi}}}$, $\sqrt{\dfrac{z-\varrho e^{-i\varphi}}{z-\dfrac{1}{\varrho}e^{-i\varphi}}}$

qui sont pour $w=0$ et $z=0$ égales respectivement à τ et r. En développant au voisinage du point $z=0$ les deux membres de l'équation (29), on a

$$Te^{-i\psi}+\frac{1}{z}-A_2^*-Tqe^{i\psi}-T(e^{i\psi}+qe^{-i\psi})\log\frac{1-\tau}{1+\tau}+T(qe^{i\psi}+e^{-i\psi})$$

$$\log T\frac{(1-\tau^2)e^{i\psi}}{4\tau}z+0_1(z)=e^{-i\psi}+\frac{1}{z}-pe^{i\psi}-(e^{i\psi}+pe^{-i\psi})\log\frac{1-\varrho}{1+\varrho}+$$

$$(pe^{i\psi}+e^{-i\psi})\log T\frac{(1-\varrho^2)e^{i\varphi}}{4\varrho}z+0_2(z)+C.$$

Il vient de calculs faciles successivement

$$A_2^* = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}_1\left[\log\frac{1-\varrho^2}{\varrho}e^{i\varphi} - \log T\frac{1-\tau}{\tau}e^{i\psi}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\mathfrak{E}_1\left[\log\frac{1-\varrho}{1+\varrho} - \log\frac{1-\tau}{1+\tau}\right] - e^{-i\varphi} + pe^{i\varphi} - Tqe^{i}e^{i\psi} + Te^{-i}e^{i\psi} + C,$$

$$A_2^* = \frac{(\varrho+1)^2}{2\varrho}\cos\varphi\cdot\log\frac{\varrho(1+\tau)^2}{\tau(1-\varrho)}T + \frac{(\varrho-1)^2}{2\varrho}[(\varphi-\psi)\sin\varphi+\cos\varphi] -$$

$$-T\frac{(\tau-1)^2}{2\tau}\cos\psi + i\left\{\frac{(\varrho-1)^2}{2\varrho}\sin\varphi\cdot\log\frac{\varrho(1-\tau)^2}{\tau(1-\varrho)^2}T - \frac{(\varrho+1)^2}{2\varrho}\right.$$

$$\left.[(\varphi-\psi)\cos\varphi-\sin\varphi] - T\frac{(\tau+1)^2}{2\tau}\sin\psi\right\} + k\pi i\mathfrak{E}_1,$$

où les logarithmes ont les valeurs principales, tandis que k est un nombre entier. Le nombre k sera calculé d'après la condition: $\psi = 0$ lorsque $\varphi = 0$.
On a ainsi

$$A_2^* = \frac{(\varrho+1)^2}{2\varrho}\log\frac{\varrho(1+\tau)^2}{\tau(1+\varrho)^2}T + \frac{(\varrho-1)^2}{2\varrho} - T\frac{(\tau-1)^2}{2\tau} + k\pi i\mathfrak{E}_1$$

En tenant compte de (24a) on en tire

$$A_2^* = \frac{(\varrho-1)^2}{2\varrho} - T\frac{(\tau-1)^2}{2\tau} + k\pi i\mathfrak{E}_1 =$$

$$\frac{(\varrho+1)^2}{2\varrho} - T\frac{(\tau+1)^2}{2\tau} - 2 + 2T + k\pi i\frac{(\varrho+1)^2}{2\varrho}.$$

Par suite

$$A_2^* = -2(1-T) + k\pi i\frac{(\varrho+1)^2}{2\varrho}.$$

D'après [3] $|A_2^*| = 2(1-T)$, on a donc $k = 0$ Vu la notation (22) on obient définitivement

$$A_2^* = \lambda + i\mu \tag{30}$$

où

$$\lambda = C_1 \log \frac{\varrho(1+\tau)^2}{\tau(1+\varrho)^2} T + C_2(\varphi - \psi) + \frac{(\varrho-1)^2}{2\varrho} \cos\varphi - T \frac{(\tau-1)^2}{2\tau} \cos\psi,$$

(31)

$$\mu = C_2 \log \frac{\varrho(1-\tau)^2}{\tau(1-\varrho)^2} T - C_1(\varphi - \psi) + \frac{(\varrho+1)^2}{2\varrho} \sin\varphi - -T \frac{(\tau+1)^2}{2\tau} \sin\psi.$$

Dans le cas consideré le point limite (A_2^*, A_3^*) est défini par les formules (30) et (21). Il suffit de faire une rotation et une reflexion pour voir que ce point appartient à l'ensemble B_1.

II. $$\varrho = 1, \quad 0 < \tau < 1.$$

Si nous prenons la racine carrée de chacun des membres (11), les intégrons en tenant compte de $\psi = 0$, nous obtiendrons une équation dont le premier membre sera égal à celui de (29), pour $\psi = 0$, et le second à

$$-z + \frac{1}{z} + 2\cos\varphi \cdot \log z + C.$$

Développons en série entière au voisinage du point $z = 0$ les deux membres de l'équation traitée. On a

$$T + \frac{1}{z} - A_2^* - Tq(1+q)\log\frac{1-\tau}{1+\tau} + T(q+1)\log T\frac{1-\tau^2}{4\tau} z + 0(z) =$$

(32) $$= -z + \frac{1}{z} + 2\cos\varphi \cdot \log z - 2i\mu,$$

où $\mu = \frac{1}{2}iC$.

Il en résulte

$$A_2^* = T(1-q) + T(1+q)\log T\frac{(1+\tau)^2}{4\tau} + 2i\mu$$

et vu la relation $T\frac{(\tau+1)^2}{\tau} = 4\cos\varphi$ (voir (24)) on en déduit

$$A_2^* = 2\cos\cdot\varphi(\log\cos\varphi - 1) + 2T + 2i\mu.$$

On prouvera que μ prend les valeurs appartenant à l'intervallle

$$\langle -2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi), \quad 2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)\rangle. \tag{32'}$$

Etudions à cet effet la partie de la structure Γ_w définie par la condition

$$R\left\{\int \sqrt{\mathfrak{M}(w)}\,\frac{dw}{w}\right\} = \text{const} \tag{33}$$

et qui se trouve à l'intérieur du cercle $K(0, 1)$. Il est facile de vérifier que Γ_w se compose d'un segment $I = (\tau, 1)$ et de deux arcs symétriques, inférieur $\hat{C}$ et supérieur C, partant du point $w = \tau$ en y formant un angle $\frac{2\pi}{3}$ et se terminant au point 0. En outre la frontière G^* du domaine $G = f^*[K(0,1)]$ fait partie de Γ_w. On calcule facilement que G^* se compose du segment I et de deux arcs $\hat{C}^*$ et C^* contenus respectivement dans les arcs $\hat{C}$, C et ne se réduisant pas simultanément au point $w = \tau$. Désignons par D l'arc du cercle $K^*(0,1)$ qu i est transformé par (11) en segment I et en arcs $\hat{C}^*$ C^* On voit que D doit contenir les points $e^{-i\varphi}$, $e^{i\varphi}$ qui par $w = f^*(z)$ sont transformés en extrémités des arcs $\hat{C}^*$, C^* respectivement. Les trois points de ces arcs sont alors transformés en τ. Si cependant un des ares C^* ou C^* se réduit au point τ, deux parmi ces trois points se confondent avec l'un des deux points $e^{-i\varphi}$ ou $e^{i\varphi}$ Or le membre de droite de l'équation (32) devra prendre la même valeur pour ces trois points et ceci ne sera possible que si et seulementsi

$$-2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \leqslant \mu \leqslant 2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \qquad \text{(voir [1] pg 219)}$$

Finalement nous obtenons dans le cas II qui nous occupe

$$A_2^* = \lambda + i\mu, \tag{33'}$$

où

$$\lambda = 2\cos\varphi\cdot(\log\cos\varphi - 1) + 2T \tag{33a}$$

et le paramètre μ satisfait à la condition

$$-2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \leqslant \mu \leqslant 2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

La formule (21) nous permet à présent de calculer A_3. On trouve compte tenu de $\varrho = 1$, $\psi = 0$

$$(33'') \qquad A_3^* = (\lambda + i\mu)^2 + 2\cos\varphi \cdot (\lambda + i\mu) + 2\cos^2\varphi + 1 - 4T\cos\varphi + T^2.$$

Dans le cas considéré le point limite (A_2^*, A_3^*) est défini par les formules (33') et (33''). On voit bien, en faisant une rotation et réflexion en plus au besoin que ce point limite appartient à l'ensemble C_{12} ou à l'ensemble B_2 selon que μ est égal ou non à $2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$.

III. $\qquad \varrho = 1, \qquad \tau = 1.$

Dans ce cas on a conformément à (24''') $\cos\varphi = T\cos\psi$. Extrayons la racine carrée et intégrons successivement la relation (11). Il vient

$$(34) \qquad T\left(w - \frac{1}{w}\right) - T\cos\psi \cdot \log w = z - \frac{1}{z} - 2\cos\varphi \cdot \log z + iC$$

Développons au voisinage du point $z = 0$ les deux membre de la dernière équations. On a

$$-\frac{1}{z} + A_2^* - 2\cos\varphi \cdot \log T \cdot z + 0(z) = z - \frac{1}{z} - 2\cos\varphi \cdot \log z + C$$

d'où

$$A_2^* = 2\cos\varphi \cdot \log T + i\mu$$

avec $\mu = -iC$.
Nous prouverons que

$$(35) \qquad -2[(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) - T(\sin\psi - \psi\cos\psi)] \leqslant \mu \leqslant 2[(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) - T(\sin\psi - \psi\cos\psi)].$$

Considérons à cet effet une partie de la structure analogue à celle du cas II. Elle sera définie par l'ntégrale (33). On constate que la structure est composée de deux arcs symétriques disjoints, à savoir de l'arc inférieur $\hat{C}$ et supérieur C. Ces arcs joignent respectivement $e^{-i\varphi}$ et $e^{i\varphi}$ avec le point 0. La frontière FG^* du domaine $G = f^*[K(0,1)]$ se compose de deux arcs $\hat{C}^*$, C^* contenus respectivement dans $\hat{C}$, C. Désignons par D et D les arcs de la circonférence $K^*(0,1)$ qui par (11) sont transformès en $\hat{C}^*$ et C^*. On voit facilementd'après (34) que ces arcs doivent contenir respectivement les points $e^{-i\varphi}$ et $e^{i\varphi}$

qui de leur part sont transfornmés par $w = f^*(z)$ en extrémités des arcs $\hat{C}^*$ et C^*. Le second membre de (34) devra alors aux deux extrémités de l'arc D et aux deux extrémités de l'arc D prendre les mêmes valeurs égales respectivement à $\pm 2T(\sin\psi - \psi\cos\psi)$. Ceci n'est possible que si la constante μ remplit la condition (35) (voir [1] pg. 219). Ainsi dans le cas traité on a définitivement

$$A_2^* = \lambda + i\mu \tag{36}$$

où

$$\lambda = 2\cos\varphi \cdot \log T \tag{36'}$$

et le paramètre μ satisfait d'après (36) et (24''') à la condition

$$-2\left\{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - T\left[\sin\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right) - \frac{1}{T}\cos\varphi \cdot \arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)\right]\right\} \leqslant \mu \leqslant 2\left\{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - T\left[\sin\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right) - \frac{1}{T}\cos\varphi \cdot \arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)\right]\right\}.$$

On a alors conformément à (21), compte tenu des relations $\varrho = 1$, $\tau = 1$

$$A_3^* = (\lambda + i\mu)^2 + 2\cos\varphi \cdot (\lambda + i\mu) + 1 - T^2. \tag{37}$$

Dans le cas qui nous occupe chaque point limite (A_2^*, A_3^*) est défini par les formules (36) et (37). En faisant une rotation et au besoin une réflexion on obtient que ce point limite appartient doit à l'ensemble C_{13} soit à l'ensemble B_3 suivvant que μ est égal ou non à

$$2\left\{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - T\left[\sin\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right) - \frac{1}{T}\cos\varphi \cdot \arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)\right]\right\}.$$

Ainsi la première partie de la démonstration du théorème est terminée. Passons à la seconde. Reprenons les cas considérés en commencant par le dernier.

Ad. A. Le cas où A_2^* et A_3^* sont définis par la formule (8) ne soulève aucune discussion puisqu'on a la formule (16').

Ad. BI. Evidemment il suffir ici d'utiliser les formules (30) et (21) au lieu de (2). Prenons ϱ et φ arbitraires mais soumis aux condi-

tions $0<\varrho<1$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ et $0<\tau<1$, $0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$ définis univoquement des relations (24). Formons une fonction de forme (10) et considérons une structure Γ_w détinie par la condition (33). Il est facile de vérifier que la partie Γ_w de cette structure contenue dans le cercle $K(0,1)$ se compose d'un arc C joignant le point $e^{i\psi}$ au point 0 et de trois arcs$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, joignant le point $\tau e_{i\varphi}$ au point 0.
Soit

$$f^*(z)=a_1^*z+a_2^*z^2+\ldots=a_1^*(z+A_2^*z^2+\ldots), \qquad a_1^*>0 \tag{41}$$

une fonction univalente qui transforme le cercle $K(0,1)$ en domaine $K(0,1)-C$, où C. est une partie de l'arc C choisi de sorte que

$$a_1^*=T. \tag{42}$$

Si après avoir porté a_1^* de (42) à (41) on prend la dérivée, on voit que la fonction (41) doit satisfaire à l'équation de la forme

$$\left[\frac{f^{*1}(z)}{f^*(z)}\right]^2\mathfrak{M}[f^*(z)]=\frac{1}{z^2}\mathfrak{N}(z)$$

où $\mathfrak{N}(z)$ est une fonction rationnelle spéciale du quatrieme degré, non négative sur le cercle $|z|=1$. Elle y a une racine double. En outre à l'intérieur du cercle $|z|<1$ elle a une racine au point qui est transformé en $\tau e^{i\psi}$. Aussi doit-elle être de la forme

$$\mathfrak{N}(z)=\frac{(z-e^{i\hat{\varphi}})^2(z-\hat{\varrho}e^{-i\hat{\varphi}})\left(z-\frac{1}{\hat{\varrho}}e^{-i\hat{\varphi}}\right)}{z^2}.$$

En raisonnant comme dans la première de la démonstration, on conclut d'abord que les couples $\hat{\varrho}$, $\hat{\varphi}$ et τ, ψ doivent satisfaire aux relations (24) et après en tenant compte des définitions des nombres τ, ψ que $\hat{\varrho}=\varrho$, $\hat{\varphi}=\varphi$. Il en résulte que les coefficients A_2^* et A_3^* de la fonction (41) s'expriment par les formules (2).

Ad BII. Dans se cas il suffit naturellement d'employer les formules (33′) et (33″) au lieu de (3).
Prenons ψ et μ arbitraires $0\leqslant\varphi<\arccos T, -2(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\leqslant\leqslant\mu\leqslant 2(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)$, définis univoquement de (24), $0<\tau<1$. Formons une fonction de la forme (10) et considérons une structure

Γ_w définie par la condition (33). Il est facile de vérifier d'une manière analogue à celle du cas précédent qu'une partie Γ_w de cette structure se compose d'un segment I unissant les points τ et -1 et de deux arcs $\hat{C}$, C unissant les points $-\tau$ et 0, situés symétriquement par rapport à l'axe réel. Prenons deux arcs arbitraires symétriques $\hat{C}$. et $C^{\cdot}$ partant du point $-\tau$ et contenus respectivement dans $\hat{C}$, C. Désignons par

$$f^*(z) = a_1^* z + \ldots = a_1^*(z + A_1^* z^2 + \ldots), \qquad a_1^* > 0 \tag{43}$$

la fonction univalente qui transforme le cerlcel $K(0,1)$ en domaine $G = K(0,1) - I - (\check{C}^{\cdot} + C^{\cdot})$.

Admettons en méme temps que les arcs partiels dans le cercle sont choisis de sorte que $a_1^* = T$. Pareillement au cas précédent on conclut facilement que la fonction (44) satisfait à l'équation de la forme

$$\left[\frac{f^{*'}(z)}{f^*(z)}\right]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = \frac{1}{z^2}\mathfrak{N}(z)$$

où $\mathfrak{N}(z)$ est une fonction rationnelle spéciale du quatrième degré, non négative sur la circonférence $|z| = 1$. Elle y a deux racines conguées. Ainsi elle doit être de la forme

$$\mathfrak{N}(z) = \frac{(z - e^{i\hat{\varphi}})^2 (z - e^{-i\hat{\varphi}})^2}{z^2}.$$

Des raisonnements pareils à ceux de la première partie de la démonstration nous mènent à la conclusion que $\hat{\varphi} = \varphi$
Il en résulte que les coefficients A_2^* et A_3^* de la fonction (43) s'expriment par les formules (3) où μ est un certain paramètre prenant les valeurs de l'intervalle (32). Dans le cas particulier où un des arcs $\hat{C}^{\cdot}$ ou $C^{\cdot}$ se réduit à un point on a

$$\mu = -2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$$

ou

$$\mu = \quad 2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

Comme cependant les arcs $\hat{C}$, C peuvent passer de l'un de ces cas à l'autre d'une manière continue, on peut les choisir de sorte que le

paramètre μ ait dans les formules (2) une valeur donnée d'avance mais contenue dans l'intervalle (32).

Ad. BIII. Au lieu des formules (4) on peut ici évidemment employer les formules (36) et (37). Prenons φ et μ arbitraires tels que

$$\arccos T < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

$$-2\left\{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi-T\left[\sin\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)-\frac{1}{T}\cos\varphi\cdot\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)\right]\right\}$$

$$\leqslant \mu \leqslant 2\left\{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi-T\left[\sin\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)-\cos\varphi\cdot\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)\right]\right\}$$

et qui soient définis univoquement de (24'''), $0 < \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Formons une fonction de la forme (10) et considérons la partie respective de la structure Γ_w définie par la condition (33). Prenons deux arcs arbitraires $\hat{C}\cdot$, $C\cdot$ partant des points $e^{-i\psi}$, $e^{i\psi}$ et contenus dans les arcs $\hat{C}$, C respectivement. Désignons par

$$f^*(z) = a_1^*\cdot z+\ldots = a_1^*(z+A_2^*z^2+\ldots), \qquad a_1^* > 0 \tag{44}$$

la fonction univalente qui transforme le cercle $K(0,1)$ en domaine $G = K(0,1)-(\hat{C}\cdot+C\cdot)$, en choisissant les arcs de sorte que $a_1^* = T$. On en conclut comme précédemment qiue la fonction $f^*(z)$ satisfait à l'équation

$$\left[\frac{f^{*\prime}(z)}{f^*(z)}\right]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = \frac{1}{z}\mathfrak{N}(z)$$

où $\mathfrak{N}(z)$ peut s'écrire

$$\mathfrak{N}(z) = \frac{(z-e^{i\hat{\varphi}})^2\,(z-e^{-i\hat{\varphi}})^2}{z^2}.$$

Il en résulte de même qu'aux cas précédents que $\hat{\varphi} = \varphi$ et que les coefficients A_2^*, A_3^* de la fonction (44) satisfont aux relations (4)

où μ y désigne un paramètre prenant les valeurs de l'intervalle (35). Lorsqu'en particulier $\hat{C}^{\cdot}$ ou $C^{\cdot}$ se réduit à un point, on a

$$\mu = -2[\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - T(\sin\psi - \psi\cos\psi)]$$

ou $$\mu = 2[\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - T(\sin\psi - \psi\cos\psi)].$$

De même qu'auparavent on déduira de la continuité que les arcs $\hat{C}^{\cdot}$, $C^{\cdot}$ peuvent être choisis de sorte que μ ait une valeur donnée de l'intervalle (35).

Ad. C_{12}, C_{13}, C_{23}. En s'appuyant sur le précédent il suffit de prouver que les seconds membres des équations des domaines C_{12}, C_{13}, C_{23} sont limites des membres respectifs des équations des domaines B_1, B_2, B_3. Plus précisément, les seconds membres des équations (5) sont obtenus des membres respectifs soit des équations (2) pour $0 \leqslant \varphi < \arccos T$, soit des équations (3) pour $\mu = \pm 2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$ lorsque $\varrho \to 1$.

On obtient de même les seconds membres des équations (6) des membres respectifs soit des équations (2) pour $\arccos T < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ soit des équations (4) pour

$$\mu = \pm\left\{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - T\left[\sin\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right) - \frac{1}{T}\cos\varphi \cdot \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdot \arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)\right]\right\}$$

lorsque $\varrho \to 1$.

Finalement on obtient les seconds membres des équations (7) soit de (3) lorsque $\varphi \to \arccos T$, soit de (4) pour $\varphi = \arccos T$. La démonstration suivra les trois cas cités.

1. $\varrho \to 1$ et $0 \leqslant \varphi < \arccos T$.

Dans ce ces on a d'après (24)

$$\psi \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{(\tau+1)^2}{\tau} \to \frac{4}{T}\cos\varphi. \tag{38}$$

Vu que le premier et le dernier composants de la somme (2′) tendent alors respectivement vers $2\cos\varphi \cdot \log\cos\varphi$ et $-2\cos\varphi + 2T$, les autres composants de cette somme vers 0, λ a pour limite (5′). D'autre part le premier composant de la somme (2″) tend vers 0, car le quo-

tient $\frac{(\tau-1)^2}{\tau}$ tend vers une limite finie qui n'est pas zéro, les deux suivants composants tendent respectivement vers $-2\varphi\cos\varphi$ et $2\sin\varphi$, le dernier composant de cettte somme tend vers 0. Ainsi μ a comme définis par les formules (5'), (5''). D'après (38) la limite de A_3^* est (21). Une rotation et une réflexion et une réflexion au besoin nous permettent de constater que (A_2^*, A_3^*) apparteint à l'ensemble C_{12}. On obtient aussi les équations (5) directement de (3) en posant $\mu = 2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$.

2. Lorsque $\varrho \to 1$ et $\arccos T < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ on a d'après (24)

$$\cos\psi = \frac{1}{T}\cos\varphi \quad \text{et} \quad \tau \to 1. \tag{39}$$

Ainsi λ tend vers (6'). Ici le premier composant de (2'') tend vers 0, car le quotient $\frac{(\tau-1)^2}{(\varrho-1)^2}$ tend d'après (24) et (39) vers la limite finie $\frac{\sin\varphi}{\sqrt{T^2-\cos^2\varphi}} \neq 0$, tandis que les deux suivants composants de cette somme tendent respectivement vers $-2\cos\varphi\cdot\left[\varphi - \frac{1}{T}\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)\right]$ et $2\sin\varphi$, le dernier composant vers $-2T\sin\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)$. Ainsi μ a comme limite (6''). La limite de A_2^* est donc définie par (33'), λ étant donné par (33a). Ainsi la limite de A_3^* esr définie, compte tenu de (38), par la formule (33''). Une rotation et une réflevxion au besoin nous permettront de constater que le point (A_2^*, A_3^*) appartient à l'ensemble C_{13}. On obtient aussi les équations (6) directement de (4) en posant

$$\mu = 2\left\{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - T\left[\sin\arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right) - \frac{1}{T}\cos\varphi\cdot \arccos\left(\frac{1}{T}\cos\varphi\right)\right]\right\}.$$

3. Lorsque $\varrho \to 1$ et $\varphi = \arccos T$, on a d'après (24)

$$\psi \to 0 \quad \text{et} \quad \tau \to 1. \tag{40}$$

Ainsi λ tend vers (7'). Le premier composant de la somme (2'') tend ici vers 0, car d'après (24), (40)

$$\frac{\varrho(\tau-1)^2}{\tau(\varrho-1)^2} = \left[\frac{(\varrho+1)^2}{\varrho\cos\psi} - 4\right] : \left[\frac{(\varrho+1)^2}{\varrho} - 4\right] \to 1$$

tandis que les trois autres composants de cette somme tendent respectivement vers $-2T\arccos T$, $2\sin\arccos T$ et 0. On en conclut que la limite de A_3^* est définie par la formule (36), où λ est donné par la formule (36'). Il vient de (40) que la limite de A_3^* est définie par la formule (37). Une rotation et une réflexion au besoin nous permettront de constater que le point (A_2^*, A_3^*) appartient à l'ensemble C_{23}. On obtient aussi l'équation (7) directement soit de (3) lorsque $\varphi \to \arccos T$, soit de (4) lorsque $\varphi = \arccos T$.

§ 3. ÉQUATIONS PARAMETRIQUES DE LA FRONTIERE DU DOMAINE $V_{3,\infty}$.

Il est à remarquer que les seconds membres des équations obtenues par A. C. Schaeffer et D. C. Spencer (voir [1]) pour la limite du domaine $V_{3,\infty}$ sont des limites des membres respectifs des équations (2)-(8) du paragraphe précédent lorsque T tend vers 0. En effet:

1. Lorsque $0 < \varrho < 1$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, et T tend vers 0, on trouve de (24) que τ tend vers 0. En outre

$$(1) \qquad \lim_{T\to 0} \frac{T}{\tau}\cos\psi = \frac{(\varrho+1)^2}{\varrho}\cos\varphi, \qquad \lim_{T\to 0}\frac{T}{\tau}\sin\psi = \frac{(\varrho-1)^2}{\varrho}\sin\varphi,$$

par suite

$$(2) \qquad \lim_{T\to 0}\cos\psi = \frac{(\varrho+1)^2}{r}\cos\varphi$$

$$\text{où} \qquad r^2 = 1+6\varrho^2++\varrho^4+4\varrho(1+\varrho^2)\cos 2\varphi, \qquad r > 0$$

et

$$\lim(\varphi-\psi) = \alpha \qquad \text{où} \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{2\varrho\sin 2\varphi}{1+2\varrho\cos 2\varphi+\varrho^2}.$$

Il s'ensuit de (1) et (2)

$$\lim_{T\to 0}\frac{T}{\tau}=\frac{r}{\varrho},\qquad \lim_{T\to 0}T\frac{\varrho}{\tau}\frac{(\tau+1)^2}{(\varrho+1)^2}=\frac{r}{(\varrho+1)^2},\qquad \lim_{T\to 0}T\frac{\varrho(\tau-1)^2}{\tau(\varrho-1)^2}=\frac{r}{(\varrho-1)^2}$$

par conséquent

$$\hat{\lambda}=\lim_{T\to 0}\lambda=C_1\log\frac{r}{(1+\varrho)^2}+C_2\alpha-2\cos\varphi,$$

$$\hat{\mu}=\lim_{T\to 0}\mu=C_2\log\frac{r}{(1-\varrho)^2}-C_1\alpha+2\sin\varphi$$

et finalement

$$\hat{A}_2^*=\lim_{T\to 0}A_2^*=(\hat{\lambda}^2+\hat{\mu}^2)^{1/2}$$

$$A_3^*=\lim_{T\to 0}A_3^*=\hat{\lambda}^2+\hat{\mu}+(C_1+iC_2)(\hat{\lambda}-i\hat{\mu})+\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}+\cos 2\varphi\right)\frac{\hat{\lambda}-i\hat{\mu}}{\hat{\lambda}+i\hat{\mu}}$$

2. Dans le cas limite des équations (3.2) les paramètres φ et μ prennent les valeurs des intervalles $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, $-2\leqslant\mu\leqslant 2$. Comme

$$\hat{\lambda}=\lim_{T\to 0}\lambda=2\cos\varphi\cdot(\log\cos\varphi-1)$$

on a

$$\hat{A}_2^*=\lim_{T-0}A_2^*=(\hat{\lambda}^2+\hat{\mu}^2)^{1/2}$$

$$\hat{A}_5^*=\lim A_3^*=\hat{\gamma}^2+\hat{\mu}^2+2\cos\varphi\cdot(\hat{\gamma}-i\hat{\mu})+(2\cos^2\varphi+1)\frac{\hat{\lambda}-i\hat{\mu}}{\hat{\lambda}+i\hat{\mu}}.$$

3. Dans le cas limite des équations (4.2) $\varphi=\frac{\pi}{2}$ et d'après (24'''.2) $\lim_{T\to 0}\cos\varphi\cdot\log T=\lim_{T\to 0}\cos\psi\cdot T\cdot\log T=0$. Ainsi $-2\leqslant\mu\leqslant 2$ et

$$\hat{\lambda}=\lim_{T\to 0}\lambda=0$$

par conséquent

(1)
$$\hat{A}_2^*=\mu$$
$$\hat{A}_3^*=\mu^2-1.$$

On obtient exactement le même résultat dans le cas des équations (7.2) Dans le cas limite (6.2) on trouve les équations (1) pour $\mu = 2$.

4. De (5.2) pour $T \to 0$ il vient

$$\hat{A}_2^* = \lim_{T\to 0} A_2^* = (\hat{\lambda}^2 + \hat{\mu}^2)^{1/2}$$

$$\hat{A}_3^* = \lim_{T\to 0} A_3^* = \hat{\lambda}^2 + \hat{\mu}^2 + 2\cos\varphi\cdot(\hat{\lambda} - i\hat{\mu}) + (2\cos^2\varphi + 1)\frac{\lambda - i\mu}{\lambda + i\mu},$$

où

$$\hat{\lambda} = \lim_{T\to 0} \lambda = 2\cos\varphi\cdot(\log\cos\varphi - 1),$$

$$\hat{\mu} = 2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

5. Dans le cas limite des équations (8.2) on trouve

$$\hat{A}_2^* = 2, \qquad \hat{A}_3^* = 3.$$

Traduction de I. Kośniewska

BIBLIOGRAPHIE

1. Schaeffer, A. C. Spencer D. C., Coefficient regions for schlicht functions, *Amer. Math. Soc. Coll.* Publ. V XXXV (1950), p. X + 311.
2. Charzyński Z., Janowski W., Sur l'équation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes bornées, *Ann. Univ. M. Curie-Skladowska* 4, *Section A. Math.* (1950), p. 41-56.
3. Pick G., Uber die Konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschranktes Gebiet, Wien — Ber Abt IIa (1917), pg. 247-263.

Présenté le 30 janvier 1958 à la Séance par l'auteurs

Wrocławska Drukarnia Naukowa — Zam. 138/59 — 550

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ
Classe III Des Sciences Mathématiques et Naturelles
1959 Vol. X, 5

Zygmunt Charzyński, Witold Janowski

Domaine de variation des valeurs d'une fonction univalente boruée

INTRODUCTION

Nous étudions dans le présent le domaine de variation des fonctions univalentes bornées dans un point arbitraire mais fixe du cercle unité. La méthode qui y est employée est analogue à celle qui a servi à l'étude du domaine de variation des coefficients (voir [1] et [2]) et de celui des valeurs de la dérivée (voir [3]).

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

1. La fonction univalente de la forme

$$F(z) = z + A_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

qui satisfait à la condition

$$|F(z)| < M \quad \text{pour} \quad |z| < 1 \tag{2}$$

où $M > 1$ est une constante, sera dite fonction bornée normalisée. La famille de toutes les fonctions de la forme (1) satisfaisantes à la condition (2) pour M fixe mais arbitraire sera désignée par F_M. On désignera par F_∞ la famille de toutes les fonctions univalentes de la forme (1).

2. La fonction univalente de la forme

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots = a_1 [z + A_2 z^2 + \dots)], \quad a > 0 \tag{3}$$

qui satisfait à la condition

$$|f(z)| < 1 \quad \text{pour} \quad |z| < 1 \tag{4}$$

sera dénommée bornée. Pour T donné $0 < T < 1$ la famille de toutes les fonctions de la forme (3) satisfaisantes à la condition (4) et à la condition

$$a_1 \geqslant T$$

sera désignée par F_T.

3. $z \neq 0$ étant donné à l'intérieur du cercle $|z| < 1$, l'ensemble de tous les points prenant la forme

$$w = F(z)$$

où $F(z)$ appartient soit à F_M soit à F_∞ sera dénommé domaine de variation de la fonction de cette famille au point z et désigné respectivement par $W_{Z,M}$ et $W_{Z,\infty}$.

4. De même l'ensemble de tous les points

$$w = F(z)$$

où $z \neq 0$ est un point arbitraire mais fixe du cercle $|z| < 1$ et $F(z)$ F_T sera désigné par $\mathfrak{W}_{Z,T}$.

5. On voit aisément qu'on a toujours

$$W_{Z,M} = \mathfrak{W}_{Z,T} \quad \text{lorsque} \quad T = \frac{1}{M}. \tag{1}$$

Ainsi l'étude du domaine $W_{Z,M}$ se ramène à l'étude analogue du domaine $\mathfrak{W}_{Z,T}$ pour $T = \frac{1}{M}$.

§ 1. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES DOMAINES

Il est à remarquer qu'on peut se borner à étudier sans restreindre la généralité le domaine

$$\mathfrak{W}_{r,T}$$

où $0 < r < 1$. C'est ce que nous ferons dans la suite. On voit bien que $\mathfrak{W}_{r_1,T} \supset \mathfrak{W}_{r_2,T}$ lorsque $r_1 < r_2$ (voir [3], pg 264) et que $\mathfrak{W}_{r,T_2} \supset \mathfrak{W}_{r,T_1}$ lorsque $T_1 < T_2$. On peut aussi établir que pour que le point w_0

appartienne à l'intérieur du domaine $\mathfrak{W}_{r,T}$ il faut et il suffit qu'il appartienne à un certain domaine $\mathfrak{W}_{r,T_0}$ où $T_0 < T$ où $r_0 < r$ (voit [3] pg 264-5 et [2] pg 000). On constate aussi que l'ensemble $\mathfrak{W}_{r,T}$ est un cercle topologique fermé (voir [1] pg 10-12).

Lemme. Si

(1) $$w^*$$

désigne un point arbitraire de la frontière du domaine $\mathfrak{W}_{r,T}$, il existe dans la famille F_T une fonction

(2) $$f(z) = T(z+A_2z^2+\ldots)$$

satisfaisante à l'équation

(3) $$\left[\frac{f^{*\prime}(z)}{f^*(z)}\right]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = \frac{1}{z^2}\mathfrak{N}(z)$$

où

(4) $$\mathfrak{M}(w) = D^*\left\{\psi\left[f^*(\varrho), \frac{1}{w}\right]\right\} + \hat{D}^*\{\psi[\hat{f}^*(\varrho), w]\} - 2\mathfrak{p}^*$$

$$\mathfrak{N}(z) = D^*\left\{\psi\left(\varrho, \frac{1}{z}\right)\cdot f^{*\prime}(\varrho)\right\} + \hat{D}^*\{\psi(\varrho, z)\cdot\hat{f}^{*\prime}(\varrho)\} - 2\mathfrak{p}^*$$

ϱ désigne ici une variable apparente, tandis que z est un paramètre

(5) $$\psi(w, \lambda) \equiv w\frac{1+w\lambda}{1-w\lambda}$$

(5′) $$D^*(h) \equiv L^*(h) - iL^*(hi)$$

$$\hat{D}^*(\hat{h}) \equiv L^*(h) + iL^*(hi)$$

(voir [4] p. 43) $L^*(h)$ est la différrentille de la fonctionnelle $K(f) = S(X, Y)$ où $X+iY = \frac{1}{T}f(r)$. La fonctionnelle est définie dans la famille F_T; elle admet au point (1) sa plus grande valeur. $S(X, Y)$ est une fonction arbitraire de deux variables réelles X et Y définie dans le domaine contenant $\mathfrak{W}_{r,T}$; ellle est supposée ayant dans chaque

point de ce domaine des dérivées partielle de première ordre qui ne s'annullent pas simultanément et sont continues.

$$\mathfrak{p}^* = \operatorname*{Min}_{0\leqslant y\leqslant 2\pi} \tfrac{1}{2}\{D^*[\psi(f^*(\varrho), e^{-iy})]+\hat{D}^*[\psi(\hat{f}^*(\varrho), e^{iy})]\}^1$$

Les fonctions $\mathfrak{M}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$ prennent respectivement sur les circonférences $|w| = 1$, $|z| = 1$ des valeurs réellles non négatives et ont sur ces circonférences au moins une racine double.

Démonstration. Il est évident que l'ensemble des points correspondant aux fonctions extrémales des fonctionnelles définies par la formule

$$K(f) = \frac{1}{\sqrt{(X-\dot{X})^2+(Y-\dot{Y})^2}} \tag{60}$$

où $f(z)$ F_T, $X+iY = \dfrac{1}{T}f(r)$, et $\dot{X}+i\dot{Y}$ désigne un point arbitraire en dehors de l'ensemble $\mathfrak{W}_{r,T}$ forme sur la frontière de $\mathfrak{W}_{r,T}$ un ensemble dense. Il est facile de faire le calcul prouvant que chaque fonction extrèmale (2) pour laquelle la fonctionnelle (6) atteint le maximum satisfait à l'équation du type (3). En fermant l'ensemble dense en question on obtient la thèse du lemme.

§ 2. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES DE LA FRONTIERE DU DOMAINE $W_{r,M}$.

Étant donné un nombre arbitraire $M > 1$ un et domaine $W_{r,M}$ qui lui corresponde, le théorème suivant sera prouvé.

Théorème. La frontière du domaine $W_{r,M}$ est un ensemble de points

$$w^* = \tau e^{ia} \qquad (0 < \tau < r)$$

---

[1] On définit pour chaque fonction $g = g(z)$, méromorphe dans le cercle $|z| < 1$

$$\hat{g} = \hat{g}(z) = \overline{g(\bar{z})},$$

et pour la fonctionnelle définie dans la famille des fonctions $g(z)$

$$\hat{S}(g) = \overline{S(\bar{g})}$$

qui est défini par les suivantes équations paramétriques:

$$\cos\psi\cdot\log\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}:\frac{1-r}{1+r}\right)-\log\left(T\frac{r}{\tau}\frac{1-\tau^2}{1-r^2}\right)=0 \tag{1}$$

$$\sin\psi\cdot\log\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}:\frac{1-r}{1+r}\right)-\alpha=0$$

dans lesquelles ψ est un paramètre de l'intervalle $-\pi<\psi\leqslant\pi$ et $T=\frac{1}{M}$.

Démonstration. La démonstration concernera la frontière $\mathfrak{W}_{r,T}$ qui d'après (1.1) est pour $T=\frac{1}{M}$ équivalente à celle du théorème.

On prouvera dans la première partie de la démonstration que les coordonnées τ, α de chaque point limite $w^*=\tau e^{i\alpha}$ du domaine $\mathfrak{W}_{r,T}$ satisfont à l'équation (1) pour une valeur appropriée du paramètre ψ. Dans le seconde partie on prouvera que pour chaque valeur du paramètre ψ la valeur de $\tau e^{i\alpha}$ qui lui correspond par l'équation (1) est une valeur au point r d'une certaine fonction univalente bornée, valeur qui correspond au point limite.

Prenons un point limite arbitraire

$$w^*=\tau e^{i\alpha} \tag{2}$$

et une fonction extrémale appropriée

$$w=f(z)=T(z+A_2z^2+\ldots) \tag{3}$$

de la famille F_T satisfaisant d'après le lemme l'équation de la forme (3.1) et telle que $f^*(r)=w^*$; admettons en outre que

$$\alpha=\arg\frac{f(z)}{z}\Big|_{z=0}$$

où l'on choisit la branche de l'argument de sorte que pour $z=0$ on ait la valeur 0. On constate aisément que la fonctionnelle

$$K(f)=S(X,Y)\quad\text{où}\quad X+iY=\frac{1}{T}f(r)$$

a en chaque f^* de la famille F_T la différentielle

$$L(h) = \frac{1}{T}[S_X(X^*, Y^*)R\{h(r)\} + S_Y(X^*, Y^*)I\{h(r)\}] \tag{4}$$

où

$$X^* + iY^* = \frac{1}{T}f^*(r).$$

La differentielle ne se réduit pas identiquement à zéro en aucun point de la famille F_T (voir [4] p. 43).

Posons successivement dans (5.1) $w = f^*(r)$, $\lambda = \frac{1}{w}$ $w = r$, $\lambda = \frac{1}{z}$ et désignons pour simplifier l'écriture

$$f^*(z) = w, \quad f^*(r) = f, \quad f^*(r) = f.$$

Les relations (5′) pourront alors s'écrire, compte tenu de (4)

$$D^*(h) = \frac{1}{T}(S_X^* - iS_Y^*)h(r),$$

où

$$S_X^* = S_X(X^*, Y^*), \quad S_Y^* = S_Y\ (X^*, Y^*).$$

Les fonctions $\mathfrak{M}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$ définies par (4.1) peuvent alors s'exprimer par les formules

$$\mathfrak{M}(w) = M\frac{w+f}{w-f} + \overline{M}\frac{1+wf}{1-wf} - 2\mathfrak{p}^* \tag{5}$$

où

$$M = \frac{1}{T}(S_X^* - iS_Y^*)\cdot f \quad \text{et}$$

$$\mathfrak{N}(z) = N\frac{z+r}{z-r} + \overline{N}\frac{1+zr}{1-zr} \tag{6}$$

où

$$N = \frac{1}{T}(S_X^* - iS_Y^*)rf'.$$

D'après (5) et (6) l'équàtion (3.1) prendra la forme

$$\frac{w'^2}{w^2}\left(M\frac{w+f}{w-f} + \overline{M}\frac{1+w\bar{f}}{1-wf} - 2\mathfrak{p}^*\right) = \frac{1}{z^2}\left(N\frac{z+r}{z-r} + \overline{N}\frac{1+zr}{1-zr} - 2\mathfrak{p}^*\right) \tag{7}$$

ou en introduisant les notations

$$(8) \qquad w_1 = f = f(r), \qquad w_2 = \frac{1}{\overline{w}_1}, \qquad z_1 = r, \qquad z_2 = \frac{1}{r}$$

la forme

$$(9) \qquad \frac{w'^2}{w^2}\left(M\frac{w+w_1}{w-w_1} - \overline{M}\frac{w+w_2}{w-w_2} - 2\mathfrak{p}^*\right) = \frac{1}{z^2}\left(N\frac{z+z_1}{z-z_1} - \overline{N}\frac{z+z_2}{z-z_2} - 2\mathfrak{p}^*\right).$$

Vu que les fonctions $\mathfrak{M}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$ ont chacune une racine double respectivement sur les circonférences $|w| = 1$, $|z| = 1$ (voir p. 4), l'équation (9) pourra être remplacée par une équation équivalente

$$(10) \qquad A\frac{w'^2}{w^2}\cdot\frac{(w-w_0)^2}{(w-w_1)(w-w_2)} = B\frac{1}{z^2}\cdot\frac{(z-z_0)^2}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

où

$$A = M - \overline{M} - 2\mathfrak{p}^*, \qquad B = N - \overline{N} - 2\mathfrak{p}^*$$

et w_0, z_0 sont des nombres de module 1.
En vertu de (9) et de la relation $w(0) = 0$, il vient

$$-M + \overline{M} = -N + \overline{N}$$

d'où l'on tire $A = B$, et l'équation (10) peut s'écrire

$$(11) \qquad \frac{w'^2}{w^2}\frac{(w-w_0)^2}{(w-w_1)(w-w_2)} = \frac{1}{z^2}\frac{(z-z_0)^2}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

Si l'on tient compte encore une fois de la condition $w(0) = 0$, on a

$$\frac{w_0^2}{w_1 w_2} = \frac{z_0^2}{z_1 z_2}.$$

En désignant par ψ l'argument principal du nobre z_0, il vient

$$\arg z_0 = \psi, \qquad -\pi < \psi \leqslant \pi$$

et on est conduit vu (2) et (8) à l'équation

$$(11') \qquad w_0^2 e^{-2i\alpha} = e^{2i\psi}.$$

On trouve de (10)

$$\frac{w'}{w}\frac{w-w_0}{\sqrt{(w-w_1)(w-w_2)}} = \frac{z-z_0}{\sqrt{(z-z_1(z-z_2)}}$$

où on a pris les branches des racines $\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)} = (z-z_2)\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}}\sqrt{(w-w_2)(w-w_2)} = (w-w_2)\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}}$, qui remplissent les conditions $R\left\{\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}}\right\} > 0$, $R\left\{\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}}\right\} > 0$. Ces branches existent dans les domaines simplement connexes $B = K(0,1) - C$ et $w(B)$, où $K(0,1)$ désigne le cercle $|z| < 1$, C le segment $\langle z_1, \frac{1}{\varrho} z_1\rangle$ dans lesquels les expressions sous les radicaux ne sont pas égales à zéro. En intégrant (12) on est conduit après avoir fait le calcul à l'équation

$$(12)\qquad \log\frac{-\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}}+1}{\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}}+1} - w_0 e^{-ia}\log\frac{\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}}-\tau}{\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}}+\tau} =$$

$$= \log\frac{-\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}}+1}{\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}}+1} - z_0\log\frac{\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}}-r}{\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}}+r} + C,$$

où on a pris les branches des logarithmes qui pour $w = w_1$ et $z = z_1$ ont des valeurs principales. Ces branches existent dans les domaines B et $w(B)$. Comme $w(z_1) = w_1$ on a $C = 0$ et l'équation (12′) pourra s'écrire, en tenant compte de (11)

$$(13)\qquad \log\frac{1-\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}}}{1+\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}}}\,\frac{1+\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}}}{1-\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}}}$$

$$- z_0\log\frac{\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}}-\tau}{\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}}+\tau}\,\frac{\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}}+r}{\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}}-r} = 0$$

Étudions l'équation (13) au voisinage du point $z = 0$. Si l'on développe en série entière les expressions de (13) on a pour z suffisamment petit d'une part

$$w = Tz + a_2 z^2 + \ldots = 0_1(z)$$

$$\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}} = r + \frac{1}{2} Te^{-ia}(\tau^2 - 1)z + 0_2(z)$$

$$\frac{1-\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}}}{1+\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}}} = \frac{1-\tau}{1+\tau} + 0_3(z)$$

$$\frac{\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}} - \tau}{\sqrt{\frac{w-w_1}{w-w_2}} + \tau} = \frac{\frac{1}{2}Te^{-ia}(\tau^2-1)z + 0_2(z)}{2\tau + 0_4(z)},$$

d'autre part

$$\frac{1+\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}}}{1-\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}}} = \frac{1+r}{1-r} + 0_5(z)$$

$$\frac{\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}} + r}{\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_2}} - r} = \frac{2r + 0_6(z)}{\frac{1}{2}(r^2-1)z + 0_7(z)}$$

et en faisant de même pour les expressions logarithmiques l'équation (13) pourra s'écrire en s'appuyant sur la définition de la fonction $0_i(z^k)$

$$\log\frac{1-\tau}{1+\tau}\frac{1+r}{1-r} - z_0 \log T\frac{r}{\tau}\frac{1-\tau^2}{1-r^2}e^{-ia} = 0.$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire on en déduit le système d'équations

$$\cos\psi\cdot\log\frac{1-\tau}{1+\tau}\frac{1+r}{1-r}-\log T\frac{r}{\tau}\frac{1-\tau^2}{1-r^2}=0 \tag{14}$$

$$\sin\psi\cdot\log\frac{1-\tau}{1+\tau}\frac{1+r}{1-r}-\alpha-2k\pi=0. \tag{15}$$

On prouvera que le système d'équations (14)-(15) a une solution par rapport à τ et $\alpha+2k$ qui satisfait pour chaque valeur de ψ de l'intervalle $(-\pi,\pi\rangle$ la condition $0<\tau<r$.

En effet si l'on désigne par $P(\tau)$ le premier membre de l'équation (14) on a

$$P'(\tau)=\frac{1}{1-\tau^2}\left(\tau+\frac{1}{\tau}-2\cos\psi\right)>0$$

car $\tau+\frac{1}{\tau}>2$ et d'autre part $\lim_{\tau\to 0}P(\tau)=-\infty$, $P(r)=-\log T>0$. L'équation (14) a donc dans l'intérvalle $(0,r)$ une solution par rapport à τ. En portant ce τ dans (15) on obtient une solution pour $\alpha+2k\pi$.

Passons à présent à la seconde partie de la démonstration qui consiste à intervertir les conditions (14) et (15).

Prenons à cet effet un ψ arbitraire de l'intervalle $(-\pi,\pi\rangle$ et calculons des équations (14), (15) les valeurs de τ et $\alpha+2k\pi$ qui lui correspondent. Posons

$$\mathfrak{M}(w)=\frac{1}{w}\frac{[w-e^{i(\Psi+\alpha)}]}{e^{i(\Psi+\alpha)}}\cdot\frac{1}{(w-\tau e^{i\alpha})(\frac{1}{W}-\tau e^{-i\alpha})} \tag{16}$$

et considérons la structure Γ_W définie par la condition

$$R\left\{\int\sqrt{\mathfrak{M}(w)}\,\frac{dw}{w}\right\}=\text{const}. \tag{17}$$

On voit bien que la partie Γ_W de cette structure qui est contenue dans le cercle $K(0,1)$ se compose d'un arc C partant du point $e^{i(\Psi+\alpha)}$ et allant jusqu'au point 0 sans passer par le point $\tau e^{i\alpha}$. Prenons une partie de cet arc C dont l'une des extrémités est $e^{i(\Psi+\alpha)}$ et considérons la fonction

$$f^*(z)=a_1^*z+\ldots,\qquad a_1^*>0 \tag{18}$$

qui effectue une représentation conforme du cercle $K(0,1)$ sur le domaine $K(0,1)-C'$, où C' est une partie de l'arc C choisi de sorte que

$$a^* = T. \tag{19}$$

Si l'on porte alors a_1^* de (19) à (18) et l'on calcule la dérivée de (18), on conclut que la fonction (18) satisfait à l'équation écrite sous la forme

$$\left[\frac{f^{*\prime}(z)}{f^*(z)}\right]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = \frac{1}{z^2}\mathfrak{N}(z)$$

où $\mathfrak{N}(z)$ doit prendre la forme

$$\mathfrak{N}(z) = A\frac{1}{z^2}\frac{(z-e^{i\hat{\psi}})^2}{e^{i\hat{\psi}}}\frac{1}{(z-\hat{r})\left(\frac{1}{z}-\hat{r}\right)}$$

En raisonnant comme auparavent, on établit d'abord que $\hat{r}$, $\hat{\psi}$ et τ, α doivent satisfaire au système d'équations (14), (15) et après, en tenant compte des définitions des nombres τ, α, que $\hat{r} = r$, $\hat{\psi} = \psi$. On déduit de (14), (15) que la valeur de la fonction (18) au point r est égale à $\tau e^{i\alpha}$. On prouvera encore que dans la formule (15) $k = 0$. Ceci découle immédiatement du fait que k est une fonction continue des variables r et ψ, elle est donc constante. De plus, pour des r suffisamment petits tant α que $\alpha + 2k\pi$ doivent être proches de 0, ce qui entraine $k = 0$.

§ 3. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES DE LA FRONTIERE DU DOMAINE $W_{r,\infty}$.

Si dans les équations (14) et (15) on passe à la limite pour $k = 0$ et T tendant vers 0, on trouye fascilement que le équations paramétriques de la frontière du domaine $W_{r,\infty}$ prenent la forme

$$\log \tau_\infty = \cos\psi \cdot \log\frac{1-r}{1+r} + \log\frac{r}{1-r^2}$$

$$\alpha_\infty = \sin\psi \cdot \log\frac{1+r}{1-r}.$$

Traduction de I. Koźniewska

BIBLIGRAPHIE

1. Schaeffer A. C. Spencer D. C. Coefficient regions for schlicht functions *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* V, XXXV. 1959 p. 208-225.
2. Charzyński Z. Janowski W. Domaine de variation des coefficientes A_2 et A_3 des fonctions univalentes et bornées *Bull. de la Soc. de Sc. et de Lett. de Łódz* Classe III. Vol. X, 4, 1959.
3. Grad A. The region of values of the derivatives of a schlicht function *Amer. Math. Soc. Coll. Oubl.* V, XXXV, 1950, p. 263-291.
4. Charzyński, Z., Janowski, W. Sur l'équation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes bornées, *Annal. Univ. M. Curie-Sklodowska*, 1950, p. 41-56.

Présenté le 30 janvier 1958 à la Séance par l'auteurs

Wrocławska Drukarnia Naukowa — Zam. 138/59 — 550

A GEOMETRIC PROOF OF THE BIEBERBACH CONJECTURE FOR THE FOURTH COEFFICIENT*

THIS PAPER IS DEDICATED TO THE MEMORY OF THE LATE PROF. JEKUTHIEL GINSBURG

By Z. CHARZYNSKI AND M. SCHIFFER

§ 1. Introduction

LET $\mathfrak{S}$ be the family of all analytic functions which are regular and univalent in the unit circle $|z| < 1$ and possess the Taylor development

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots + a_nz^n + \ldots . \qquad (1)$$

Bieberbach's well-known conjecture that $|a_n| \leq n$ has been proved for $n = 2$, 3, and 4. It may be said that the length and difficulty of the proofs has been a monotonic function of the index n. In order to prepare a further study of the coefficient problem it seems necessary to search for simpler methods of proof.

In a previous note [1], we have given a very simple proof for the Bieberbach conjecture regarding a_4. It was based on an inequality containing a disposable parameter; the general class of such inequalities has been studied by Grunsky [5]. It seems as if this method might be extended to study the coefficients a_{2n} but it does not look promising for the case of odd index. In particular, this method could not be used to prove $|a_3| \leq 3$.

It is the purpose of the present paper to give an alternative proof for the inequality $|a_4| \leq 4$ which is also relatively simple and which is modeled after a previous proof by Garabedian-Schiffer [3] for the inequality $|a_3| \leq 3$. The basic idea of this proof is as follows. Each extremum problem with respect to the coefficients a_k leads to extremum functions $f(z) \in \mathfrak{S}$ which map the unit circle onto a slit domain whose boundary curve satisfies a first-order differential equation whose

* This work was supported by the Office of Naval Research under Task NR 041-086 at Stanford University.
Received by the editor March 21, 1960.

Scripta Math. 25 (1960), 173–181.

coefficients depend on the a_k. For some particular extremum problems it can be shown by simple geometrical argument that the boundary slit must be rectilinear and that the corresponding extremum function is the well-known Koebe function. In such cases the extremum problem can be solved, and a coefficient inequality for the class $\mathfrak{S}$ can be established. In this paper we prove a particular coefficient inequality which, in combination with some known elementary estimates like the area theorem, implies the desired inequality $|a_4| \leq 4$.

The characteristic and somewhat surprising feature of the present as well as our previous proof is the following. Instead of attacking directly the extremum problem of $\max |a_4|$ within $\mathfrak{S}$, we succeed better by dealing with an auxiliary extremum problem in $\mathfrak{S}$ which can be solved completely due to its particular structure. The inequality $|a_4| = 4$ is then derived by combining the new inequality with some known and elementary estimates for the coefficients a_k. We wish to underline this fact since it may be helpful in studying higher coefficients a_k.

§ 2. PRELIMINARY RESULTS

We collect in this section some lemmas which will be needed for the proof of our main result in Section 2.

LEMMA 1. *Let the function*

$$t(z) = z^{-1} + b_0 + b_1 z + \dots \tag{1}$$

be meromorphic and univalent in the unit circle $|z| < 1$ and map it onto the complex plane slit along a segment L of the real axis and along two simple arcs U and V which issue from one end of L, lie in the upper and lower half plane, respectively, and such that the reflected image $\hat{V}$ of V with respect to the real axis is contained in U. Then, the coefficient b_0 is real if and only if the arcs $\hat{V}$ and U are identical.

Proof: We shall denote by E the closed complex plane. Let $\mathfrak{Z}$ be a segment of the real axis and let

$$h(\zeta) = c\zeta + c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \dots, \qquad c > 0, \tag{2}$$

be the series development near infinity of the univalent function which maps $E - \mathfrak{Z}$ into the symmetric domain $E - (V + \hat{V} + L)$. We denote

$$R = U - \hat{V}, \qquad S = h^{-1}(R). \tag{3}$$

From the symmetry of the mapping (2) follows that the arc S is either

empty or lies entirely in the upper half plane.

Let further

$$g(z) = \frac{d}{z} + d_0 + d_1 z + \ldots, \qquad d > 0, \tag{4}$$

perform the conformal mapping of $|z| < 1$ into $E - \mathfrak{Z} - S$. We have

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\varphi}) d\varphi. \tag{5}$$

Since the set $\mathfrak{Z} + S$ has no points in the lower half plane, we can assert

$$Im\{d_0\} \geqq 0 \tag{6}$$

and equality can hold only if the sets S and R are empty. We observe now that, in view of (1), (2), (3), and (4), we have

$$t(z) = h[g(z)] \tag{7}$$

and hence that

$$b_0 = cd_0 + c_0. \tag{8}$$

All coefficients c_ν in (2) are real because of the symmetry of the image domain. Hence (6) and (8) prove our assertion.

In dealing with extremum problems relating to coefficients of univalent functions one is often led to consider continua consisting of analytic arcs satisfying simple differential equations. Let Γ be such a continuum, containing the point $t = 0$ and contained in the circle $|t| \leq 4$ of the complex t-plane. We suppose that Γ consists of finitely many analytic arcs each of which satisfies the condition

$$Re\left\{\int \sqrt{D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3}\, \frac{dt}{t}\right\} = \text{const.} \tag{9}$$

We suppose, of course, that the three complex numbers D_i do not all vanish.

We state now

LEMMA 2. If

$$Im\{D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3\} \neq 0. \quad \text{for} \quad t \neq 0, \qquad -4 < t < 4 \tag{10}$$

and if $D_1 \neq 0$, then the corresponding Γ-continuum does not cross the real axis except possibly at the point $t = 0$.

Proof: Suppose the lemma were not true. There must exist a curve Ω contained in Γ passing from the origin to a point $x \neq 0$ of the real axis and lying otherwise entirely in, say, the upper half plane.

The segment $L = < 0, x >$ of the real axis forms then with Ω a closed Jordan curve J.

We distinguish now two cases:

(a) The radicand of (9) has no roots in the interior of J.

In view of (10) it is obvious that the expression $\sqrt{D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3}$ lies entirely in one of the four quadrants of the complex plane when t runs from 0 to x through L. The sign of its real part remains, therefore, constant and we have

$$Re \left\{ \int_0^x \sqrt{D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3} \frac{dt}{t} \right\} \neq 0, \qquad t = \text{real}. \quad (11)$$

On the other hand, the definition (9) of the curve Ω implies

$$Re \left\{ \int_0^x \sqrt{D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3} \frac{dt}{t} \right\} = 0, \qquad t \in \Omega. \quad (12)$$

Since the square root is a regular analytic function inside J the two eqs. (11) and (12) contradict Cauchy's integral theorem. Thus, the first alternative (a) is excluded.

(b) Let us suppose that the radicand of (9) has one or more roots inside of J. Consider all arcs issuing from these roots and satisfying the condition (9). Depending on the number and the type of the roots there are m such analytic arcs with $3 \leq m \leq 6$. Clearly, (9) is a differential equation for these arcs as well as for Ω. Hence, the uniqueness theory for curves satisfying first order differential equations ensures that these arcs do not intersect each other nor the curve Ω. They cannot terminate in J except at a root point. Considering the few possible configurations of roots in J, one verifies easily that there exists always a closed Jordan curve J_0 consisting of two arcs Q_1, Q_2 issuing from the same root in J and of a segment $l = < x_1, x_2 >$ of L and such that no roots lie inside of J_0. Now, we can apply the preceding reasoning to J_0 instead of J. Integrating from x_1 to x_2 along $Q_1 + Q_2$ analogous to (12), we obtain a purely imaginary integral while the integral

$$Re \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3} \frac{dt}{t} \right\} \neq 0, \qquad t \text{ real} \quad (13)$$

analogous to (11) cannot vanish on the same grounds as above. We have again a contradiction to Cauchy's integral theorem. Thus, the continuum Γ cannot intersect the real axis, except possibly at the origin, which proves our lemma.

§ 3. THE FUNDAMENTAL COEFFICIENT INEQUALITY

We shall deal in this section with extremum problems for functions of the three first coefficients a_k in the series development (1.1). Let $\Phi(a_2, \bar{a}_2, a_3, \bar{a}_3, a_4, \bar{a}_4)$ be a given polynomial of its six complex variables which is real-valued for arbitrary choice of the a_k and their complex-conjugates $\bar{a}_k$. The number Φ is a functional of the element $f(z) \in \mathfrak{S}$ whose coefficients are inserted into Φ. We may pose the problem to find those functions $f(z) \in \mathfrak{S}$ for which Φ takes its maximum value. Because of the compactness of the family $\mathfrak{S}$ the existence of such extremum functions is guaranteed.

Let us denote a maximum function of this problem by $F(z)$ and let A_2, A_3, A_4 be its first three coefficients. By using the well-known variational technique to characterize the extremum function, we can prove that $F(z)$ maps the unit circle onto the complex plane slit along a number of analytic arcs each of which satisfies the differential equation. [6, 7]

$$Re\left\{\int \sqrt{\frac{D_1}{w} + \frac{D_2}{w^2} + \frac{D_3}{w^3}}\,\frac{dw}{w}\right\} = \text{const.} \tag{1}$$

with

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial A_2} A_2^{(2)} + \frac{\partial \Phi}{\partial A_3} A_3^{(2)} + \frac{\partial \Phi}{\partial A_4} A_4^{(2)} \\ D_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial A_3} A_3^{(3)} + \frac{\partial \Phi}{\partial A_4} A_4^{(3)} \\ D_3 &= \frac{\partial \Phi}{\partial A_4} A_4^{(4)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Here, the process of complex differentiation is defined as usual. Let

$$A_n = X_n + iY_n; \tag{3}$$

then, we define the operator

$$\frac{\partial}{\partial A_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial X_n} - i\frac{\partial}{\partial Y_n}\right). \tag{3'}$$

Finally, the coefficients $A_n^{(p)}$ are defined by the equation

$$(F(z))^p = \sum_{n=p}^{\infty} A_n^{(p)} z_n. \tag{4}$$

We apply this general result to the particular functional

$$\Phi = x_4 + 2y_2y_3 - x_2y_2^2 - 2y_2^2 - x_2 \tag{5}$$

where we use again the notation $a_n = x_n + iy_n$. Clearly, Φ is a real-valued polynomial in a_2, a_3, a_4 and in their conjugates.

The extremal function $F(z)$ belonging to this particular functional satisfies the differential eq. (1). In view of the definitions (2), (3′), and (4), we obtain in this case from (5) by straightforward calculation the specific values

$$\begin{aligned} 2D_1 &= (-1 + X_2^2 + 2Y_2^2 + 2X_3) + 4iY_2 \\ 2D_2 &= 3X_2 + iY_2 \\ 2D_3 &= 1. \end{aligned} \tag{6}$$

In order to discuss the extremum function $F(z)$ we introduce the meromorphic univalent function

$$t(z) = \frac{1}{F(z)} = \frac{1}{z} - A_2 + (A_2^2 - A_3)z + \ldots \tag{7}$$

which maps the unit circle $|z| < 1$ onto a slit domain whose boundary curve Γ consists of finitely many analytic arcs with the differential equation

$$Re\left\{\int \sqrt{D_1t + D_2t^2 + D_3t^3}\,\frac{dt}{t}\right\} = \text{const.} \tag{8}$$

The continuum Γ contains the origin and, since it has the transfinite diameter 1, it lies in the circle $|t| \leq 4$.

We assert now

LEMMA 3. The extremum function belonging to the functional (5) satisfies the condition

$$Y_2 = 0. \tag{9}$$

Proof: Suppose $Y_2 \neq 0$. In this case

$$Im(D_1t + D_2t^2 + D_3t^3) = 2Y_2t + \frac{1}{2}\,Y_2t^2 \text{ for } t \text{ real} \tag{10}$$

and this expression vanishes only for $t = 0$ and $t = -4$. Hence, Lemma 2 applies and the continuum Γ does not cross the real axis. Further, it is easily seen that the tangent vector t' of Γ at the origin satisfies the equation

$$D_1t' < 0. \tag{11}$$

Thus, in view of (6) the curve Γ will start out into the same half plane in which the points D_1 and A_2 are located. It must stay there since it cannot cross the real axis.

On the other hand, we derive from (7) the equation

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(e^{i\varphi})d\varphi = -A_2. \tag{12}$$

Thus, a weighted mean of the curve Γ falls into $-A_2$, a point in the opposite half plane (compare [3]). This is evidently impossible and Y_2 cannot be different from zero. Our lemma is proved.

In view of Lemma 3 the coefficients D_k in the differential eq. (8) simplify considerably. We find now

$$2D_1 = -1 + X_2^2 + 2X_3,\ 2D_2 = 3X_2,\ 2D_3 = 1. \tag{13}$$

The continuum Γ consists of analytic arcs which satisfy the condition (8) with real coefficients D_k. If we express the arcs in a proper parametric representation $t(\tau)$, we can write (8) as an explicit differential equation for these arcs:

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \cdot \frac{1}{t}\,(D_1 + D_2 t + D_3 t^2) + 1 = 0. \tag{14}$$

Consider the largest continuum $\tilde{\Gamma}$ containing the origin and composed of connected arcs each of which satisfies (14). It will always consist of a segment of the real axis and of two simple arcs which are symmetric with respect to the real axis. This is an immediate consequence of the reality of the D_k.

Now, we can apply Lemma 1. Since we know that the term $-A_2$ in the development (7) is real, we can assert that the continuum $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$ is symmetric with respect to the real axis and that, consequently, the coefficients of $t(z)$ are all real. But this implies that $F(z)$ likewise is a real univalent function. All coefficients A_n $(n = 2, 3, \ldots)$ are real.

In the case of a real univalent function the functional (5) reduces to

$$\Phi = X_4 - X_2. \tag{15}$$

Furthermore, in the case of univalent functions with real coefficients there exists a well-known inequality due to Dieudonné [2] which implies

$$X_4 - X_2 \leq 2. \tag{16}$$

Since we know that for the Koebe function $f(z) = z(1 - z)^{-2}$ the value

$\Phi = 2$ is indeed attained, we can conclude from this analysis the

THEOREM I. The functional (5) satisfies for all elements $f(z) \in \mathfrak{S}$ the inequality

$$\Phi \leq 2. \tag{17}$$

The inequality is sharp and the maximum is attained for the Koebe function.

§ 4. THE INEQUALITY FOR $|a_4|$

We consider arbitrary functions $f(z) \in \mathfrak{S}$, but assume that $y_2 = Im\{a_2\} \neq 0$. For all such functions, we may put the inequality (17) of the previous theorem into the form

$$x_4 + y_2^2\left[-2 + \frac{2y_3 - x_2y_2}{y_2} + \frac{2 - x_2}{y_2^2}\right] \leq 4. \tag{1}$$

We consider the univalent meromorphic function in $|z| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{f(z^2)}} = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{2}z - \frac{1}{2}(a_3 - \frac{3}{4}a_2^2)z^3 + \ldots \tag{2}$$

and derive from the area theorem [4, p. 432] the inequality

$$4 \geq |a_2|^2 + 3\left|a_3 - \frac{3}{4}a_2^2\right|^2 \tag{3}$$

which implies

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{4 - x_2^2} \geq |2y_3 - 3x_2y_2|,$$

$$\text{i. e., } 2y_3 - 3x_2y_2 \geq -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{4 - x_2^2}. \tag{4}$$

Let

$$U = \frac{\sqrt{4 - x_2^2}}{y_2} \tag{5}$$

and observe that by virtue of (4)

$$\left[-2 + \frac{2y_3 - x_2y_2}{y_2} + \frac{2 - x_2}{y_2^2}\right] \geq \frac{U^2}{2 + x_2} - \frac{2}{\sqrt{3}}U + (2x_2 - 2). \tag{6}$$

The discriminant of the right side quadratic term is

$$\Delta = \frac{1}{3} - 2\frac{x_2 - 1}{x_2 + 2}. \tag{7}$$

If $\Delta < 0$, the left-hand bracket in (6) is positive and we can conclude from (1) that

$$x_4 \leq 4. \tag{8}$$

If we ask for the extremum of $|a_4|$ it may be assumed without loss of generality that a_4 is real, and it can be shown by preliminary elementary estimates that for the extremum function $x_2 > 1.6$ [4, p. 434]. Near the extremum function is an infinity of elements of the family γ with $y_2 \neq 0$ and $x_2 > 1.6$. For all these functions holds $\Delta < 0$, i.e., $x_4 \leq 4$. Hence, this inequality can also be asserted for the extremum function and we proved the Bieberbach conjecture $|a_4| \leq 4$.

BIBLIOGRAPHY

[1]. Charzynski, Z., and Schiffer, M.: A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, Technical Report No. 85 Nonr-225(11), Stanford University (1960).

[2]. Dieudonné, J., "Recherches sur Quelques Problèmes Relatifs aux Polynomes et aux Fonctions Bornées d'une Variable Complexe," *Ann. Ecole Normale Sup.*, **48** (1931), p. 247–358.

[3]. Garabedian, P. R., and Schiffer, M., "A Coefficient Inequality for Schlicht Functions," *Annals of Math.*, **61** (1955), p. 116–136.

[4]. Garabedian, P. R., and Schiffer, M., "A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Fourth Coefficient," *J. Rat. Mech. Anal.*, **4**, (1955), p. 427–465.

[5]. Grunsky, H., "Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen," *Math. Z.*, **45** (1939), p. 29–61.

[6]. Schaeffer, A. C., Schiffer, M., and Spencer, D. C., "The Coefficient Regions of Schlicht Functions," *Duke Math. J.*, **16** (1949), p. 493–527.

[7]. Charzynski, Z., "Sur les Fonctions Univalentes, Bornées," Rozprawy Matematyczne II, Warszawa-Wroclaw (1953).

Offprint from "Archive for Rational Mechanics and Analysis
Volume 5, Number 3, 1960, P. 187—193

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg

A New Proof of the Bieberbach Conjecture for the Fourth Coefficient

Z. CHARZYNSKI & M. SCHIFFER

Introduction

In 1955 GARABEDIAN & SCHIFFER [*1*] proved that the fourth coefficient in the Taylor series of a function $f(z)$, univalent in the unit circle, satisfies the inequality $|a_4| \leqq 4$. The argument consisted in two basic assertions: a) It was shown by means of the calculus of variations and by use of LOEWNER's differential equation that the problem of finding an extremum function for the Bieberbach problem is equivalent to a nonlinear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations. It was proved also that the Koebe function led to a solution of this boundary value problem and that no other solution could lie in a very small neighborhood of this particular solution. b) There remained then the task of showing that outside of this critical neighborhood there could exist no solution leading to an extremum function of the Bieberbach problem. This was achieved by a laborious and complicated set of estimates and inequalities.

While the approach of that paper shows in principle a general method of attack upon coefficient problems for schlicht functions, the amount of labor involved in this relatively simple question seemed discouraging, and it was doubtful whether higher coefficients should be dealt with in a corresponding manner. The purpose of the present paper is to give a great simplification of the proof that $|a_4| \leqq 4$ and to show at the same time that more elementary methods are sufficient to establish the theorem. We start from an inequality implicit in a paper of GRUNSKY [*2*] of 1939. This inequality can be derived by elementary means, using the Schwarz inequality and standard methods of contour integration. Below we give a new proof of the Grunsky inequality based on variational methods, both in order to make this paper self-consistent, and also since the new proof seems somewhat shorter than GRUNSKY's. No use of LOEWNER's differential equation is necessary. We hope that our present proof for the Bieberbach conjecture for a_4 will encourage the attack upon higher coefficients and stimulate new interest in this beautiful field of function theory.

§ 1. The fundamental inequalities

1. We shall be dealing with extremum problems within the family $\mathfrak{S}$ of all functions $f(z)$ which are regular and univalent for $|z|<1$ and which possess a Taylor series

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots . \tag{1}$$

Let $w=f(z)$ yield the image domain D of the unit circle, and let w_0 be an arbitrary point in the w-plane but not in D. There exist for arbitrarily small values of $\varrho>0$ infinitely many members of $\mathfrak{S}$ and of the form [3]

$$f^*(z)=f(z)+\frac{a\,\varrho^2 f(z)^2}{(f(z)-w_0)\,w_0}+O(\varrho^3), \qquad |a|<1, \tag{2}$$

where the correction term $O(\varrho^3)$ can be estimated uniformly in each closed subdomain $|z|\leqq r<1$. These functions $f^*(z)$ may then serve as comparison functions with the original member $f(z)$ in variational problems regarding the family $\mathfrak{S}$.

We shall be interested in maximum problems concerning the first three coefficients a_2, a_3, and a_4 in (1). Therefore it is necessary to express the change of these coefficients under the variation (2). An easy calculation yields

$$\begin{aligned} a_2^* &= a_2-\frac{a\,\varrho^2}{w_0^3}+O(\varrho^3)\\ a_3^* &= a_3-\frac{a\,\varrho^2}{w_0^3}\left(2a_2+\frac{1}{w_0}\right)+O(\varrho^3)\\ a_4^* &= a_4-\frac{a\,\varrho^2}{w_0^3}\left(2a_3+a_2^2+\frac{3a_2}{w_0}+\frac{1}{w_0^2}\right)+O(\varrho^3). \end{aligned} \tag{3}$$

Now let $F=F(a_2, a_3, a_4)$ be an analytic function of the three complex variables a_2, a_3, and a_4. F is then a functional of $f\in\mathfrak{S}$ with the corresponding variational formula

$$\begin{aligned} F^* = F-\frac{a\,\varrho^2}{w_0^3}\Big[&\frac{\partial F}{\partial a_4}(2a_3+a_2^2)+\frac{\partial F}{\partial a_3}2a_2+\frac{\partial F}{\partial a_2}+\\ &+\Big(\frac{\partial F}{\partial a_4}3a_2+\frac{\partial F}{\partial a_3}\Big)\frac{1}{w_0}+\frac{\partial F}{\partial a_4}\cdot\frac{1}{w_0^2}\Big]+O(\varrho^3). \end{aligned} \tag{4}$$

Having chosen a fixed functional $F(a_2, a_3, a_4)$, we may ask for the solution of the extremum problem

$$\operatorname{Re}\{F\}=\max \qquad \text{within the family } \mathfrak{S}. \tag{5}$$

The existence of extremizing functions in $\mathfrak{S}$ follows from the compactness of the family. We can characterize the extremum functions $f(z)$ by the fact that under all variations (2) the inequality $\operatorname{Re}\{F^*\}\leqq\operatorname{Re}\{F\}$ must hold. In other words,

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\left\{\frac{a\,\varrho^2}{w_0^3}\left[A+\frac{B}{w_0}+\frac{C}{w_0^2}\right]\right\}\geqq O(\varrho^3)\\ &A=(2a_3+a_2^2)\frac{\partial F}{\partial a_4}+2a_2\frac{\partial F}{\partial a_3}+\frac{\partial F}{\partial a_2},\\ &B=3a_2\frac{\partial F}{\partial a_4}+\frac{\partial F}{\partial a_3}, \qquad C=\frac{\partial F}{\partial a_4} \end{aligned} \tag{6}$$

must hold for every admissible variation (2).

The basic lemma of the calculus of variations within the class $\mathfrak{S}$ leads now to the conclusion that D is a slit domain bounded by analytic arcs Γ with a parametric representation $w=w(\tau)$ satisfying the differential equation

$$\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2\cdot\frac{1}{w^3}\left[A+\frac{B}{w}+\frac{C}{w^2}\right]<0. \tag{7}$$

So far, every extremum problem (5) can be brought within the characterization (7). It is, however, extremely difficult to draw decisive conclusions from (7) and to determine precisely the extremum function sought. Indeed, the coefficient problem of univalent functions is contained in this particular problem. Since it has not been possible to find a satisfactory general solution of (7), we may now ask for particular functionals F for which the complete answer can be given. It is clear from the form of (7) that the integration of the differential equation will be simplified if the term in brackets is a perfect square. We ask, therefore, for those functions $F(a_2, a_3, a_4)$ for which

$$(8)\quad B^2 = 4AC, \text{ i.e., } \left(3a^2\frac{\partial F}{\partial a_4} + \frac{\partial F}{\partial a_3}\right)^2 = 4\frac{\partial F}{\partial a_4}\left[(2a_3 + a_2^2)\frac{\partial F}{\partial a_4} + 2a_2\frac{\partial F}{\partial a_3} + \frac{\partial F}{\partial a_2}\right].$$

This condition is a simple first order partial differential equation for F. We can give immediately a particular integral of it which is in polynomial form and which contains an arbitrary constant of integration l. Namely,

$$(9)\qquad F(a_2, a_3, a_4) = a_4 - 2a_2a_3 + \tfrac{13}{12}a_2^3 + 2l(a_3 - \tfrac{3}{4}a_2^2) + l^2a_2.$$

Conversely, if we start with the functional (9) and ask for the solution of the extremum problem (5), we arrive at the differential equation for the boundary curve Γ:

$$(10)\qquad \left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2 \cdot \frac{1}{w^3}\left[l + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{w}\right]^2 < 0.$$

Let $w = f(e^{i\tau})$ be a particular parametric representation for Γ. Now

$$(11)\qquad \frac{dw}{d\tau} = i\,e^{i\tau}f'(e^{i\tau}).$$

Hence, if we denote

$$(12)\qquad \frac{z^2f'(z)^2}{f(z)^3}\left[l + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{f(z)}\right]^2 = q(z),$$

we obtain in $q(z)$ an analytic function of z in the unit circle which is regular there except for a pole of order 3 at the origin and which has non-negative values on the boundary. Hence, by SCHWARZ' reflection principle, $q(z)$ is rational in the entire z-plane and has the form

$$(13)\qquad q(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{\alpha}{z^2} + \frac{\beta}{z} + \gamma + \bar{\beta}z + \bar{\alpha}z^2 + z^3, \qquad \gamma \text{ real}.$$

We can easily factorize $q(z)$. It can vanish for $|z| < 1$ only at the point z_0 for which

$$(14)\qquad f(z_0)\,(l + \tfrac{1}{2}a_2) = -1.$$

If we put $z_0 = \varrho\,e^{i\varphi}$, the point $\bar{z}_0^{-1} = \frac{1}{\varrho}\,e^{i\varphi}$ will likewise be a zero of $q(z)$. Obviously, both points are double zeros of $q(z)$. Each root of $q(z)$ on the unit circle must be double, since $q(z)$ does not change sign on this curve. Hence

$$(15)\qquad z^3q(z) = A^2(z - e^{i\psi})^2\,(z - \varrho\,e^{i\varphi})^2\left(z - \frac{1}{\varrho}\,e^{i\varphi}\right)^2$$

13*

if a root z_0 of (14) lies in the unit circle, or

$$z^3 q(z) = A^2 (z - e^{i\psi})^2 (z - e^{i\varphi_1})^2 (z - e^{i\varphi_2})^2 \tag{15'}$$

if all roots of $q(z)$ lie on $|z| = 1$.

In any case, in view of (13) we can assert that

$$\sqrt{q(z)} = \frac{\varkappa z^3 + \mu z^2 + \nu z + 1}{z^{\frac{3}{2}}} \tag{16}$$

and that this expression is real for $|z| = 1$. Hence we may conclude that $\varkappa = 1$, $\mu = \bar{\nu}$, and we may put (12) into the form

$$\frac{z^{\frac{5}{2}} f'(z)}{f(z)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(l + \frac{1}{2} a_2 \right) f(z) + 1 \right] = z^3 + \mu z^2 + \bar{\mu} z + 1 . \tag{17}$$

We insert into the left-hand side of (17) the series development (1) of $f(z)$ and compute the development of this term at the origin. We find that

$$\begin{aligned} \frac{z^{\frac{5}{2}}}{f(z)^{\frac{3}{2}}} f'(z) \left[1 + \left(l + \frac{1}{2} a_2 \right) f(z) \right] &= 1 + l z + \left(\frac{1}{2} a_3 - \frac{3}{8} a_2^2 + \frac{1}{2} l a_2 \right) z^2 + \\ &+ \left[\frac{3}{2} a_4 - 3 a_2 a_3 + \frac{13}{8} a_2^3 + l \left(\frac{3}{2} a_3 - \frac{9}{8} a_2^2 \right) \right] z^3 + \cdots . \end{aligned} \tag{18}$$

Comparing coefficients in (17) and (18), we obtain

$$\begin{aligned} l &= \bar{\mu} \\ \left(a_3 - \tfrac{3}{4} a_2^2 \right) + l a_2 &= 2\mu \\ a_4 - 2 a_2 a_3 + \tfrac{13}{12} a_2^3 + l \left(a_3 - \tfrac{3}{4} a_2^2 \right) &= \tfrac{2}{3} . \end{aligned} \tag{19}$$

We multiply the second equality (19) by $l = \bar{\mu}$ and add it to the third equality. We arrive finally at the result

$$F = a_4 - 2 a_2 a_3 + \tfrac{13}{12} a_2^3 + 2 l \left(a_3 - \tfrac{3}{4} a_2^2 \right) + l^2 a_2 = \tfrac{2}{3} + 2 |l|^2 . \tag{20}$$

The right-hand side of (20) depends only on the parameter l, which we can choose arbitrarily at the beginning of the inquiry. The left-hand side is the value of the functional in the extremum case. Hence we find the general coefficient inequality, valid for all functions of the family $\mathfrak{S}$:

$$\operatorname{Re} \left\{ a_4 - 2 a_2 a_3 + \tfrac{13}{12} a_2^3 + 2 l \left(a_3 - \tfrac{3}{4} a_2^2 \right) + l^2 a_2 \right\} \leqq \tfrac{2}{3} + 2 |l|^2 . \tag{21}$$

This inequality is fundamental for our further applications. It asserts a relation between a quadratic expression on the left and a hermitian expression in l on the right. It thus reminds one of the important inequalities due to GRUNSKY [2] for coefficients of univalent functions. It can, indeed, be derived from the Grunsky inequalities. This fact is of great methodological interest since GRUNSKY'S inequalities are derived without use of variational methods and are closely related to the classical area theorem. We gave the above direct proof of (21) in order to show the significance of the Grunsky inequalities in the theory of variations, where they are closely related to the problem of differential equations containing perfect squares [4].

2. We shall later need a simple inequality for the coefficients in $\mathfrak{S}$ which follows from the area theorem. Consider

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{f\left(\frac{1}{z^2}\right)}} = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_3}{z^3} + \cdots . \tag{22}$$

Clearly, $g(z)$ is regular and univalent for $|z| > 1$, and an easy computation yields

$$b_1 = -\tfrac{1}{2} a_2, \qquad b_3 = -\tfrac{1}{2}(a_3 - \tfrac{3}{4} a_2^2). \tag{23}$$

We have the area theorem:

$$1 \geqq |b_1|^2 + 3|b_3|^2 + 5|b_5|^2 + \cdots . \tag{24}$$

The combination

$$\lambda = a_3 - \tfrac{3}{4} a_2^2 \tag{25}$$

will occur frequently in our calculations. We derive for it from (23) and (24) the inequality

$$3|\lambda|^2 \leqq 4 - |a_2|^2. \tag{26}$$

§ 2. Proof that $|a_4| \leqq 4$

1. We wish to show now that the inequalities (1.21) and (1.26) imply the Bieberbach inequality for the fourth coefficient. We may assume without loss of generality that

$$a_4 \geqq 0, \qquad \operatorname{Re}\{a_2\} \geqq 0, \tag{1}$$

since this case can always be achieved by replacing $f(z)$ by the new member of $\mathfrak{S}$: $e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$.

We set

$$\lambda = \xi + i\eta, \qquad a_2 = 2 - x + iy, \qquad 0 \leqq x \leqq 2. \tag{2}$$

We write (1.21) with l as a real parameter at our disposal:

$$a_4 \leqq \tfrac{2}{3} + \operatorname{Re}\{2a_2\lambda\} + \tfrac{5}{12}\operatorname{Re}\{a_2^3\} - 2l\operatorname{Re}\{\lambda\} + l^2(2 - \operatorname{Re}\{a_2\}). \tag{3}$$

We specialiez by selecting l so as to give the minimum value to the right-hand side:

$$l = \frac{\operatorname{Re}\{\lambda\}}{2 - \operatorname{Re}\{a_2\}}. \tag{4}$$

Now (3) becomes

$$a_4 \leqq \frac{2}{3} + \operatorname{Re}\{2a_2\lambda\} + \frac{5}{12}\operatorname{Re}\{a_2^3\} - \frac{\operatorname{Re}\{\lambda\}^2}{2 - \operatorname{Re}\{a_2\}}. \tag{5}$$

We insert here the real and imaginary parts according to the definition (2):

$$a_4 \leqq \frac{2}{3} + 2\{(2 - x)\xi - y\eta\} + \frac{5}{12}\{(2 - x)^3 - 3(2 - x)y^2\} - \frac{\xi^2}{x}. \tag{6}$$

Observe that

$$2(2 - x)\xi - \frac{\xi^2}{x} \leqq (2 - x)^2 x. \tag{7}$$

Hence

$$a_4 \leqq 4 + (2-x)^2 x - 5x + \tfrac{5}{2}x^2 - \tfrac{5}{12}x^3 - (\tfrac{5}{2} - \tfrac{5}{4}x)\, y^2 - 2y\eta. \tag{8}$$

By using the identity

$$2y\eta = \alpha\left(y + \frac{1}{\alpha}\eta\right)^2 - \alpha y^2 - \frac{1}{\alpha}\eta^2, \qquad \alpha > 0, \tag{9}$$

we may transform (8) into

$$a_4 - 4 \leqq -x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{12}x^3 - \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{4}x\right) y^2 + \alpha y^2 + \frac{1}{\alpha}\eta^2. \tag{10}$$

We use next the inequality (1.26), from which, expressed in the notation (2), follows the estimate

$$\eta^2 \leqq \tfrac{4}{3}x - \tfrac{1}{3}(x^2 + y^2). \tag{11}$$

Hence, we can eliminate η from (10) and obtain

$$a_4 - 4 \leqq \left(\frac{4}{3\alpha} - 1\right)x - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3\alpha}\right)x^2 + \frac{7}{12}x^3 - \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{3\alpha} - \alpha - \frac{5}{4}x\right) y^2. \tag{12}$$

The final proof of the inequality $a_4 \leqq 4$ is achieved by two estimates. We first choose

$$\alpha = \tfrac{4}{3} \tag{13}$$

and find that

$$a_4 - 4 \leqq -\frac{7}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right) - \left(\frac{17}{12} - \frac{5}{4}x\right) y^2. \tag{14}$$

We can infer from this inequality that

$$a_4 \leqq 4 \quad \text{when} \quad 0 \leqq x \leqq \tfrac{17}{15}. \tag{15}$$

Next, we select $\alpha = \frac{1}{2}$ and obtain

$$a_4 - 4 \leqq \tfrac{5}{3}x - \tfrac{13}{6}x^2 + \tfrac{7}{12}x^3 - (\tfrac{8}{3} - \tfrac{5}{4}x)\, y^2. \tag{16}$$

The coefficient of y^2 is negative for all values $0 \leqq x \leqq 2$; hence, everything depends on the sign of

$$r(x) = 5 - \tfrac{13}{2}x + \tfrac{7}{4}x^2. \tag{17}$$

One verifies directly that

$$r(2) = -1, \qquad r(\tfrac{17}{15}) = -\tfrac{107}{900}. \tag{18}$$

Thus $r(x)$ must be negative in the entire interval $\frac{17}{15} \leqq x \leqq 2$. Hence we have proved that

$$a_4 \leqq 4 \quad \text{when} \quad \tfrac{17}{15} \leqq x \leqq 2. \tag{19}$$

This completes the proof of the Bieberbach inequality

$$|a_4| \leqq 4. \tag{20}$$

2. For the sake of completeness we wish to indicate briefly how the fundamental inequality (1.21) follows from GRUNSKY's inequality. Let

$$g(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_\nu}{z^\nu} \tag{21}$$

be univalent in the circular domain $|z|>1$. Define the n^{th} Faber polynomial of $g(z)$ as the polynomial of degree n of $g(z)$ for which we have the series development

$$G_n[g] = z^n + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{n\nu}}{z^\nu}. \tag{22}$$

It is easily seen that $G_n(t)$ is uniquely determined by this condition. GRUNSKY proved that the set of inequalities between quadratic and hermitian forms,

$$\left| \sum_{n,m=1}^{N} m\, b_{nm}\, x_n\, x_m \right| \leqq \sum_{n=1}^{N} n\, |x_n|^2, \qquad N = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

are necessary and sufficient conditions that the function (21) be univalent.

We can apply this result to the particular function (1.22), choose $x_1 = l$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{3}$, and find precisely the required inequality (1.21).

This work was performed partially under an Office of Naval Research contract, Nonr-225(11), with Stanford University.

References

[1] GARABEDIAN, P. R., & M. SCHIFFER: A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. J. Rational Mech. Anal. **4**, 427–465 (1955).

[2] GRUNSKY, H.: Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen. Math. Z. **45**, 29–61 (1939).

[3] SCHIFFER, M.: A method of variation within the family of simple functions. Proc. London Math. Soc. **44**, 432–449 (1938).

[4] SCHIFFER, M.: Faber polynomials in the theory of univalent functions. Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 503–517 (1948).

Stanford University
California

(Received March 7, 1960)

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg

CHARZYNSKI, Z.
Math. Zeitschr. 75, 29—35 (1961)

Bounds for analytic functions of two complex variables

By

ZYGMUNT CHARZYNSKI[1]

Introduction

In the course of considerations in the theory of functions of two complex variables, S. BERGMAN introduced a certain class of domains on whose boundary one can define very simply the maximum manifold, which is the so-called Bergman-Szilow boundary ([1], [6]). These domains are bounded by finitely many three-dimensional analytic hypersurfaces. The two-dimensional intersections of these surfaces form the so-called BERGMAN's distinguished boundary surface.

In a series of papers BERGMAN obtained the connections between the behavior of an analytic function on the distinguished boundary surface and the behavior in the interior of the domain ([2], [3]).

In another paper BERGMAN investigated the analogous problem with respect to the three-dimensional boundary hypersurfaces. In this direction he obtained, for a function of two complex variables, various bounds in the interior of the domain, depending on the behavior of the function on the three-dimensional part of the boundary where the function is considered as depending on one complex variable in the so-called laminas forming the hypersurface [4].

This note is a continuation of the investigation just mentioned. We follow a procedure connected with BERGMAN's original work and define the domains in which the bounds hold. Notions and notations introduced by BERGMAN are used.

§ 0. Notions and Notations

1. We shall consider an arbitrary bounded domain $\mathfrak{M}$, lying in the four-dimensional space of two complex variables z_1, z_2. We assume that the boundary $\mathfrak{m}^3$ of this domain consists of finitely many uniformized analytic hypersurfaces

$$\mathfrak{i}_k^3 \qquad k = 1, \ldots, n; \tag{0}$$

every such analytic surface is given by parametric equalities of the form

$$z_1^* = h_{1k}(Z, \lambda), \qquad z_2^* = h_{2k}(Z, \lambda), \qquad |Z| \leqq 1, \qquad -\infty < \lambda < +\infty, \tag{00}$$

[1]) This work was supported by the National Science Foundation Grants 3661 and 10375 at Stanford University.

where the expressions on the right side of (00) are continuously differentiable functions of Z, λ, [4]. For a fixed k and λ the corresponding set of points (00) will be called a lamina of $\mathfrak{i}_k^3$ (see [5], p. 188). The set $\mathfrak{D}^2$ of points (00), corresponding to the values $|Z|=1$, contains the so-called distinguished boundary surface on which the maximum principle is realized for the functions regular in $\mathfrak{M}$ (see [3]). We shall assume that the functions (00) are periodical with respect to λ. We shall assume also, that for every $|Z_0|<1$, λ_0, and for arbitrarily small $\delta>0$ the set of points (00) which correspond to the values

$$|Z-Z_0|<\delta, \qquad |\lambda-\lambda_0|<\delta$$

of the parameters, contains all the points of $\mathfrak{m}^3$ lying sufficiently near the point

$$z_{10}=h_{1k}(Z_0,\lambda_0), \qquad z_{20}=h_{2k}(Z_0,\lambda_0).$$

Finally, we shall denote by $\mathfrak{P}_0$ the complement of $\mathfrak{M}$ with respect to the full space.

2. For every $0<R<1$, the part of $\mathfrak{i}_k^3$, which consists of the points (00) corresponding to the values $|Z|<R$, will be denoted by $\mathfrak{i}_{kR}^3$.

3. The set of points of the four-dimensional space of the form

$$z_1=g_1(\zeta), \qquad z_2=g_2(\zeta), \qquad |\zeta|\leqq 1, \tag{000}$$

where the expressions of the right sides are holomorphic functions of ζ, we shall call an analytic surface.

The set of points which correspond to the values $|\zeta|=1$ will be called the boundary of this surface.

§ 1. Bounds on the Analytic Surfaces

Consider a domain $\mathfrak{M}$ and a part $\mathfrak{i}_k^3$ of the boundary of this domain described above. Let $f(z_1, z_2)$ be an arbitrary function analytic in the closure $\overline{\mathfrak{M}}$.

Assume that there is given a normal family Ψ of functions of one complex variable in the unit circle. Put

$$M(R)=\sup_{\psi\in\Psi}\sup_{|Z|\leqq R}|\psi(Z)|, \qquad 0<R<1. \tag{1}$$

Suppose that on the boundary part $\mathfrak{i}_k^3$, $f(z_1, z_2)$ satisfies the condition that for every lamina of this set

$$f[h_{1k}(Z,\lambda), h_{2k}(Z,\lambda)]\in\Psi. \tag{2}$$

Next, for an R between 0 and 1, suppose there is an analytic surface $\mathfrak{B}$ defined by

$$z_1=g_1(\zeta), \qquad z_2=g_2(\zeta), \qquad |\zeta|\leqq 1, \tag{3}$$

which lies in $\mathfrak{M}+\mathfrak{i}_{kR}^3+\mathfrak{P}_0$, contains the points of $\mathfrak{M}$, and whose boundary lies completely in $\mathfrak{P}_0$.

Now we can obtain the following result.

LEMMA. *On the part of* $\mathfrak{B}$, *which lies in* $\mathfrak{M}$, *the function* $f(z_1, z_2)$ *satisfies the inequality*

$$|f(z_1, z_2)| < M(R). \tag{4}$$

PROOF. Denote by D the inverse image of $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{M}$ under (3) and by D^* its boundary. Then the set of values of $f(z_1, z_2)$ on $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{M}$ is identical with the set of values of the composite function $f(g_1(\zeta), g_2(\zeta))$ in D. Now one very easily sees that the image of D^* under (3) lies completely in $\mathfrak{i}^3_{kR}$, that is,

$$g_1(\zeta^*), g_2(\zeta^*) \in \mathfrak{i}^3_{kR} \quad \text{for} \quad \zeta^* \in D^*. \tag{5}$$

Therefore, the composite analytic function $f(g_1(\zeta), g_2(\zeta))$ in $D + D^*$, that is, $f(z_1, z_2)$ in $\mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{M}}$, must satisfy the inequalities

$$|f(z_1, z_2)| = |f(g_1(\zeta), g_2(\zeta))| \leqq \sup_{\zeta^* \in D^*} |f(g_1(\zeta^*), g_2(\zeta^*))| \leqq \sup_{z_1^*, z_2^* \in \mathfrak{i}^3_{kR}} |f(z_1^*, z_2^*)|. \tag{6}$$

On the other hand, according to the previous definitions for every point z_1^*, z_2^* of $\mathfrak{i}^3_{kR}$ we have the representation of the form (00) with $|Z| < R$. From (00), (2), and (1) we obtain that in $\mathfrak{i}^3_{kR}$

$$|f(z_1^*, z_2^*)| = |f[h_{1k}(Z, \lambda), h_{2k}(Z, \lambda)]| \leqq M(R) \tag{7}$$

holds. The relations (6) and (7) give the expected inequality (4).

§ 2. Associated Domains

We shall define for k from (0) and R between 0 and 1 a sequence of sets $\{\mathfrak{P}_m\}$ by induction as follows:

1. $\mathfrak{P}_1$ is the set of all points $z_1, z_2 \in \mathfrak{M}$ which belongs to all of the analytic surfaces $\mathfrak{B}_1$:

$$z_1 = g_1(\zeta), \qquad z_2 = g_2(\zeta), \qquad |\zeta| \leqq 1,$$

lying in $\mathfrak{M} + \mathfrak{i}^3_{kR} + \mathfrak{P}_0$, and having its boundary in $\mathfrak{P}_0$.

2. $\mathfrak{P}_{m+1}$ is the set of all points $z_1, z_2 \in \mathfrak{M} - (\overline{\mathfrak{P}}_1 + \cdots + \overline{\mathfrak{P}}_m)$ which belongs to all of the analytic surfaces $\mathfrak{B}_{m+1}$:

$$z_1 = g_1(\zeta), \qquad z_2 = g_2(\zeta), \qquad |\zeta| \leqq 1, \tag{8}$$

lying in $\mathfrak{M} + \mathfrak{i}^3_{kR} + \mathfrak{P}_0 + \cdots + \mathfrak{P}_m$ and having its boundary in $\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_m$.

The sum of all the sets of $\{\mathfrak{P}_m\}$ will be denoted by $\mathfrak{P}_{kR}$ and called the associated domain corresponding to the part $\mathfrak{i}^3_k$ and to the number R. The sequence $\{\mathfrak{P}_m\}$ and the set $\mathfrak{P}_{kR}$, described above, have the following properties:

I. Every $\mathfrak{P}_m$ is either an empty or open set. Consider the first set of our sequence, say $\mathfrak{P}_m$, which does not satisfy this property, then all preceding sets $\mathfrak{P}_0, \ldots, \mathfrak{P}_{m-1}$ are either empty or open; $\mathfrak{P}_0$ is open. According to the definitions and assumptions given above, the sets $(\mathfrak{M} + \mathfrak{i}^3_{kR} + \mathfrak{P}_0) + \cdots + \mathfrak{P}_{m-1}$

and $\mathfrak{P}_0+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$ are open also[2]). Now, suppose the set $\mathfrak{P}_m$ is not empty and consider an arbitrary point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ of it. From the definition of $\mathfrak{P}_m$ follows immediately that there is an analytic surface $\hat{\mathfrak{B}}_m$:

$$z_1 = \hat{g}_1(\zeta), \qquad z_2 = \hat{g}_2(\zeta), \qquad |\zeta| \leqq 1,$$

lying in $(\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0)+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$ having its boundary in $\mathfrak{P}_0+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$ and containing the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$. By a linear transformation of the parameter ζ one can assume that

$$\hat{z}_1 = \hat{g}_1(0), \qquad \hat{z}_2 = \hat{g}_2(0).$$

The set $\hat{\mathfrak{B}}_m$ and its boundary $\hat{\mathfrak{B}}^*_m$ are closed sets lying in the open sets $(\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0)+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$ and $\mathfrak{P}_0+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$, respectively. Then there is a positive number d, so that for every point $z_1^{\cdot}, z_2^{\cdot}$ satisfying the condition

$$\sqrt{|z_1^{\cdot}-\hat{z}_1|^2+|z_2^{\cdot}-\hat{z}_2|^2} < d, \tag{9}$$

the analytic surface $\mathfrak{B}_m^{\cdot}$:

$$z_1 = \hat{g}_1(\zeta)+(z_1^{\cdot}-\hat{z}_1), \qquad z_2 = \hat{g}_2(\zeta)+(z_2^{\cdot}-\hat{z}_2), \qquad |\zeta| \leqq 1,$$

lies in $(\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0)+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$, has its boundary in $\mathfrak{P}_0+\cdots+\mathfrak{P}_{m-1}$, and contains the point $z_1^{\cdot}, z_2^{\cdot}$, which corresponds to the value 0 of the parameter ζ. Thus an arbitrary point $z_1^{\cdot}, z_2^{\cdot}$ of the neighborhood (9) of $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ belongs to $\mathfrak{P}_m$ according to the conditions of induction. Since the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ was also arbitrarily chosen from $\mathfrak{P}_m$, then the set $\mathfrak{P}_m$ is open.

II. The set $\mathfrak{P}_{kR}$ cannot be extended by an operation analogous to that applied by the previous induction. This means that there are no points $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ in $\mathfrak{M}-\overline{\mathfrak{P}}_{kR}$, for which there exists an analytic surface $\hat{\mathfrak{B}}$:

$$z_1 = \hat{g}_1(\zeta), \qquad \hat{z}_2 = \hat{g}_1(\zeta), \qquad |\zeta| \leqq 1,$$

lying in $\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0+\mathfrak{P}_{kR}$, having its boundary in $\mathfrak{P}_{kR}+\mathfrak{P}_0$ and containing the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$.

In fact, suppose, contrariwise, that the point and surface described above exist. Then the closed sets $\hat{\mathfrak{B}}$ and its boundary $\hat{\mathfrak{B}}^*$ lie, respectively, in the open sets $\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0+\mathfrak{P}_{kR}$ and $\mathfrak{P}_0+\mathfrak{P}_{kR}$ (see property I). Thus from the Heine-Borel theorem it follows that $\hat{\mathfrak{B}}$ and $\hat{\mathfrak{B}}^*$ must lie in finite sums of sets $(\mathfrak{M}+\mathfrak{i}^3_{kR}+\mathfrak{P}_0)+\mathfrak{P}_1+\cdots+\mathfrak{P}_m$ and $\mathfrak{P}_0+\mathfrak{P}_1+\cdots+\mathfrak{P}_m$, respectively. But in this case the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ of $\hat{\mathfrak{B}}$ must belong to the set $\mathfrak{P}_{m+1}$ in view of the inductive definition. This contradicts the assumption.

III. The set $\overline{\mathfrak{P}}_{kR}$ is locally pseudo convex with respect to its exterior at every point z_1^0, z_2^0 of its boundary which lies in $\mathfrak{M}$. This means, that every analytic surface which passes through z_1^0, z_2^0 must possess in every neighborhood of z_1^0, z_2^0 points of the exterior or boundary of $\mathfrak{P}_{kR}$ different from z_1^0, z_2^0.

[2]) See p. 2, § 0.1.

In fact, suppose, contrariwise, that there is a neighborhood of z_1^0, z_2^0 and a surface $\mathfrak{B}_0$:

$$z_1 = g_{10}(\zeta), \qquad z_2 = g_{20}(\zeta), \qquad |\zeta| \leqq 1,$$

which contains z_1^0, z_2^0 and, except at this point, lies completely in the set $\mathfrak{P}_{kR}$. We can assume obviously that

$$z_1^0 = g_{10}(0), \qquad z_2^0 = g_{20}(0).$$

The boundary of $\mathfrak{B}_0$ is a closed set lying in $\mathfrak{P}_{kR}$ and it has a positive distance from the boundary of $\mathfrak{P}_{kR}$. Then we can take an arbitrary point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ of $\mathfrak{M} - \overline{\mathfrak{P}}_{kR}$ sufficiently near z_1^0, z_2^0 and form a new surface $\hat{\mathfrak{B}}$:

$$z_1 = g_{10}(\zeta) + (\hat{z}_1 - z_1^0), \qquad z_2 = g_{20}(\zeta) + (\hat{z}_2 - z_2^0), \qquad |\zeta| \leqq 1.$$

Thus, one sees that the surface $\hat{\mathfrak{B}}$ lies in $\mathfrak{M} + \mathfrak{P}_{kR}$, contains the point $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ and its boundary is in $\mathfrak{P}_{kR}$. But this contradicts the previous property (see II).

Now we can obtain the following result:

THEOREM. *The function $f(z_1, z_2)$ satisfies the inequality*

$$|f(z_1, z_2)| < M(R) \tag{10}$$

in the full set $\mathfrak{P}_{kR}$ and consequently also in its closure $\overline{\mathfrak{P}}_{kR}$.

PROOF. It is sufficient to show that (10) holds in every set of $\{\mathfrak{P}_m\}$. We proceed by induction:

1°. In $\mathfrak{P}_1$ the inequality (10) holds according to the lemma given in 1.

2°. Suppose that (10) holds in the sets $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_m$ and consequently on the boundary of $\mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_m$. Consider the set $\mathfrak{P}_{m+1}$ and a point z_1, z_2 of it. There exists for this point a surface $\mathfrak{B}_{m+1}$ described in condition 2 of the definition of $\mathfrak{P}_{m+1}$ given above. Denote by D the inverse image of $\mathfrak{B}_{m+1} \cdot \left(\mathfrak{M} - (\overline{\mathfrak{P}}_1 + \cdots + \overline{\mathfrak{P}}_m)\right)$ under (8), and by D^* the boundary of D. We conclude, as before, for similar reasons that the image of D^* under (8) must lie completely on the boundary of $\mathfrak{P}_1 + \cdots + \mathfrak{P}_m$ or in $\mathfrak{i}_{kR}^3$. Then we obtain from the preceding remark that the inequality (10) holds on $\mathfrak{B}_{m+1} \cdot \left(\mathfrak{M} - (\overline{\mathfrak{P}}_1 + \cdots + \overline{\mathfrak{P}}_m)\right)$ and in particular at the point z_1, z_2. Since z_1, z_2 was an arbitrary point of $\mathfrak{P}_{m+1}$, our inequality holds in the full set $\mathfrak{P}_{m+1}$.

Induction finishes the proof.

§ 3. Remarks

1. If we know the bound U_k for $|f(z_1, z_2)|$ on the part of $\mathfrak{i}_k^3$, which belongs to the distinguished boundary surface $\mathfrak{D}^2$, we can obtain the bound for $|f(z_1, z_2)|$ in $\mathfrak{P}_{kR}$ using the Cauchy formula for one variable. Namely, we have in this case

$$M(R) \leqq \frac{U_k}{1 - R}$$

and therefore

$$|f(z_1, z_2)| < \frac{U_k}{1 - R} \quad \text{for} \quad z_1, z_2 \in \mathfrak{P}_{kR}.$$

In some cases this inequality can be more conveniently applied than an analogous inequality which follows from the known Bergman integral formula for functions of two complex variables (in terms of values on the distinguished boundary surface):

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\substack{k,\, s = 1, \ldots, n \\ k \neq s}} \iint_{\mathfrak{v}_{ks}} \frac{f(\varphi_1(\lambda_k, \lambda_s), \varphi_2(\lambda_k, \lambda_s))\, B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)}{\Phi_k(t_1, t_2, \lambda_k)\, \Phi_s(t_1, t_2, \lambda_s)} d\lambda_k\, d\lambda_s .$$

Here $\Phi_j(t_1, t_2, \lambda_j)$, and $B_{ks}(t_1, t_2, \lambda_k, \lambda_s)$ are certain functions which depend on the domain; $z_1 = \varphi_1(\lambda_k, \lambda_s)$, $z_2 = \varphi_2(\lambda_k, \lambda_s)$, $\lambda_k, \lambda_s \in \mathfrak{v}_{ks}$ are the parametric representations of the intersections of the analytic hypersurfaces $\mathfrak{i}_k^3$ and $\mathfrak{i}_s^3$; $j = 1, \ldots, n$, $k, s = 1, \ldots, n$, [2].

2. S. BERGMAN considered in his work some examples of normal families and gave the exact corresponding bounds ([4], p. 186—193). They can easily be obtained from our theorem by substituting the corresponding known bounds instead of $M(R)$.

We shall give here these bounds in the case of families of multivalent functions.

Suppose that the function $f(z_1, z_2)$, mentioned above, is multivalent in every lamina of $\mathfrak{i}_k^3$; this means more exactly, that the composite function $f\big(h_{1k}(Z, \lambda),\ h_{2k}(Z, \lambda)\big)$ is a multivalent function of order p, which does not vanish except at the point 0. For this family the bound $M(R)$ is known ([7], [8], [9]). Thus we obtain for the mentioned function the following estimation

$$|f(z_1, z_2)| < A(p)\,(1 - R)^{-2p} \quad \text{for} \quad z_1, z_2 \in \mathfrak{P}_{kR},$$

where $A(p)$ is a universal function, independent from $f(z_1, z_2)$.

3. One sees that one can assume in these considerations, that the function $f(z_1, z_2)$ is regular in the interior of $\mathfrak{M}$ and on the boundary sets $(0, 0)$ which correspond only to the values of Z in the interior of the unit circle. On the distinguished boundary surface it may be that the function is not regular.

If we consider a point of the distinguished boundary

$$z_1^* = h_{1k}(Z^*, \lambda^*), \qquad z_2^* = h_{2k}(Z^*, \lambda^*),$$

and approach this point from the set $\sum_{0<R<1} \mathfrak{P}_{kR}$ along a curve L:

$$z_1 = z_1(t), \qquad z_2 = z_2(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta, \tag{11}$$

then we have on L, according to (10), the estimation

$$|f(z_1(t), z_2(t))| \leqq M(R(t)),$$

where $R(t)$ denotes the upper bound of numbers $0 < R < 1$, for which $z_1(t)$, $z_2(t) \in \mathfrak{P}_{kR}$. The inequality (11) can give some information about the behavior of $f(z_1, z_2)$ while approaching a point on the distinguished boundary surface.

4. One easily sees that these results can be extended to the case of functions of several complex variables, but not of one variable.

Bibliography

[1] BERGMAN, S.: Über die Abbildungen durch Paare von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Jber. dtsch. Math. Ver. **39**, 24—27 (1930).
[2] BERGMANN, S.: Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler. I, II. Math. Z. **39**, 76—94, 605—608 (1934).
[3] BERGMANN, S.: Über das Verhalten der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen in Gebieten mit einer ausgezeichneten Randfläche. Comp. Mathematica **14**, 107—123 (1938).
[4] BERGMANN, S.: Bounds for analytic functions in domains with a distinguished boundary surface. Math. Z. **63**, 173—194 (1955).
[5] BERGMANN, S.: Über eine Abschätzung von meromorphen Funktionen zweier komplexer Veränderlicher in Bereichen mit ausgezeichneter Randfläche. Trav. Inst. Math. Tbilissi **1**, 187—204 (1937).
[6] GELFAND, J. M., D. A. RAJKOW u. D. E. SZILOW: Kommutative normierte Ringe. [Russisch.] Uspechi mat. Nauk **12**, 48—146 (1946).
[7] BIERNACKI, M.: Sur les fonctions multivalentes d'ordre p. C. R. Acad. Sci. Paris **204**, 449—451 (1936).
[8] CARTWRIGHT, M. L.: Inequalities in the theory of functions. Math. Ann. **111**, 98—118 (1935).
[9] ROBERTSON, M. S.: Multivalent functions of order p. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 282—285 (1938).

Mathematisches Institut der Universität Lodz (Polen)

(Eingegangen am 16. April 1960)

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg

BULLETIN

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ

1961 Vol. XII, 13

Zygmunt Charzyński, Henryka Śmiałkówna

The general equation of extremal functions with respect to any differentiated functional

INTRODUCTION

Z. Charzyński and W. Janowski [3] have obtained the general equation of extremal functions in the class of bounded schlicht functions for any differentiated functional.

We shall derive an equation of extremal functions in the family of bounded schlicht functions with all coefficients real for a functional differentiated in the Frechet's sense.

I. Dziubiński [5] has obtained an equation analogous to ours in the particular case of functionals depended on finite number of coefficients. We shall employ some of these results in our proof.

NOTATIONS AND DEFINITIONS

By $K(0,1)$ and $K^*(0,1)$ we shall denote respectively the circle and the circumference with the center at the point zero and the radius equal to one.

We shall consider meromorphic functions in the circle $K(0,1)$ with all coefficients real.

Let $\mathfrak{G}$ denote a family of all functions $g(z)$ meromorphic in a circle $K(0,1)$ with all coefficients real. $\mathfrak{G}$ represents a linear space with respect to addition of elements, and multiplication of elements belonging to $\mathfrak{G}$ by finite real numbers.

Let H denote a family of all functions $h = h(z)$ with real coefficients which are holomorphic in the unit circle $K(0,1)$.

Let F denote a family of functions belonging to H which have the form

$$f = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \qquad a_1 > 0$$

and are schlicht and bounded i. e. $|f(z)| < 1$.

Let F_T denote a family of all functions belonging to F such that $a_1 \geqslant T$, where $0 < T < 1$.

We define notions such as a sequence of functions belonging to $\mathfrak{G}$ almost uniformly convergent in $K(0,1)$, a pseudo-norm of element $h \in H$, a real functional, a linear functional, differential $L(h)$ of functional in a Frechet's sense, in the analogous way to those ones in the paper of Z. Charzyński and W. Janowski ([3], p. 41-44) mentioned at the beginning.

THE FUNDAMENTAL RESULT

Theorem. If a functional $K(f)$ is defined, real and differentiated at every point belonging to F_T and the differential $L(h)$ of $K(f)$ does not vanish identically at any point of F_T, then every extremal function

$$f^* = f^*(z) \tag{1}$$

i. e. a function for which $K(f)$ attaines its maximal value in F_T has the following properties:

I. there exists an open arc C of the circumference $|z| = 1$, where the function (1) is holomorphic and schlicht and maps this arc into an arc D on the circumference $|w| = 1$;

II. function (1) satisfies the following differential-functional equation

$$\left[z\frac{f^{*\prime}(z)}{f^*(z)}\right]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = \mathfrak{N}(z), \qquad z \in C, \tag{2}$$

where

$$\mathfrak{M}(w) = L^*\left\{f^*(\zeta)\left[\frac{1+wf^*(\zeta)}{1-wf^*(\zeta)} + \frac{1+\overline{w}f^*(\zeta)}{1-\overline{w}f^*(\zeta)}\right]\right\} - \mathfrak{P}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{N}(z) = L^*\left\{\zeta f^{*\prime}(\zeta)\left[\frac{1+z\zeta}{1-z\zeta} + \frac{1+\overline{z}\zeta}{1-\overline{z}\zeta}\right]\right\} - \mathfrak{P}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{P} = \operatorname*{Min}_{0 \leqslant y \leqslant 2\pi} L^*\left\{f^*(\zeta)\left[\frac{1+e^{iy}f^*(\zeta)}{1-e^{iy}f^*(\zeta)} + \frac{1+e^{-iy}f^*(\zeta)}{1-e^{-iy}f^*(\zeta)}\right]\right\}, \tag{5}$$

ζ designs a variable of operation in (3) and (4) ,whereas w and z serve as parameters, $L^*(h)$ represents the differential of $K(f)$ at point f^*;

III. the functions (3) and (4) are real and not negative on the circumferences $|w| = 1$ and $|z| = 1$ respectively;

IV. the first coefficient a_1^* of the extremal function is equal to T.

For the proof we require a lemma which we establish first.

Lemma. If there exists a sequence of functions of F

$$\{e_i(z)\}$$

such that almost all of them belong to F_T and have form

$$e_i(z) = f^*(z) + l_i v_i(z),$$

where $f^*(z)$ is an extremal function, l_i is a sequence of positive numbers tending to zero and if $v_i(z) \in H$ and

$$\lim_{i\to\infty} v_i(z) = V(z) = V,$$

then

$$L^*(V) \leqslant 0.$$

The proof of this lemma is similar to that in reference [3].

We now proceed to a formal proof.

Proof of the part I. Let $f^*(z)$ be an extremal function with respect to a functional $K(f)$. Let G_{f*} design the domain $G_{f*} = f^*[K(0,1)]$. We suppose that every point on the circumference $|w| = 1$ is an accumulation point of essential points of the complement of the domain G_{f*} (see [2]; p. 10).

For an arbitrary point $w = e^{i\Theta}$ of this circumference and for the function $f^*(z)$ there exist two holomorphic and schlicht functions $\hat{f}^*(\zeta)$ and $f^{\cdot}(z)$ with real coefficients, such taht

$$f^*(z) = \hat{f}^*(f^{\cdot}(z)), \qquad |z| < 1, \tag{6}$$

where

$$\hat{f}^{*\prime}(0) = \hat{a}_1^* > 0, \qquad f^{\cdot\prime}(0) = a^{\cdot}{}_1 > 0. \quad [5]$$

Further let the function $\hat{f}(\zeta, t)$ with real coefficients be a solution of equation

$$\hat{f}'_t(\zeta, t) = -p[\hat{f}(\zeta, t), t]\hat{f}(\zeta, t). \quad [4] \tag{7}$$

with the initial conditions

$$\hat{f}(\zeta, 0) = \zeta, \quad \hat{f}(\zeta, T) = \hat{f}^*(\zeta), \quad |\zeta| < 1 \tag{8}$$

for almost all t from the interval $\langle 0, T\rangle$, where $T = -\log \hat{f}^{*\prime}(0)$ and for ζ belonging to the circle $|\zeta| < 1$. The function

$$\hat{p}(w, t) \tag{9}$$

is holomorphic with respect to w, satisfies the condition $\overline{\hat{p}(w, t)} = \hat{p}(\overline{w}, t)$ for $|w| < 1$, has real part positive in this circle and is mesurable with respect to $t \in \langle 0, T\rangle$.

We shall consider such $t \in \langle 0, T\rangle$, for which there exists the derivative $\hat{f}'_t(\zeta, t)$. Let us take an arbitrary positive number and define a function of the form

$$f(z, \varepsilon) = \hat{h}\{\sigma[\hat{f}(f^{\cdot}(z), t-\varepsilon), \varepsilon, \theta], t, T\}, \quad |z| < 1, \tag{10}$$

where

$$\hat{h}(u, t, T) = \hat{f}(\hat{f}^{-1}(u, t), T) \tag{11}$$

is a holomorphic and schlicht function in the circle $|u| < 1$ and

$$\sigma(\xi, \varepsilon, \theta) = \sigma_1(\xi, \delta, e^{i\theta}) \ [5], \quad \delta^2 = \tau\varepsilon, \ 0 < \tau < 1, \quad |\xi| < 1. \tag{12}$$

It is known that for the function $\sigma(\xi, \varepsilon, \theta)$ exist the limits

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sigma(\xi, \varepsilon, \theta) - \xi}{\varepsilon} = -\frac{\tau}{2}\left[\frac{1+\xi e^{i\theta}}{1-\xi e^{i\theta}} + \frac{1+\xi e^{-i\theta}}{1-\xi e^{-i\theta}}\right], \quad |\xi| < 1, \tag{13}$$

$$\lim_{\varepsilon \to O} \sigma[\hat{f}(\zeta, t-\varepsilon), \varepsilon, \theta] = \hat{f}(\zeta, t), \quad |\zeta| < 1. \tag{14}$$

By (13), (1) and (7), (8) we have

$$f(z, 0) = f^*(z), \quad |z| < 1. \tag{15}$$

Moreover there is

$$\begin{aligned} V(z, \theta, t, \varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \to O} \frac{f(z, \varepsilon) - f^*(z)}{\varepsilon} \\ &= \hat{h}'_u\big(\hat{f}(f^{\cdot}(z), t), t, T\big)\Big\{\hat{f}(f^{\cdot}(z), t)\hat{p}[\hat{f}(f^{\cdot}(z), t), t] \\ &\quad - \frac{\tau}{2}\hat{f}(f^{\cdot}(z), t)\left[\frac{1+\hat{f}(f^{\cdot}(z), t)e^{i\theta}}{1-\hat{f}(f^{\cdot}(z), t)e^{i\theta}} + \frac{1+\hat{f}(f^{\cdot}(z), t)e^{i\theta}}{1-\hat{f}(f.(z), t)e^{i\theta}}\right], \end{aligned} \tag{16}$$

where the convergence is almost uniform in the circle $|z| < 1$. It is sufficient to remark that

$$\frac{f(z,\varepsilon)-f^*(z)}{\varepsilon} = \frac{\hat{h}\{\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t-\varepsilon),\varepsilon,\theta],t,T\}-\hat{h}\{\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),\varepsilon,\theta],t,T\}}{\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t-\varepsilon),\varepsilon,\theta]-\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),\varepsilon,\theta]}$$

$$\times \frac{\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t-\varepsilon),\varepsilon,\theta]-\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),\varepsilon,\theta]}{\hat{f}(f^\cdot(z),t-\varepsilon)-\hat{f}(f^\cdot(z),t)} \cdot \frac{\hat{f}(f^\cdot(z),t-\varepsilon)-\hat{f}(f^\cdot(z),t)}{\varepsilon}$$

$$+ \frac{\hat{h}\{\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),\varepsilon,\theta],t,T\}-f^*(z)}{\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),\varepsilon,\theta]-\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),0,\theta]} \times$$

$$\times \frac{\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),\varepsilon,\theta]-\hat{f}(f^\cdot(z),t)}{\varepsilon}.$$

Using the known lemma (see [2], p. 6-7), (13) and (14) we obain

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\hat{h}\{\sigma[\hat{f}(f.(z),t-\varepsilon),\varepsilon,\theta],t,T\}-\hat{h}\{\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),\varepsilon,\theta],t,T\}}{\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t-\varepsilon(,\varepsilon,\theta]-\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),\varepsilon,\theta]}$$

$$= [\hat{h}'_u(u,t,T)]_{u=\hat{f}(f^\cdot(z),t)},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t-\varepsilon),\varepsilon,\theta]-\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),\varepsilon,\theta]}{\hat{f}(f^\cdot(z),t-\varepsilon)-\hat{f}(f^\cdot(z),t)}$$

$$= [\sigma'_\xi(\xi,0,\theta)]_{\xi=\hat{f}(f^\cdot(z),t)} = 1,$$

(17)
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\hat{h}\{\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),\varepsilon,\theta],t,T\}-f^*(z)}{\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),\varepsilon,\theta]-\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),0,\theta]}$$

$$= [\hat{h}'_u(u,t,T)]_{u=\hat{f}(f^\cdot(z),t)},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sigma[\hat{f}(f^\cdot(z),t),\varepsilon,\theta]-\hat{f}(f^\cdot(z),t)}{\varepsilon}$$

$$= -\frac{\tau}{2}\hat{f}(f^\cdot(z),t)\left[\frac{1+\hat{f}(f^\cdot(z),t)e^{i\theta}}{1-\hat{f}(f^\cdot(z),t)e^{i\theta}} + \frac{1+\hat{f}(f^\cdot(z),t)e^{-i\theta}}{1-\hat{f}(f^\cdot(z),t)e^{-i\theta}}\right],$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\hat{f}(f^\cdot(z),t-\varepsilon)-\hat{f}(f^\cdot(z),t)}{\varepsilon} = \hat{f}'_t(f^\cdot(z),t).$$

Thus

$$(18)\qquad V(z,\theta,t,\varepsilon)=\left[\hat{h}_u(u,t,T)\right]_{u=\hat{f}(f^{\cdot}(z),t)}\cdot\left\{-\hat{f}'_t(f^{\cdot}(z),t)\right.$$
$$\left.-\frac{\tau}{2}\hat{f}(f^{\cdot}(z),t)\left[\frac{1+\hat{f}(f^{\cdot}(z),t)e^{i\theta}}{1-\hat{f}(f^{\cdot}(z),t)e^{i\theta}}+\frac{1+\hat{f}(f^{\cdot}(z),t)e^{-i\theta}}{1-\hat{f}(f^{\cdot}(z),t)e^{-i\theta}}\right]\right\}.$$

Hence by (7) we have (16).

According to the definition of function (11) we have

$$\hat{h}[\hat{f}(f^{\cdot}(z),t),t,T]=\hat{f}(f^{\cdot}(z),T).$$

Hence

$$[\hat{h}'_u(u,t,T)]_{u=\hat{f}(f^{\cdot}(z),t)}[\hat{f}'_\zeta(\zeta,t)]_{\zeta=f^{\cdot}(z)}=[\hat{f}'_\zeta(\zeta,T)]_{\zeta=f^{\cdot}(z)}\cdot f^{\cdot}(z),$$

therefore by (6) and (8) we see that

$$(19)\qquad [\hat{h}'_u(u,t,T)]_{u=\hat{f}(f^{\cdot}(z),t)}=\frac{f^{*\prime}(z)}{[\hat{f}'_\zeta(\zeta,t)]_{\zeta=f^{\cdot}(z)}\cdot f^{\cdot\prime}(z)}.$$

We know that

$$(20)\qquad \hat{p}(w,t)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{J_m}\lambda_k^{(m)}(t)\left[\frac{1+we^{i\vartheta_k^{(m)}(t)}}{1-we^{i\vartheta_k^{(m)}(t)}}+\frac{1+we^{-i\vartheta_k^{(m)}(t)}}{1-we^{-i\vartheta_k^{(m)}(t)}}\right],$$

where

$$(21)\qquad \sum_{k=1}^{J_m}\lambda_k^{(m)}(t)=\frac{1}{2}$$

for arbitrary finite m. Moreover

$$\frac{1+we^{i\vartheta_k^{(m)}(t)}}{1-we^{i\vartheta_k^{(m)}(t)}}+\frac{1+we^{-i\vartheta_k^{(m)}(t)}}{1-we^{-i\vartheta_k^{(m)}(t)}}$$
$$=2\left[1+\sum_{s=1}^{\infty}w^s(e^{is\vartheta_k^{(m)}(t)}+e^{-is\vartheta_k^{(m)}(t)})\right],\quad |w|<1$$

thus

$$(22)\qquad \hat{p}(w,t)=\lim_{m\to\infty}2\sum_{k=1}^{J_m}\lambda_k^{(m)}(t)\left[1+2\sum_{s=1}^{\infty}w^s\cos(s\vartheta_k^{(m)}(t))\right].$$

In view of (22) and (19) the function (16) has the form

(23)

$$V(z,\theta,t,\tau)=\frac{f^{*\prime}(z)}{[\hat{f}'_{\zeta}(\zeta,t)]_{\zeta=f(z)}\cdot f'(z)}\Big\{\hat{f}(f(z),t)\lim_{m\to\infty}2\sum_{k=1}^{J_m}\lambda_k^{(m)}(t)\Big[1$$

$$+2\sum_{s=1}^{\infty}\big(\hat{f}(f(z),t)\big)^s\cos\big(s\vartheta_k^{(m)}(t)\big)\Big]-$$

$$-\tau\hat{f}(f(z),t)\Big[1+2\sum_{s=1}^{\infty}\big(\hat{f}(f(z),t)\big)^s\cos(s\theta)\Big]\Big\}.$$

Remark that $\hat{h}'_u(0,t,T)=e^{-T}e^t$ and $[\hat{f}'_{\zeta}(\zeta,t-\varepsilon)\cdot f'(z)]_{z=0}=$ $=a_1^{\cdot}e^{-t+\varepsilon}$. Moreover $\sigma_{\zeta}(0,\varepsilon,\theta)=a_{1\sigma}$ is of $(1-\tau\varepsilon)$ order. Hence for ε sufficiently small

$$f'(0,\varepsilon)=e^{-T}a_1^{\cdot}a_{1\sigma}e^{\varepsilon}=a_1^*a_{1\sigma}e^{\varepsilon}>a_1^*.$$

Thence for ε sufficiently small functions defined by (10) belong to the family F_T. Applying to the function $\dfrac{f(z,\varepsilon)-f^*(z)}{\varepsilon}$ and functional L^* the given above lemma and taking in account (23) we obtain the inequality

$$L^*\{V(z),\theta,t,\tau\}\leqslant 0.$$

Take a sequence $\{\tau_l\}$ of numbers τ tending to one. Then

$$\lim_{l\to\infty}L^*\{V(z,\theta,t,\tau_l)\}=L^*\{\lim_{l\to\infty}V(z,\theta,t,\tau_l)\}=L^*\{V(z,\theta,t,1)\}\leqslant 0.$$

Therefore by (23) the last inequality may be written in the following form

$$L^*\Big\{\frac{f^{*\prime}(z)}{[\hat{f}'_{\zeta}(\zeta,t)]_{\zeta=f(z)}\cdot f'(z)}\hat{f}(f(z),t)\Big[\lim_{m\to\infty}2\sum_{k=1}^{J_m}\lambda_k^{(m)}(t)\sum_{s=1}^{\infty}\big(\hat{f}(f(z),t)\big)^s$$

$$\times\cos\big(s\vartheta_k^{(m)}(t)\big)-\sum_{s=1}^{\infty}\big(\hat{f}(f(z),t)\big)^s\cos(s\theta)\Big]\Big\}\leqslant 0,$$

thus

(24)

$$L^*\Big\{\lim_{m\to\infty} 2\sum_{k=1}^{J_m}\lambda_k^{(m)}(t)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{f^{*\prime}(z)}{[\hat{f}'_\zeta(\zeta,t)]_{\zeta=f\cdot(z)}\cdot f^{\cdot\prime}(z)}\Big(\hat{f}\big(f^{\cdot}(z),t\big)\Big)^s\cos\big(s\vartheta_k^{(m)}(t)\big)\Big\}-$$

$$-L^*\Big\{\sum_{s=1}^{\infty}\frac{f^{*\prime}(z)}{[\hat{f}'_\zeta(\zeta,t)]_{\zeta=f\cdot(z)}\cdot f^{\cdot\prime}(z)}\Big(\hat{f}\big(f^{\cdot}(z),t\big)\Big)^s\cos(s\theta)\Big\}\leqslant 0.$$

Notice that the function

$$\frac{f^{*\prime}(z)}{[\hat{f}'_\zeta(\zeta,t)]_{\zeta=f\cdot(z)}\cdot f^{\cdot\prime}(z)}\Big(\hat{f}\big(f^{\cdot}(z),t\big)\Big)^s=\sum_{r=s}^{\infty}a_r^{(s)}(t)z^r \tag{25}$$

is holomorphic in the circle $|z|<1$ and satisfies the condition

$$\left|\frac{f^{*\prime}(z)}{[\hat{f}'_\zeta(\zeta,t)]_{\zeta=f\cdot(z)}\cdot f^{\cdot\prime}(z)}\Big(\hat{f}\big(f^{\cdot}(z),t\big)\Big)^s\right|\leqslant A\varrho^s,\qquad |z|\leqslant\varrho<1,$$

$$s=1,2,\ldots,$$

where A is a certain positive number.

Put

$$\Phi(x,t)=L^*\Big\{\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{r=s}^{\infty}a_r^{(s)}(t)z^r\Big)\cos(sx)\Big\}. \tag{26}$$

It is known (comp. [6]) that

$$L^*\Big\{\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{r=s}^{\infty}a_r^{(s)}(t)z^r\Big)\cos(sx)\Big\}=\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{r=s}^{\infty}a_r^{(s)}(t)L^*\{z^r\}\Big)\cos(sx)$$

and

$$\Big|\sum_{r=s}^{\infty}a_r^{(s)}(t)\beta_r\Big|\leqslant\sum_{r=s}^{\infty}\big|a_r^{(s)}(t)\beta_r\big|\leqslant l^s(1+l+l^2+\ldots)=\frac{l^s}{1-l},$$

where

$$\beta_r=L^*\{z^r\},$$

$$0<l<1.$$

Therefore $\Phi(x, t)$ is a continuous function with respect to $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$. In view of (26) the inequality (24) is of the form

$$\lim_{m\to\infty} 2 \sum_{k=1}^{J_m} \lambda_k^{(m)}(t)\, \Phi\left(\vartheta_k^{(m)}(t), t\right) - \Phi(\theta, t) \leqslant 0. \tag{24'}$$

We denote by μ

$$\mu = \min_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} \Phi(x, t) \tag{27}$$

and by

$$\theta_j(t), \qquad j = 1, 2, \ldots, H(t) \tag{28}$$

points at which $\Phi(\theta, t)$ attains its maximal value. Then there, exist positive numbers η and δ such that for every θ for which

$$\theta \bar{\in} (\theta_j(t) - \delta,\ \theta_j(t) + \delta), \qquad j = 1, 2, \ldots, H(t)$$

holds the inequality

$$\Phi(\theta, t) \geqslant \mu + \eta.$$

Let

$$k_p, \qquad p = 1, 2, \ldots, R^{(m)}(t) \tag{29}$$

be these indices k of the interval $\langle 1, J_m \rangle$ for which

$$\vartheta_k^{(m)}(t) \bar{\in} (\theta_j(t) - \delta,\ \theta_j(t) + \delta), \qquad j = 1, 2, \ldots, H(t)$$

and

$$\hat{k}_q, \qquad q = 1, 2, \ldots, S^{(m)}(t) \tag{30}$$

ndices k belonging to the interval $\langle 1, J_m \rangle$ for which

$$\vartheta_k^{(m)}(t) \in (\theta_j(t) - \delta,\ \theta_j(t) + \delta), \qquad j = 1, 2, \ldots, H(t).$$

In view of (29) we have

$$\Phi(\vartheta_{k_p}^{(m)}(t), t) \geqslant \mu + \eta, \qquad p = 1, 2, \ldots, R^{(m)}(t)$$

and

$$2 \sum_{q=1}^{S^{(m)}(t)} \lambda_{\hat{k}_q}^{(m)}(t) \left[\Phi\left(\vartheta_{\hat{k}_q}^{(m)}(t), t\right) - \mu\right] + 2 \sum_{p=1}^{R^{(m)}(t)} \lambda_{k_q}^{(m)}(t) \left[\Phi\left(\vartheta_{k_q}^{(m)}(t), t\right) - \mu\right] \geqslant 2\eta \sum_{p=1}^{R^{(m)}(t)} \lambda_{k_p}^{(m)}(t), \tag{31}$$

which implies

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, 2\eta \sum_{p=1}^{R^{(m)}(t)} \lambda_{k_p}^{(m)}(t) \geqslant 0. \tag{32}$$

On the other hand according to (24′), (27), (21) we have

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{m\to\infty}}\, 2\eta \sum_{p=1}^{R^{(m)}(t)} \lambda_{k_p}^{(m}(t) &\leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} \Big\{ 2 \sum_{q=1}^{S^{(m)}(t)} \lambda_{\hat{k}}^{(m)}(t)\,[\Phi(\vartheta_{\hat{k}_q}^{(m)}(t), t) - \mu] + \\
&\qquad + 2 \sum_{p=1}^{R^{(m)}(t)} \lambda_{k_p}^{(m)}(t)\,[\Phi(\vartheta_{k_p}^{(m)}(t), t) - \mu] \Big\} \\
&= \overline{\lim_{m\to\infty}} \Big\{ 2 \sum_{k=1}^{J_m} \lambda_k^{(m)}(t)\, \Phi(\vartheta_k^{(m)}(t), t) - 2\mu \sum_{k=1}^{J_m} \lambda_k^{(m)}(t) \Big\} \\
&= \overline{\lim_{m\to\infty}}\, 2 \sum_{k=1}^{J_m} \lambda_k^{(m)}(t)\, \Phi(\vartheta_k^{(m)}(t), t) - \mu \leqslant 0.
\end{aligned}$$

The last relation and (32) imply

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sum_{p=1}^{R^{(m)}(t)} \lambda_{k_p}^{(m)}(t) = 0. \tag{33}$$

Denote by

$$\hat{k}_q^{(j')}, \qquad q = 1, 2, \ldots, S_j^{(m)}(t), \qquad j = 1, 2, \ldots, H(t) \tag{34}$$

the indices k for which

$$\vartheta_{\hat{k}_q^{(j)}}^{(m)}(t) \in (\theta_j(t) - \delta,\ \theta_j(t) + \delta), \qquad j = 1, 2, \ldots, H(t)$$

and put

$$\Lambda_j^{(m)}(t) = \sum_{q=1}^{S_j^{(m)}(t)} \lambda_{\hat{k}_q^{(j)}}^{(m)}(t).$$

Thus

$$\sum_{j=1}^{H(t)} \Lambda_j^{(m)}(t) = \sum_{k=j}^{J_m} \lambda_k^{(m)}(t) - \sum_{p=1}^{R^{(m)}(t)} \lambda_{k_p}^{(m)}(t). \tag{35}$$

Let $\{\delta_l\}$ denote a sequence of positive numbers δ for which

$$\lim_{l\to\infty}\delta_l = 0. \tag{36}$$

For every l we find m_l in such manner that

$$\sum_{p=1}^{R^{(m_l)}(t)} \lambda_{k_p}^{(m_l)}(t) < \delta\,. \tag{37}$$

Next we extract a subsequence $\{m_{l_r}\}$ from sequence $\{m_l\}$ such that

$$\lim_{r\to\infty} \Lambda_j^{(m_{l_r})}(t) = \Lambda_j(t) \qquad j = 1, 2, \ldots, H(t). \tag{38}$$

In view of (36) we have

$$\lim_{r\to\infty}\Big\{ \operatorname*{Max}_{q=1,2,\ldots,S_j^{(m_{l_r})}(t)} |\vartheta_{\hat{k}_q^{(j)}}^{(m_{l_r})}(t) - \theta_j(t)| \Big\} = 0. \tag{39}$$

Thus according to (37), (38), and (20) we have

$$\hat{p}(w,t) = \lim_{r\to\infty}\sum_{j=1}^{H(t)}\left(\sum_{q=1}^{S_j^{(m_{l_r})}(t)} \lambda_{\hat{k}_q^{(j)}}^{(m_{l_r})}(t)\left[\frac{1+we^{i\vartheta_{\hat{k}_q^{(j)}}^{(m_{l_r})}(t)}}{1-we^{i\vartheta_{\hat{k}_q^{(j)}}^{(m_{l_r})}(t)}} + \frac{1+we^{-i\vartheta_{\hat{k}_q^{(j)}}^{(m_{l_r})}(t)}}{1-we^{-i\vartheta_{\hat{k}_q^{(j)}}^{(m_{l_r})}(t)}}\right]\right)$$

and by (39)

$$\hat{p}(w,t) = \sum_{j=1}^{H(t)} \Lambda_j(t)\left[\frac{1+we^{i\theta_j(t)}}{1-we^{i\theta_j(t)}} + \frac{1+we^{-i\theta_j(t)}}{1-we^{-i\theta_i(t)}}\right]. \tag{22'}$$

Denote by

$$\theta_j^*(T), \qquad j = 1, 2, \ldots, H^*(T) \tag{28'}$$

the extremal system (28) corresponding to $t = T$. For fixed ζ from the unit circle the function $\hat{f}(\zeta, t)$ is continuous with respect to t in the interval $\langle 0, T\rangle$. Therefore for every r and s the coefficients $a_r^{(s)}(t)$ of expansion (25) are continuous with respect to t in the interval $\langle 0, T)$. In virtue of above and of (11) it follows that the system (28) is sufficiently near the system (28') for t satisfying the inequality

$$T - \varepsilon < t < T, \qquad \varepsilon > 0.$$

The system (28) is sufficiently near the system (28′) in such sense that each of numbers $\theta_j(t)$ belongs to a sufficiently small neighbourhood of certain number of the system (28′).

Let

$$C_j \text{ respectively } \tilde{C}_j, \qquad j = 1, \ldots, H^*(T) \tag{40}$$

denote arcs of circumference $K^*(0,1)$ obtained by removing correspondingly the points $e^{i\theta_j^*(T)}$ respectively $e^{i\theta_j^*(T)}$ together with their sufficiently small neighbourhoods. On these arcs the function (22′) is holomorphic with respect to w for fixed $t \in \langle T-\varepsilon, T\rangle$. Hence $\hat{f}^*(\zeta) = \hat{f}(\zeta, T)$ is holomorphic there, which constituts an obvious contradiction.

Proof of the part II. Take an arbitrary function $f^*(z)$ being an extremal one with respect to a functional $K(f)$. In view of the first part of Theorem and by the symmetry of function $f^*(z)$ with respect to real axis we have that there exist arcs C and $\tilde{C}$ of circumference $|z| = 1$ for which if $z \in C$, then $\bar{z} \in \tilde{C}$, and which are mapped by $f^*(z)$ in the corresponding circle arcs D and $\tilde{D}$.

Let

$$\xi_0 \in C, \qquad \bar{\xi}_0 \in \tilde{C},$$

$$\eta_0 = f^*(\xi_0), \qquad \bar{\eta}_0 = f^*(\bar{\xi}_0),$$

ξ and ν denote an arbitrary point of $K^*(0,1)$,

$\varepsilon > 0$ be a certain number such that $Q_0^2(1-\varepsilon)^2 - 1 - \varepsilon > 0$,

$$Q_0 = |f^{*\prime}(\xi_0)| = |f^{*\prime}(\bar{\xi}_0)| > 1.$$

Next we define in the way analogous to given in [5] the three variational sequences

$$f_{jk}^*(\zeta) \qquad j = 1, 2, 3, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Put

$$v_k^{(j)} = \frac{f_{jk}^*(\zeta) - f^*(\zeta)}{\tau_k^2}, \qquad j = 1, 2, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$v_k^{(3)} = \frac{f_{3k}^*(\zeta) - f^*(\zeta)}{\tau_k'^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

where $\{\tau_k\}$ and $\{\tau_k'\}$ are sequences of positive numbers tending to zero. Further denote by

$$V_j = \pm c_j u_j, \qquad j = 1, 2, 3,$$

where the sign minus is taken for $j = 1$, and the positive sign for $j = 2, 3$ and $c_1 = c_3 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{54}$.

Moreover

$$(41) \quad -c_1 u_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{f_{1k}^*(\zeta) - f^*(\zeta)}{\tau_k^2} = -c_1 \Bigg\{ \zeta f^{*\prime}(\zeta) \left[\frac{1+\zeta\xi_0}{1-\zeta\xi_0} + \frac{1+\zeta\bar{\xi}_0}{1-\zeta\bar{\xi}_0} \right]$$
$$- Q_0(1-\varepsilon) f^*(\zeta) \left[\frac{1+f^*(\zeta)\eta_0}{1-f^*(\zeta)\eta_0} + \frac{1+f^*(\zeta)\bar{\eta}_0}{1-f^*(\zeta)\bar{\eta}_0} \right]$$
$$+ [Q_0^2(1-\varepsilon)^2 - 1 - \varepsilon] f^*(\zeta) \left[\frac{1+f^*(\zeta)\nu}{1-f^*(\zeta)\nu} + \frac{1+f^*(\zeta)\bar{\nu}}{1-f^*(\zeta)\bar{\nu}} \right] \Bigg\},$$

$$(42) \quad c_2 u_2 = \lim_{k\to\infty} \frac{f_{2k}^*(\zeta) - f^*(\zeta)}{\tau_k^2} = c_2 \Bigg\{ \zeta f^{*\prime}(\zeta) \left[\frac{1+\zeta\xi_0}{1-\zeta\xi_0} + \frac{1+\zeta\bar{\xi}_0}{1-\zeta\bar{\xi}_0} \right]$$
$$- Q_0^2(1+\varepsilon)^2 f^*(\zeta) \left[\frac{1+f^*(\zeta)\eta_0}{1-f^*(\zeta)\eta_0} + \frac{1+f^*(\zeta)\bar{\eta}_0}{1-f^*(\zeta)\bar{\eta}_0} \right]$$
$$+ [Q_0^2(1+\varepsilon)^2 - 1 + \varepsilon] \cdot \frac{1}{2} f^*(\zeta) \Lambda\big(f^*(\zeta)\big) \Bigg\},$$

$$(43) \quad u_3 = (1+\varepsilon)^2 \frac{1}{2} f^*(\zeta) \Lambda\big(f^*(\zeta)\big) - \zeta f^{*\prime}(\zeta) \left[\frac{1+\zeta\xi}{1-\zeta\xi} + \frac{1+\zeta\bar{\xi}}{1-\zeta\bar{\xi}} \right].$$

By use of the lemma, formulated at the beginning, we obtain

$$(44) \qquad L^*(\pm c_j u_j) \leqslant 0, \qquad j = 1, 2, 3$$

Let U_j denote the following limits

$$(45) \qquad U_j = \lim_{\varepsilon\to 0} u_j \qquad j = 1, 2, 3.$$

Thus we have

$$\frac{L^*(-c_1 U_1)}{-c_1} \geqslant 0, \tag{46}$$

$$\frac{L^*(c_2 U_2)}{c_2} \leqslant 0. \tag{47}$$

Subtracting (47) from (46) we obtain

$$L^*(U_1) - L^*(U_2) \tag{48}$$

$$= \left[L^* \left\{ f^*(\zeta) \left[\frac{1+f^*(\zeta)\nu}{1-f^*(\zeta)\nu} + \frac{1+f^*(\zeta)\bar{\nu}}{1-f^*(\zeta)\bar{\nu}} \right] - \frac{1}{2} f^*(\zeta) \Lambda(f^*(\zeta)) \right\} \right] (Q_0^2 - 1) \geqslant 0.$$

Hence

$$L^* \left\{ \frac{1}{2} f^*(\zeta) \Lambda(f^*(\zeta)) \right\} \tag{49}$$

$$= \operatorname*{Min}_{0 \leqslant y \leqslant 2\pi} L^* \left\{ f^*(\zeta) \left[\frac{1+f^*(\zeta)e^{iy}}{1-f^*(\zeta)e^{iy}} + \frac{1+f^*(\zeta)e^{-iy}}{1-f^*(\zeta)e^{-iy}} \right] \right\} = \mathfrak{P}.$$

Let $\mu_0 = e^{iy_0}$ be the point of $K^*(0,1)$ for which the above mentioned minimal value is attained. For $\nu = \mu_0$ we have $U_1 = U_2$ therefore by (49), (46), and (47) $L^*\{U_1(\mu_0)\} = 0$ and thus

$$Q_0^2 \left[L^* \left\{ f^*(\zeta) \left[\frac{1+f^*(\zeta)\eta_0}{1-f^*(\zeta)\eta_0} + \frac{1+f^*(\zeta)\bar{\eta}_0}{1-f^*(\zeta)\bar{\eta}_0} \right] \right\} - \mathfrak{P} \right] \tag{50}$$

$$= L^* \left\{ \zeta f^{*'}(\zeta) \left[\frac{1+\zeta\xi_0}{1-\zeta\xi_0} + \frac{1+\zeta\bar{\xi}_0}{1-\zeta\bar{\xi}_0} \right] \right\} - \mathfrak{P}.$$

Since ξ_0 is an arbitrary point of C, putting $\xi_0 = z$, $\bar{\xi}_0 = \bar{z}$, $\eta_0 = f^*(z)$, $\bar{\eta}_0 = f^*(\bar{z})$, $Q_0^2 = \left[z \frac{f^{*'}(z)}{f^*(z)} \right]^2$, where $z \in C$,

we obtain

$$\left[z \frac{f^{*'}(z)}{f^*(z)} \right]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = \mathfrak{N}(z), \tag{51}$$

where

$$\mathfrak{M}(w) = L^*\left\{f^*(\zeta)\left[\frac{1+f^*(\zeta)w}{1-f^*(\zeta)w} + \frac{1+f^*(\zeta)\overline{w}}{1-f^*(\zeta)\overline{w}}\right]\right\} - \mathfrak{P}, \tag{52}$$

$$\mathfrak{N}(z) = L^*\left\{\zeta f^{*'}(\zeta)\left[\frac{1+\zeta z}{1-\zeta z} + \frac{1+\zeta\bar{z}}{1-\zeta\bar{z}}\right]\right\} - \mathfrak{P}, \tag{53}$$

$$\mathfrak{P} = \operatorname*{Min}_{0\leqslant y\leqslant 2\pi} L^*\left\{f^*(\zeta)\left[\frac{1+f^*(\zeta)e^{iy}}{1-f^*(\zeta)e^{iy}} + \frac{1+f^*(\zeta)e^{-iy}}{1-f^*(\zeta)e^{-iy}}\right]\right\}, \tag{54}$$

ζ denotes the variable of operation, whereas w respectively z serves as a parameter in (52) respectively in (53).

Proof of the part III. The function $\mathfrak{M}(w)$ is not positive on the circumference $|w| = 1$ by definition $\mathfrak{P}$.

$\mathfrak{N}(z)$ is also not positive on the circumference $|z| = 1$. In fact, ccording to (43), (44), and (45), (53) we have

$$L^*\left\{\frac{1}{2}f^*(\zeta)\Lambda(f^*(\zeta))\right\}^* - L^*\left\{\zeta f^{*'}(\zeta)\left[\frac{1+\zeta\xi}{1-\zeta\xi} + \frac{1+\zeta\bar{\xi}}{1-\zeta\bar{\xi}}\right]\right\} \leqslant 0.$$

Moreover in view of (49)

$$\mathfrak{P} - L^*\left\{\zeta f^{*'}(\zeta)\left[\frac{1+\zeta\xi}{1-\zeta\xi} + \frac{1+\zeta\bar{\xi}}{1-\zeta\bar{\xi}}\right]\right\} \leqslant 0,$$

therefore

$$\mathfrak{N}(z) \geqslant 0.$$

Since ζ is an arbitrary point of circumference $K^*(0,1)$ the inequality $\mathfrak{N}(z) \geqslant 0$ holds for every $|z| = 1$.

The fourth part of the theorem is established in the similar way to that in reference [2].

From the proved Theorem we obtain the following corollaries.

Corollary I. If

1) there exists a domain E contained in the circle $K(0,1)$ symmetric with respect to real axis, the boundary of which contains an arc $c_1 \subset C$ such that any point of the arc C_1 is not an accumulation point of essential points of complement of E;

2) the differential $L(h)$ of $K(f)$ may be extended over a linear family $\mathfrak{G}$ of functions having poles at most at points of the set E; then the equation (2) holds for every $z \in E$.

Corollary II. If

1) there exists a domain E^* contained in the circle $K(0,1)$ the boundary of which contains the circumference $K^*(0,1)$, moreover the accumulation points of essential points of complement of E^* lie nowhere dense on this circumference;

2) the differential $L(h)$ of $K(f)$ at an arbitrary point of F_T may be extended over a linear family G of functions having poles at most at points of the set E^*; then the equation (2) holds for every $z \in E^*$.

The proofs of the above corallaries are analogous to those in paper [2].

REFERENCES

[1] Caratheodory, C., Vorlesungen über reelle Funktionen, 2 Aufl. 1927, p. 665-687.

[2] Charzyński, Z., Sur les fonctions univalentes bornées, Rozprawy Mat. II, 1953.

[3] Charzyński, Z., Janowski, W., Sur l'équation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes bornées, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, vol. IV, 7, 1950, p. 41-56.

[4] Dziubiński, I., Equation générale de Loewner.

[5] Dziubiński, I., L'équation de fonctions extrémales das la famille de fonctions univalentes bornées et symmetriques.

]6] Маркушевич, А. И., О базисе в пространьствах аналитических функций, Мат. Сб. 17 (59); 2 (1945), p. 211-252.

Presented 4-th September 1959 at the Session by Z. Charzyński.

WDN — Zam. 182/16 — 380

BULLETIN

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ

1961 Vol. XII, 14

Zygmunt Charzyński, Włodzimierz Waliszewski

Sur l'existence de solutions pour des systèmes d'équations algébriques réelles non linéaires

NOTATIONS

Considérons un système d'équations non linéaires

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0 \\ G(x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

dont les premiers membres sont des polynômes à coefficients réels de degrés n et m respectivement. Supposons, pour le moment, un système tel que dans aucun point (x, y) satisfaisant à ce système les dérivées partielles F'_x et G'_y ne disparaissent simultanément. On peut assiocier à chaque point (x_0, y_0), satisfaisant à (1), un certain nombre naturel k, dit ordre de multiplicité du point (x_0, y_0), en tant que solution de (1), de la manière suivante: si $G'_y(x, y) \neq 0$, on entend par k l'ordre de multiplicité du point x_0, en tant que solution de l'équation

$$F(x, g(x)) = 0$$

où $g(x)$ désigne une branche continue de la fonction implicite, définie par la fonction $G(x, y)$ et le point (x_0, y_0); si $G'_y(x_0, y_0) = 0$, on entend par k l'ordre de multiplicité du point y_0, en tant que racine de l'équation

$$G(f(y), y) = 0$$

où $f(y)$ désigne une branche continue de la fonction implicite correspondant à la fonction $F(x, y)$ et au point (x_0, y_0).

Le système polynôme $F(x, y, t)$ et $G(x, y, t)$ sera appelé homotopie régulière, si pour aucune valeur de $0 \leqslant t \leqslant 1$, il n'existe pas de points (x, y) satisfaisant aux systèmes d'équations

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0 \\ G(x, y, t) &= 0 \\ F'_x(x, y, t) &= 0 \\ G'_y(x, y, t) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Désignons par $\mathfrak{F}(x, y)$ la somme de tous les termes du degré n du polynôme $F(x, y)$. Le point (ξ_0, η_0), situé sur la circonférence du cercle unité de centre $(0, 0)$, sera appelé direction asymtotique du polynôme $F(x, y)$, si le polynôme $\mathfrak{F}(x, y)$ s'annule au dit point.

Lemme: Si les polynômes homogènes $\mathfrak{F}(x, y)$ et $\mathfrak{G}(x, y)$ du degré n et m respectivement n'ont pas de directions asimptotiques communes et les fonctions $f(x, y)$, $g(x, y)$ sont des polynômes de degrés inférieurs à n et m, à coefficients bornés en valeur absolue par certain nombre $a > 0$, il existe un nombre $R > 0$ dépendant uniquement de a et des coefficients des polynômes $\mathfrak{F}(x, y)$ et $\mathfrak{G}(x, y)$, tel que tous les zéros du système d'équations

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{F}}(x, y) + f(x, y) &= 0 \\ \dot{\mathfrak{G}}(x, y) + g(x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

se trouvent dans le cercle du centre $(0, 0)$ et du rayon R. Dans l'énoncé qui précède, on a désigné par $\dot{\mathfrak{F}}(x, y)$ et $\dot{\mathfrak{G}}(x, y)$ des polynômes homogènes arbitraires du degré n et m respectivement dont les coefficients sont suffisamment proches des coefficients des polynômes $\mathfrak{F}(x, y)$ et $\mathfrak{G}(x, y)$.

Demonstration: Supposons qu'il existe une suite de polynômes homogènes $\mathfrak{F}_p(x, y)$ et $\mathfrak{G}_p(x, y)$ dont les coefficients tendent vers les coefficients respectifs des polynômes $\mathfrak{F}(x, y)$ et $\mathfrak{G}(x, y)$ et une suite de polynômes $f_p(x, y)$ et $g_p(x, y)$ dont les modules des coefficients sont bornés par le meme nombre positif a. On admet en même temps que la suite (x_p, y_p) des zéros du système d'équations

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{F}}_p(x, y) + f_p(x, y) &= 0 \\ \dot{\mathfrak{G}}_p(x, y) + g_p(x, y) &= 0 \end{aligned} \qquad p = 1, 2, \ldots$$

tend vers ∞ lorsque p augmente infiniment.

Désignons par r_p la distance de (x_p, y_p) à l'origine du système des coordonnées et supposons (en remplacant au besoin la suite par une suite partielle) que $(x_p/r_p, y_p/r_p)$ tende vers un point (ξ_0, η_0) lorsque p tend vers l'infini. L'homogeneité des polynômes $\dot{\mathfrak{F}}_p(x, y)$ et $\dot{\mathfrak{G}}_p(x, y)$ permet de déduire

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{F}}_p(x_p/r_p, y_p/r_p) + \frac{1}{r_p^n} f_p(x_p, y_p) &= 0 \\ \dot{\mathfrak{G}}_p(x_p/r_p, y_p/r_p) + \frac{1}{r_p^m} g_p(x_p, y_p) &= 0 \end{aligned} \qquad p = 1, 2, \ldots$$

et si l'on passe à la limite lorsque $p \to \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\xi_0, \eta_0) &= 0 \\ \mathfrak{G}(\xi_0, \eta_0) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse d'après laquelle les polynômes $\mathfrak{F}(x, y)$ et $\mathfrak{G}(x, y)$ n'ont pas de direction asymptotique commune.

Lemme 2: Chaque homotopie de la forme

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= \mathfrak{F}(x, y) + (\alpha x + \beta y) + tF_{n-1}(x, y) + \ldots + t^n F_0(x, y) \\ G(x, y, t) &= \mathfrak{G}(x, y) + (\gamma x + \delta y) + tG_{m-1}(x, y) + \ldots + t^m G_0(x, y) \end{aligned} \tag{4}$$

peut être arbitrairement rapprochée une homotopie régulière de la même forme (4), où $F_j(x, y)$, $G_j(x, y)$ désignent des polynômes homogènes de degrés i et j respectivement.

Démonstration: Supposons qu'il existe une telle homotopie de la forme (4) que toutes les homotopies de la même forme dont les coefficients sont suffisamment proches de ceux de la homotopie considérée, ne soient pas régulieres. Dans ce cas, le système des quatre équations homogènes avec quatre inconnues x, y, z, t

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{F}}(x, y) + (\dot{\alpha} x + \dot{\beta} y) z^{n-1} + t\dot{F}_{n-1}(x, y) + \ldots + t^n \dot{F}_0(x, y) &= 0 \\ \dot{\mathfrak{G}}(x, y) + (\dot{\gamma} x + \dot{\delta} y) z^{m-1} + t\dot{G}_{m-1}(x, y) + \ldots + t^m \dot{G}_0(x, y) &= 0 \\ \dot{\mathfrak{F}}'_x(x, y) + \dot{\alpha} z^{n-1} + t\dot{F}'_{n-1,x}(x, y) + \ldots + t^{n-1} \dot{F}'_{1,x}(x, y) &= 0 \\ \dot{\mathfrak{G}}'_y(x, y) + \dot{\delta} z^{m-1} + t\dot{G}'_{m-1,y}(x, y) + \ldots + t^{m-1} \dot{G}'_{1,y}(x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

ayant pour coefficients des valeurs suffissamment proches des coefficients du plynôme (4), a une solution qui n'est pas banale. Si l'on calcule la résultante des premiers membres de (5), on voit quelle s'annule pour toutes les veleurs des coefficients suffisamment proches de ceux d'un certain système d'équations (4). Ainsi la résultante aurait du se reduire de même à zero en tant que polynôme des coefficients du système et chaque système de la forme (5) aurait du avoir une solution non banale. Mais si l'on prend le système

$$\begin{aligned} x^m + t^n &= 0 \\ y^m + yz^{m-1} &= 0 \\ nx^{n-1} &= 0 \\ my^{m-1} + z^{m-1} &= 0, \end{aligned}$$

on remarque qu'il n'a qu'une solution banale tout en étant de la forme (5).

Lemme 3: Chaque homotopie régulière du type (4) peut etre rapprochée une homotopie arbitraire du même type, de façon que pour chaque t le système

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0 \\ G(x, y, t) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

aurait eu un nombre fini de solutions par rapport à x, y.

Démonstration: Il convient de noter l'existence d'une suite infinie (x_p, y_p) de solutions distinctes du système d'équations (1) ayant un point fini d'accumulation (x_0, y_0), tel que la dérivée G'_y ne s'annule pas dans ce point. Il existe alors une branche continue $y = g(x)$ de la fonction implicite correspondant à la fonction $G(x, y)$ et au point (x_0, y_0), telle que

$$F\big(x, g(x)\big) = 0 \tag{7}$$

pour chaque x appartenant à un certain voisinage du point x_0.

En effet, on peut admettre, en déduisant au besoin une suite partielle, que $x_p \to x_0$ lorsque $p \to \infty$ et que $x_p \neq x_0$ pour chaque valeur de p naturelle.

Il résulte du théorème sur le branches localement univoques des fonctions implicites que $y_p = g(x_p)$. Ainsi

$$F\big(x_p, g(x_p)\big) = 0 \qquad\qquad p = 1, 2, \ldots$$

et comme la fonction $F(x, g(x))$ est analytique au voisinage du point x_0. La relation (7) apparaîtra dans le dit voisinage.

Nous supposerons, pour prouver le lemme, qu'il existe une telle homotopie de la forme (4) que chaque homotopie, pourvu qu'elle soit suffisamment proche de la précédente, doit avoir pour un certain t une infinité de solutions par rapport à x, y. On peut admettre, d'après les lemmes 1, 2 et les raisonnements ci-dessus, qu'il existe pour un certain t_0 un point (x_0, y_0) et une fonction $g(x)$ de la variable réelle, analytique dans le voisinage du point x_0, prenant en ce point la valeur y_0 et telle que

$$F(x, g(x), t_0) = 0$$
$$G(x, g(x), t_0) = 0$$

pour tous les x du voisinage considéré. Si l'on différencie deux fois ces expressions par rapport à x et l'on en élimine les derivées $g'(x)$, $g''(x)$, on obtient le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0 \\ G(x, y, t) &= 0 \\ I(x, y, t) &= 0 \\ H(x, y, t) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

où $I = F'_x G'_y - F'_y G'_x$, tandis que la fonction H est définie par la formule

$$H = (F''_{xx} F'^2_y - 2F''_{xy} F'_x F'_y + F''_{yy} F'^2_x) G'^3_y + \\ - (G''_{xx} G'^2_y - 2G''_{xy} G'_x G'_y + G''_{yy} G'^2_x) F'^3_y .$$

Les relations (8) permettent de déduire, en particulier, que le suivant système de quatre équations homogènes avec quatre inconnues x, y, z, t

$$\begin{aligned} z^n F(x/z, y/z, t/z) &= 0 \\ z^m G(x/z, y/z, t/z) &= 0 \\ z^{m+n-1} I(x/z, y/z, t/z) &= 0 \\ z^{3(m+n)-7} H(x/z, y/z, t/z) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

a une solution qui n'est pas banale. Si l'on prend en considération, comme dans la démonstration du lemme 2, la résultante des pre-

miers membres des relations (9), on constate qu'elle aurait dû aussi se réduire à zéro.

Pour terminer la démonstration ci-dessus il suffit de trouver un système d'égalités du type (9) qui n'aurait qu'une solution banale. Il est aisé de prouver que le système suivant en est un.

$$x^n + yz^{n-1} + at^n = 0$$

$$y^m + xz^{m-1} + bt^m = 0$$

$$(9') \qquad mnx^{n-1}y^{m-1} - z^{m+n-2} = 0$$

$$m^3n(n-1)x^{n-2}y^{3m-3}z^{2n-2} - m(m-1)y^{m-2}z^{3n+2m-5} = 0$$

a et b sont ici choisis de façon à ce que le système (9′) n'ait pas de solution (il est évident que ceci est posible quels que soient les m et n).

Lemme 4: Etant donné un système d'équations (6) n'ayant pas de directions asymptotiques communes, tel que la homotopie (4) soit un système d'équations régulière et tel que pour chaque t le système d'équations (6) ait un nombre fini de solutions par rapport à x, y. Les sommes des ordres de multiplicité de ces systèmes correspondant à deux valeurs du paramètre sont des nombres congrus suivant le module 2.

Démonstration: Prenons une homotopie $F(x, y, t)$, $G(x, y, t)$ confirmant les hypothèses du lemme 4. Les fonctions n'ayant pas, comme polynômes en x, y, de directions asymptotiques communes. En tenant compte du lemme 1, il suffit de prouver que pour chaque t_0 et le point (x_0, y_0) qui est la solution des equations (6), il existe un tel voisinage de ce point ne comprenant pas d'autres solutions de ce genre que pour les t suffisamment proches de t_0, la somme des ordres de multiplicité de toutes les solutions des équations (6) qui se trouvent dans ce viosinage est congrue, suivant le module 2, à une somme analogue des ordres de multiplicité correspondant à la valeur de t_0 du paramètre t.

Comme par hypothèse la homotopie est régulière, on peut admettre que dans un certain rectangle du centre (x_0, y_0) et des côtés parallèles aux axes des coordonnées, la dérivée G'_y ne s'annule pas, pour les t suffisamment proches de t_0 et qu'il existe une fonction

$g(x, t)$ continue par rapport au système de valeurs x, t, analytique par rapport à x répondant à la condition

$$G(x, g(x, t), t) = 0$$

$$y_0 = g(x_0, t_0)$$

pour chaque x appartenant à l'intervalle $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ obtenu par la projection du rectangle considéré sur l'axe d'abscisses et pour chaque t suffisamment proche de t_0. Nous pouvons aussi admettre, à la suite de l'hypothèse, que la fonction $g(x, t)$ est analytique dans le voisinage du point x_0, que δ est un nombre assez petit pour que le point x_0 soit la seule racine de la fonction $F(x, g(x, t_0), t_0)$ dans l'intervalle $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. Il en résulte, vu la continuité de la fonction $g(x, t)$, que les fonctions $F(x, g(x, t), t)$ et $F(x, g(x, t_0), t_0)$ seront du même signe aux extrémités de l'intervalle $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, pourvu que t soit suffisamment proche de t_0.

Cette dernière condition permet de conclure que les sommes des ordres de multiplicité des racines des équations suivantes en x

$$F(x, g(x\, t,)\, t) = 0$$

$$F(x, g(x, t_0), t_0) = 0$$

sont des nombres congrus suivant le module 2 et ceci termine la démonstration du lemme 4.

Les raisonnements qui précédent permettent de déduire le

Théorème d'existence: Si $\mathfrak{F}(x, y)$ et $\mathfrak{G}(x, y)$ désignent deux polynômes homogènes arbitraires n'ayant pas de directions asymptotiques communes, de degrés impairs, tandis que $f(x, y)$ et $g(x, y)$ désignent deux polynômes arbitraires de degrés inférieurs respectivement à ceux des polynômes susdits, le système d'équations

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(x, y) + f(x, y) &= 0 \\ \mathfrak{G}(x, y) + g(x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

a au moins une solution.

Démonstration: On voit d'abord vu'à la suite de l'imparité des degrés des polynômes $\mathfrak{F}(x, y)$ et $\mathfrak{G}(x, y)$, le système d'équations

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(x, y) + \alpha x + \beta y &= 0 \\ \mathfrak{G}(x, y) + \gamma x + \delta y &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

a un nombre impair de solutions, en comptant chaque solution autant de fois que comporte son ordre de multiplicité, à condition toutefois que le déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$ ne se réduise pas à zéro. En effet, $(0, 0)$ est une racine simple, tandis que les autres racines viennent deux à deux symétriquement par rapport à l'origine des axes de coordonnées Si l'on décompose $f(x, y)$ et $g(x, y)$ en sommes de polynômes homogènes de degrés diminuant et qu'on applique une homotopie de forme (4), on constate (en faisant au besoin une approximation de ses coefficients) qu'il existe un passage homotopique à l'aide d'une homotopie régulière et telle que pour chaque t le système (6) a un nombre fini de solutions, passage qui mène du système (11) au système

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(x, y) + (\alpha x + \beta y) + f(x, y) &= 0 \\ \mathfrak{G}(x, y) + (\gamma x + \delta y) + g(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

En vertu du lemme 4, le système (12) a un nombre impair de solutions, si l'on compte chaque solution autant de fois que comporte son ordre multiplicité.

Comme α, β, γ, δ sont quelconques et peuvent être arbitrairement voisins de zéro, pourvu que le déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$ ne s'annule pas, on conclut que le système (10) a au moin une solution et c'est ce qu'il fallait prouver.

Présenté le 4 septembre 1959 a la Séance par l'auteurs

WDN — Zam. 183/61 — 380.

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IX 1962 FASC. 1

SUR CERTAINES ÉVALUATIONS GÉNÉRALES D'UNE FONCTION ANALYTIQUE DE DEUX VARIABLES DANS LE VOISINAGE D'UN ZÉRO ISOLÉ

PAR

Z. CHARZYŃSKI (ŁÓDŹ)

Dans le domaine des fonctions analytiques réelles d'une variable, il est un fait bien évident que, dans le voisinage d'un zéro, l'ordre de grandeur d'une fonction donnée est borné non seulement supérieurement, mais aussi inférieurement. Plus précisément: si la fonction $f(x)$ est réelle, analytique dans le voisinage d'un certain point, par exemple 0, et si elle est positive à l'exception de ce point, auquel elle s'annule, il existe des constantes C et ϱ (dépendant de cette fonction) telles que, dans un certain voisinage suffisamment petit du point 0, on a l'inégalité

$$f(x) > Cr^{\varrho}, \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2}.$$

Il est naturel de se demander, si ce fait peut être généralisé au cas des fonctions réelles analytiques de deux variables.

Łojasiewicz [2] et Hörmander [1] se sont occupés, entre autres, de ce problème.

J'en donne ici une simple solution basée sur certaines propriétés générales des fonctions analytiques dans le domaine complexe.

Le théorème suivant la contient:

THÉORÈME. *Si $f(x, y)$ est une fonction réelle de deux variables réelles, analytique dans un certain voisinage du point $(0, 0)$ et si elle est positive à l'exception de ce point, auquel elle s'annule, alors on a pour r positifs suffisamment petits l'inégalité*

$$\min f(x, y) \geqslant Cr^{\varrho}, \tag{0}$$

où C et ϱ désignent des constantes positives qui dépendent de la fonction f, mais sont indépendantes de r.

Démonstration. Si la fonction donnée f est de la forme

$$f(x, y) = \varphi(r), \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \tag{1}$$

 Colloq. Math. 9 (1962), 115–118.

$\varphi(r)$ étant une fonction quelconque de la forme

$$c_p r^p + \ldots, \qquad c_p \neq 0, \qquad \text{où} \qquad p > 0,$$

on trouve de suite que dans un certain voisinage du point $(0, 0)$ on a une inégalité du type (0).

Supposons donc que la fonction $f(x, y)$ ne soit pas du type (1). Prenons un r arbitraire, suffisamment petit, positif, et considérons cette fonction sur la circonférence $x^2+y^2 = r^2$. Elle y admet un minimum absolu dans un certain ensemble de points. On voit facilement que dans le cas où cet ensemble est infini, la fonction f doit être constante sur la circonférence en question. En outre, on constate que si la fonction f était constante sur des circonférences de rayons arbitrairement petits, elle devrait admettre une représentation du type (1). Il suffit pour cela de poser $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ et d'étudier la fonction f comme fonction des variables ϑ et r. En conséquence, on peut admettre dans la suite que, pour des rayons r suffisamment petits, la fonction f atteint son minimum sur la circonférence correspondante seulement en un nombre fini de points. En tout point (x, y) doivent être remplies les conditions

$$(2') \qquad f'_x(x, y)y - f'_y(x, y)x = 0, \qquad (2'') \qquad x^2+y^2 = r^2.$$

Étudions l'expression $\varphi(x, y) = f'_x(x, y)y - f'_y(x, y)x$, considérant x et y comme des variables complexes indépendantes qui prennent les valeurs d'un certain voisinage de double cercle du point $(0, 0)$. Nous remarquons de suite que la fonction $\varphi(x, y)$ ne peut pas s'annuler identiquement, car dans ce cas $\varphi(x, y)$ serait constante sur toutes les circonférences (2''), ce qui n'a pas lieu dans le cas considéré.

Conformément aux théorèmes connus ([3], p. 89, 97, 101, 104, 108 et [4], p. 262-263, 266, 275), en changeant au besoin les coordonnées pour que $\varphi(0, y) \not\equiv 0$, nous pouvons, dans la suite, mettre la fonction considérée dans un certain voisinage de double cercle du point $(0, 0)$ sous la forme

$$(3) \qquad \varphi(x, y) = [f_1(x, y)]^{\lambda_1} \ldots [f_l(x, y)]^{\lambda_l} \Omega(x, y),$$

où le dernier facteur $\Omega(x, y)$ est une fonction analytique ne s'annulant dans le voisinage cité, et les facteurs précédents sont des polynômes en y de la forme

$$(4) \qquad f_k(x, y) = y^{m_k} + A_{1k}(x)y^{m_k-1} + \ldots + A_{1m_k-1}(x)y + A_{1m_k}(x), \qquad \text{où} \quad m_k > 0,\ k = 1, \ldots, l;$$

en outre les coefficients

$$(4') \qquad A_{sk}(x), \quad s = 1, \ldots, m_k \quad \text{et} \quad k = 1, \ldots, l,$$

sont des fonctions holomorphes de la variable x dans un certain voisinage du point 0 et qui s'annulent en ce point. De plus, les polynômes (4) sont irréductibles. Par suite, le discriminant de tout polynôme (4) en y est différent de zéro pour les x situés, dans un ceratin voisinage suffisamment petit du point 0 (ce point étant exclu), et le polynôme correspondant n'a, dans ce cas, que des racines simples arbitrairement proches de zéro. On sait que toutes ces racines peuvent être mises sous la forme

$$y = \Psi_k(\sqrt[m_k]{x}), \quad \text{où} \quad m_k \geqslant 1, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{5}$$

et où $\Psi_k(t)$ sont des fonctions holomorphes dans le voisinage du point 0 s'annulant en ce point. Dans (5), il faut prendre toutes les valeurs du radical $\sqrt[m_k]{x}$.

Nous en concluons de suite que pour r complexes, suffisamment petits, différents de zéro, tous les couples de nombres complexes x, y suffisamment proches de $(0, 0)$ qui réalisent les conditions (2′) et (2″) vérifient l'une des égalités

$$y = \Psi_k(\sqrt[m_k]{x}), \quad \chi_k(\sqrt[m_k]{x}) = r^2, \tag{6}$$

où

$$\chi_k(t) = t^{2m_k} + (\Psi_k(t))^2, \tag{7}$$

et où il faut prendre la valeur correspondante de $\sqrt[m_k]{x}$. De plus, à cause de l'hypothèse concernant r et de la relation (2″), nous n'aurons à considérer que les indices k pour lesquels les fonctions correspondantes (7) ne sont pas identiquement égales à 0. On peut représenter ces fonctions sous la forme

$$\chi_k(t) = t^{p_k}\hat{\chi}_k(t), \quad \text{où} \quad \hat{\chi}_k(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad p_k > 0. \tag{8}$$

En admettant donc

$$\Omega(t) = t\sqrt[p_k]{\hat{\chi}_k(t)} \tag{9}$$

et en choisissant arbitrairement la branche du radical, nous déduisons de (9) et (8) que les formules (6) sont équivalentes aux formules

$$y = \Psi_k[\Omega_k^{-1}(\sqrt[p_k]{r^2})], \quad x = [\Omega_k^{-1}(\sqrt[p_k]{r^2})]^{m_k}, \tag{10}$$

si l'on choisit convenablement les valeurs des radicaux $\sqrt[p_k]{r^2}$.

En posant (10) dans la représentation (4) de la fonction f, nous voyons en définitive que pour tout couple de valeurs x, y remplissant les conditions (2′) et (2″), la valeur correspondante de cette fonction est

$$f(x, y) = \chi_k(\sqrt[p_k]{r^2}), \tag{11}$$

où k est un des indices dans (4′); en outre, il faut choisir convenablement la valeur de $\sqrt[p_k]{r^2}$; en même temps, le second membre de (11) est défini par la formule

$$\chi_k(\zeta) = f\Big(\big(\Omega_k^{-1}(\zeta)\big)^{m_k}, \Psi_k\big(\Omega(\zeta)\big)\Big). \tag{12}$$

En particulier, si nous nous limitons aux r positifs et aux x, y réels remplissant les conditions (2′) et (2″), nous voyons que dans les formules (11) n'interviennent que les indices k pour lesquels les fonctions (12) ne s'annulent pas identiquement, car le premier membre de (11) est positif à l'exception du point $(0, 0)$. Chacune de ces fonctions, comme série entière définie dans le voisinage du point zéro et s'annulant en ce point, est bornée en valeur absolue inférieurement par le produit d'une puissance naturelle quelconque de $|\zeta|$ et d'une constante. Étant donné que le nombre de ces fonctions est fini, il existe donc une évaluation analogue par un produit $C|\zeta|^s$, le même pour toutes ces fonctions. En conséquence, pour tout couple de valeurs x, y remplissant les conditions (2′) et (2″), en particulier pour celui pour lequel le minimum de (0) est atteint, nous avons en vertu de (11)

$$f(x, y) \geqslant Cr^{2s/p}, \quad \text{où} \quad p = \min_k p_k.$$

Il en résulte immédiatement l'inégalité annoncée (0).

Remarque 1. L'hypothèse d'analyticité de la fonction $f(x, y)$ est essentielle en ce sens que, même pour une fonction de classe C^∞, le théorème n'est plus vrai, comme l'indique l'exemple $f(x, y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$ pour $x^2+y^2 > 0$ et $f(0, 0) = 0$.

Remarque 2. La généralisation au cas des fonctions de plusieurs variables est possible.

TRAVAUX CITÉS

[1] L. Hörmander, *Differentiability properties of solutions of differential equations*, Arkiv för Matematik 3 (1956), p. 527-535.

[2] S. Łojasiewicz, *Sur le problème de la division*, Studia Mathematica 18 (1959), p. 87-136.

[3] W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie, II*, Leipzig et Berlin 1929.

[4] S. Saks and A. Zygmund, *Analytic Functions*, Warszawa–Wrocław 1952.

Reçu par la Rédaction le 6. 12. 1960

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 2

WITOLD WOLIBNER

(9. IX. 1902 — 9. I. 1961)

PAR

Z. CHARZYŃSKI (ŁÓDŹ), A. KRZYWICKI (WROCŁAW) ET J. ZAMORSKI † (WROCŁAW)

Né le 9 septembre 1902 au village Piotrowo près de Płock, Witold Wolibner passa en 1921 son baccalauréat au lycée de Płock et prit l'inscription à la Faculté de Philosophie (Section des Sciences mathématiques et naturelles) de l'Université de Varsovie. Après y avoir étudié les mathématiques, la physique, l'astronomie, la logique et la psychologie, il y obtint en 1930 le grade de docteur en philosophie pour sa thèse de doctorat intitulée „Contribution à la théorie des fonctions analytiques".

Depuis 1927, Witold Wolibner fut occupé à l'Institut d'Aérodynamique nouvellement fondé auprès de l'École Polytechnique de Varsovie. Il y travailla, avec un relâche de trois ans, jusqu'au début de la II^{me} guerre mondiale. Depuis 1935, il occupa, en outre, le poste d'assistant de mathématiques à l'École Polytechnique de Varsovie et fut actif pour l'annuaire „Fortschritte der Mathematik" qui le comptait parmi ses critiques scientifiques permanents.

En 1939, lors de l'invasion allemande, il s'enrôla, malgré la faiblesse de sa santé, au II Bataillon des Volontaires pour la Défense de Varsovie et y combatta jusqu'à la chute de la capitale. En 1941, il trouva réfuge avec sa mère à la campagne où il vécut dans des conditions matérielles très pénibles, s'y vouant toutefois à l'enseignement scolaire secret. En novembre de 1944, aussitôt après la libération de la région du pays où il se trouvait, il devint maître des mathématiques au lycée de Staszów, qu'il ne quitta qu'en 1947 pour aller s'établir définitivement à Wrocław, l'université et l'école polytechnique de cette ville (fondues à cette époque en une unité commune) lui ayant offert la chaire de la Mécanique rationnelle à la Faculté des Mathématiques, Physique et Chimie. En qualité du professeur et du chef de cette chaire, il travailla jusqu'à sa mort qui l'emporta peu avant sa titularisation votée à l'unanimité par le Conseil de la Faculté.

Il associait ce travail, depuis 1953, au professorat à l'Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences et, depuis 1956, aux fonctions du dirigeant le Groupe de la Mécanique rationnelle au même institut.

Il mourut le 9 janvier 1961 à Wrocław.

*

L'oeuvre scientifique du professeur Witold Wolibner appartient au domaine de l'analyse mathématique entendue dans un sens aussi vaste que général. Connaisseur fin et profond de l'analyse classique, il fut entre autres l'auteur des résultats originaux de topologie générale et de la théorie des déterminants, ce qui témoigne de l'étendue de ses intérêts mathématiques. Mais c'est surtout le domaine des fonctions analytiques et celui de l'hydromécanique qui lui ont été les plus familiers et qu'il a enrichi de ses travaux les plus intéressants. À la suite des longues années du travail à l'Institut d'Aérodynamique, il devint un excellent maître en art de calculer, n'hésitant pas à s'engager dans des calculs les plus compliquées et sachant y discerner l'essentiel.

Il débuta dans la recherche scientifique par sa thèse de doctorat consacrée au problème de caractériser les ensembles des valeurs des fonctions analytiques qu'elles prennent à leurs points singuliers [1](1). Il y a démontré qu'une fonction continue sur le plan fermé et analytique hors un ensemble ponctiforme prend nécessairement dans cet ensemble toute valeur prise par elle ailleurs.

Plus tard, il s'occupa de la théorie des fonctions multivalentes et lui consacra quelques travaux intéressants. Les problèmes fondamentaux de cette théorie consistent notoirement à caractériser les fonctions univalentes dans le cercle-unité, ou à l'extérieur de ce cercle, par des systèmes d'inégalités pour les coefficients de leurs développements en séries de Taylor ou de Laurent. Il s'agissait soit d'une caractérisation complète, c'est-à-dire d'un système infini d'inégalités constituant conjointement une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction considérée soit univalente, soit d'une caractérisation partielle, à savoir d'un système d'inégalités, possiblement simples, ne constituant que des conditions nécessaires.

Le problème d'une caractérisation complète fut résolu par lui dans son travail [9]: il y montra que pour qu'une fonction holomorphe à l'extérieur du cercle-unité,

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \ldots, \quad |\zeta| > 1, \tag{1}$$

(1) Les numéros entre crochets sont ceux des „Publications mathématiques de Witold Wolibner", voir ce fascicule, p. 360.

soit univalente, il faut et il suffit que l'on ait, pour toute suite finie $x_0, x_2, \ldots, x_n$ de nombres complexes, l'inégalité

$$\sum_{k=-n}^{\infty} K|c_n|^2 \leqslant 0, \tag{2}$$

où c_k s'expriment arithmétiquement par $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et par les coefficients $b_1, b_2, \ldots$ de (1). En vertu de l'identité

$$\sum_{j=-n}^{\infty} \frac{c_j}{\xi_j} = x_0 + x_1\varphi(\zeta) + \ldots + x_n(\varphi(\zeta))^n,$$

les sommandes du membre gauche de l'inégalité (2) sont certaines formes d'Hermite de paramètres arbitraires $x_0, x_1, \ldots, x_n$. En y appliquant des conditions connues pour que ces formes soient de signe constant, on parvient à en tirer des systèmes d'inégalités équivalents à l'inégalité (2), mais qui ne contiennent déjà que les coefficients de (1). Ce beau résultat, dû à Wolibner, appartient dès lors aux théorèmes classiques de la théorie des fonctions analytiques. Les conditions du même genre que (2) ont été trouvés indépendamment aussi par Biernacki (2) et Goluzin (3), mais seulement comme nécessaires, ce qui est relativement bien plus facile. Wolibner a établi cependant un fait essentiel et difficile, à savoir qu'elles sont en même temps suffisantes. Des conditions à la fois nécessaires et suffisantes, proches de (2), ont été établies également par Grunsky (4) en 1939, mais par une méthode longue et pénible, tandis que la démonstration de Wolibner était de beaucoup plus simple.

Le problème d'une caractérisation partielle fut traité par Wolibner dans son travail [5]. Il y énonça l'hypothèse que les inégalités

$$|b_n| \leqslant 2/(n+1) \quad \text{où} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

constituent une condition nécessaire pour l'univalence de la fonction $\varphi(\zeta)$ de la forme (1) et il démontra cette hypothèse sous certaines conditions supplémentaires. Il y montra également que cette hypothèse est plus générale que la fameuse hypothèse de Bieberbach dont la question demeure ouverte jusqu'à présent et d'après laquelle on aurait

$$|A_n| \leqslant n \quad \text{où} \quad n = 2, 3, \ldots \tag{5}$$

(2) M. Biernacki, *Sur les fonctions en moyenne multivalentes*, Bulletin de la Société Mathématique de France 70 (1946), p. 5.

(3) G. M. Goluzin, *Über p-valente Funktionen*, Matematitcheskiï Sbornik 8 (1940), p. 277-284.

(4) H. Grunsky, *Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen*, Mathematische Zeitschrift 45 (1939), p. 29-61.

pour toute fonction univalente dans le cercle unité

$$F(z) = z + A_2 z^2 + \dots$$

L'hypothèse (4) ne s'est pas avérée en toute généralité, c'est-à-dire pour toutes les fonctions univalentes de la forme (1), comme l'ont montré Garabedian et Schiffer ([5]), mais sa validité embrasse plusieurs classes fort importantes de telles fonctions, celle par exemple de toutes les fonctions étoilées.

Quant aux autres travaux de Wolibner concernant les fonctions analytiques, il généralisa dans son travail [8] les connus résultats de Faber sur les rapports entre leurs singularités. Il y envisagea les couples de fonctions analytiques $f(z)$, $\varphi(z)$ engendrées dans l'entourage du point 0 par les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

respectivement, où

$$a_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{j!} n^j \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, \dots,$$

et établit des relations entre les régions de l'existence de branches univoques des fonctions en question et la situation de leurs points singuliers. Ce furent les calculs liés à ces solutions qui ont dirigé son attention sur la théorie des déterminants, à laquelle il consacra son travail [13], le dernier paru de sa vie.

Les débuts de ses travaux en hydromécanique, et qui se rattachaient à ses occupations professionnelles à l'Institut d'Aérodynamique, ont eu pour sujet principal les problèmes du vol des avions et ceux de leur construction. Parmi ces travaux de Wolibner, un seul a été publiée, à savoir [4] (en polonais). Il traite de la méthode pour calculer les données concernant le gouvernail horizontal et l'emplacement du centre de gravité par rapport à l'aile de façon à assurer la stabilité longitudinale de l'avion. Mais cet ouvrage, comme d'ailleurs ses autres ouvrages de ce genre, étaient loin de satisfaire leur auteur; c'est pourquoi Wolibner élargit considérablement ses recherches dès le début en s'attaquant déjà en 1933 à des problèmes les plus fondamentaux. Il établit dans son travail [3] l'existence, pour un temps infiniment long, de la solution des équations du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène et incompressible, remplissant une région fixe quelconque, la distribution initiale du tourbillon étant

([5]) P. R. Garabedian and M. Schiffer, *A coefficient inequality for schlicht functions*, Annals of Mathematics 61 (1955), p. 116-136.

arbitraire. C'était là le premier résultat non local dans le cas des équations non linéaires aussi compliquées que celles d'hydromécanique. On leur avait consacré de nombreux travaux, à en citer avant tout ceux de L. Lichtenstein, mais on n'est pas allé par delà les démonstrations de l'existence locale des solutions. Le résultat non local de Wolibner est à considérer comme un succès remarquable, surtout à défaut d'outils tels que les méthodes topologiques de Leray et Schauder, inventées un an plus tard.

Le travail [3] de Wolibner mérite l'attention aussi d'un autre point de vue: ce qu'en le comparant aux travaux des autres auteurs d'alors qui traitaient des sujets analogues, on est frappé par l'homogénéité des déductions dont il est saturé. Les lemmes consécutifs n'y concernent que les propriétés de la distribution des tourbillons, des vitesses et des déplacements des particules du fluide. Ce style de recherche et ce mode de penser lui ont été imposés par son intuition du mécanicien et sa passion particulière pour l'hydrodynamique.

En 1951 parut sa publication [6] contenant la solution du problème qui absorbait depuis longtemps son esprit. Il s'y agissait du mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, entourant sur le plan infini un contour fermé. Le résultat est l'impossibilité d'un mouvement stable lorsque l'énergie du liquide en mouvement est finie. Non seulement que ce résultat constitue une caractérisation mécanique intéressante des mouvements stables, mais encore il montre que c'est l'instabilité du mouvement qui est la source des forces agissant sur un corps qui se meut avec une énergie cinétique finie du liquide. Ce travail de Wolibner apporte une généralisation considérable des résultats des autres auteurs, et encore sous des hypothèses si simples et naturelles (énergie cinétique finie au lieu de la vitesse s'évanouissant uniformément à l'infini).

À côté des problèmes classiques de l'hydromécanique, Wolibner s'intéressait à ceux de la mécanique des autres milieux. Il consacra par exemple une communication [11], aussi succinte qu'importante, au mouvement des corps friables. Le problème en était de savoir quelle forme a le tenseur des pressions lorsqu'on suppose que les forces superficielles se présentant dans un milieu friable se comportent à la manière des réactions des corps solides. L'analyse de ce problème conduisit Wolibner à la conclusion que seul le frottement des corpuscules à l'état de repos relatif peut être la source des forces en question. C'est là une justification rigoreuse de la condition dite de Coulomb et que l'on admet, comme l'une des conditions possibles, quand on envisage les tensions dans des milieux friables. La communication apporte également une description et une classification de tous les mouvements possibles de tels milieux.

Plus récemment, Wolibner cherchait à expliquer également certains phénomènes liés au mouvement des glaciers. Il s'intéressait tout particulièrement à la question, jusqu'à quel point le mouvement d'un glacier se laisserait traiter comme celui d'un liquide visqueux.

Mentionnons enfin ses travaux se rapportant à d'autres domaines des mathématiques. Dans l'une de ses premières publications (voir [2]), Wolibner établit diverses propriétés du sous-ensemble composé de tous les points inaccessibles d'un ensemble fermé et construisit un ensemble fermé plan dont toute composante, pourvu qu'elle ne se réduise à un point, est formée exclusivement de points inaccessibles de cet ensemble fermé (c'est-à-dire de ses points p tels que tout continu qui unit p à un point quelconque n'appartenant pas à l'ensemble E en question passe nécessairement aussi par des points de E distincts de p). La construction de cet exemple se laisse généraliser à un nombre quelconque de dimensions. Le travail [7] contient la construction d'un polynôme dont le diagramme passe par n points arbitrairement donnés d'avance et ayant les ordonnées différentes, la valeur de ce polynôme augmentant et diminuant simultanément à celle de la fonction formée en unissant les n points consécutifs donnés par des segments rectilignes. Le travail [10] a pour sujet les conséquences du théorème de Titchmarsh sur la convolution qui concernent certaines relations entre les coefficients de Fourier de deux fonctions. Enfin, le travail [12] apporte la construction d'une assez vaste classe de fonctions définies dans l'espace à 3 dimensions et dont les intégrales étendues aux surfaces sphériques de rayon arbitraire ou dans leurs intérieurs s'annulent, pourvu que l'origine des coordonnées se trouve à la surface ou à l'intérieur de ces sphères. Une construction analogue se laisse réaliser sur le plan pour les fonctions de 2 variables réelles.

*

La mort du professeur Witold Wolibner l'emporta au cours du travail intense à la réconstruction complète d'un résultat de L. Lichtenstein relevant de l'hydromécanique (voir [14]). Le fragment de ce résultat était tombé entre ses mains peu avant la guerre et il fut perdu pendant les hostilités avec tous ses carnets des notes et ses manuscrits. Wolibner revenait sur ce sujet à plusieurs reprises. Finalement, en 1960, l'issue du volume 72 de „Mathematische Zeitschrift", consacré à la mémoire de L. Lichtenstein, le décida à s'acquitter définitivement de ce qu'il croyait être son devoir envers celui qui avait tant mérité du développement de la hydromécanique. Malheureusement, le troisième accès fort grave de l'angine de poitrine, d'ailleurs attendu par lui avec sérénité et sans peur, interrompit son travail presque terminé. C'est que le professeur Wolibner ne se préoccupait pas trop des conseils des médecins qui lui défendaient tout sur-

menage. Il souriait avec bonhomie à leurs conseils toutes les fois qu'il se trouvait en face des problèmes qui l'intéressaient ou des devoirs qu'il s'agissait d'accomplir. Il les accomplissait, en effet, toujours avec un extrême soin et une exactitude irreprochable.

Le bagage scientifique de Witold Wolibner ne peut être mesuré par le nombre de ces publications. Maints résultats dus à lui sont restés inédits, l'autocriticisme démesuré de leur auteur les ayant condamné à l'oubli. Son attitude envers ses résultats, faciles à son avis, et l'habitude de les passer sous silence lui ont valu l'opinion d'un mathématicien ne s'occupant que des problèmes difficiles. Cependant il travaillait sur eux sans bruit qu'il détestait et cherchait à éviter.

Ses cours, quand il pouvait encore les faire, étaient toujours d'une rare originalité, médités à fond et scrupuleusement préparés. Ils passaient pour difficiles et exigeaient un effort actif des auditeurs.

Contraint à ne pas sortir et souvent même à garder le lit pendant de longues semaines, Witold Wolibner continuait, malgré tout, son activité didactique et plusieurs travaux de licence prenaient chaque année naissance sous sa direction magistrale. Les séminaires pour ses disciples avaient lieu dans sa chambre privée. Plein du criticisme envers lui-même, il était particulièrement indulgent envers ses élèves. Il apprenait avec joie leurs résultats, les aidait à développer leurs propres idées, en améliorait les unes et en suggérait d'autres. Il serait juste de faire signer également de son nom un bon nombre de travaux de ses élèves.

De caractère très droit, simple et serein, opposé à des compromis, réagissant à tout mal et privé de toute trâce de pose ou de présomption, il était un patriote ardent et un connaisseur excellent de l'histoire de son pays. La perte d'un tel homme de science et homme tout court est particulièrement douloureuse pour les mathématiciens polonais.

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE WITOLD WOLIBNER

[1] *Sur les ensembles des valeurs des fonctions analytiques, partout determinées, aux singularités ponctiformes, qu'elle admettent sur leurs ensembles singuliers*, Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie 25 (1932), p. 56-62.

[2] *Sur les points accessibles dans les ensembles fermés*, Mathematica 6 (1932), p. 124-131.

[3] *Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long*, Mathematische Zeitschrift 37 (1933), p. 698-726.

[4] *O stateczności podłużnej samolotu* [*Sur la stabilité en longueur d'un aéroplane*], Sprawozdanie z Prac Instytutu Technicznego Lotnictwa, Warszawa 1936.

[5] *Sur les coefficients des fonctions analytiques univalentes à l'extérieur d'un cercle*, Studia Mathematica 11 (1949), p. 126-132.

[6] *Sur le mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, entourant une courbe simple fermée*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 279-285.

[7] *Sur un polynôme d'interpolation*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 136-137.

[8] *Sur une relation entre les singularités des fonctions analytiques*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 182-185.

[9] *Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction analytique soit univalente*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 249-253.

[10] *Sur certains corollaires du théorème de Titchmarsh*, Studia Mathematica 14 (1953), p. 107-110.

[11] *Sur le mouvement des corps friables*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Cl. III, 4 (1956), p. 507-509.

[12] *Sur les fonctions dont les intégrales étendues aux surfaces sphériques sont nulles*, Colloquium Mathematicum 5 (1957), p. 66-68.

[13] *O pewnym wyznaczniku typu przekątniowego* [*Sur un déterminant du type diagonal*], Prace Matematyczne 4 (1960), p. 9-10.

[14] (publication posthume rédigée par A. Krzywicki) *Sur un problème de Lichtenstein dans la dynamique des milieux dépourvus de cohésion*, Colloquium Mathematicum 10 (1963), p. 345-352.

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 2

JAN ZAMORSKI

(27. XII. 1927 — 28. XII. 1961)

PAR

Z. CHARZYŃSKI (ŁÓDŹ) ET A. ZIĘBA (WROCŁAW)

Né le 27 décembre 1927 à Varsovie, Jan Zamorski acheva ses études secondaires au lycée clandestin de la ville de Żywiec sous l'occupation allemande de 1939-1944. En 1946 il s'inscrivit à l'Ecole Polytechnique de Varsovie qu'il quitta en 1948 pour la Faculté des Mathématiques, Physique et Chimie de l'Université et École Polytechnique de Wrocław (alors institution commune).

Devenu assistant des mathématiques à cette Faculté en 1950, il y fut nommé adjoint en 1956, tout en travaillant simultanément à l'Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences. En 1961 il obtint le grade de docteur des sciences mathématiques et physiques à l'Université de Wrocław, ayant soutenu sa thèse [4] (1) sur quelques propriétés extrémales des fonctions étoilées Il mourut subitement — et apparemment en pleine santé — le 28 décembre 1961 à Wrocław; presque à la veille de son agrégation.

La plupart des 13 travaux du docteur Jan Zamorski se rapporte aux estimations des coefficients des fonctions analytiques univalentes et aux problèmes qui s'y rattachent. Ce furent bien les questions qui intéressaient vivement le professeur Witold Wolibner dont le docteur Jan Zamorski était l'un des élèves.

Soit

$$s(\zeta) = \gamma\zeta + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\zeta} + \dots \quad \text{où} \quad |\zeta| > 1 \tag{1}$$

une fonction arbitraire étoilée, c'est-à-dire transformant d'une façon conforme l'extérieur du cercle-unité en une région étoilée au point ∞, donc contenant, avec chacun de ses points, le rayon qui l'unit au point ∞. Posons

$$\gamma_k/\gamma = x_k + iy_k \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \dots$$

(1) Les numéros entre crochets sont ceux des „Publications mathématiques de Jan Zamorski", ce fascicule, p. 364.

et considérons une expression réelle quelconque

$$E = E(x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n)$$

dépendant de n premiers coefficients de la fonction (1). Admettons enfin qu'elle est une fonction étoilée extrémale, à savoir que l'expression E atteint pour elle sa valeur maximum dans la classe de toutes les fonctions étoilées de la forme (1).

Zamorski a montré dans ses travaux [4] et [5] qu'on a alors trois théorèmes suivants:

1. *La fonction extrémale est de la forme*

$$s(\xi) = \xi \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{\sigma_k}{\zeta}\right)^{p_k} = \zeta + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\zeta} + \ldots \tag{2}$$

où $|\sigma_k| = 1$, $\beta_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{m} \beta_k = 2$ *et qu'elle transforme l'extérieur du cercle en plan entier sans, tout au plus,* $n+1$ *segments rectilignes sortant du point* 0.

2. *Les paramètres* σ_k *figurant dans* (2) *satisfont aux équations*

$$\begin{aligned} &A_{n+1}\sigma_j^{2n+2} + A_n\sigma_j^{2n+1} + \ldots + A_1\sigma_j^{n+2} + \lambda\sigma_j^{n+1} + \bar{A}_1\sigma_j^n + \ldots + \bar{A}_{n+1} = 0, \\ &(2n+2)A_{n+1}\sigma_j^{2n+1} + (2n+1)A_n\sigma^{2n} + \ldots + (n+1)\lambda\sigma_j^n + \\ &\quad + n\bar{A}_1\sigma_j^{n-1} + \ldots + \bar{A}_n = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

où

$$A_k = \frac{1}{k}\sum_{j=-1}^{n-k} \gamma_j \left(\frac{\partial E}{\partial x_{j+n}} - i\frac{\partial E}{\partial y_{j+n}}\right) \quad \text{et} \quad \gamma_n = x_n + iy_n. \tag{4}$$

3. *La fonction extrémale* (2) *satisfait au couple d'équations différentielles de la forme*

$$\frac{s'(\zeta)\zeta}{s(\zeta)} R_i(\zeta) = Q_i(\zeta) \quad \text{où} \quad i = i = 1 \text{ et } 2, \tag{5}$$

R_i *et* Q_i *étant certaines fonctions rationnelles aux coefficients qui s'expriment par des formules semblables à* (4).

Zamorski établit ces trois théorèmes en appliquant une méthode convenable du calcul des variations. Il est à noter que, peu avant Zamorski, une des équations (5) a été trouvée par Hummel (2) à l'aide d'une méthode différente.

(2) J. Hummel, *A variational method for starlike functions*, Proceedings of the American Mathematical Society 9 (1958), p. 82-87.

Grâce à la solution effective des équations (3) dans le cas où $E = x_1 = \mathrm{Re}(\gamma_1/\gamma)$ ou bien $E = x_2 = \mathrm{Re}(\gamma_2/\gamma)$, Zamorski parvint, d'ailleurs par un calcul difficile et bien ingénieux, aux estimations $|\gamma_1/\gamma| \leqslant 1$ et $|\gamma_2/\gamma| \leqslant 1/2$ pour les fonctions étoilées de la forme (1).

Des résultats analogues furent établis par Zamorski pour les classes de fonctions définies par la condition

$$\frac{\zeta\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)} = \alpha p\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \beta,$$

où les paramètres α et β sont réels et la fonction $p(1/\zeta) = 1 + \ldots$ est du type de Carathéodory (c'est-à-dire telle que $\mathrm{Re}\, p(1/\zeta) \geqslant 0$), de même que pour d'autres classes de fonctions asymétriques de ce genre. Ces résultats contiennent comme des cas particuliers des résultats antérieurs de Basilevitch [3] et Raede [4].

Il importe de remarquer que Zamorski créa par ses travaux [4], [5] et [8]-[10] un mode de procéder pour la classe des fonctions étoilées et pour des classes plus générales de structure analogue, un mode qui est fort efficace dans ce domaine et dans un certain sens le meilleur.

L'érudition et la passion pour la recherche scientifique, propres à sa personnalité, de même que le style original de son humour, n'ont été connus qu'à quelques personnes par suite de sa modestie exagérée et ses manières timides. Il s'intéressait cependant non seulement aux mathématiques, mais aussi bien à la littérature, au théâtre, à l'architecture, à l'histoire de l'art et de la culture, au tourisme et aux sports.

Le docteur Jan Zamorski était une individualité forte et riche. À écrire de lui un souvenir, il est difficile de se décider que faut-il avancer au premier plan: ses capacités intellectuelles remarquables ou sa bonté et sa complaisance dont tant d'amis et camarades ont eu l'occasion de bénéficier, ou plutôt ses mérites professionnelles, entendues au sens le plus large ...

---

[3] И. Е. Базилевич, *Об одном случае интегрируемости в квадратурах уравнения Левнера-Куфарева*, Математический Сборник 37 (1955), p. 471-476.

[4] M. O. Raede, *On close-to-convex functions*, Michigan Mathematical Journal 3 (1955-1956), p. 59-62.

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE JAN ZAMORSKI

[1] (avec A. Krzywicki, J. Rzewuski et A. Zięba), *Non-local problems in the calculus of variations (I)*, Annales Polonici Mathematici 2 (1955), p. 77-96.

[2] *Equations satisfied by the extremal schlicht functions with pole*, Annales Polonici Mathematici 3 (1956), p. 41-45.

[3] (avec A. Krzywicki, J. Rzewuski et A. Zięba), *Non-local problems in the calculus of variations (II)*, Annales Polonici Mathematici 4 (1957), p. 30-39.

[4] *Equations satisfied by the extremal starlike functions*, Annales Polonici Mathematici 5 (1958), p. 285-291.

[5] *Some remarks on the Hummel's equations*, Colloquium Mathematicum 7 (1959), p. 133-134.

[6] *Differential equations for the extremal starlike functions*, Annales Polonici Mathematici 7 (1960), p. 279-293.

[7] *The estimation of the third coefficient of the starlike functions with a pole*, Annales Polonici Mathematici 8 (1960), p. 185-191.

[8] *Remarks on a class of analytic functions*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 8 (1960), p. 377-380.

[9] *About the extremal spiral schlicht functions*, Annales Polonici Mathematici 9 (1960), p. 237-245.

[10] *Remarks on the extremal functions of a certain class of analytic functions*, Annales Polonici Mathematici 10 (1961), p. 247-252.

[11] *Oszacowanie współczynników funkcji należących do dwóch klas k-symetrycznych funkcji jednokrotnych* [*Estimation des coefficients des fonctions de deux classes de fonctions univalentes k-symétriques*], Prace Matematyczne 5 (1961), p. 101-105.

[12] *O istotnie rzeczywistych funkcjach meromorficznych* [*Sur les fonctions méromorphes essentiellement réelles*], Prace Matematyczne 6 (1961), p. 41-48.

[13] (avec E. Szczepankiewicz), *O funkcjach liniowo osiągalnych (prawie wypuklych) i prawie gwiaździstych* [*Sur les fonctions linéairement accessibles (presque convexes) et presque étoilées*], Prace Matematyczne 6 (1961), p. 141-148.

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XIII 1964 FASC. 1

TO CHARLES LOEWNER
WITH ADMIRATION

ON CONFORMALITY POINTS OF CERTAIN MAPPINGS PRESERVING LOCALLY THE AREA

BY

Z. CHARZYŃSKI AND J. ŁAWRYNOWICZ (ŁÓDŹ)

1. A mapping of the closed unit disc K onto itself given by the formulae

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{1}$$

will be called a *mapping preserving locally the area on the boundary*, if functions (1) belong to the class C^1 in an open set which includes K and if

$$u_x(x, y)v_y(x, y) - u_y(x, y)v_x(x, y) = 1 \tag{2}$$

for all points belonging to the boundary K^* of K.

A point (x_0, y_0) is said to be a *conformality point* of a mapping (1) belonging to C^1, if the derivatives u_x, u_y, v_x, v_y do not vanish simultaneously in (x_0, y_0) and if they satisfy there the Cauchy-Riemann equations

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \tag{3$_1$}$$

$$-u_y(x, y) = v_x(x, y). \tag{3$_2$}$$

A mapping (1), not necessarily belonging to the class C^1, will be called a *mapping preserving the boundary*, if for any point (x, y) of the circle K^* we have

$$u(x, y) = x, \tag{4$_1$}$$

$$v(x, y) = y. \tag{4$_2$}$$

The present paper concerns the problem of existence of conformality points for mappings transforming the disc K onto itself, preserving the boundary and locally the area on the boundary. We call them *J-mappings*. The fundamental result of this paper is formulated in Theorem 3.

2. Put

$$P = \{(x, y) \in K^* : v_x(x, y) = u_y(x, y) = 0\}.$$

We shall prove

LEMMA 1. *If* (1) *is a J-mapping, then the only meet points of the curve* (3_1) *with* K^* *are the points*

$$(5_1) \qquad (1,0), \quad (-1,0), \quad (0,1), \quad (0,-1)$$

and all points of the set P, *while the only meet points of the curve* (3_2) *with* K^* *not belonging to* P *are*

$$(5_2) \qquad (2^{-1/2}, 2^{-1/2}), \quad (-2^{-1/2}, -2^{-1/2}), \quad (2^{-1/2}, -2^{-1/2}),$$
$$(-2^{-1/2}, 2^{-1/2}).$$

Proof. If $x \neq 0$, then from (4) we get

$$u_x x_y + u_y = x_y, \quad v_x x_y + v_y = 1, \quad x x_y + y = 0,$$

for $(x,y) \in K^*$, whence

$$x_y = -y/x, \quad u_y = -(y/x)(1-u_x), \quad v_y = 1+(y/x)v_x,$$

which, in view of (2), yields

$$(6) \qquad u_x = 1-(y/x)v_x, \quad u_y = -(y/x)^2 v_x, \quad v_y = 1+(y/x)v_x$$

and thus

$$(7) \qquad v_y - u_x = 2(1/x)y v_x, \quad v_x + u_y = (1/x)^2(x+y)(x-y)v_x$$

for all $(x,y) \in K^*$.

Similarly, if $y \neq 0$ and $(x,y) \in K^*$, then from (4) we have

$$u_x + u_y y_x = 1, \quad v_x + v_y y_x = y_x, \quad x + y y_x = 0,$$

whence, in view of (2), we obtain

$$(8) \qquad u_x = 1+(x/y)u_y, \quad v_x = -(x/y)^2 u_y, \quad v_y = 1-(x/y)u_y$$

and, consequently,

$$(9) \qquad v_y - u_x = -2(1/y)x u_y, \quad v_x + u_y = -(1/y)^2(x+y)(x-y)u_y.$$

Relations (7) and (9) prove Lemma 1.

For any J-mapping and every $(x,y) \in K^*$ we get from (6) and (8):

1° if $x \neq 0$ and $y \neq 0$, then $v_x = 0$ is equivalent to $u_y = 0$,

2° if $x \neq 0$ and $y = 0$, then $u_y = 0$,

3° if $x = 0$ and $y \neq 0$, then $v_x = 0$.

From Lemma 1 we get also immediately

THEOREM 1. *If* (1) *is a J-mapping, then each point of the set* P *is a conformality point of* (1).

In this way the problem has been solved easily when the set P is not empty. The opposite case, which is essential, will be considered in the sequel.

3. In this part we shall consider branches of curves (3_1) and (3_2) passing through the points (5_1) and (5_2), respectively (comp. Fig. 1).

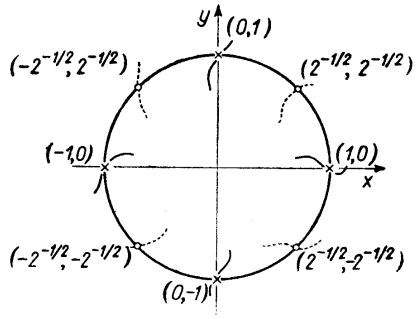


Fig. 1

LEMMA 2. *If* (1) *is a J-mapping of the class* C^2 *and if the set* P *is empty, then each of the points* (5_1) *is a regular* [1] *point of the curve* (3_1) *and the branch of curve* (3_1), *passing through this point, always enters* [2] *the interior of* K; *similarly, each of the points* (5_2) *is a regular point of the curve* (3_2) *and the branch of curve* (3_2), *passing through this point, always enters the interior of* K.

Proof. To prove the Lemma it is sufficient to verify that in any of the points (5_1) and (5_2) the derivative of the corresponding function, i. e. of $v_y - u_x$ or of $v_x + u_y$, in the direction of one of the semitangents to the circle K^* does not vanish. This derivative may be expressed as

$$(v_y - u_x)_y \text{ for points } (1,0), (-1,0),$$

$$(v_y - u_x)_x \text{ for points } (0,1), (0,-1),$$

$$2^{-1/2}(v_x + u_y)_x - 2^{-1/2}(v_x + u_y)_y \text{ for points } (2^{-1/2}, 2^{-1/2}), (-2^{-1/2}, -2^{-1/2}),$$

$$2^{-1/2}(v_x + u_y)_x + 2^{-1/2}(v_x + u_y)_y \text{ for points } (2^{-1/2}, -2^{-1/2}), (-2^{-1/2}, 2^{-1/2}).$$

Consider at first the curve (3_1) at the points (5_1).

---

[1] Under a *regular point* of the curve $F(x, y) = 0$, where $F \in C^1$, we understand here a point at which at least one of the derivatives F_x and F_y does not vanish.

[2] "enters" means here that the tangent to a branch in the corresponding point of K^* is not simultaneously tangent to K^*.

If $x \neq 0$, then from (6) we get

$$
\begin{aligned}
v_{xy}x_y + v_{yy} &= (1/x)v_x - y(1/x)^2 x_y v_x + y(1/x)v_{xx}x_y + y(1/x)v_{xy},\\
u_{xx}x_y + u_{xy} &= -(1/x)v_x + y(1/x)^2 x_y v_x - y(1/x)v_{xx}x_y - y(1/x)v_{xy},\\
u_{xy}x_y + u_{yy} &= -2y(1/x)^2 v_x + 2y^2(1/x)^3 x_y v_x - y^2(1/x)^2 v_{xx}x_y -\\
&\qquad - y^2(1/x)^2 v_{xy}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Hence putting $y = 0$ and taking in account that (in view of $x_y = -y/x$) $x_y = 0$, we have

$$v_{yy} = (1/x)v_x, \qquad u_{xy} = -(1/x)v_x, \qquad u_{yy} = 0$$

and, in consequence,

$$(v_y - u_x)_y = (2/x)v_x \neq 0. \tag{11}$$

Analogously, for $x = 0$, $y \neq 0$, in virtue of $y_x = -x/y$ and (8) we easily obtain

$$u_{xx} = (1/y)u_y, \qquad v_{xx} = 0, \qquad v_{xy} = -(1/y)u_y$$

and, in consequence,

$$(v_y - u_x)_x = -(2/y)u_y \neq 0. \tag{12}$$

Consider in turn the curve (3_2) at points (5_2).

Suppose at first that $y = x$. Then, in view of $x_y = -y/x$, the system of equations (10) takes the form

$$
\begin{aligned}
-v_{xy} + v_{yy} &= (2/x)v_x - v_{xx} + v_{xy},\\
-u_{xx} + u_{xy} &= -(2/x)v_x + v_{xx} - v_{xy},\\
-u_{xy} + u_{yy} &= -(4/x)v_x + v_{xx} - v_{xy},
\end{aligned}
$$

whence

$$2^{-1/2}(v_x + u_y)_x - 2^{-1/2}(v_x + u_y)_y = 2^{1/2}(2/x)v_x \neq 0. \tag{13}$$

Let now $y = -x$. Then, in view of $y_x = -x/y$, we have similarly

$$
\begin{aligned}
v_{xy} + v_{yy} &= (2/x)v_x - v_{xx} - v_{xy},\\
u_{xx} + u_{xy} &= -(2/x)v_x + v_{xx} + v_{xy},\\
u_{xy} + u_{yy} &= (4/x)v_x - v_{xx} - v_{xy},
\end{aligned}
$$

whence

$$2^{-1/2}(v_x + u_y)_x + 2^{-1/2}(v_x + u_y)_y = 2^{1/2}(2/x)v_x \neq 0. \tag{14}$$

Thus Lemma 2 is proved.

4. According to Lemma 2 there are four different points on K^* through which regular branches of the curve (3_1) pass and there are four other different points on K^* which are initial points of regular branches of the curve (3_2). There arises the problem of continuability and course of these branches inside of the disc K. Here we shall confine ourselves to the investigation of a certain subclass of the J-mappings.

We distinguish three following subclasses of mappings of the disc K onto itself:

(i) mappings of the class C^2 in K such that the system of the equations

$$(15_1) \qquad u_x(x, y) = v_y(x, y),$$

$$(15_2) \qquad u_{xx}(x, y) = v_{xy}(x, y),$$

$$(15_3) \qquad u_{xy}(x, y) = v_{yy}(x, y)$$

has no solutions in the interior of K, while the systems of (15_1) and (15_2) and of (15_1) and (15_3) have a finite number of solutions in the interior of K,

(ii) mappings of the class C^2 in K such that the system of three equations

$$(16_1) \qquad -u_y(x, y) = v_x(x, y),$$

$$)16_2) \qquad -u_{xy}(x, y) = v_{xx}(x, y),$$

$$(16_3) \qquad -u_{yy}(x, y) = v_{xy}(x, y)$$

has no solutions in the interior of K, while the systems of (16_1) and (16_2) and of (16_1) and (16_3) have in the interior of K a finite number of solutions,

(iii) mappings that fulfil simultaneously conditions (i) and (ii).

In the sequel mappings (iii) will be called *regular*.

LEMMA 3. *There exist regular J-mappings such that the set P is empty.*

Proof. Consider the uniparametric family of mappings of K onto itself

$$(17) \qquad \begin{aligned} u^*(t, x, y) &= x\cos(1-x^2-y^2) - y\sin(1-x^2-y^2) + tx(1-x^2-y^2)^2, \\ v^*(t, x, y) &= x\sin(1-x^2-y^2) + y\cos(1-x^2-y^2) + tx(1-x^2-y^2)^2 \end{aligned}$$

where $t > 0$. It can be easily verified that for sufficiently small t all mappings of this family are J-mappings and that for each of them the set P is empty. There remains to prove that condition (iii) is also fulfilled for any $t > 0$.

At first, we prove that for any $t > 0$, sufficiently small, the systems of equations

$$(18_1) \qquad v^*_y(t, x, y) - u^*_x(t, x, y) = 0,$$

$$(18_2) \qquad v^*_{xy}(t, x, y) - u^*_{xx}(t, x, y) = 0,$$

$$(18_3) \qquad v^*_{yy}(t, x, y) - u^*_{xy}(t, x, y) = 0$$

and

$$(19_1) \qquad v^*_x(t, x, y) + u^*_y(t, x, y) = 0,$$

$$(19_2) \qquad v^*_{xx}(t, x, y) + u^*_{xy}(t, x, y) = 0,$$

$$(19_3) \qquad v^*_{xy}(t, x, y) + u^*_{yy}(t, x, y) = 0$$

have no solutions in the interior of K.

Suppose the contrary. Then there exist numbers $t_n > 0$, $t_n \to 0$ such that one of the systems (18) and (19) has a solution $x = x_n$, $y = y_n$ for $t = t_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Suppose that it holds for (18); for (19) our reasoning would be analogous. It is possible to assume, choosing eventually subsequences, that the points (x_n, y_n) tend to a certain limit point (x_0, y_0). Then the system (18) is satisfied for $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$. This, however, implies $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, as it is easily seen. Thus by the mean value theorem we have

$$(v^*_{yt} - u^*_{xt})t_n + (v^*_{xy} - u^*_{xx})x_n + (v^*_{yy} - u^*_{xy})y_n = 0,$$

$$(v^*_{xyt} - u^*_{xxt})t_n + (v^*_{xxy} - u^*_{xxx})x_n + (v^*_{xyy} - u^*_{xxy})y_n = 0,$$

$$(v^*_{yyt} - u^*_{xyt})t_n + (v^*_{xyy} - u^*_{xxy})x_n + (v^*_{yyy} - u^*_{xyy})y_n = 0,$$

where the values of partial derivatives are taken at certain points depending on n and situated on the segment connecting $(0, 0, 0)$ and (t_n, x_n, y_n). Hence

$$\begin{vmatrix} v^*_{yt} - u^*_{xt} & v^*_{xyt} - u^*_{xxt} & v^*_{yyt} - u^*_{xyt} \\ v^*_{xy} - u^*_{xx} & v^*_{xxy} - u^*_{xxx} & v^*_{xyy} - u^*_{xxy} \\ v^*_{yy} - u^*_{xy} & v^*_{xyy} - u^*_{xxy} & v^*_{yyy} - u^*_{xyy} \end{vmatrix} = 0.$$

By letting $n \to \infty$ and in view of (18_2) and (18_3) we get

$$(20) \qquad \begin{vmatrix} v^*_{xxy} - u^*_{xxx} & v^*_{xyy} - u^*_{xxy} \\ v^*_{xyy} - u^*_{xxy} & v^*_{yyy} - u^*_{xyy} \end{vmatrix} = 0$$

or

$$(21) \qquad v^*_{yt} - u^*_{xt} = 0,$$

where the values of partial derivatives are taken at the point $(0, 0, 0)$. Now, from (17) we get at the point $(0, x, y)$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(v^*_y - u^*_x) &= (y^2-x^2)\sin(1-x^2-y^2) - 2xy\cos(1-x^2-y^2)\\ &= (y^2-x^2)\sin 1 - 2xy\cos 1 + O(x^4+2x^2y^2+y^4),\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{4}(v^*_y - u^*_x)_x = -x\sin 1 - y\cos 1 + O(x^2+y^2),$$

$$\tfrac{1}{4}(v^*_y - u^*_x)_y = y\sin 1 - x\cos 1 + O(x^2+y^2).$$

Therefore at the point $(0, 0, 0)$ one has

$$(22)\quad (v^*_y - u^*_x)_{xx} = -4\sin 1, \quad (v^*_y - u^*_x)_{xy} = -4\cos 1, \quad (v^*_y - u^*_x)_{yy} = 4\sin 1$$

and, in consequence, the determinant at the left-hand side of (20) is equal to -16. Hence (21) must hold. But $u^*_t = v^*_t = x(1-x^2-y^2)^2$ and so we have $u^*_{xt} = 1$ and $v^*_{yt} = 0$ at the point $(0, 0, 0)$, which contradicts formula (21).

Let us now prove that for sufficiently small $t > 0$ the systems of equations (a) (18_1), (18_2); (b) (18_1), (18_3); (c) (19_1), (19_2); (d) (19_1), (19_3) have at most a finite number of solutions in the interior of K. We prove it only for the system (a); in the remaining cases the reasoning runs analogously.

Suppose that there are numbers $t'_n > 0$, $t'_n \to 0$ such that the system (a) has infinitely many different solutions (x'_{mn}, y'_{mn}), $m = 1, 2, \ldots$, inside K and that for every n the points (x'_{mn}, y'_{mn}) tend to a certain limiting point (x'_n, y'_n), and the points (x'_n, y'_n) to a certain point (x'_0, y'_0) (we can assume the validity of the latter conditions by eventually choosing subsequences). We shall show at first that $(x'_0, y'_0) \neq (0, 0)$. By the mean value theorem we have

$$\begin{aligned}(v^*_{xy} - u^*_{xx})(x'_{mn} - x'_n) + (v^*_{yy} - u^*_{xy})(y'_{mn} - y'_n) &= 0,\\ (v^*_{xxy} - u^*_{xxx})(x'_{mn} - x'_n) + (v^*_{xyy} - u^*_{xxy})(y'_{mn} - y'_n) &= 0,\end{aligned}$$

where the values of partial derivatives are taken at certain points situated on the segment connecting (t'_n, x'_n, y'_n) and (t'_n, x'_{mn}, y'_{mn}). Hence

$$\begin{vmatrix} v^*_{xy} - u^*_{xx} & v^*_{xxy} - u^*_{xxx} \\ v^*_{yy} - u^*_{xy} & v^*_{xyy} - u^*_{xxy} \end{vmatrix} = 0.$$

For $m \to \infty$ in view of (18_2) we get $v^*_{xxy} = u^*_{xxx}$ or $v^*_{yy} = u^*_{xy}$, where the values of partial derivatives are taken at the point (t'_n, x'_n, y'_n). If we had $x'_0 = 0$ and $y'_0 = 0$, then $v^*_{xxy} = u^*_{xxx}$ would yield a contradiction with (22) for $n \to \infty$. Similarly, if we had $v^*_{yy} = u^*_{xy}$, then the point

(t'_n, x'_n, y'_n) would satisfy the system of equations (18), which is impossible as it was already proved. Thus $x'_0 \neq 0$ or $y'_0 \neq 0$. But it can be easily verified that in this case the system of values $t = 0$, $x = x'_0$, $y = y'_0$ does not satisfy the equation (18_3) i. e. at this point $(v^*_y - u^*_x)_y \neq 0$. Hence it follows that in a certain neighbourhood of the point $(0, x'_0)$ there exists a function $y = f(t, x)$ analytic in both variables, t and x, and such that the equations

$$v^*_y(t, x, y) - u^*_x(t, x, y) = 0, \quad y = f(t, x) \tag{23}$$

are equivalent in a certain neighbourhood of the point $(0, x'_0, y'_0)$. Now, according to the definition of sequences $\{t'_n\}$, $\{(x'_{mn}, y'_{mn})\}$, one has

$$v^*_y(t'_n, x'_{mn}, y'_{mn}) - u^*_x(t'_n, x'_{mn}, y'_{mn}) = 0, \tag{24_1}$$

$$v^*_{xy}(t'_n, x'_{mn}, y'_{mn}) - u^*_{xx}(t'_n, x'_{mn}, y'_{mn}) = 0 \tag{24_2}$$

for all indices m, n. Thus, taking into account the properties of these sequences, we obtain from (24_1)

$$y'_{mn} = f(t'_n, x'_{mn}) \tag{25}$$

for sufficiently large n and m. Hence and from (24_2) it follows

$$v^*_{xy}\big(t'_n, x'_{mn}, f(t'_n, x'_{mn})\big) - u^*_{xx}\big(t'_n, x'_{mn}, f(t'_n, x'_{mn})\big) = 0. \tag{26}$$

Then, putting

$$F_{t'_n}(x) = v^*_{xy}\big(t'_n, x, f(t'_n, x)\big) - u^*_{xx}\big(t'_n, x, f(t'_n, x)\big) \tag{27}$$

in a suitable neighbourhood of the point x'_0, we see, in view of (26), that for n sufficiently large, the analytic function (27) of one variable x vanishes in a sequence of points x'_{mn} $(m = 1, 2, \ldots)$. Let us prove that for sufficiently large n there are among these points infinitely many different ones. In fact, in the opposite case the sequence $\{x'_{mn}\}$ would contain, for arbitrary large n, infinitely many identic terms $x'_{m_j n}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Consequently, in view of (25), for sufficiently large j the terms

$$y'_{m_j n} = f(t'_n, x'_{m_j, n}) \quad (j = 1, 2, \ldots) \tag{28}$$

would be also identic against the assumption that the sequences $\{(x'_{mn}, y'_{mn})\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ consist of different terms. Thus, for large n, the (analytic) functions (27) would vanish at infinitely many points, whence they would be identically zero. Therefore, for $n \to \infty$ we had

$$v^*_{xy}\big(0, x, f(0, x)\big) - u^*_{xx}\big(0, x, f(0, x)\big) = 0 \tag{29}$$

in a suitable neighbourhood V of x_0. Moreover, from (23), we had in V

$$v^*_y\big(0, x, f(0, x)\big) - u^*_x\big(0, x, f(0, x)\big) = 0. \tag{30}$$

We easily deduce from (17) that the equations (30) and (29) yield the following identities in V:

$$(f^2-x^2)\sin(1-x^2-f^2)-2xf\cos(1-x^2-f^2)=0,$$

$$-(x+2x^2f)\sin(1-x^2-f^2)-(f-x^3+xf^2)\cos(1-x^2-f^2)=0,$$

where $f=f(0,x)$. From each of the above identities it follows that f is a transcendent function. On the other hand, eliminating from them $\sin(1-x^2-f^2)$ and $\cos(1-x^2-f^2)$, we conclude that f is an algebraic function which yields the desired contradiction. Thus the system of equations (18_1), (18_2) has at most a finite number of solutions inside K, and Lemma 3 is proved.

5. In this part we shall solve the problem of continuability of the branches discussed in Lemma 2 inside K for J-mappings which fulfil conditions (i) or (ii).

LEMMA 4. 1° *If* (1) *is a J-mapping which fulfils conditions* (i) *and for which the set P is empty, then equation* (3_1) *is satisfied along two disjoint regular arcs lying inside K except their end points, issuing from* $(1,0)$ *and* $(-1,0)$ *respectively and ending either in* $(0,1)$ *and* $(0,-1)$ *or in* $(0,-1)$ *and* $(0,1)$.

2° *If* (1) *is a J-mapping which fulfils conditions* (ii) *and for which the set P is empty, then equation* (3_2) *is satisfied along two disjoint regular arcs lying inside K except their end points, issuing from* $(2^{-1/2},2^{-1/2})$ *and* $(-2^{-1/2},-2^{-1/2})$ *respectively and ending either in* $(-2^{-1/2},2^{-1/2})$ *and* $(2^{-1/2},-2^{-1/2})$ *or in* $(2^{-1/2},-2^{-1/2})$ *and* $(-2^{-1/2},2^{-1/2})$.

Proof. We shall prove only the first part, the proof of the second being quite analogous. We shall apply here a method similar to that used by Charzyński [3].

Consider the following system of differential equations:

$$\begin{aligned} dx/dt &= \varepsilon[v_{yy}(x,y)-u_{xy}(x,y)],\\ dy/dt &= \varepsilon[u_{xx}(x,y)-v_{xy}(x,y)] \end{aligned} \qquad (t\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1) \tag{31}$$

with the initial conditions

$$x(0)=1, \quad y(0)=0 \tag{32_1}$$

or

$$x(0)=-1, \quad y(0)=0, \tag{32_2}$$

where the equation $x^2+y^2=1$ is admissible only for $t=0$ and $\varepsilon=1$ or -1 has to be so chosen that the speed vector $(x'(0),y'(0))$ at the ini-

[3] Z. Charzyński, *Uniformisation des fonctions. Remarque sur les courbes planes*, Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź IX (8) (1958), p. 1-12, especially p. 3-7.

tial point be directed towards the interior of K. From Lemma 2 it follows that this is always possible (comp. (11)).

We confine ourselves for the moment to the system (31-32$_1$). Let us notice that, in view of Lemma 1, this system has a first integral of the form

$$v_y(x, y) - u_x(x, y) = v_y(x(0), y(0)) - u_x(x(0), y(0)) = 0. \tag{33}$$

Next we observe that (31-32$_1$) has at most one integral solution. In fact, in view of (i) and since (33) is the first integral, the right-hand sides of (31) do not vanish simultaneously along the integral curves of (31-32$_1$). Hence we infer immediately that every solution of (31-32$_1$) satisfies the equations

$$y = f(x), \tag{34$_1$}$$

$$dx/dt = \varepsilon[v_{yy}(x, f(x)) - u_{xy}(x, f(x))] \tag{34$_2$}$$

or the equations

$$x = g(y), \tag{35$_1$}$$

$$dy/dt = \varepsilon[u_{xx}(g(y), y) - v_{xy}(g(y), y)] \tag{35$_2$}$$

in some neighbourhood of any of its points (t_0, x_0, y_0), where the right-hand sides of (34$_1$) resp. (35$_1$) denote implicit functions defined by the first integral (33) in a neighbourhood of (x_0, y_0). From the local uniqueness of solutions of the system (34) resp. (35) passing through (t_0, x_0, y_0) we easily deduce the uniqueness of solutions of (31-32$_1$) in the local sense and, consequently, also in the integral sense.

Now we see, owing to a well-known existence theorem, that the system (31-32$_1$) has exactly one integral solution $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$, $0 \leqslant t < t_1$. Moreover, to distinct values of t' and t'' there correspond distinct values of each of the functions $x_1(t)$ and $y_1(t)$ (see Charzyński, loc. cit. ([3]), p. 5).

We now show that $t_1 < \infty$. In fact, since the systems (15$_1$), (15$_2$) and (15$_1$), (15$_3$) have only a finite number of solutions, we conclude by (31) that $x_1'(t) \neq 0$ and $y_1'(t) \neq 0$ except for a finite set. Therefore, if our solution were defined for all $t \geqslant 0$, there would exist limits

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = a, \quad \lim_{t\to\infty} y_1(t) = b,$$

where $a, b \in K$, and, in view of (33) and (31), we had

$$u_x(a, b) = v_y(a, b) \tag{36}$$

and (see Charzyński, loc. cit. (3), p. 6)

$$\lim_{t\to\infty} x_1'(t) = v_{yy}(a,b) - u_{xy}(a,b) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} y_1'(t) = u_{xx}(a,b) - v_{xy}(a,b) = 0,$$

against condition (i).

Since $t_1 < \infty$ and since the derivatives $x_1'(t), y_1'(t)$ are bounded, there exist limits

$$\lim_{t\to t_1} x_1(t) = x_1(t_1), \qquad \lim_{t\to t_1} y_1(t) = y_1(t_1)$$

and the point $(x_1(t_1), y_1(t_1))$ must be situated on the circle K^*. The supposition that

$$x_1(t_1) = x_1(0) = 1, \qquad y_1(t_1) = y_1(0) = 0 \tag{37}$$

leads to a contradiction which can be shown, in account of Lemma 2, by a reasoning analogous to that used by Charzyński, loc. cit. (3), p. 7. Hence, as the functions (1) are of the class C^2, we infer from (31) that $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are of the class C^1; so they determine a regular arc in the closed interval

$$x = x_1(t), \qquad y = y_1(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{38}$$

Notice that according to (33) and (36) equation (3_1) is satisfied along arc (38). So there remains only to investigate the end of this arc.

In virtue of Lemma 1 and (3_1) we have only the following possibilities (as (37) has been eliminated):

$$x_1(t_1) = 0, \qquad y_1(t_1) = 1,$$

$$x_1(t_1) = 0, \qquad y_1(t_1) = -1,$$

$$x_1(t_1) = -1, \qquad y_1(t_1) = 0.$$

We show that the third of them cannot occur. In fact, assume the contrary. Then, reasoning similarly as in the case of (38), we can prove the existence of a regular arc

$$x = \hat{x}(t), \qquad y = \hat{y}(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant \hat{t}), \tag{39}$$

issuing e. g. from $(0,1)$ (resp. $(0,-1)$), situated inside K, except its end points, and such that (3_1) is also satisfied along (39). Moreover, none of the arcs (38) and (39) can contain the other, since in this case it would contain at least three points $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ on K^*. It follows that the arcs (38) and (39) must be disjoint, since in the opposite case there would exist meet points of (38) and (39) such that in some neigh-

bourhood of them these arcs would be locally different. This, however, cannot occur, since in view of (i) they are both locally gemetrically defined in K by (31). On the other hand, arc (38), which connects $(1, 0)$ and $(-1, 0)$ in K, and arc (39), which connects $(0, 1)$ with one of the points $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ in K, evidently always have common points, which yields a contradiction. In this way the third case is excluded and thus only first and second cases are possible.

In the same way we prove the desired properties of the arc

$$x = x_2(t), \quad y = y_2(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant t_2), \tag{40}$$

which corresponds to system (31)-(32_2). So there remains to show that the arcs (38) and (40) are disjoint, in particular that each of the cases

$$x_1(t_1) = x_2(t_2) = 0, \quad y_1(t_1) = y_2(t_2) = 1,$$

$$x_1(t_1) = x_2(t_2) = 0, \quad y_1(t_1) = y_2(t_2) = -1,$$

is impossible. We show this by a reasoning similar to that concerning arcs (38) and (39). Consequently, arcs (38) and (40) have all properties required by Lemma 4 and thus the first part of this Lemma is proved. As announced above, we omit the proof of the second part of Lemma 4.

6. We shall now investigate meet points of the arcs defined in the parts 1° and 2° of Lemma 4, which we will call shortly arcs of first and second type respectively.

Considering first the arcs of the second type we see that each of the points (5_2) is connected by some of them with one of the remaining points (5_2). Further, considering the arcs of the first type we see that the following cases are possible (comp. Fig. 2):

1. One of the arcs connects $(1, 0)$ and $(0, 1)$ while the second of them connects $(-1, 0)$ and $(0, -1)$. Then the first one disconnects K between $(2^{-1/2}, 2^{-1/2})$ and the remaining three points from (5_2); consequently this arc must have meet points with that arc of the second type which connects $(2^{-1/2}, 2^{-1/2})$ with one of the remaining points (5_2). The second arc disconnects K analogously between the antipodal point $(-2^{-1/2}, -2^{-1/2})$ and the remaining ones from (5_2) and, consequently, it must have meet points with that arc of the second type which connects $(-2^{-1/2}, -2^{-1/2})$ with one of the remaining points (5_2). Thus, in any case, there exist at least two meet points of the arcs of the first type with the arcs of the second type.

2. One of the arcs connects $(1, 0)$ and $(0, -1)$ while the second of them connects $(-1, 0)$ and $(0, 1)$. Reasoning in an analogous way as in the first case we show again that there exist at least two meet points of the arcs of the first type with the arcs of the second type.

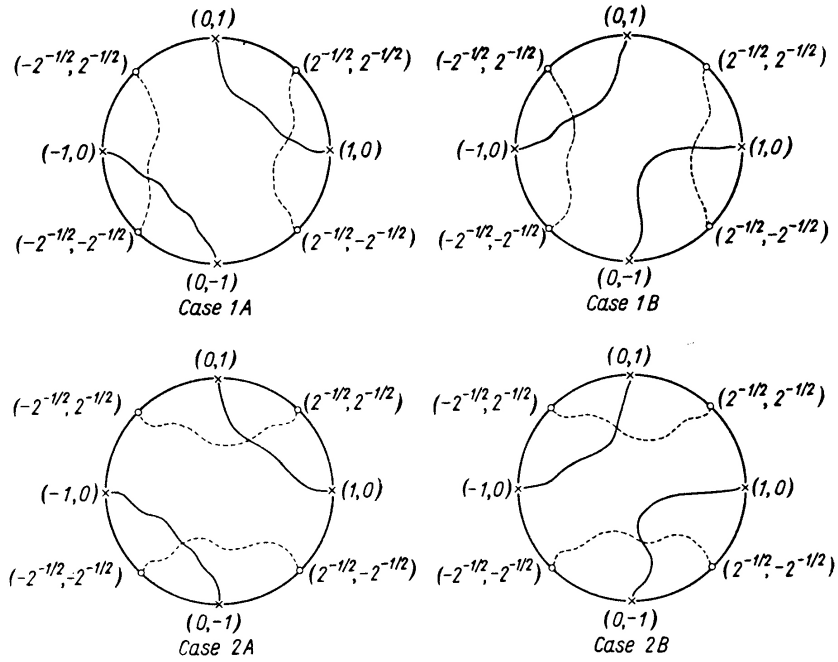


Fig. 2

Notice now that since the Cauchy-Riemann equations (3_1) and (3_2) are satisfied along the arcs of the first and of the second type, the meet points of these arcs are conformality points of mapping (1). Thus we have

THEOREM 2. *Any regular* (4) *J-mapping* (1) *such that the set* P *is empty, has at least two conformality points inside* K.

From Theorems 1 and 2 follows immediately

THEOREM 3. *Any regular J-mapping* (1) *has at least one conformality point in the closed unit disc* K.

7. The obtained result enlightens the hypothesis of Loewner according to which any one-to-one mapping of the unit disc K onto itself, belonging to the class C^1, preserving the boundary and satisfying inside of K relations (2), has at least one conformality point in the interior of K.

(4) The regular mapping was defined on p. 85.

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 30. 12. 1963

BULLETIN

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ
1966 Vol. XVII. 1

Zygmunt Charzyński, Janina Śladkowska

Remarques sur l'approximation de l'arc simple par les arcs brisés, réguliers et arcs analytiques

La nécessité d'approximation dans le sens de représentation paramétrique de l'arc de Jordan par les arcs simples du type donné apparait lors de la solution de quelques problèmes de la théorie de fonctions analytiques. Toutefois, il est difficile de trouver dans la littérature une démonstration complète de possibilités de telles approximations. Il semble donc juste que les théorèmes correspondants et démonstrations complètes soient distinctement donnés. La présente note, ne prétendant pas à l'originalité des méthodes, sert justement à ce but.

Soit

$$J: \quad z = j(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{1}$$

un arc arbitraire de Jordan.

I. Occupons nous en premier lieu de l'approximation de l'arc de Jordan (1) par les arcs brisés. Démontrons le théorème suivant:

Théorème 1. Pour l'arc (1) et un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$ il existe un arc brisé sans points multiples

$$L: \quad z = l(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{2}$$

tel que l'inégalité

$$|j(t) - l(t)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \tag{3}$$

a lieu.

Démonstration. $\eta > 0$ étant un nombre arbitraire. En vertu de la continuité uniforme de la fonction $j(t)$ dans l'intervalle $< \alpha, \beta >$, il existe un nombre $\xi > 0$ tel que pour $t', t'' \in < \alpha, \beta >$ et

$$|t' - t''| < \xi \tag{4}$$

l'inégalité

$$|j(t') - j(t'')| < \eta \tag{5}$$

a lieu.

Pour le nombre $\sigma > 0$ arbitraire il existe dans la suite le nombre $\tau > 0$, tel que si

$$|j(t') - j(t'')| < \tau, \tag{6}$$

alors pour tout $t \in < t', t'' >$ sont remplies les inégalités

$$|j(t) - j(t')| < \sigma \quad \text{et} \quad |j(t) - j(t'')| < \sigma. \tag{7}$$

En effet, il existe $\omega > 0$, tel que si $t', t'' \epsilon < \alpha, \beta >$ et $|t'-t''| < \omega$, alors pour $t \epsilon < t', t'' >$ sont remplies les inégalités (7). De la continuité uniforme de la fonction inverse $j^{-1}(z)$, $z \epsilon J$, il resulte par contre: pour le nombre ω il existe le nombre $\tau > 0$, tel que si $|j(t')-j(t'')| < \tau$, alors $|t'-t''| < \omega$.

Soit plus loin

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta$$

une division de l'intervalle $<\alpha, \beta>$ tel que

$$t_{k+1}-t_k < \xi; \tag{8}$$

si donc P_k, $k = 0, \ldots, m$, sont des points de l'arc (1) correspondants aux valeurs du paramètre t_k, alors

$$\varrho(P_k, P_{k+1}) < \eta, \tag{9}$$

Distinguons ici deux méthodes de l'approximation de l'arc (1) par les arcs brisés.

Première méthode. Approximation par la ligne brisée construite avec les côtés du réseau carré.

Soit $\mathfrak{S}$ un réseau carré ayant le côté

$$d = \frac{1}{10} \min_{k=0,\ldots,m-1} \varrho(P_k, P_{k+1}),$$

donc en vertu de (9)

$$0 < d < \frac{1}{10}\eta. \tag{10}$$

Pour tout P_k il existe un sommet du réseau le plus proche. Désignons le par Q_k[1]. Il est évident qu'il est situé à une distance de P_k moindre que la longueur du côté du réseau, donc

$$\varrho(P_k, Q_k) < d. \tag{11}$$

En particulier

$$\varrho(P_k, Q_k) < \frac{1}{10}\varrho(P_k, P_{k+1}),$$

d'où

$$\varrho(Q_k, Q_{k+1}) \geqslant \varrho(P_k, P_{k+1}) - \varrho(P_k, Q_k) - \varrho(P_{k+1}, Q_{k+1}) > \frac{8}{10}\varrho(P_k, P_{k+1}) > 0,$$

soit $Q_k \neq Q_{k+1}$. Réunissons à présent Q_k avec Q_{k+1} à l'aide de deux segments du réseau: Re z = const, et Im z = const, qui forment des cathètes du triangle, dans lequel Q_kQ_{k+1} est une hypothénuse[2]. Q_k sont les sommets du réseau $\mathfrak{S}$ et les segments qui les réunissent se composent d'un nombre entier des côtés du réseau. Ainsi se forme la ligne brisée $\hat{L}_1$, que nous

[1] Il se peut qu'il y a plus d'un sommet du réseau le plus proche du point P_k, alors nous choisissons un de ces sommets quelconque.

[2] On peut le faire de deux façons, nous en choisissons un quelconque.

paramétriserons de la façon suivante: aux points Q_k nous subordonnons la valeur t_k du paramètre, aux points de la ligne brisée Q_kQ_{k+1} nous attribuons par contre de telles valeurs du paramètre, afin que lorsque le point parcourre la ligne brisée depuis Q_k à Q_{k+1}, le paramètre de ce point varie d'une façon continue et monotone depuis t_k à t_{k+1}. Posons

$$\hat{L}_1: \quad z = \hat{l}_1(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{12}$$

Nous vérifions sans difficulté que la ligne brisée $\hat{L}_1$ approxime dans le sens du paramètre l'arc J. En effet, pour $t = t_k$, en vertu des (11) et (10), nous avons

$$|j(t_k) - \hat{l}_1(t_k)| = \varrho(P_k, Q_k) < \frac{1}{10}\eta. \tag{13}$$

Si par contre $t_k < t < t_{k+1}$, alors, des (8), (4) et (5), il résulte

$$|j(t) - j(t_k)| < \eta, \tag{14}$$

et, vu (11), (10) et (9) —

$$|\hat{l}_1(t) - \hat{l}_1(t_k)| \leqslant |\hat{l}_1(t_{k+1}) - \hat{l}_1(t_k)| = \varrho(Q_k, Q_{k+1}) \tag{15}$$

$$\leqslant \varrho(Q_k, P_k) + \varrho(P_k, P_{k+1}) + \varrho(P_{k+1}, Q_{k+1}) < \frac{1}{10}\eta + \eta + \frac{1}{10}\eta = 1\frac{2}{10}\eta.$$

En définitive donc, (14), (13) et (15) donnent

$$|j(t) - \hat{l}_1(t)| \leqslant |j(t) - j(t_k)| + |j(t_k) - \hat{l}_1(t_k)| \tag{16}$$

$$+ |\hat{l}_1(t_k) - \hat{l}_1(t)| < \eta + \frac{1}{10}\eta + 1\frac{2}{10}\eta = 2\frac{3}{10}\eta.$$

Seconde méthode. Approximation à l'aide de la ligne brisée inscrite dans l'arc.

Soit à present $\hat{L}_2$ étant une ligne brisée construite à l'aide de jonction par des segments des points $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Nous paramétrisons la ligne brisée $\hat{L}_2$, en subordonnant aux points P_k les valeurs t_k du paramètre et aux points du segment P_kP_{k+1} — de telles valeur du paramètre afin que, lorsque le point parcourre ce segment depuis P_k à P_{k+1}, le paramètre qui lui est subordonné varia d'une façon continue et monotone depuis t_k à t_{k+1}; posons

$$\hat{L}_2: \quad z = l_2(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{17}$$

Pour $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, des (5), (1), (2) et (6), nous déduisons tout de suite

$$|j(t) - \hat{l}_2(t)| \leqslant |j(t) - j(t_k)| + |j(t_k) - \hat{l}_2(t_k)| \tag{18}$$

$$+ |\hat{l}_2(t_k) - \hat{l}_2(t)| < \eta + \varrho(P_k, P_k) + \varrho(P_k, P_{k+1}) < 2\eta.$$

Soit à présent

$$\hat{L}: \quad z = \hat{l}(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{19}$$

signifie la ligne brisée (12) ou (17). Nous déduisons des inégalités (16) et (18) que

$$|j(t)-\hat{l}(t)| < 3\eta \quad \text{pour} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{20}$$

Remarquons en outre que

$$|t'-t''| < \xi \quad \text{entraîne} \quad |\hat{l}(t')-\hat{l}(t'')| < 7\eta. \tag{21}$$

En effet, vu (20), (9), (4) et (5), nous avons

$$|\hat{l}(t')-\hat{l}(t'')| \leqslant |\hat{l}(t')-j(t')|+|j(t')-j(t'')|+|j(t'')-\hat{l}(t'')| < 3\eta+\eta+3\eta = 7\eta.$$

La ligne brisée (19) n'est pas, en général, un arc simple. Il faut à présent la modifier de façon à obtenir une ligne brisée déjà sans points multiples.

Tout d'abord remarquons que l'ensemble de points multiples se compose, au cas de la ligne brisée (12), d'un nombre fini de points isolés et d'un nombre fini de côtés du réseau, au cas de la ligne brisée (17) — d'un nombre fini de points isolés et d'un nombre fini de segments situés sur les côtés de la ligne brisée, dans les deux cas il est donc fermé et borné et de cet fait l'ensemble de valeurs du paramètre qui correspondent aux points multiples est fermé.

Définissons à présent par induction la suite des intervalles

$$< t_1^{(i)}, t_2^{(i)} >, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{22}$$

de la façon suivante:

1°. Soit $t_1^{(1)}$ désigne une telle première valeur $t \geqslant \alpha$ pour laquelle le point $\hat{l}(t)$ est multiple. Une telle valeur existe, car l'ensemble de valeurs du paramètre qui correspondent aux points multiples est fermé. Evidemment $t_1^{(1)} < \beta$, car dans le cas contraire la ligne brisée (19) serait déjà un arc simple et ne démanderait pas de vérification. Soit ensuite $t_2^{(1)}$ désigne la dernière valeur du paramètre, telle que $\hat{l}(t) = \hat{l}(t_1^{(1)})$. Une telle valeur existe, car l'ensemble des valeurs du paramètre qui correspondent à ce même point multiple est fermé et borné. Evidemment $t_2^{(1)} > t_1^{(1)}$.

2°. Désignons par $t_1^{(i+1)}$ une telle première valeur $t > t_2^{(i)}$, pour laquelle le point $\hat{l}(t)$ est multiple; $t_1^{(i+1)}$ existe, car l'ensemble des points multiples de la ligne brisée

$$\hat{L}^{(i)}: \quad z = \hat{l}(t), \quad t_2^{(i)} \leqslant t \leqslant \beta, \tag{23}$$

est fermé et borné, d'où l'ensemble des valeurs du paramètre correspondant à ces points est aussi fermé et borné; l'origine $\hat{l}(t_2^{(i)})$ n'est pas pour la ligne brisée (23) un point multiple. Soit à présent $t_2^{(i+1)}$ est la dernière

valeur $t \leqslant \beta$, pour laquelle $\hat{l}(t) = \hat{l}(t_1^{(i+1)})$. Cette valeur existe, car l'ensemble des valeurs du paramètre correspondant au point multiple de la ligne brisée (19) et, de ce fait, de la ligne brisée (23) est fermé et borné.

Il est facile de constater qu'il existe seulement un nombre fini d'intervalles $<t_1^{(i)}, t_2^{(i)}>$. Cela résulte pour la ligne brisée de la première espèce du fait que les points correspondant aux valeurs du paramètre $t_1^{(i)}$ doivent être les sommets du réseau $\mathfrak{S}$ appartenant à cette ligne brisée et le nombre de tels sommets est fini. Pour la ligne brisée de la seconde espèce les points correspondant aux valeurs $t_1^{(i)}$ du paramètre sont les points d'intersection des côtés non-parallèles de la ligne brisée. Le nombre de ces points est également fini. Les longueurs des intervalles (22) sont donc bornés d'en bas. En outre, on voit que pour toutes deux valeurs $t' \neq t''$ n'appartenant pas à la somme des intervalles (22) il y a

$$\hat{l}(t') \neq \hat{l}(t''). \tag{24}$$

En effet, si pour une paire quelconque de telles valeurs il y avait

$$\hat{l}(t') = \hat{l}(t''), \tag{25}$$

alors, au cas $t' < t_1^{(1)}$ la relation (25) serait contraire avec la définition du premier intervalle $< t_1^{(1)}, t_2^{(1)} >$, si par contre $t'' > t_2^{(p)}$, alors la relation (25) serait contraire avec l'existence du dernier intervalle, si enfin il y avait un tel i, $2 \leqslant i \leqslant p$, que $t_2^{(i-1)} < t' < t_1^{(i)}$, nous obtiendrions une contradiction avec la définition de l'intervalle $< t_1^{(i)}, t_2^{(i)} >$.

Prenons maintenant en considération l'ensemble des points

$$L = \{z\colon\ z = \hat{l}(t),\ t \in < \alpha, t_1^{(1)} > \cup \bigcup_{i=2}^{p} < t_2^{(i-1)}, t_1^{(i)} > \cup < t_2^{(p)}, \beta >\}. \tag{26}$$

L'ensemble L est une ligne brisée (19), dont on a rejeté les parties correspondant aux intervalles $(t_1^{(i)}, t_2^{(i)})$, $i = 1, \ldots, p$. (26) n'a pas évidemment des points multiples.

Il faut à présent paramétriser L, afin que le paramètre t changea d'une façon continue et monotone dans l'intervalle $<\alpha, \beta>$, tandis que le point lui correspondant parcourre L depuis l'origine $\hat{l}(\alpha)$ jusqu'à l'extrémité $\hat{l}(\beta)$.

Soit $\delta > 0$ un nombre arbitraire suffisamment petit [3]. Posons

$$\begin{cases} l(t) = \hat{l}(t) \text{ pour } t \in < \alpha, t_1^{(1)} - \delta) \cup \bigcup_{i=2}^{p} (t_2^{(i-1)} + \delta, t_1^{(i)} - \delta) \cup (t_2^{(p)} + \delta, \beta >, \\ l(t) \text{ pour } t \in < t_1^{(i)} - \delta, t_2^{(i)} + \delta >,\ i = 1, \ldots p, \text{ est une fonction con-} \\ \text{tinue et monotone, choisie de telle façon que, si } t \text{ augmente depuis} \\ t_1^{(i)} - \delta \text{ a } t_2^{(i)} + \delta, \text{ alors le point } z = l(t) \text{ parcourre la ligne brisée} \\ L_\delta^{(i)}\colon\ z = \hat{l}(t),\ t_1^{(i)} - \delta \leqslant t \leqslant t_1^{(i)},\ t_2^{(i)} \leqslant t \leqslant t_2^{(i)} + \delta, \\ \text{à partir du point } \hat{l}(t_1^{(i)} - \delta) \text{ au point } \hat{l}(t_2^{(i)} + \delta). \end{cases} \tag{27}$$

[3] $\delta < \min\limits_{i=1,\ldots,p+1} (|t_1^{(i)} - t_2^{(i-1)}|)$, $t_2^{(0)} = \alpha$, $t_1^{(p+1)} = \beta$.

La fonction (27) est la représentation paramétrique recherchée de la ligne brisée L, par conséquent

$$L: \quad z = l(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{28}$$

Démontrons à présent que pour la ligne brisée (28) l'inégalité (3) est remplie, si seulement η et δ ont été conformément choisis. En effet, des (27) et (20) il résulte que l'inégalité (3) est remplie en dehors de la somme des intervalles $(t_1^{(i)}-\delta, t_2^{(i)}+\delta)$, si seulement

$$\eta < \frac{1}{7}\varepsilon. \tag{29}$$

Si $t \in (t_1^{(i)}-\delta, t_2^{(i)}+\delta)$, alors

$$\begin{aligned} |l(t)-j(t)| &\leqslant |l(t)-l(t_1^{(i)}-\delta)|+|l(t_1^{(i)}-\delta) \\ &\quad -j(t_1^{(i)}-\delta)|+|j(t_1^{(i)}-\delta)-j(t)|; \end{aligned} \tag{30}$$

vu la définition de $l(t)$ et (21), nous avons

$$\begin{aligned} |l(t)-l(t_1^{(i)}-\delta)| &\leqslant |\hat{l}(t_1^{(i)})-\hat{l}(t_1^{(i)}-\delta)|+|\hat{l}(t_2^{(i)}+\delta) \\ &\quad -\hat{l}(t_2^{(i)})| < 7\eta+7\eta = 14\eta, \end{aligned} \tag{31}$$

si seulement

$$\delta < \xi \tag{32}$$

et, étant donné (27) et (20), il y a

$$|l(t_1^{(i)}-\delta)-j(t_1^{(i)}-\delta)| < 3\eta. \tag{33}$$

Essayons enfin d'estimer le dernier composant du second membre de l'inégalité (30). Remarquons en premier lieu que, vu (32), (4), (5) et (20),

$$\begin{aligned} |j(t_1^{(i)}-\delta)-j(t_2^{(i)}+\delta)| &\leqslant |j(t_1^{(i)}-\delta)-j(t_1^{(i)})| \\ &\quad +|j(t_1^{(i)})-\hat{l}(t_1^{(i)})|+|\hat{l}(t_2^{(i)})-j(t_2^{(i)})|+|j(t_2^{(i)})-j(t_2^{(i)}+\delta)| \\ &< \eta+3\eta+3\eta+\eta = 8\eta, \end{aligned} \tag{34}$$

d'où, en vertu de la propriété (6)-(7), nous avons

$$|j(t)-j(t_1^{(i)}-\delta)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{35}$$

si

$$\eta < \frac{1}{8}\tau, \tag{36}$$

où τ est un nombre choisi pour ε de telle façon que de (6) résulta (7), où $\sigma = \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit à présent

$$\eta < \min\left(\frac{1}{34}\varepsilon, \frac{1}{8}\tau\right), \quad \delta < \xi, \quad (\xi \text{ est choisi pour } \eta). \tag{37}$$

(30), en vertu de (31), (33), (37), (36) et (35), donne

$$|l(t)-j(t)| < 17 \cdot \frac{1}{34}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{38}$$

L'inégalité (3) est remplie donc pour tout $t \in < \alpha, \beta >$ et de ce fait la ligne brisée (28) est la ligne brisée recherchée (2).

II. Occupons nous à présent de l'approximation de l'arc de Jordan par l'arc régulier. A cet effet, il suffit de démontrer la possibilité d'une telle approximation pour un arc brisée.

Démontrons le lemme suivant:

Lemme. Pour tout arc brisée à 2 parties

$$D: \quad z = d(t), \quad p \leqslant t \leqslant q, \tag{39}$$

qui a un sommet dans le point correspondant à la valeur r du paramètre, $p < r < q$, et pour un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$, il existe un arc régulier

$$E: \quad z = e(t), \quad p \leqslant t \leqslant q, \tag{40}$$

tel que

$$e(t) = d(t) \tag{41}$$

dans le voisinage des points p et q et que

$$|e(t)-d(t)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad p \leqslant t \leqslant q. \tag{42}$$

Démonstration. On peut admettre de suite que

$$d(t) = \begin{cases} \lambda t+\omega & \text{pour} \quad p \leqslant t \leqslant r, \\ \mu t+\varrho & \text{pour} \quad r \leqslant t \leqslant q^4, \end{cases} \tag{43}$$

où les nombres λ et μ sont différents de zéro et, vu que (39) est un arc, leur quotient n'est pas un nombre négatif. Soit $u > 0$ et $v > 0$ deux nombres arbitraires suffisamment petits. Posons

$$e_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{u+v}\left(\lambda(v-(t-r)) - \mu(u+(t-r))\right) & \text{pour } r-u \leqslant t \leqslant r+v, \\ \lambda \quad \text{pour} \quad p \leqslant t < r-u, \\ \mu \quad \text{pour} \quad r+v < t \leqslant q. \end{cases} \tag{44}$$

[4] Il est évident que $\lambda r+\omega = \mu r+\varrho$. Dans le cas où $d(t)$ n'est pas une fonction de forme (43), on peut la ramener à cette forme à l'aide d'une modification non-essentielle du paramètre, en conservant les propriétés d'approximation.

Ensuite admettons

$$e(t) = d(p) + \int_p^t e_1(\tau)\,d\tau, \qquad p \leqslant t \leqslant q. \tag{45}$$

Il résulte d'un calcul simple que pour u et v suffisamment petits pour la fonction (45) l'inégalité (42) sera vérifiée.

Il nous reste encore à démontrer que la fonction (45) est reversible, c.à.d. que pour deux valeurs arbitraires t', t'', $t' < t''$, l'expression

$$e(t'') - e(t') = \int_{t'}^{t''} e_1(\tau)\,d\tau \tag{46}$$

est différente de zéro. En effet, vu (44), l'inégalité (46) est une certaine combinaison linéaire des nombres λ et μ ayant des coéfficients non négatifs et ne disparaissant pas simultanément, donc elle n'est pas égale à zéro. La derivée de la fonction (45) également ne disparait pas nulle part. Enfin des (44) et (45) nous calculons facilement que dans le voisinage des points p et q il y a l'égalité (41).

Il résulte du lemme démontré plus haut, par induction facile par rapport au nombre des côtés de la ligne brisée, le théorème suivant:

Théorème 2. Pour l'arc brisée (2) et pour un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$ il existe un arc régulier sans points multiples

$$R: \quad z = r(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{47}$$

tel que l'inégalité

$$|l(t) - r(t)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \tag{48}$$

est remplie.

III. A la fin occupons nous de l'approximation de l'arc de Jordan par un arc analytique. Evidemment, il suffit de constater la possibilité d'une telle approximation pour l'arc régulier. Démontrons le théorème suivant:

Théorème 3. Pour l'arc régulier (47) et pour le nombre arbitraire $\varepsilon > 0$ il existe un arc analytique sans points multiples

$$A: \quad z = a(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{49}$$

tel que l'inégalité

$$|r(t) - a(t)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \tag{50}$$

est vérifiée.

Démonstration. $r(t)$ est une fonction de classe C_1 dans l'intervalle $<\alpha, \beta>$ et $r'(t) \neq 0$. Formons pour chaque $t', t'' \in <\alpha, \beta>$ l'expression

$$s(t', t'') = \begin{cases} \left| \dfrac{r(t'') - r(t')}{t'' - t'} \right| & \text{pour} \quad t' \neq t'', \\ |r'(t')| = |r'(t'')| & \text{pour} \quad t' = t''. \end{cases} \tag{51}$$

La fonction $r(t)$ est reversible et possède la derivée continue et différente de zéro, donc (51) est une fonction continue, positive et ayant la borne inférieure m positive. Appliquant à présent le théorème connu, on peut trouver un tel polynôme

$$p(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{52}$$

que

$$|p(t)-r'(t)| < \min\left(\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}, m\right). \tag{53}$$

Posons à présent

$$a(t) = r(\alpha)+\int_{\alpha}^{t} p(\tau)d\tau, \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{54}$$

$a(t)$ est un polynôme, pour lequel l'inégalité (50) a lieu. De plus (54) est une fonction reversible. En effet, pour toutes deux valeurs différentes t' et t'', en vertu de (53), nous obtenons

$$\left|\frac{a(t'')-a(t')}{t''-t'} - \frac{r(t'')-r(t')}{t''-t'}\right| < m. \tag{55}$$

Le nombre qu'on soustrait dans (55) a le module plus grand ou égal à m, donc le nombre, duquel on soustrait, ne peut être jamais égal à zéro, c.à.d. (54) est une fonction reversible. En même temps de (53) et de la définition du nombre m il résulte que la dérivée de la fonction (54) est toujours différente de zéro. Enfin la fonction (54) est évidemment analytique. De ce qui précède et de (50) on voit que (54) représente l'arc A demandé.

Traduit par Janina Śladkowska

Présenté le 7 Juillet 1964 à la séance de la Section III de la Société de Sciences et des Lettres de Łódź par Z. Charzyński

WDN — Zam. Nr 23/66 — 350

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVI DÉDIÉ À M. FRANCISZEK LEJA 1967

ON THE COEFFICIENTS OF UNIVALENT POLYNOMIALS

BY

Z. CHARZYŃSKI AND J. ŁAWRYNOWICZ (ŁÓDŹ)

INTRODUCTION

1. The present note concerns normalized polynomials, inverse to univalent functions in the unit disc, i.e. polynomials of the form

$$P_n(w) = w + C_2 w^2 + \ldots + C_n w^n \quad (C_n \neq 0) \tag{1}$$

which are univalent in the largest domain D such that $0 \in D$ and $|P_n(w)| < 1$ for $w \in D$; this (simply connected) domain will be denoted by μ_{P_n}. Polynomials of the type (1) have been investigated in the general case by the first of the authors in [1].

Let $\mathfrak{P}_m$ denote the class of all described polynomials of the form (1) such that $n \leqslant m$ (m natural). The purpose of our note is to find the best possible estimates of $|C_2|$ in the class $\mathfrak{P}_2$, and of $|C_2|$ and $|C_3|$ in $\mathfrak{P}_3$. We find also all extremal functions in this problem. It seems that these results may give hints concerning the general case and, in this way, throw a certain light on the general coefficient problem.

2. In this note the following theorems are proved:

(i) *In the class* $\mathfrak{P}_2$ *the sharp estimate* $|C_2| \leqslant \frac{1}{4}$ *holds. All the extremal functions are given by the formula*

$$P_2^*(w) = w + \tfrac{1}{4} e^{i\vartheta} w^2,$$

where ϑ *is real.*

(ii) *In the class* $\mathfrak{P}_3$ *the sharp estimate* $|C_2| \leqslant \frac{2}{9}\sqrt{3}$ *holds. All the extremal functions are given by the formula*

$$P_3^*(w) = w + \tfrac{2}{9}\sqrt{3}\varepsilon e^{i\vartheta} w^2 + \tfrac{2}{27} e^{2i\vartheta} w^3,$$

where ϑ *is real and* $\varepsilon = 1$ *or* -1.

(iii) *In the class* $\mathfrak{P}_3$ *the sharp estimate* $|C_3| \leqslant \frac{4}{27}$ *holds. All the extremal functions are given by the formula*

$$P_3^*(w) = w + \tfrac{4}{27} e^{2i\vartheta} w^3,$$

where ϑ *is real.*

3. Our considerations are based on a general theorem obtained by the first of the authors (see [1], p. 20). This theorem may be formulated as follows:

If E is a holomorphic function of the complex variables $z_2, \ldots, z_k$ $(k \leqslant m)$ in a sufficiently large domain Δ, then in the class $\mathfrak{P}_m$ there exist extremal polynomials for which the functional $\operatorname{Re} E(C_2, \ldots, C_k)$ attains the maximum. Moreover, if

$$P_n^*(w) = w + C_2^* w^2 + \ldots + C_n^* w^n \qquad (C_n^* \neq 0,\ k \leqslant n \leqslant m) \tag{2}$$

is one of such polynomials, $w_1, \ldots, w_l$ denote all zeros (different from each other) of the derived polynomial, and $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ — the multiplicity degrees of these zeros, respectively, then $w_1, \ldots, w_l$ lie on the boundary of the domain $\mu_{P_n^*}$ and there exist numbers $\varrho_\lambda > 0$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ satisfying the relations

$$\operatorname{Res}_{w_\lambda}\{P_n^*(w)\Phi_k(w)/w^2 P_n^{*\prime}(w)\} = \varrho_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, l), \tag{3}$$

where

$$\Phi_k(w) = \sum_{\varkappa=2}^{k} w^{1-\varkappa} \sum_{\nu=\varkappa}^{k} (\nu - \varkappa + 1) C_{\nu-\varkappa+1}^* E'_{z_\nu}(C_2^*, \ldots, C_k^*) \qquad (C_1^* = 1). \tag{4}$$

4. Obviously, from the quoted theorem we obtain only a necessary condition for the maximum of the functional $\operatorname{Re} E(C_2, \ldots, C_k)$. Then, in view of the aim of our note, it is worth while to remark that if a function f of one complex variable is holomorphic in a simply connected domain D, the derivative f' is different from zero in D, and the modulus $|f|$ is constant on the boundary of D, then f is univalent in D (see e.g. [2], p. 122). This implies that any polynomial satisfying the above formulated necessary condition for the extremum belongs to the class $\mathfrak{P}_m$. Hence, the problem is reduced to solving a certain system of equations and discussing these solutions.

5. Note finally that the modulus of the k-th coefficient $(k \leqslant n)$ of any polynomial of the form $z = e^{i\vartheta} P_n(e^{-i\vartheta} w)$, where P_n is fixed, and ϑ real and arbitrary, is the same, and that all these polynomials belong to the class $\mathfrak{P}_m$ provided $P_n \in \mathfrak{P}_m$.

§ 1. *ESTIMATION OF* $|C_2|$ *IN THE CLASS* $\mathfrak{P}_2$

6. According to Section 3 there exists an extremal polynomial of the form $P_2^*(w) = w + C_2^* w^2$ $(C_2^* \neq 0)$ for which the functional $\operatorname{Re} E(C_2) = \operatorname{Re} \log C_2$ attains the maximal value. Consequently, the estimate $|C_2| \leqslant |C_2^*|$ is the best possible in $\mathfrak{P}_2$. Moreover, in view of Section 5,

we may, without any loss of generality, assume $P_2^*(w_1) = 1$. So, it remains to solve the system of algebraic equations

$$w_1 + C_2^* w_1^2 = 1, \tag{5}$$

$$1 + 2C_2^* w_1 = 0, \tag{6}$$

$$\operatorname{Res}_{w_1}\{P_2^*(w)\Phi_2(w)/w^2 P_2^{*\prime}(w)\} = \varrho_1 > 0, \tag{7}$$

where $\Phi_2(w) = 1/C_2^* w$, as can be easily verified.

7. By solving the system of (5) and (6) we obtain $C_2^* = -\frac{1}{4}$ and $w_1 = 2$. Equation (7) yields $1/2C_2^{*2} w_1^3 = \varrho_1$, whence $\varrho_1 = 1$. In this way Theorem (i) is proved.

§ 2. *ESTIMATION OF* $|C_2|$ *IN THE CLASS* $\mathfrak{P}_3$

8. According to Section 3 there exists an extremal polynomial of the form $P_2^*(w) = w + C_2^* w^2$ $(C_2^* \neq 0)$ or $P_3^*(w) = w + C_2^* w^2 + C_3^* w^3$ $(C_3^* \neq 0)$ for which the functional $\operatorname{Re} E(C_2) = \operatorname{Re} \log C_2$ attains the maximal value. In the first case we obtain the same result as in Section 7. Thus, it remains to consider the other case. Since, in view of Section 5, we may, without loss of generality, assume $P_3^*(w_1) = \sigma$ and $P_3^*(w_2) = \bar{\sigma}$, where $|\sigma| = 1$, the problem is reduced to solving the system of algebraic equations

$$w_1 + C_2^* w_1^2 + C_3^* w_1^3 = \sigma, \quad w_2 + C_2^* w_2^2 + C_3^* w_2^3 = \bar{\sigma} \quad (|\sigma| = 1), \tag{8}$$

$$1 + 2C_2^* w_1 + 3C_3^* w_1^2 = 0, \quad 1 + 2C_2^* w_2 + 3C_3^* w_2^2 = 0, \tag{9}$$

$$\operatorname{Res}_{w_1}\{P_3^*(w)\Phi_2(w)/w^2 P_3^{*\prime}(w)\} = \varrho_1 > 0, \tag{10}$$

$$\operatorname{Res}_{w_2}\{P_3^*(w)\Phi_2(w)/w^2 P_3^{*\prime}(w)\} = \varrho_2 > 0,$$

where $\Phi_2(w) = 1/C_2^* w$, as can be easily verified.

9. Obviously, C_2^*, w_1 and w_2 do not vanish. Hence, we may replace formulae (9) by

$$C_3^* = 1/3w_1 w_2, \quad w_1 w_2 = -(w_1 + w_2)/2C_2^*. \tag{11}$$

Now, by adding and by multiplying the first and the second of the equations (8) together, we obtain, in view of (11) and $|\sigma| = 1$,

$$\tfrac{1}{3} C_2^* (w_1 + w_2)^2 + (w_1 + w_2) = \sigma + \bar{\sigma}$$

and

$$-\tfrac{1}{12}(w_1 + w_2)^2 - \tfrac{2}{9}(1/C_2^*)(w_1 + w_2) = 1,$$

respectively, whence

$$w_1+w_2 = 9(4C_2^*+\sigma+\bar{\sigma}),$$
$$432C_2^{*3}+216(\sigma+\bar{\sigma})C_2^{*2}+9\{3(\sigma+\bar{\sigma})^2+4\}C_2^*+8(\sigma+\bar{\sigma}) = 0. \tag{12}$$

We consider successively two possibilities: $w_1 \neq w_2$ and $w_1 = w_2$.

10. Let $w_1 \neq w_2$. Then, after calculating the residues, the left-hand sides of (10) give $\sigma/3C_2^*C_3^*w_1^3(w_1-w_2)$ and $\bar{\sigma}/3C_2^*C_3^*w_2^3(w_2-w_1)$, respectively. Thus, by dividing both sides of the second of these equations by the first one, we have $\varrho_1 w_1^3/\varrho_2 w_2^3 = -\sigma/\bar{\sigma}$. Hence, in view of $|\sigma| = 1$, we obtain

$$(w_1/w_2)^3+\mu\sigma^2 = 0 \quad (\mu = \varrho_2/\varrho_1 > 0). \tag{13}$$

On the other hand, in view of (11), equations (8) yield $\frac{1}{6}w_1(3-w_1/w_2) = \sigma$ and $\frac{1}{6}w_2(3-w_2/w_1) = \bar{\sigma}$, respectively. Hence, in view of $|\sigma| = 1$,

$$(w_1/w_2)^3-3(w_1/w_2)^2+3\sigma^2(w_1/w_2)-\sigma^2 = 0. \tag{14}$$

In order to eliminate w_1/w_2 we calculate the corresponding resultant of the system of (13) and (14):

$$\Delta(\mu, \sigma) = -\sigma^6(27\mu\sigma^2+27\mu^2\sigma^{-2}+\mu^3-24\mu^2-24\mu+1) = 0. \tag{15}$$

Applying the condition $|\sigma| = 1$ again, we conclude that $\mu(\mu-1)\times$ $\times(\sigma^2-\sigma^{-2}) = 0$. As $\mu > 0$, it remains to consider two particular cases $\mu = 1$ and $\sigma^4 = 1$ only.

11. Let first $w_1 \neq w_2$ and $\mu = 1$. Then (15) yields $\sigma^2+1/\sigma^2 = 46/27$. Hence $\sigma+1/\sigma = \frac{10}{9}\varepsilon_1\sqrt{3}$, where $\varepsilon_1 = 1$ or -1. Thus $\sigma = \frac{5}{9}\varepsilon_1\sqrt{3}+\frac{1}{9}\varepsilon_2\sqrt{6}i$, where $\varepsilon_2 = 1$ or -1. The second of equations (12) gives now

$$486C_2^{*3}+270\varepsilon_1\sqrt{3}C_2^{*2}+153C_2^*+10\varepsilon_1\sqrt{3} = 0.$$

Hence $C_2^* = -\frac{2}{9}\varepsilon_1\sqrt{3}$ or $C_2^* = -\frac{1}{6}\varepsilon_1\sqrt{3}+\frac{1}{18}\varepsilon_1\varepsilon_3\sqrt{3}i$, where $\varepsilon_3 = 1$ or -1. We choose the root $C_2^* = -\frac{2}{9}\varepsilon_1\sqrt{3}$ with the greatest modulus.

In turn, we derive w_1, w_2 and C_3^* from the first of the equations (12) and from (11). Since, as it can easily be verified, we have $\operatorname{Im} w_1 \neq \operatorname{Im} w_2$, it may be assumed, without loss of generality, that $\operatorname{Im} w_1 < \operatorname{Im} w_2$. Thus, we obtain $w_1 = \varepsilon_1\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{6}i$, $w_2 = \varepsilon_1\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}i$ and $C_3^* = \frac{2}{27}$. Consequently,

$$\sigma = P_3^*(w_1) = w_1+C_2^*w_1^2+C_3^*w_1^3 = \tfrac{5}{9}\varepsilon_1\sqrt{3}-\tfrac{1}{9}\sqrt{6}i,$$

whence $\varepsilon_2 = -1$.

The so obtained system of values $w_1 = -\varepsilon\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{6}i$, $w_2 = -\varepsilon\sqrt{3}+$ $+\frac{1}{2}\sqrt{6}i$, $C_2^* = \frac{2}{9}\varepsilon\sqrt{3}$, $C_3^* = \frac{2}{27}$ ($\varepsilon = 1$ or -1) satisfies equations (8) and (9). Moreover, from (10) we obtain $\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{1}{2} > 0$, and so, indeed, $\mu = 1$.

12. Let now $w_1 \neq w_2$ and $\sigma^4 = 1$. If $\sigma^2 = 1$, then (15) yields $\mu = -1 < 0$. Hence $\sigma^2 = -1$, and (15) gives $(\mu+1)(\mu^2-52\mu+1) = 0$. Hence $\mu = 26+15\varepsilon_1\sqrt{3}$, where $\varepsilon_1 = 1$ or -1. Since $\sigma = \varepsilon_2 i$, where $\varepsilon_2 = 1$ or -1, the second of the equations (12) yields $12C_2^{*3}+1 = 0$. It is easily seen that all roots of the last equation have the moduli less than the value $|\frac{2}{9}\varepsilon\sqrt{3}| = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ obtained in Section 11.

13. Let finally $w_1 = w_2$. Then $\sigma = \bar{\sigma}$, whence, in view of $|\sigma| = 1$, we have $\sigma = \varepsilon$, where $\varepsilon = 1$ or -1. The second of the equations (12) yields $(3C_2^*+\varepsilon)^3 = 0$, and thus once more we obtain the value of C_2^* with the modulus less than that obtained in Section 11.

14. To complete the proof of (ii) we note that, according to Section 4, the extremal polynomial found in Section 11 belongs to the class $\mathfrak{P}_3$. As it is easily seen, this polynomial gives $|C_2^*|$ greater than that given by the extremal polynomial of the form $P_2^*(w) = w+C_2^*w^2$ $(C_2^* \neq 0)$ found in Section 7 (cf. Section 8).

§ 3. *ESTIMATION OF* $|C_3|$ *IN THE CLASS* $\mathfrak{P}_3$

15. According to Section 3 there exists an extremal polynomial of the form $P_3^*(w) = w+C_2^*w^2+C_3^*w^3$ $(C_3^* \neq 0)$ for which the functional $\mathrm{Re}E(C_2, C_3) = \mathrm{Re}\log C_3$ attains the maximal value. Consequently, the estimate $|C_3| \leqslant |C_3^*|$ is the best possible in $\mathfrak{P}_3$. Since, in view of Section 5, we may, without loss of generality, assume $P_3^*(w_1) = \sigma$ and $P_3^*(w_2) = \bar{\sigma}$, where $|\sigma| = 1$, the problem is reduced to solving the system of algebraic equations (8), (9) and

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}_{w_1}\{P_3^*(w)\Phi_3(w)/w^2P_3^{*\prime}(w)\} = \varrho_1 > 0, \\ &\mathrm{Res}_{w_2}\{P_3^*(w)\Phi_3(w)/w^2P_3^{*\prime}(w)\} = \varrho_2 > 0, \end{aligned} \tag{16}$$

where $\Phi_3(w) = 2C_2^*/C_3^*w+1/C_3^*w^2$, as can be easily verified.

16. Obviously, C_3^*, w_1 and w_2 do not vanish. Hence, we may replace formulae (9) by

$$C_2^* = -(w_1+w_2)/2w_1w_2, \qquad w_1w_2 = 1/3C_3^*. \tag{17}$$

Now, by adding and by multiplying the first and the second of the equations (8) together, we obtain, in view of (17) and $|\sigma| = 1$,

$$-\tfrac{1}{2}C_3^*(w_1+w_2)^3+(w_1+w_2) = \sigma+\bar{\sigma}$$

and

$$-\tfrac{1}{12}(w_1+w_2)^2+\tfrac{4}{27}(1/C_3^*) = 1,$$

respectively, whence

$$(54C_3^{*2}+1)(w_1+w_2) = 9(\sigma+\sigma), \tag{18}$$

$$314928C_3^{*3}-34992C_3^{*2}+81\{9(\sigma+\bar{\sigma})^2-20\}C_3^*-16 = 0.$$

We consider succesively two possibilities: $w_1 \neq w_2$ and $w_1 = w_2$.

17. Let $w_1 \neq w_2$. Then, after calculating the residues, the left-hand sides of (16) give

$$\sigma(2C_2^*w_1+1)/3C_3^{*2}w_1^4(w_1-w_2) \quad \text{and} \quad \bar{\sigma}(2C_2^*w_2+1)/3C_3^{*2}w_2^4(w_2-w_1),$$

respectively. Then, by dividing both sides of the second of these equations by the first one and substituting C_2^* from (17), we have $\varrho_1 w_1^2/\varrho_2 w_2^2 = -\sigma/\bar{\sigma}$. Hence, in view of $|\sigma| = 1$, we obtain

$$(w_1/w_2)^2+\mu\sigma^2 = 0 \quad (\mu = \varrho_2/\varrho_1 > 0). \tag{19}$$

On the other hand, (8) and (11) imply (14). In order to eliminate w_1/w_2 we calculate the corresponding resultant of the system of (19) and (14):

$$\Delta(\mu, \sigma) = \sigma^5\{\mu(\mu-3)^2\sigma+(3\mu-1)^2\sigma^{-1}\} = 0. \tag{20}$$

Applying the condition $|\sigma| = 1$ again, we conclude that $(\mu-1)(\mu^2-14\mu+1)(\sigma-1/\sigma) = 0$. Thus, it is necessary to consider three particular cases: $\mu = 1$, $\mu^2-14\mu+1 = 0$ and $\sigma^2 = 1$.

18. Let first $w_1 \neq w_2$ and $\mu = 1$. Then (20) yields $\sigma+1/\sigma = 0$. Hence $\sigma = \varepsilon i$, where $\varepsilon = 1$ or -1. The second of the equations (18) gives now

$$78732C_3^{*3}-8748C_3^{*2}-405C_3^*-4 = 0.$$

Hence $C_3^* = 4/27$ or $C_3^* = -1/54$ (the double root). We choose the root $C_3^* = 4/27$ with the greater modulus.

In turn, we derive w_1, w_2 and C_2^* from the first of the equations (18) and from (17). Since, as it can easily be verified, we have Im $w_1 \neq$ Im w_2, it may be assumed, without loss of generality, that Im $w_1 <$ Im w_2.Thus, we obtain $w_1 = -\frac{3}{2}i$, $w_2 = \frac{3}{2}i$ and $C_2^* = 0$. Consequently, $\sigma = P_3^*(w_1) = w_1+C_2^*w_1^2+C_3^*w_1^3 = -i$, whence $\varepsilon = -1$.

The so-obtained system of values $w_1 = -\frac{3}{2}i$, $w_2 = \frac{3}{2}i$, $C_2^* = 0$ and $C_3^* = \frac{4}{27}$ satisfies equations (8) and (9). Moreover, from (16) we obtain $\varrho_1 = \varrho_2 = 1 > 0$, and so, indeed, $\mu = 1$.

19. Let next $w_1 \neq w_2$ and $\mu^2-14\mu+1 = 0$. Then $\mu = 7+4\varepsilon_1\sqrt{3}$, where $\varepsilon_1 = 1$ or -1, and from (20) we get $\sigma+1/\sigma = 0$. Hence $\sigma = \varepsilon_2 i$, where $\varepsilon_2 = 1$ or -1. Thus, analogously as in Section 18, the second of

the equations (18) has the roots $C_3^* = 4/27$ and $C_3^* = -1/54$ (the double root). If $C_3^* = 4/27$, then, analogously as in Section 18, we have $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$, whence $\mu = 1$ against $\mu = 7+4\varepsilon_1\sqrt{3}$. Thus, $C_3^* = -1/54$, and we obtain the value of C_3^* with the modulus less than that obtained in Section 18.

20. Let now $w_1 \neq w_2$ and $\sigma^2 = 1$. Then $\sigma = \varepsilon$, where $\varepsilon = 1$ or -1. Hence, from (20) we get $\mu = -1 < 0$ against $\mu = \varrho_2/\varrho_1 > 0$.

21. Let finally $w_1 = w_2$. Then $\sigma = \bar{\sigma}$, whence, in view of $|\sigma| = 1$, we have $\sigma = \varepsilon$, where $\varepsilon = 1$ or -1. The second of the equations (18) yields $(27C_3^*-1)^3 = 0$, and thus once more we obtain the value of C_3^* with the modulus less than that obtained in Section 18.

22. According to Section 4, the extremal polynomial found in Section 11 belongs to the class $\mathfrak{P}_3$. In this way the proof of (iii) is completed.

REFERENCES

[1] Z. Charzyński, *Fonctions univalentes inverses. Polynômes univalentes*, Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź 9 (7) (1958), p. 1-21.

[2] G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*, Berlin 1925.

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 2. 12. 1965

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sciences math., astr.
et phys. — Vol. XVI, No. 10, 1968

MATHEMATICS
(MATHEMATICAL ANALYSIS)

Algebraic Functions and Analytic Variations of Univalent Functions

by

Z. CHARZYŃSKI and J. ŚLADKOWSKA

Presented by E. MARCZEWSKI on July 9, 1968

Let

$$b(z) = b_1 z + \ldots, \quad |z| < 1, \quad b_1 > 0, \quad |b(z)| < 1,$$

be an arbitrary univalent function in the unit disc.

THEOREM. *There exists a family of bounded univalent functions*

$$a(z, t) = a_1(t) z + \ldots, \quad -T < t < T, \quad T > 0,$$

analytic with respect to t and satisfying the relations

$$a(z, 0) = b(z), \tag{1}$$

$$a'_t(z, t) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \alpha_k(t) \left[\left(z_k(t) \frac{a'_z(z_k(t), t)}{a(z_k(t), t)} \right)^2 a(z, t) \frac{a(z_k(t), t) + a(z, t)}{a(z_k(t), t) - a(z, t)} - \right. \right. \tag{2}$$

$$- z a'_z(z, t) \frac{z_k(t) + z}{z_k(t) - z} \Bigg] + \overline{\alpha_k(t)} \left[\overline{\left(z_k(t) \frac{a'_z(z_k(t), t)}{a(z_k(t), t)} \right)^2} a(z, t) \times \right.$$

$$\left. \left. \times \frac{1 + \overline{a(z_k(t), t)}\, a(z, t)}{1 - \overline{a(z_k(t), t)}\, a(z, t)} - z \overline{a'_z(z, t)} \frac{1 + \overline{z_k(t)}\, z}{1 - \overline{z_k(t)}\, z} \right] \right\},$$

where $z_k(t)$ and $\alpha_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, are certain analytic functions such that $|z_k(t)| < 1$ and the values of $z_k(0)$, $\alpha_k(0)$, $k = 1, \ldots, n$, are given arbitrarily.

The analyticity of $a(z, t)$ with respect to t implies the formula

$$a(z, t) = b(z) + V_1(z)\, t + V_2(z)\, t^2 + \ldots,$$

where $V_1(z) = a'_t(z, 0)$, $V_2(z) = \frac{1}{2} a''_{tt}(z, 0)$ and so on are "the first variation", "the second variation" and so on of $b(z)$, respectively. Taking $t = 0$ at the right hand side of (2) one obtains the first variation $V_1(z)$. Differentiating the right hand side of (2) with respect to t and applying (2) we obtain the second variation $V_2(z)$ and so on.

This result is an analogue for bounded functions of the result established by Schiffer and Duren [3] for unbounded functions. The proof is completely different from those of [3] and is based on the method of univalent algebraic functions introduced by the first of the present authors in [1].

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY, ŁÓDŹ
(KATEDRA MATEMATYKI, UNIWERSYTET, ŁÓDŹ)

REFERENCES

[1] Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes algébriques bornées*, Rozprawy Mat., **10** (1955), 1—39.

[2] — , *Fonctions univalentes inverses. Polynômes univalents*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź, Classe III, **9** (7) (1958), 1—12.

[3] P. L. Duren and M. Schiffer, *The theory of the second variation in extremum problems for univalent functions*, J. Analyse Math., **10** (1962), 193—252.

[4] J. Janikowski, *Méthode algébrique et équation de Löwner*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź, Classe III, **12** (16) (1961), 1—9.

[5] R. Zawadzki, *Sur les fonctions univalentes algébriques*, ibid., Classe III, **8** (1) (1957), 1—21.

[6] — , *Les équations des fonctions extrémales dans les familles des fonctions univalentes, algébriques, non-bornées*, ibid., Classe III, **8** (10) (1957), 1—21.

different branches of the same function on various components of A. It can easily be proved that a set of type T contains a finite number of components which are continua and all of which are of the type T.

This result was published by Pringsheim in 1893 for functions of one variable defined on a closed segment.

The proof given by Pringsheim was simple and short but it contained an error. The first correct proof was given by Boas in 1935. Obviously, for functions of one variable the only continua of the type T are closed segments.

Using sets which are not of the type T (e.g. sets without the local starlikeness) we may find examples in which the Pringsheim theorem is not true.

3. IX. 1966

IV. OTHER TOPICS IN COMPLEX FUNCTIONS

Transforms of isolated singular points

by Z. CHARZYŃSKI (Łódź)

Let

$$T\colon\ \xi = U(x, y)\,,\ \eta = V(x, y)$$

be a continuous transformation defined in an open plane set and having in it a reversible differential of the first order everywhere, except perhaps at points of an isolated exceptional set.

Then T is an interior mapping in Stoïlov's sense, i.e. for every point (x_0, y_0) the image of any neighbourhood of this point under T covers a certain neighbourhood of $(\xi_0, \eta_0) = \big(U(x_0, y_0), V(x_0, y_0)\big)$.

7. IX. 1966

A condition equivalent to Riemann's conjecture

by J. CHĄDZYŃSKI (Łódź)

Let $\{s_n\}$ denote a sequence of non-trivial zeros of the Riemann Zeta function, their multiplicity being regarded. It can be proved that

$$\sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\big(c(s_n-\tfrac{1}{2})^2\big) = \frac{1}{2\sqrt{c}}(\gamma+\log\pi) - \sqrt{\pi}\big(1-\Phi(\tfrac{1}{2}\sqrt{c})\big)\exp(\tfrac{1}{4}c) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n\sqrt{c}} - \sqrt{\pi}\exp\big(4c(n+\tfrac{1}{4})^2\big)\big[1-\Phi\big(2(n+\tfrac{1}{4})\sqrt{c}\big)\big]\right\} + \\ + \left\{2\sqrt{\pi}\exp(\tfrac{1}{4}c) - \frac{1}{\sqrt{c}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}\exp\left(-\frac{\log^2 n}{4c}\right)\right\}$$

PART TWO. PROBLEMS

I. SEMINAR ON EXTREMAL PROBLEMS IN ANALYTIC FUNCTIONS

Problem proposed by Z. CHARZYŃSKI (Łódź)

Suppose that a function $z = \Psi(w)$ is holomorphic and invertible in a certain neighbourhood of 0, and satisfying $\Psi'(0) = 1$. Clearly, the inverse $w = \Phi(z)$ is also holomorphic in a neighbourhood of 0 and it satisfies $\Phi'(0) = 1$.

Expanding Ψ and Φ as power series in w and z, respectively, we have

$$\Psi(w) = w + \mu_2 w^2 + \dots , \qquad \Phi(z) = z + \lambda_2 z^2 + \dots ,$$

where

$$\lambda_n = U_n(\mu_2, \dots, \mu_n) , \qquad n = 2, 3 \dots ,$$

U_n being "universal" polynomials, independent of Ψ and Φ, e.g. $U_2(\mu_2) = -\mu_2$, $U_3(\mu_2, \mu_3) = -\mu_3 + \mu_2^2$, etc.

Let S be the class of all normalized univalent functions of the form

$$F(z) = z + A_2 z^2 + \dots , \qquad |z| < 1 .$$

It can be proved with the help of the notion and properties of univalent polynomials [1] that the well known Bieberbach conjecture is equivalent to the following "Supremum Minimorum" conjecture:

$$\text{(C)} \qquad \sup_{Q} |U_n(D_2, \dots, D_n)| \, \varrho_Q^{n-1} \leqslant n ,$$

where the supremum is taken over all polynomials of the form

$$Q(\zeta) = \zeta + D_2 \zeta^2 + \dots + D_L \zeta^L , \qquad L \geqslant n .$$

Here ϱ_Q is defined by

$$\varrho_Q = \min_{1 \leqslant j \leqslant L-1} |Q(\zeta_j)|$$

where ζ_j, $j = 1, \dots, L-1$, denote all zeros of the derivative $Q'(\zeta)$.

An analogous procedure can be applied to other, more general expressions, which depend on the coefficients in S.

The problem is to find a method of calculating the expressions which appear in (C), and more general expressions of a similar type.

2. IX. 1966

---

[1] Z. Charzyński, *Fonctions univalentes inverses. Polynômes univalentes*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 9, 7 (1958), pp. 1-21.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

KOMITET REDAKCYJNY
KAROL BORSUK redaktor
BOGDAN BOJARSKI, ANDRZEJ MOSTOWSKI,
MARCELI STARK, STANISŁAW TURSKI

LXX

Z. CHARZYŃSKI et J. ŚLADKOWSKA

Fonctions algébriques et variations analytiques des fonctions univalentes

WARSZAWA 1970
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 5
* Informations préliminaires 8

I. FONCTIONS RATIONNELLES SIMPLES

1. Interpolation locale 15
2. Prolongement de la famille des fonctions rationnelles simples au cercle fermé du paramètre 22
3. Variations des fonctions rationnelles simples 26

II. APPROXIMATIONS SUCCESSIVES ET RÉSULTAT FINAL

0. Formule fondamentale pour les variations des fonctions univalentes bornées 41
1. Approximation 42
2. Variation des fonctions déterminantes 47
3. Variation des fonctions accommodées 51
4. Variation des fonctions intérieures 57
5. Passage à la limite et déduction de la formule fondamentale 67

Bibliographie 76

Introduction

En 1955 l'un de nous a introduit dans [3] la notion de fonctions algébriques, univalentes dans le cercle unité, de la forme

$$(*) \qquad a(z) = a_1 z + \ldots,$$

vérifiant l'équation $\Omega\big(a(z)\big) = X(z)$, où

$$\Omega(w) = \frac{D_L}{w^L} + \ldots + D_0 + \ldots + \bar{D}_L w^L,$$

$$X(z) = \frac{E_L}{z^L} + \ldots + E_0 + \ldots + \bar{E}_L z^L$$

sont des fonctions rationnelles, symétriques par rapport à la circonférence unité. Cela permis de démontrer qu'à l'aide des fonctions du type (*) on peut arbitrairement approcher, après une normalisation convenable, toutes les fonctiones univalentes dans le cercle unité; de plus on obtient avec elles le théorème classique de Riemann sur la représentation conforme [5] par une méthode nouvelle et entièrement élémentaire et, dans la théorie moderne des fonctions, l'équation structurale de Löwner par une méthode nouvelle, particulièrement simple [15], [9].

Dans le présent ouvrage nous obtenons, à l'aide des fonctions mentionnées du type (*), un nouveau résultat de la théorie moderne des fonctions, à savoir la variation intérieure analytique des fonctions univalentes bornées.

Les premières formules non analytiques de la variation intérieure des fonctions univalentes non bornées ont été données en 1938 par M. Schiffer dans [22] et, plus tard, sous une forme un peu différente, par ce même auteur en 1943 dans [23]. Presque en même temps de pareilles formules ont été obtenues en 1946 et 1947 par G. M. Golusin dans [11], [12] et [13], et aussi en 1943, 1945, 1946 et 1950 par A. C. Schaeffer et D. C. Spencer dans [19], [20] et [21]. Pour les fonctions univalentes bornées les formules correspondantes non analytiques ont été données par l'un de nous en 1948, 1953 dans [1], [2], par H. L. Royden en 1949 dans [17] et par A. C. Schaeffer et D. C. Spencer en 1950 dans [21].

En 1962 P. L. Duren et M. Schiffer ont obtenu dans [8] des formules sur la variation analytique pour les fonctions univalentes non bornées.

Le résultat des auteurs de cet ouvrage s'engage dans la même voie. Ils obtiennent une formule nouvelle sur la variation analytique pour les fonctions univalentes bornées, analogue à celle qu'ont obtenue Duren et Schiffer pour les fonctions non bornées; de même, dans la nouvelle méthode de déduction, entièrement élémentaire, dont se sont servi les auteurs, on profite de moyens qui ne dépassent pas les plus simples éléments d'Analyse, tels que les premiers chapitres de la théorie des fonctions analytiques uniformes et de la théorie des équations différentielles ordinaires. Les moyens qu'utilise la méthode appliquée dans [8] sont beaucoup plus difficiles.

Remarquons que les recherches sur les fonctions univalentes non bornées et bornées diffèrent en général entre elles.

Ces formules analytiques introduisent dans la théorie des fonctions univalentes les variations de rangs supérieurs au premier.

Nous espérons que la construction des variations à l'aide des solutions d'équations différentielles simples, donnée par les formules (31) et (54) de 5, chapitre II, jettera un nouveau jour sur la nature des variations des fonctions univalentes et qu'elle pourra être appliquée au cas des classes de fonctions plus générales aussi bien que plus spéciales.

La longueur de cet ouvrage se justifie, entre autres, par la circonstance que nous avons essayé d'y motiver même les plus simples remarques. Le lecteur connaissant la théorie élémentaire des fonctions pourra évidemment en omettre la plupart.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que dans cet ouvrage les théorèmes, les lemmes et les formules d'une même partie sont cités en indiquant leurs numéros, ceux d'un même chapitre en indiquant leurs numéros et ceux de la partie correspondant, enfin ceux d'un autre chapitre en indiquant leurs numéros, ceux de la partie et du chapitre correspondants.

Dans le chapitre I nous exposons les propriétés générales des fonctions rationnelles simples et, en particulier, rationnelles spéciales et un lemme fondamental sur la famille analytique des variations (2, 3) pour la fonction rationnelle simple (1, 3), dont la dérivée admet des racines dans certains domaines 1 de 3. Il est essentiel ici que le cercle $|t| < R$ du paramètre correspondant t ne dépend pas du degré de la fonction initiale (1, 3) et qu'il existe une relation simple (31, 3) entre la famille des variations (2, 3) et la solution (19, 3) de l'équation différentielle (22, 3) à points singuliers (3, 3) contenus dans les domaines fixés de 1, 3. Dans le chapitre II nous donnons des informations sur l'approximation, la construction des familles analytiques de variations (11, 2) et (18, 3) pour les fonctions approximantes: déterminantes (1, 2) et accomodées (5, 3); ensuite, nous y démontrons l'existence des familles analytiques de variations (8, 4) et (2, 0); enfin nous y donnons pour (8, 4) et (2, 0) les conditions différentielles

(57, 4) et (4, 0). Un fait important que nous y démontrons à l'aide des relations algébriques (9, 4), c'est que pour les valeurs réelles du paramètre t les fonctions intérieures (8, 4) existent et sont univalentes dans tout le cercle unité et, en particulier, qu'elles sont holomorphes dans le voisinage des points singuliers (20, 3) où la formule (31, 5), qui détermine la fonction (2, 0) à l'aide des solutions (18, 5) et (19, 5) des équations (20, 5) et (21, 5), est en défaut.

⁎ Informations préliminaires

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

1. (a, b), $[a, b]$ et $\{a, b\}$ désigneront resp. un intervalle ouvert d'extrémités a et b, un intervalle fermé de mêmes extrémités et un intervalle d'extrémités a et b, dans le cas où on ne saura pas si les extrémités lui appartiennent ou non.

2. $\overrightarrow{[p, q]}$ désignera un segment orienté d'origine p et d'extrémité q, où p et q sont des nombres arbitraires complexes.

3. Outre le paramètre t parcourant un segment orienté $\overrightarrow{[a, b]}$ de l'axe réel, nous emploierons également un paramètre t parcourant un segment $\overrightarrow{[ai, bi]}$ de l'axe imaginaire.

4. E^* désignera la frontière de l'ensemble E, E' l'ensemble complémentaire de cet ensemble à tout l'espace, E° l'intérieur de E, $\bar{E}$ la fermeture de E.

5. Les symboles $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ et $\setminus$ signifieront resp.: „appartient à l'ensemble", „est contenu dans l'ensemble", la somme, le produit et la différence d'ensembles.

6. $K(a, r)$ désignera le cercle de centre a et de rayon r.

7. $K(\infty, r)$ désignera le cercle de centre ∞ et de rayon r, c.-à-d. l'extérieur du cercle $K(0, 1/r)$.

8. $\varrho(x, y)$, $\varrho(x, A)$ et $\varrho(A, B)$ désigneront resp. la distance des points x, y, la distance du point x à l'ensemble A, la distance des ensembles A, B.

9. Le nombre $h(A, B)$ défini par la formule

$$h(a, b) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\varrho(a, b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\varrho(b, a)\}$$

s'appellera la *distance au sens de Hausdorff* des ensembles A et B.

10. $\tilde{A}$ désignera l'ensemble symétrique de l'ensemble A par rapport à la circonférence unité $K^*(0, 1)$; en particulier, $\tilde{K}(0, 1)$ désignera l'extérieur du cercle unité.

Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 70,
PWN, Warszawa 1970, 77 pp.

11. La fonction $f(z)$ étant définie dans l'ensemble plan D, nous désignerons par $\tilde{f}(z)$ la fonction définie par la formule

$$\tilde{f}(z) = \left(\overline{f(\bar{z}^{-1})}\right)^{-1}$$

pour $z \in \tilde{D}$.

12. Si $f(x, \ldots)$ est une fonction d'une ou de plusieurs variables et E un certain ensemble de points $(x, \ldots)$, nous désignerons par $f(E)$ l'image de l'ensemble E par cette fonction.

Nous appliquerons des notations analogues et évidentes dans le cas où E sera une courbe.

13. Nous remplaçerons parfois le symbole $\overline{f(z)}$ par le symbole $\bar{f}(z)$.

14. Nous appellerons *α-diminution* du domaine plan G l'ensemble $G_\alpha = \{z\colon z \in G, \varrho(z, G^*) > \alpha\}$. Si le domaine G est limité par une courbe régulière fermée (comp. [18], p. 91-92), alors, comme il est facile de le voir, G_α est également un domaine pour α suffisamment petit.

15. Nous dirons que la suite des arcs plans (au sens de Jordan), $H_n\colon z = z_n(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $n = 1, 2, \ldots$, est *convergente au sens du paramètre vers l'arc* $H_0\colon z = z_0(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, si la suite des représentations paramétriques $\{z_n(t)\}$ converge uniformément vers $z_0(t)$ dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

16. Nous dirons que la suite des arcs $\{H_n\}$ plans est *convergente au sens de Hausdorff vers l'arc* H_0, si $h(H_n, H_0) \to 0$, où H_n et H_0 désignent ici les images géométriques des arcs respectifs, lorsque $n \to \infty$; alors pour tout nombre arbitraire $\varepsilon > 0$ il existe un nombre N tel que tous les arcs H_n, où $n > N$, sont situés dans un ε-entourage de l'arc H_0, soit dans l'ensemble $\bigcup_{z \in H_0} K(z, \varepsilon)$.

On voit facilement que la convergence d'une suite d'arcs au sens du paramètre entraîne la convergence de cette suite au sens de Hausdorff.

17. Une fonction de la forme

$$b(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots, \qquad b_1 > 0,$$

univalente dans le cercle unité $K(0, 1)$ et telle que $|b(z)| < 1$ pour $z \in K(0, 1)$ sera appelée *fonction bornée au sens de Löwner*.

18. Une fonction rationnelle $\delta(\zeta)$ de pôles uniques de mêmes multiplicités aux points 0 et ∞ de la forme

$$\delta(\zeta) = \frac{f_k}{\zeta^k} + \ldots + \frac{f_1}{\zeta} + f_0 + \hat{f}_1 \zeta + \ldots + \hat{f}_k \zeta^k, \qquad f_k, \hat{f}_k \neq 0;\ k > 0,$$

sera dite *fonction rationnelle simple*; en même temps nous dirons que son *degré* est le nombre $2k$.

19. Une fonction rationnelle simple $\delta(\zeta)$, réelle sur la circonférence unité, c'est-à-dire de la forme

$$\delta(\zeta) = \frac{f_k}{\zeta^k} + \ldots + \frac{f_1}{\zeta} + f_0 + \bar{f}_1\zeta + \ldots + \bar{f}_k\zeta^k, \qquad f_k \neq 0, f_0 \text{ réel},$$

sera appelée *fonction rationnelle spéciale de degré* $2k$.

20. Nous dirons que la fonction

$$a(z) = a_1 z + \ldots, \qquad a_1 > 0, \ z \in K(0,1),$$

est une fonction *algébrique spéciale* si elle satisfait dans le cercle unité à l'équation

$$\Omega\big(a(z)\big) = X(z),$$

où $\Omega(w)$ et $X(z)$ sont des fonctions rationnelles spéciales. En même temps, nous appellerons les fonctions $\Omega(w)$ et $X(z)$ resp. *déterminante* et *accommodée*. Nous appellerons parfois la fonction $a(z)$ *fonction intérieure*.

21. Soit H un arc régulier (comp. [18], p. 91-92) de Jordan, situé dans le cercle $K(0,1)$, à l'exception de son origine qui est située sur la circonférence $K^*(0,1)$, et qui ne passe pas par zéro. Soit ensuite $\Omega(w)$ une fonction rationnelle spéciale. Nous appellerons H *arc spécial* correspondant à la fonction $\Omega(w)$, si cette dernière prend sur lui uniquement des valeurs réelles.

- Dans le présent travail nous nous bornerons aux arcs spéciaux orthogonaux à la circonférence unité sans notifier chaque fois explicitement ce fait.

22. Soit $\{f_\tau(z)\}$ une famille de fonctions régulières (comp. [18], p. 145-146) dans un domaine G, dépendant du paramètre complexe τ, parcourant un ensemble T, et soit $f^*(z)$ une fonction régulière dans ce même domaine G. Supposons ensuite que $f_\tau(z)$ et $f^*(z)$ aient les mêmes points singuliers dans l'ensemble G. Nous dirons que $f_\tau(z)$ *tend vers* $f^*(z)$ pour τ tendant vers un τ^* presque uniformément dans G, si une telle convergence a lieu dans G_0, où G_0 désigne le domaine obtenu de G en éliminant tous ces points singuliers.

On voit facilement que, lorsque $\{\delta_\tau(\zeta)\}$ est une famille de fonctions rationnelles simples d'un même degré $2k$, dépendant du paramètre complexe τ, alors, pour que $\delta_\tau(\zeta)$ tende vers une fonction simple $\delta^*(\zeta)$ du même degré $2k$ pour τ tendant vers un τ^*, il faut et il suffit que les coeffitients des fonctions $\delta_\tau(\zeta)$ tendent vers les coeffitients respectifs de la fonction $\delta^*(\zeta)$.

23. Nous appellerons *proches* deux fonctions rationnelles simples si

elles sont de même degré et si leurs coefficients respectifs sont proches au sens habituel.

24. Nous dirons qu'une fonction complexe d'une ou de plusieurs variables complexes est *holomorphe* dans un ensemble, si elle est holomorphe dans un ensemble ouvert qui le contient.

Nous appellerons *proches* deux fonctions holomorphes dans un ensemble, si la valeur absolue de leur différence est uniformément petite dans cet ensemble.

25. Nous dirons que l'image $f(K(0,1))$ du cercle unité par la fonction $f(z)$ *remplit presque ce cercle*, si l'ensemble $f(K(0,1))$ est contenu dans $K(0,1)$ et si son aire est égale à l'aire du cercle $K(0,1)$.

26. Soit une fonction $f_0(z)$ (fixée) régulière dans un certain domaine et ayant en un point de ce domaine une racine de multiplicité finie k; soit ensuite $f_1(z)$ une fonction (variable) dans ce même domaine et ayant des racines aux points différents $z_1, z_2, \ldots, z_l$. Nous dirons que le système des racines $z_1, z_2, \ldots, z_l$ *correspond à la racine* z_0, si la somme de leurs multiplicités est k et s'il existe un entourage $|z-z_0| < \varepsilon$ du point z_0, contenu avec sa frontière $|z-z_0| = \varepsilon$ dans le domaine cité, contenant toutes les racines du système cité, ne contenant pas d'autres racines de la fonction $f_0(z)$ excepté la racine z_0 et tel que $|f_1(z)-f_0(z)| < |f_0(z)|$ sur la frontière $|z-z_0| = \varepsilon$.

Du théorème de Rouché résulte que cette définition a un sens unique, c.-à-d. qu'il n'existe pas deux systèmes différents de racines de la fonction $f_1(z)$ correspondant à une même racine z_0 de la fonction $f_0(z)$.

En effet, s'il existait deux systèmes différents $z'_1, z'_2, \ldots, z'_{l'}$ et $z''_1, z''_2, \ldots, z''_{l''}$ de racines correspondant à la racine z_0, alors, en prenant le plus grand des deux entourages, mentionnés plus haut, contenant resp. les racines en question, la somme des multiplicités des racines de la fonction $f_1(z)$, contenues dans cet entourage, serait plus grande que k; en outre sur la frontière de cet entourage aurait évidemment lieu l'inégalité $|f_1(z)-f_0(z)| < |f_0(z)|$, ce qui serait en contradiction évidente avec le théorème de Rouché.

Il résulte immédiatement de ce théorème et du fait que $f_0(z) \neq 0$ dans un voisinage du point z_0 que, si en particulier les fonctions $f_0(z)$ et $f_1(z)$ sont rationnelles simples, alors, lorsque la fonction $f_1(z)$ est suffisamment proche de la fonction $f_0(z)$, il existe un système de racines de la fonction $f_1(z)$, situées dans un entourage arbitrairement petit du point z_0, qui correspond à la racine z_0 de la fonction $f_0(z)$.

Si $f_0(z), f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont des fonctions rationnelles simples, z_0, z_1 et z_2 sont resp. les racines de ces fonctions, si $f_1(z)$ est suffisamment proche de la fonction $f_0(z)$ et z_1 correspond à z_0, si ensuite $f_2(z)$ est suffisamment proche de la fonction $f_1(z)$ et z_2 correspond à z_1, alors z_2 correspond à z_0. Il en est de même pour un plus grand nombre de fonctions.

RÉSULTATS AUXILIAIRES

27. Chaque fonction $b(z)$ holomorphe dans le cercle $|z| < r$ et y satisfaisant à l'équation $U\big(b(z)\big) = V(z)$, où $U(w)$ et $V(z)$ sont des fonctions rationnelles simples de même degré $2k$, se prolonge d'une façon continue au cercle fermé $|z| \leqslant r$, [3].

Il en résulte immédiatement que toute fonction $a(z)$ algébrique spéciale se prolonge d'une façon continue au cercle fermé $\overline{K(0, 1)}$, et ensuite que la fonction $\tilde{a}(z)$ se prolonge également d'une façon continue au domaine fermé $\overline{\tilde{K}(0, 1)}$.

28. Soit une suite quelconque de fonctions $\{b_\nu(z)\}$ satisfaisant aux cinq conditions suivantes:

1° Chaque fonction $b_\nu(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z| < r_\nu$, où r_ν est un nombre positif.

2° Chaque fonction $b_\nu(z)$ vérifie l'identité $U_\nu\big(b_\nu(z)\big) = V_\nu(z)$, où $U_\nu(w)$ et $V_\nu(z)$ sont des fonctions rationnelles simples de même degré $2k$.

3° La suite des nombres $\{r_\nu\}$ converge vers une limite finie r_0 non nulle.

4° La suite $\{b_\nu(z)\}$ converge presque uniformément dans le cercle $|z| < r_0$ vers une fonction holomorphe $b_0(z)$ (comp. [2], p. 3-4).

5° Les suites $\{U_\nu(w)\}$ et $\{V_\nu(z)\}$ convergent presque uniformément vers des fonctions $U_0(w)$ et $V_0(z)$ rationnelles simples de même degré $2k$.

Alors, pour toute suite de points $\{z_\nu\}$ convergente vers un point z_0, tels que $|z_\nu| \leqslant r_\nu$ pour tout ν et $|z_0| = r_0$, la suite $\{b_\nu(z_\nu)\}$ converge vers $b_0(z_0)$; on admet évidemment, suivant 27, que chacune des fonctions $b_\nu(z)$ et $b_0(z)$ est prolongée resp. au cercle $|z| \leqslant r_\nu$ et $|z| \leqslant r_0$, [3].

29. Soit $b(z)$ la fonction intervenant dans 27 et soit $w_0 = b(z_0)$, où $|z_0| = r$. Si w_0 et z_0 sont des racines des dérivées resp. $U'(w)$ et $V'(z)$ de même degré, la fonction $b(z)$ se prolonge comme fonction holomorphe par le point z_0, [5].

30. L'image de cercle unité par une fonction algébrique spéciale remplit presque ce cercle, [5].

31. Une fonction algébrique spéciale est univalente dans le cercle unité, [5].

32. On voit facilement que, si $\delta(\zeta)$ est une fonction rationnelle spéciale, alors la fonction $\delta'(\zeta)\zeta i$ est également rationnelle spéciale de même degré que la fonction $\delta(\zeta)$, ayant les mêmes racines que la dérivée $\delta'(\zeta)$.

33. Pour toute fonction rationnelle spéciale $\delta(\zeta)$ il existe une fonction rationnelle spéciale $\dot{\delta}(\zeta)$ de même degré qui lui est arbitrairement proche, dont la dérivée a des racines uniquement simples, [5].

34. Si $\Omega(w)$ est une fonction rationnelle spéciale et H un arc spécial qui lui correspond et si les cinq conditions suivantes sont remplies:

1° La dérivée $\Omega'(w)$ a toutes ses racines simples, situées en dehors de H, à l'exception de son origine, où elle a une racine.

2° Les valeurs de $\Omega(w)$ pour toutes les racines de la dérivée $\Omega'(w)$ sont distinctes et différentes de la valeur à l'extrémité de H.

3° $a(z)$ transforme d'une façon conforme $K(0,1)$ en $K(0,1)\setminus H$, ainsi que $a(0)=0$, $a'(0)>0$ et elle se prolonge à $\overline{K(0,1)}$.

4° $X(z)$ est une fonction rationnelle spéciale telle que $\Omega\big(a(z)\big)=X(z)$.

5° z^* est une racine de la dérivée $X'(z)$ différente des images réciproques de toutes les racines de la dérivée $\Omega'(w)$ à l'exception de l'origine de H.

Alors

(a) la dérivée $X'(z)$ possède uniquement des racines simples;

(b) $a(z^*)=w^*$, où w^* est l'extrémité de H; en outre il n'y a pas d'autres points qui se transforment en w^*, [5].

35. On voit facilement que si la fonction rationnelle spéciale $\delta(\zeta)$ possède sur la circonférence $K^*(0,1)$ une racine simple $e^{i\vartheta_0}$, alors toute fonction rationnelle spéciale $\delta_1(\zeta)$ suffisamment proche de la fonction $\delta(\zeta)$ a sur la circonférence $K^*(0,1)$ une racine simple analogue $e^{i\vartheta_1}$, arbitrairement proche de $e^{i\vartheta_0}$, qui correspond à $e^{i\vartheta_0}$ au sens de 26.

36. Si la fonction rationnelle spéciale $\Lambda(w)$ admet une inverse sur l'arc spécial R qui lui correspond et si sa dérivée $\Lambda'(w)$ n'a pas de racines sur R, à l'exception de son origine d_0 où elle a une racine simple, alors pour toute fonction rationnelle spéciale $\Omega(w)$, suffisamment proche de la fonction $\Lambda(w)$, il existe un arc spécial H correspondant, arbitrairement proche de R au sens de Hausdorff, sur lequel la fonction $\Omega(w)$ admet une inverse et sa dérivée $\Omega'(w)$ n'admet pas de racines sur H, à l'exception de son origine v_0 où elle a une racine simple; de plus, $\Omega(v)-\Omega(v_0)=\Lambda(d)-\Lambda(d_0)$ où d et v désignent les extrémités des arcs R et H respectivement.

En effet, en supposant, ce qui ne diminue pas la généralité des considérations, que $\Lambda(w)$ transforme R en segment $\overrightarrow{[0,-1]}$, en sorte que d_0 et d se transforment resp. en points 0 et -1, considérons la fonction $\Lambda(w)-\Lambda(d_0)$ et remarquons qu'elle admet une inverse sur l'arc R et, par conséquent, ne s'annule pas sur R à l'exception de d_0, où elle a une racine double. D'où il résulte facilement qu'il existe un domaine $P\supset R$ suffisamment petit, dans lequel il existe une branche du radical $\sqrt{\Lambda(w)-\Lambda(d_0)}$ uniforme et univalente, faisant correspondre R au segment $\overrightarrow{[0,i]}$; en outre, à cause de l'univalence, la dérivée de cette branche est différente de zéro dans P et, par suite, la dérivée de la fonction $\Lambda(w)$ a dans P exactement une racine d_0. Soit maintenant Q un domaine arbitraire tel

que $R \subset Q \subset \bar{Q} \subset P$. Si $\Omega(w)$ est une fonction rationnelle spéciale, suffisamment proche de la fonction $\Lambda(w)$, alors, en vertu de 35 et de ce qui a été constaté plus haut, dans le produit $K^*(0, 1) \cap Q$ il y a exactement une racine v_0 de la dérivée $\Omega'(w)$, arbitrairement proche de d_0 et, par suite, la différence $\Omega(w) - \Omega(v_0)$ est arbitrairement proche de la différence $\Lambda(w) - \Lambda(d_0)$. Ainsi, lorsque l'approximation est suffisamment bonne, ces différences ont dans Q les mêmes nombres de racines. Comme la fonction $\Lambda(w) - \Lambda(d_0)$ admet dans Q exactement une racine double d_0 et la fonction $\Omega(w) - \Omega(v_0)$ y admet aussi une racine double v_0, elle est évidemment différente de zéro à l'exception de v_0. D'où il résulte aisément qu'il existe dans Q une branche uniforme du radical $\sqrt{\Omega(w) - \Omega(v_0)}$, arbitrairement proche de la branche $\sqrt{\Lambda(w) - \Lambda(d_0)}$. De plus, prenant ensuite un domaine un peu petit S, $R \subset S \subset \bar{S} \subset Q$, nous voyons facilement que lorsque l'approximation est suffisamment bonne, la fonction $\sqrt{\Omega(w) - \Omega(v_0)}$ est univalente dans S (comp. [3], p. 9-10) et l'image du domaine S par cette fonction couvre le segment $\overrightarrow{[0, i]}$ de l'axe imaginaire. En outre, à cause de l'univalence, la dérivée de cette fonction est différente de zéro dans S et, par suite, la dérivée de la fonction $\Omega(w)$ admet dans S exactement une racine v_0. Désignons par H l'image réciproque du segment $\overrightarrow{[0, i]}$ par cette fonction; nous constatons qu'elle est un arc régulier de Jordan, arbitrairement proche au sens du paramètre, donc à plus forte raison au sens de Hausdorff, de l'arc R; de plus, le vecteur tangent à H à son origine v_0 est, comme il est facile de le prouver, arbitrairement proche du vecteur tangent à l'arc R à son origine d_0, ce qui donne facilement que l'arc H, à l'exception de l'origine v_0, est situé, de même que l'arc R, entièrement dans le cercle $K(0, 1)$. Il est aussi facile de calculer que H est orthogonal à la circonférence unité. Etant donné que la branche $\sqrt{\Omega(w) - \Omega(v_0)}$ admet une inverse sur l'arc H et la fonction $\varphi(x) = x^2$ une inverse sur son image $\overrightarrow{[0, i]}$, la fonction composée $\left(\sqrt{\Omega(w) - \Omega(v_0)}\right)^2 = \Omega(w) - \Omega(v_0)$ et, par conséquent, la fonction $\Omega(w)$ admet une inverse sur l'arc H. Enfin, les extrémités d et v étant les images réciproques du point i par les branches mentionnées, on en obtient immédiatement que $\Lambda(d) - \Lambda(d_0) = i^2 = -1$ et $\Omega(v) - \Omega(v_0) = i^2 = -1$.

Récapitulant les faits mentionnés plus haut, nous voyons que H est l'arc spécial demandé dont il a été question au début, correspondant à la fonction $\Omega(w)$.

Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 70,
PWN, Warszawa 1970, 77 pp.

I. FONCTIONS RATIONNELLES SIMPLES

1. INTERPOLATION LOCALE

LEMME 1 (sur l'interpolation). *Soit* $\delta(\mathfrak{z})$ *une fonction rationnelle simple* (18, $*$) *de la forme*

$$\delta(\mathfrak{z}) = \frac{f_k}{\mathfrak{z}^k} + \ldots + f_0 + \ldots + \hat{f}_k \mathfrak{z}^k, \quad f_k \neq 0, \hat{f}_k \neq 0. \tag{1}$$

Supposons que la dérivée $\delta'(\mathfrak{z})$ *de cette fonction a toutes ses racines simples et soient*

$$x_l, \frac{1}{\hat{x}_l}, \quad l = 1, \ldots, q, \tag{2}$$

$$y_r, \quad r = 0, \ldots, g, \tag{3}$$

toutes les racines de cette dérivée, où q *et* g *sont des nombres quelconques non négatifs, tels que* $2q+g+1 = 2k$; *cette façon non uniforme dont nous avons désigné les racines sera commode pour l'énoncé de la seconde partie du lemme.*

Soient ensuite

$$s_l = \delta(x_l), \quad \hat{s}_l = \delta\left(\frac{1}{\hat{x}_l}\right), \quad l = 1, \ldots, q, \tag{4}$$

$$t_r = \delta(y_r), \quad r = 0, \ldots, g, \tag{5}$$

les valeurs de la fonction (1) *pour les valeurs des racines* (2) *et* (3) *de sa dérivée.*

Alors pour tout système de nombres

$$\dot{s}_l, \quad \hat{\dot{s}}_l, \quad l = 1, \ldots, q, \tag{6}$$

$$\dot{t}_r, \quad r = 0, \ldots, g, \tag{7}$$

suffisamment proches des nombres respectifs (4) *et* (5), *il existe, déterminés d'une façon unique: une fonction rationnelle simple*

$$\dot{\delta}(\mathfrak{z}) = \frac{\dot{f}_k}{\mathfrak{z}^k} + \ldots + \dot{f}_0 + \ldots + \hat{\dot{f}}_k \mathfrak{z}^k \tag{8}$$

et un système de nombres

$$\dot{x}_l, \quad \frac{1}{\hat{\dot{x}}_l}, \quad l = 1, \ldots, q, \tag{9}$$

$$\dot{y}_r, \quad r = 0, \ldots, g, \tag{10}$$

arbitrairement proches resp. de la fonction (1) *et des nombres* (2) *et* (3), *tels que*

$$\dot{\delta}'(\dot{x}_l) = 0, \quad \dot{\delta}'\left(\frac{1}{\hat{\dot{x}}_l}\right) = 0, \tag{11}$$

$$\dot{\delta}'(\dot{y}_r) = 0, \tag{12}$$

$$\dot{\delta}(\dot{x}_l) = \dot{s}_l, \quad \dot{\delta}\left(\frac{1}{\hat{\dot{x}}_l}\right) = \hat{\dot{s}}_l, \tag{13}$$

$$\dot{\delta}(\dot{y}_r) = \dot{t}_r, \tag{14}$$

$$\frac{\dot{f}_k}{\hat{\dot{f}}_k} = \frac{f_k}{\hat{f}_k}. \tag{15}$$

En même temps l'expression (8) *et les nombres* (9) *et* (10) *sont des fonctions holomorphes des variables* (6) *et* (7).

En outre, dans le cas particulier où la fonction initiale (1) *est rationnelle spéciale et les nombres* (2) *et* (3) *sont racines de sa dérivé, situées resp. à l'intérieur et symétriquement en dehors, ainsi que sur la circonférence unité et, lorsque les valeurs* (6) *sont conjuguées et* (7) *sont réelles, la fonction* (8) *est rationnelle spéciale.*

Démonstration. La première partie de la conclusion du lemme équivaut à l'existence d'une solution unique et holomorphe du système des équations (11) à (15) par rapport aux coeffitients inconnues

$$\dot{f}_0, \dot{f}_s, \hat{\dot{f}}_s, \quad s = 1, \ldots, k, \tag{16}$$

et aux racines inconnues (9) et (10), situées dans un entourage des valeurs initiales respectives

$$f_0, f_s, \hat{f}_s, \quad s = 1, \ldots, k, \tag{17}$$

et (2) et (3), cette solution dépendant des paramètres variables (6) et (7). Ensuite, il suffit pour cela, en vertu de résultats connus, que le déterminant fonctionnel des expressions (11)-(15) par rapport aux inconnues (16), (9) et (10) soit différent de zéro pour les valeurs initiales (17), (2) et (3). Admettons que dans les lignes successives de ce déterminant figurent les dérivées partielles des premiers membres successifs (11)-(15) par

rapport aux inconnues (16), (9) et (10). Pour la démonstration supposons le contraire, à savoir que le déterminant ne soit pas différent de zéro. Il existerait dans ce cas un système de nombres ne s'annulant pas simultanement

$$\Delta f_0,\ \Delta f_s,\ \Delta \hat{f}_s, \qquad s = 1, \ldots, k, \tag{18}$$

$$\Delta x_l,\ \Delta \hat{x}_l, \qquad l = 1, \ldots, q, \tag{19}$$

$$\Delta y_r, \qquad r = 0, \ldots, g, \tag{20}$$

tel que la somme des produits des éléments de chaque ligne du déterminant par ces nombres serait égale à zéro. Calculant à partir de (11)-(15) les éléments du déterminant et effectuant les calculs indiqués ci-dessus, nous obtenons

$$\sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s \frac{\partial \dot{\delta}'(\dot{x}_l)}{\partial \dot{f}_s} + \Delta \hat{f}_s \frac{\partial \dot{\delta}'(\dot{x}_l)}{\partial \hat{\dot{f}}_s}\right) + \Delta x_l \frac{\partial \dot{\delta}'(\dot{x}_l)}{\partial \dot{x}_l} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s \frac{\partial \dot{\delta}'(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \dot{f}_s} + \Delta \hat{f}_s \frac{\partial \dot{\delta}'(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \hat{\dot{f}}_s}\right) + \Delta \hat{x}_l \frac{\partial \dot{\delta}'(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \hat{\dot{x}}_l} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s \frac{\partial \dot{\delta}'(\dot{y}_r)}{\partial \dot{f}_s} + \Delta \hat{f}_s \frac{\partial \dot{\delta}'(\dot{y}_r)}{\partial \hat{\dot{f}}_s}\right) + \Delta y_r \frac{\partial \dot{\delta}'(\dot{y}_r)}{\partial \dot{y}_r} = 0,$$

$$\Delta f_0 \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{x}_l)}{\partial \dot{f}_0} + \sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{x}_l)}{\partial \dot{f}_s} + \Delta \hat{f}_s \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{x}_l)}{\partial \hat{\dot{f}}_s}\right) + \Delta x_l \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{x}_l)}{\partial \dot{x}_l} = 0,$$

$$\Delta f_0 \frac{\partial \dot{\delta}(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \dot{f}_0} + \sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s \frac{\partial \dot{\delta}(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \dot{f}_s} + \Delta \hat{f}_s \frac{\partial \dot{\delta}(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \hat{\dot{f}}_s}\right) + \Delta \hat{x}_l \frac{\partial \dot{\delta}(1/\hat{\dot{x}}_l)}{\partial \hat{\dot{x}}_l} = 0,$$

$$\Delta f_0 \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{y}_r)}{\partial \dot{f}_0} + \sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{y}_r)}{\partial \dot{f}_s} + \Delta \hat{f}_s \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{y}_r)}{\partial \hat{\dot{f}}_s}\right) + \Delta y_r \frac{\partial \dot{\delta}(\dot{y}_r)}{\partial \dot{y}_r} = 0,$$

$$\Delta f_k \frac{\partial (\dot{f}_k/\hat{\dot{f}}_k)}{\partial \dot{f}_k} + \Delta \hat{f}_k \frac{\partial (\dot{f}_k/\hat{\dot{f}}_k)}{\partial \hat{\dot{f}}_k} = 0,$$

où toutes les dérivées mentionnées sont prises pour les valeurs (17), (2) et (3). Ayant calculé ces dérivées, nous obtenons

$$\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{-s\Delta f_s}{x_l^{s+1}} + s\Delta \hat{f}_s x_l^{s-1}\right) + \Delta x_l\, \delta''(x_l) = 0, \tag{21}$$

2 — Dissertationes Mathematicae LXX

$$(21') \qquad \sum_{s=1}^{k}\left(-s\Delta f_s\hat{x}_l^{s+1}+s\Delta\hat{f}_s\frac{1}{\hat{x}_l^{s-1}}\right)+\Delta\hat{x}_l\,\delta''\left(\frac{1}{\hat{x}_l}\right)\left(-\frac{1}{\hat{x}_l^2}\right)=0,$$

$$(22) \qquad \sum_{s=1}^{k}\left(\frac{-s\Delta f_s}{y_r^{s+1}}+s\Delta\hat{f}_s y_r^{s-1}\right)+\Delta y_r\,\delta''(y_r)=0,$$

$$(23) \qquad \Delta f_0+\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\Delta f_s}{x_l^s}+\Delta\hat{f}_s x_l^s\right)=0,$$

$$(24) \qquad \Delta f_0+\sum_{s=1}^{k}\left(\Delta f_s\hat{x}_l^s+\Delta\hat{f}_s\frac{1}{\hat{x}_l^s}\right)=0,$$

$$(25) \qquad \Delta f_0+\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\Delta f_s}{y_r^s}+\Delta\hat{f}_s y_r^s\right)=0,$$

$$(26) \qquad \frac{\Delta f_k}{f_k}=\frac{\Delta\hat{f}_k}{\hat{f}_k}.$$

Considérons maintenant la fonction

$$(27) \qquad \Delta\delta(\mathfrak{z})=\frac{\Delta f_k}{\mathfrak{z}^k}+\ldots+\Delta f_0+\ldots+\Delta\hat{f}_k\mathfrak{z}^k;$$

c'est une fonction rationnelle, dont le nombre des racines ne dépasse pas le nombre $2k$. Nous déduisons de (23), (24) et (25) que les points (2) et (3) sont racines de cette fonction de multiplicité au moins un. Si le nombre des racines de la fonction (27) était égal à $2k$, les points (2) et (3) devraient être racines de cette fonction de multiplicité exactement un; elle serait alors une fonction rationnelle de mêmes pôles et de mêmes racines que a fonction $\mathfrak{z}\delta'(\mathfrak{z})$, donc

$$\Delta\delta(\mathfrak{z})=C\mathfrak{z}\,\delta'(\mathfrak{z}),$$

où C est constant, c'est-à-dire

$$\Delta f_0+\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\Delta f_s}{\mathfrak{z}^s}+\Delta\hat{f}_s\mathfrak{z}^s\right)=C\cdot\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{-sf_s}{\mathfrak{z}^s}+s\hat{f}_s\mathfrak{z}^s\right).$$

Comparant les coefficients des mêmes puissances de $\mathfrak{z}$, nous obtenons entre autres

$$\Delta f_k=-Ckf_k \quad \text{et} \quad \Delta\hat{f}_k=Ckf_k;$$

vu (26), cela donne $C=0$, donc $\Delta\delta(\mathfrak{z})\equiv 0$, d'où

$$(28) \qquad \Delta f_0=0, \quad \Delta f_s=0, \quad \Delta\hat{f}_s=0.$$

Par conséquent, des relations (21), (21′) et (22) et de la simplicité des racines de la dérivé $\delta'(\zeta)$ nous déduisons que

$$\Delta x_l = 0, \quad \Delta \hat{x}_l = 0, \tag{29}$$

$$\Delta y_r = 0; \tag{30}$$

conjointement avec les égalités (28) cela est contraire à l'hypothèse que les nombres (18), (19) et (20) ne s'annulent pas simultanément. La première partie de la conclusion du lemme est ainsi prouvée.

La seconde partie résulte du fait que dans le cas où les nombres (6) sont conjugués et les nombres (7) réels, la réalisation du système (11)-(15) par les nombres (16), (9) et (10) équivaut, ce qui est facile à voir, à la réalisation de ce système par les nombres

$$\bar{\dot{f}}_0, \quad \bar{\dot{\hat{f}}}_s, \quad \bar{\dot{f}}_s, \tag{31}$$

$$\bar{\dot{\hat{x}}}_l, \quad \frac{1}{\bar{\dot{x}}_l}, \tag{32}$$

$$\frac{1}{\bar{\dot{y}}_r}; \tag{33}$$

de là et de l'unicité des solutions il résulte que la fonction (8) et les systèmes (16), (9), (10) et (31), (32), (33) doivent être identiques, donc

$$\dot{f}_0 = \bar{\dot{f}}_0, \quad \dot{\hat{f}}_s = \bar{\dot{f}}_s, \tag{34}$$

$$\dot{\hat{x}}_l = \bar{\dot{x}}_l, \tag{35}$$

$$\dot{y}_r = \frac{1}{\bar{\dot{y}}_r}. \tag{36}$$

En particulier, il résulte dé (34) que la fonction (8) est une fonction rationnelle spéciale.

Dans la suite nous aurons besoin d'une spécification du lemme 1:

LEMME 1′. *Soit*

$$s_l(t), \quad \hat{s}_l(t), \quad s_l(t_0) = s_l, \quad \hat{s}_l(t_0) = \hat{s}_l, \quad l = 1, \ldots, q^*; q^* < q, \tag{37}$$

un système de $2q^*$ *de fonctions holomorphes dans un cercle* $|t-t_0| < T_0$. *Il existe alors pour la fonction* (1) *et pour les nombres* (2) *et* (3) *un* T^*, $0 < T^* \leqslant T_0$, *tel que dans le cercle* $|t-t_0| < T^*$ *existent, déterminés d'une façon unique: une famille de fonctions rationnelles par rapport à* ζ, *qui dépend du paramètre complexe* t *et qui est holomorphe par rapport à* t, *de la forme*

$$\delta(\zeta, t) = \frac{f_k(t)}{\zeta^k} + \ldots + f_0(t) + \ldots + \hat{f}_k(t)\zeta^k, \quad f_k(t) \neq 0, \hat{f}(t) \neq 0, \tag{38}$$

et un système de fonctions holomorphes

$$x_l(t), \qquad \frac{1}{\hat{x}_l(t)}, \qquad l = 1, \ldots, q,$$

$$y_r(t), \qquad r = 0, \ldots, g,$$

tels que

$$\delta'_\zeta(x_l(t), t) = 0, \qquad \delta'_\zeta\left(\frac{1}{\hat{x}_l(t)}, t\right) = 0, \tag{39}$$

$$\delta'_\zeta(y_r(t), t) = 0, \tag{40}$$

$$\delta(x_l(t), t) = s_l(t), \qquad \delta\left(\frac{1}{\hat{x}_l(t)}, t\right) = \hat{s}_l(t), \qquad l = 1, \ldots, q^*, \tag{41}$$

$$\delta(x_l(t), t) = s_l, \qquad \delta\left(\frac{1}{\hat{x}_l(t)}, t\right) = \hat{s}_l, \qquad l = q^*+1, \ldots, q, \tag{42}$$

$$\delta(y_r(t), t) = t_r, \tag{43}$$

$$\frac{f_k(t)}{\hat{f}_k(t)} = \frac{f_k}{\hat{f}_k}, \tag{44}$$

$$\delta(\zeta, t_0) = \delta(\zeta), \tag{45}$$

$$x_l(t_0) = x_l, \qquad \hat{x}_l(t_0) = \hat{x}_l, \tag{46}$$

$$y_r(t_0) = y_r. \tag{47}$$

De plus la relation

$$\delta'_t(\zeta, t) = i\zeta\delta'_\zeta(\zeta, t)\sum_{l=1}^{q^*}\left[M_l(t)\frac{\zeta + x_l(t)}{\zeta - x_l(t)} + \hat{M}_l(t)\frac{1+\hat{x}_l(t)\zeta}{1-\hat{x}_l(t)\zeta}\right], \tag{48}$$

est remplie, où

$$M_l(t) = \frac{s'_l(t)}{2x_l^2(t)\, i\delta''_{\zeta\zeta}(x_l(t), t)}, \qquad \hat{M}_l(t) = \frac{\hat{s}'_l(t)}{-2\dfrac{1}{\hat{x}_l^2(t)}\, i\delta''_{\zeta\zeta}\left(\dfrac{1}{\hat{x}_l(t)}, t\right)}. \tag{49}$$

La famille (38) *sera appelée famille de variations pour la fonction* (1).

Démonstration. La première partie du lemme est une conséquence directe du lemme précédent si l'on y remplace les variables indépendantes $\dot{s}_l, \hat{\dot{s}}_l$, $l = 1, \ldots, q^*$, respectivement par les fonctions (37), et les variables restantes de (6) et (7) respectivement par les constantes correspondantes de (4) et (5).

Pour démontrer la formule (48), nous considérons les fonctions

$$\delta'_t(\zeta, t) = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{f'_j(t)}{\zeta^j} + \hat{f}'_j(t)\zeta^j\right) + f'_0(t) \tag{50}$$

et

$$i_{\mathfrak{z}}\delta_{\mathfrak{z}}'(\mathfrak{z},t)=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{-ji f_j(t)}{\mathfrak{z}^j}+ji\hat{f}_j(t)\mathfrak{z}^j\right). \tag{51}$$

La première s'annule aux points

$$x_l(t),\quad \frac{1}{\hat{x}_l(t)},\quad l=q^*+1,\dots,q,$$

$$y_r(t),\quad r=0,\dots,g;$$

elle a donc avec la seconde au moins $q-q^*+g$ racines communes. Nous le constatons en dérivant les relations (42) et (43) et en tenant compte de (39) et (40). Par conséquent nous pouvons mettre le quotient de (50) par (51), en abrégeant les facteurs communs, sous la forme

$$\frac{\delta_l'(\mathfrak{z},t)}{i_{\mathfrak{z}}\delta_{\mathfrak{z}}'(\mathfrak{z},t)}=\sum_{l=1}^{q^*}\left[M_l(t)\frac{\mathfrak{z}+x_l(t)}{\mathfrak{z}-x_l(t)}+\hat{M}_l(t)\frac{1+\hat{x}_l(t)\mathfrak{z}}{1-\hat{x}_l(t)\mathfrak{z}}\right]+M(t), \tag{52}$$

ce qui équivaut, comme on le voit immédiatement, à une décomposition en fractions simples, où $M_l(t)$, $\hat{M}_l(t)$ et $M(t)$ représentent des fonctions holomorphes du paramètre t.

En comparant maintenant les coefficients de $\mathfrak{z}^{-k}$ et de $\mathfrak{z}^k$ dans les deux membres de la relation (52), nous obtenons les deux relations suivantes

$$\frac{1}{ki}\frac{f_k'(t)}{f_k(t)}=\sum_{l=1}^{q^*}\left(M_l(t)-\hat{M}_l(t)\right)-M(t),$$

$$\frac{1}{ki}\frac{\hat{f}_k'(t)}{\hat{f}_k(t)}=\sum_{l=1}^{q^*}\left(M_l(t)-\hat{M}_l(t)\right)-M(t),$$

d'où

$$2kiM(t)=-\frac{d}{dt}\log\frac{f_k(t)}{\hat{f}_k(t)}.$$

Mais, étant donné (44),

$$\frac{d}{dt}\log\frac{f_k(t)}{\hat{f}_k(t)}=0,$$

c'est-à-dire $M(t)=0$; l'expression (52) prend donc la forme (48). Passant ensuite dans (48) à la limite avec $\mathfrak{z}\to x_l(t)$ et avec $\mathfrak{z}\to 1/\hat{x}_l(t)$ et, vu (41) et (39), nous constatons enfin qu'en même temps ont lieu les relations (49), ce qui termine la démonstration.

Remarque 1. Dans le cas particulier, considéré dans le lemme 1, où les fonctions (37) sont conjuguées, les nombres (4) pour $l=q^*+1,\dots,q$

sont conjugués et les nombres (5) réels, nous en déduisons, de même que dans la démonstration du lemme précédent, que

$$f_0(t) = \overline{f_0(t)}, \qquad \hat{f}_j(t) = \overline{f_j(t)}, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

$$\hat{x}_l(t) = \overline{x_l(t)}, \qquad l = 1, \ldots, q,$$

$$y_r(t) = \frac{1}{\overline{y_r(t)}}, \qquad r = 0, \ldots, g,$$

d'où il résulte en particulier que la fonction (38) est rationnelle spéciale et, par suite, il résulte des formules (49) que

$$\hat{M}_l(t) = \overline{M_l(t)}, \qquad l = 1, \ldots, q^*.$$

Remarque 2. Il résulte immédiatement de l'unicité des solutions du système (11)-(15) par rapport aux inconnues correspondantes que pour deux cercles quelconques $|t-t_0| < T_1^*$ et $|t-t_0| < T_2^*$, dans lesquels existent les familles et les systèmes de fonctions du type mentionné dans le lemme 1′, ces familles et ces systèmes sont identiques dans la partie commune des cercles mentionnés.

Par conséquent, il existe parmi les nombres T^*, intervenant dans le lemme, un nombre le plus grand qui est leur borne supérieure.

Remarque 3. On peut observer que, si on se donne la fonction rationnelle simple (1), mentionnée plus haut, dont la dérivée a toutes ses racines simples, et si e_0 est une racine quelconque de cette dérivée arbitrairement choisie, il existe une fonction analogue rationnelle simple (8), arbitrairement proche de (1), dont la dérivée a toutes ses racines simples et il existe une racine de cette dérivée $\dot{e}_0$, arbitrairement proche de e_0 qui lui correspond au sens de (26,$*$), telles que les valeurs de la fonction (8) pour toutes les racines de la dérivée sont distanctes et différentes du nombre $-1+\delta(\dot{e}_0)$.

En effet, il suffit d'appliquer le lemme 1 (sur l'interpolation), en posant $y_0 = e_0$ et en choisissant ensuite les valeurs (6) et (7) de telle façon qu'elles soient distinctes et différentes de $-1+\dot{t}_0$ et en prenant $\dot{e}_0 = \dot{y}_0$.

Il en est de même dans le cas où les fonctions (1) et (8) sont rationnelles spéciales.

2. PROLONGEMENT DE LA FAMILLE DES FONCTIONS RATIONNELLES SIMPLES AU CERCLE FERMÉ DU PARAMÈTRE

Supposons réalisées les hypothèses suivantes:

1. Soit dans le plan un système de $2n+2$ domaines de Jordan g, $G_j, \hat{G}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\hat{g}$, limités par les courbes régulières $g^*, G_j^*, \hat{G}_j^*, \hat{g}^*$, de fermetures disjointes, tel que $0 \in g$, $\infty \in \hat{g}$.

2. Soit un nombre positif d, suffisamment petit.

3. Soit dans le cercle $|t| < T^*$ une famille de fonctions rationnelles simples par rapport à ζ, de la forme

$$\Delta(\zeta, t) = \frac{F_K(t)}{\zeta^K} + \ldots + F_0(t) + \ldots + \hat{F}_K(t)\zeta^K, \tag{1}$$

$$F_K(t) \neq 0, \quad \hat{F}_K(t) \neq 0,$$

holomorphes par rapport à t, et de fonctions holomorphes

$$\zeta_j(t), \frac{1}{\hat{\zeta}_j(t)}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$p_h(t), \quad h = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$2n + m = 2K, \tag{4}$$

telles que

(i) $\Delta'_\zeta(\zeta, t)$ s'annule aux points (2) et (3);

(ii) les conditions suivantes sont realisées:

$$\Delta\big(\zeta_j(t), t\big) = S_j(t), \quad \Delta\left(\frac{1}{\hat{\zeta}_j(t)}, t\right) = \hat{S}_j(t),$$

$$\Delta\big(p_h(t), t\big) = \Delta_h,$$

$$\frac{F_K(t)}{\hat{F}_K(t)} = \frac{F_K(0)}{\hat{F}_K(0)},$$

où $S_j(t)$ et $\hat{S}_j(t)$ sont des fonctions holomorphes de la variable t au moins dans un cercle $|t| < T_0$, où $T_0 > T^*$; en outre dans le cercle $|t| < T^*$ les expressions

$$\left| \frac{S'_j(t)}{2\zeta_j^2(t)\, i\, \Delta''_{\zeta\zeta}\big(\zeta_j(t), t\big)} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\hat{S}'_j(t)}{-2\dfrac{1}{\hat{\zeta}_j^2(t)}\, i\, \Delta''_{\zeta\zeta}\left(\dfrac{1}{\hat{\zeta}_j(t)}, t\right)} \right|$$

sont bornées supérieurement et $|F_K(t)|$ et $|\hat{F}_K(t)|$ sont bornées inférieurement par des constantes positives;

(iii) les racines $\zeta_j(t)$ et $1/\hat{\zeta}_j(t)$ pour tout t sont situées respectivement dans les domaines G_j et $\hat{G}_j$ à une distance au moins d de leurs frontières;

(iv) les racines restantes $p_h(t)$ sont situées à l'extérieur de la somme de tous les domaines G_j et $\hat{G}_j$ à une distance au moins d de leurs frontières;

(v) les valeurs $\Delta_h = \Delta\big(p_h(0), 0\big)$ sont toutes différentes entre elles.

LEMME 1 (sur le prolongement). *La famille* (1) *et les fonctions* (2) *et* (3) *peuvent être prolongées, sans nuire à leur analycité, au cercle fermé* $|t| \leqslant T^*$, *en respectant les conditions* (i)-(v).

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'en vertu de (i), (ii) et, vu la démonstration du lemme 1′, 1, on a dans le cercle $|t| < T^*$ l'identité

$$\Delta'_t(\mathfrak{z}, t) = i\mathfrak{z}\,\Delta'_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}, t)\sum_{j=1}^{n}\left(N_j(t)\frac{\mathfrak{z}+\mathfrak{z}_j(t)}{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j(t)} + \hat{N}_j(t)\frac{1+\hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}}{1-\hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}}\right), \tag{5}$$

où

$$N_j(t) = \frac{S'_j(t)}{2\mathfrak{z}_j^2(t)\,i\,\Delta''_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}_j(t), t)}, \qquad \hat{N}_j(t) = \frac{\hat{S}'_j(t)}{-2\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^2(t)}i\Delta''_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t)}, t\right)}, \tag{6}$$

et les modules des $N_j(t)$ et $\hat{N}_j(t)$, vu (ii), sont bornés supérieurement et les modules des $\mathfrak{z}_j(t)$ et $1/\hat{\mathfrak{z}}_j(t)$, vu (iii) et la définition des domaines $G_j, \hat{G}_j$, sont bornés supérieurement et inférieurement. Remarquons en outre que, vu 1, (iii)-(v), les racines (2) et (3) sont toutes distinctes, donc, en vertu de (4) et la définition de la fonction (1), elles sont toutes simples.

Soit maintenant t^* un point arbitraire suité sur la circonférence du cercle $|t| < T^*$, c.-à-d. $|t^*| = T^*$. Soit ensuite $\{t_m\}$ une suite arbitraire de points de ce même cercle tendant vers t^*.

Analysant dans la relation (5) les coefficients des puissances de $\mathfrak{z}$, nous observons qu'une puissance arbitraire positive $\mathfrak{z}^s$ figure au premier membre avec le coefficient $\hat{F}'_s(t)$ et une puissance arbitraire non positive $\mathfrak{z}^{-s}$ avec le coefficient $F'_s(t)$. Au second membre, vu la divisibilité de la fonction $\Delta'_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}, t)$ par les dénominateurs $\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j(t)$ et $\mathfrak{z}-1/\hat{\mathfrak{z}}_j(t)$, la puissance positive analogue $\mathfrak{z}^s$ a le coefficient $L_s\{F_K(t), \ldots, F_0(t), \ldots, \hat{F}_K(t), N_1(t), \ldots, N_n(t), \hat{N}_1(t), \ldots, \hat{N}_n(t), \mathfrak{z}_1(t), \ldots, \mathfrak{z}_n(t), \hat{\mathfrak{z}}_1(t), \ldots, \hat{\mathfrak{z}}_n(t)\}$, qui est une fonction linéaire par rapport à $F_K(t), \ldots, \hat{F}_K(t)$, dont les coefficients sont des polynômes par rapport à $N_1(t), \ldots, \hat{N}_n(t), \mathfrak{z}_1(t), \ldots, \mathfrak{z}_n(t), \hat{\mathfrak{z}}_1(t), \ldots, \hat{\mathfrak{z}}_n(t), 1/\mathfrak{z}_1(t), \ldots, 1/\mathfrak{z}_n(t), 1/\hat{\mathfrak{z}}_1(t), \ldots, 1/\hat{\mathfrak{z}}_n(t)$, du premier degré par rapport aux variables $N_1(t), \ldots, \hat{N}_n(t)$. Le coefficient de la puissance non positive $\mathfrak{z}^{-s}$ sera analogue. Par conséquent, la comparaison des coefficients des puissances successives de la variable $\mathfrak{z}$ dans les deux membres de la relation citée (5) mène à un système linéaire d'équations différentielles aux fonctions inconnues $F_K(t), \ldots, \hat{F}_K(t)$. Etant donné que dans ce système les coefficients de mêmes fonctions inconnues aux seconds membres sont bornés, puisque $|N_j(t)|$ et $|\hat{N}_j(t)|$ sont bornés supérieurement et $|\mathfrak{z}_j(t)|$ et $|1/\hat{\mathfrak{z}}_j(t)|$ supérieurement et inférieurement, alors, conformément à la propriété connue des systèmes linéraires, les fonctions $F_K(t), \ldots, \hat{F}_K(t)$ sont bornées supérieurement; en outre, ce qui résulte de l'hypothèse (ii), les fonctions $F_K(t)$ et $\hat{F}_K(t)$ sont aussi bornées inférieurement. Il résulte ensuite de la propriété mentionnée des coefficients que les modules de toutes les racines $p_h(t)$ $(h = 1, \ldots, m)$, $\mathfrak{z}_j(t), 1/\hat{\mathfrak{z}}_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$

sont bornés; les modules de ces dernières racines sont bornés déjà par l'hypothèse.

Considérons maintenant les suites

$$\{F_K(t_m)\}, \ldots, \{\hat{F}_K(t_m)\}, \{\zeta_j(t_m)\}, \left\{\frac{1}{\hat{\zeta}_j(t_m)}\right\}, \{p_h(t_m)\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Comme elles sont bornées, en extrayant au besoin une suite partielle, nous pouvons admettre que la suite $\{t_m\}$ a été choisie de façon que toutes les suites mentionnées soient convergentes vers des limites $F_K^*, \ldots, \hat{F}_K^*$, $\zeta_j^*, 1/\hat{\zeta}_j^*, p_h^*$.

Posant

$$\Delta^*(\zeta) = \frac{F_K^*}{\zeta^K} + \ldots + F_0^* + \ldots + F_K^* \zeta^K,$$

nous remarquons, vu (i) et (ii), que $\zeta_j^*, 1/\hat{\zeta}_j^*, p_h^*$ sont les racines de la dérivée $\Delta^{*\prime}(\zeta)$ et que les valeurs de la fonction elle-même $\Delta^*(\zeta)$ en ces points sont respectivement égales à $S_j(t^*)$, $\hat{S}_j(t^*)$ et Δ_h. Il en résulte en particulier que les points p_h^*, $h = 1, \ldots, m$, sont tous distincts. De plus, comme ces points sont situés dans l'ensemble complémentaire de la somme des domaines disjoints G_j et $\hat{G}_j$, contenant les ensembles fermés $\overline{G_{jd}}$ et $\overline{\hat{G}_{jd}}$, dans lesquels sont situés les points ζ_j^* et $1/\hat{\zeta}_j^*$, on voit que les points p_h^* doivent être différents des points ζ_j^*, et $1/\hat{\zeta}_j^*$. Comparant ces faits on tire de (4) que $\zeta_j^*, 1/\hat{\zeta}_j^*$ et p_h^* sont $2K$ racines de la dérivée $\Delta^{*\prime}(\zeta)$, qui sont distinctes et, par conséquent, elles sont toutes des racines simples.

Appliquant à présent à la fonction $\Delta^*(\zeta)$ et aux nombres $\zeta_j^*, 1/\hat{\zeta}_j^*$ et p_h^* le lemme 1′, 1, nous en déduisons qu'il existe un cercle $|t-t^*| < \tilde{T}$, tel qu'il existe dans ce cercle déterminés d'une façon unique une famille de fonctions rationnelles par rapport à ζ, dépendant du paramètre complexe t et holomorphes par rapport à t, de la forme

$$(1^*) \qquad \Delta^*(\zeta, t) = \frac{F_K^*(t)}{\zeta^K} + \ldots + \hat{F}_K^*(t)\zeta^K, \qquad F_K^*(t) \neq 0, \hat{F}_K^*(t) \neq 0,$$

et un système de fonctions holomorphes

$$(2^*) \qquad \zeta_j^*(t), \quad \frac{1}{\hat{\zeta}_j^*(t)}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$(3^*) \qquad p_h^*(t), \quad h = 1, \ldots, m,$$

telles que

$$(\mathrm{i}^*) \quad \Delta_\zeta^{*\prime}(\zeta_j^*(t), t) = 0, \ \Delta_\zeta^{*\prime}\left(\frac{1}{\hat{\zeta}_j^*(t)}, t\right) = 0, \ \Delta_\zeta^{*\prime}(p_h^*(t), t) = 0,$$

$$(\text{ii}^*)\quad \Delta^*\left(\mathfrak{z}_j^*(t), t\right) = S_j(t),\ \Delta^*\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^*(t)}, t\right) = \hat{S}_j(t),\ \Delta^*\left(p_h^*(t), t\right) = \Delta_h,$$

$$\frac{F_K^*(t)}{\hat{F}_K^*(t)} = \frac{F_K^*}{\hat{F}_K^*},$$

et que

$$\Delta^*(\mathfrak{z}, t^*) = \Delta^*(\mathfrak{z}),$$

$$\mathfrak{z}_j^*(t^*) = \mathfrak{z}_j^*, \qquad \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^*(t^*)} = \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^*},$$

$$p_h^*(t^*) = p_h^*.$$

On voit encore aisément que les conditions (iii) et (iv) restent valables pour les points limites $\mathfrak{z}_j^*, 1/\hat{\mathfrak{z}}_j^*$, et p_h^*, c.-à-d. que

(iii*) $\mathfrak{z}_j^*$ et $1/\hat{\mathfrak{z}}_j^*$ sont situés respectivement dans les domaines G_j et $\hat{G}_j$ à une distance au moins d de leurs frontières;

(iv*) p_h^* sont situés à l'extérieur de la somme de tous les domaines G_j et $\hat{G}_j$ à une distance au moins d de leurs frontières.

Par conséquent il résulte facilement de l'unicité locale des solutions des équations du type considéré dans le lemme 1′, 1, en comparant les conditions (i), (ii) et (i*), (ii*) pour $t = t_m$, $m = 1, 2, \ldots$, que pour m suffisamment grand les fonctions (1), (2), (3) et (1*), (2*), (3*) coïncident pour $t = t_m$. Il en résulte directement, vu la remarque 2, 1, que ces fonctions coïncident aussi dans un certain entourage de t_m. Enfin, en vertu du fait que ces fonctions sont holomorphes, il en résulte qu'elles coïncident dans le produit des cercles $|t| < T^*$ et $|t - t^*| < \tilde{T}$. Mais, cela signifie que les fonctions (1), (2), (3) se prolongent comme fonctions holomorphes par rapport à t par un point arbitraire t^* de la circonférence $|t| = T^*$, c.-à-d. au cercle fermé $|t| \leqslant T^*$.

3. VARIATIONS DES FONCTIONS RATIONNELLES SIMPLES

Supposons realisées les conditions suivantes:

1. Soit dans le plan un système de $2n+2$ domaines de Jordan g, $G_j, \hat{G}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\hat{g}$, limités par les courbes régulières $g^*, G_j^*, \hat{G}_j^*, \hat{g}^*$, de fermetures disjointes, tels que $0 \in g$, $\infty \in \hat{g}$.

2. Soient cinq membres positifs arbitraires ν_1, ν^1, ν_2, N et δ, où δ est assez petit pour que les dominutions $G_{j\delta}$ et $\hat{G}_{j\delta}$ soient des domaines et que $\delta < \min(1, \sqrt[5]{4\nu^1/\nu_2})$; en outre $\nu_1 < \nu^1$.

3. Soit une fonction rationnelle simple, arbitraire de degré arbitraire, de la forme

$$\Delta(\zeta) = \frac{F_K}{\zeta^K} + \ldots + \hat{F}_K \zeta^K, \quad F_K \neq 0, \ \hat{F}_K \neq 0, \tag{1}$$

ayant les propriétés suivantes:

(j) $\Delta'(\zeta)$ admet uniquement des racines simples;

(jj) $\Delta'(\zeta)$ admet à l'intérieur de chaque domaine G_j resp. $\hat{G}_j$ exactement une racine ζ_j resp. $1/\hat{\zeta}_j$;

(jjj) les racines restantes p_h $(h = 1, \ldots, m)$, $m = 2K - 2n$, de la fonction $\Delta'(\zeta)$ sont situées à l'extérieur de la somme de tous les domaines G_j et $\hat{G}_j$;

(jv) les valeurs $\Delta(p_h)$ sont toutes distinctes;

(v) les distances des points 0, ζ_j, $1/\hat{\zeta}_j$, ∞ respectivement aux frontières $g^*, G_j^*, \hat{G}_j^*, \hat{g}^*$ sont toutes plus grandes que δ (comp. [18], p. 19);

(vj) sur les frontières des diminutions $G_{j(1/2)\delta}$ et $\hat{G}_{j(1/2)\delta}$ on a $|\Delta'(\zeta)| > \nu_1$ et dans les fermetures $\bar{G}_j$ et $\bar{\hat{G}}_j$ on a $|\Delta'(\zeta)| < \nu^1$, $|\Delta''(\zeta)| > \nu_2$.

4. Soit un système arbitraire (N^0) de nombres complexes N_j et $\hat{N}_j$, $j = 1, \ldots, n$, dont les modules sont bornés supérieurement par N.

On a le lemme suivant:

LEMME 1 (sur les variations), *Il existe un $R > 0$ qui dépend uniquement du système des domaines de 1 et des nombres de 2, tel que pour toute fonction* (1) *remplissant les conditions* (j)-(vj) *et pour tout système de nombres de 4, il existe dans le cercle $|t| < R$ une famille de variations des fonctions rationnelles de la variable ζ, dépendant du paramètre complexe t, holomorphes par rapport à t, de la forme*

$$\Delta(\zeta, t) = \frac{F_K(t)}{\zeta^K} + \ldots + \hat{F}_K(t)\zeta^K, \quad F_K(t) \neq 0, \ \hat{F}_K(t) \neq 0, \tag{2}$$

et il existe des systèmes de fonctions holomorphes

$$\zeta_j(t), \quad \frac{1}{\hat{\zeta}_j(t)}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$p_h(t), \quad h = 1, \ldots, m, \quad m = 2K - 2n, \tag{4}$$

tels que

$$\zeta_j(t) \in G_{j(1/2)\delta}, \quad \frac{1}{\hat{\zeta}_j(t)} \in \hat{G}_{j(1/2)\delta}, \tag{5}$$

$$p_h(t) \in \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_{j(1/2)\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_{j(1/2)\delta}\Big)', \tag{5'}$$

$$\Delta'_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}_j(t), t) = 0, \quad \Delta'_{\mathfrak{z}}\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t)}, t\right) = 0, \tag{6}$$

$$\Delta'_{\mathfrak{z}}(p_h(t), t) = 0, \tag{7}$$

$$\Delta(\mathfrak{z}_j(t), t) = S_j(t), \quad \Delta\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t)}, t\right) = \hat{S}_j(t), \tag{8}$$

$$\Delta(p_h(t), t) = \Delta_h, \quad \text{où } \Delta_h = \Delta(p_h), \tag{9}$$

$$\frac{F_K(t)}{\hat{F}_K(t)} = \frac{F_K}{\hat{F}_K}, \tag{10}$$

$$\Delta(\mathfrak{z}, 0) = \Delta(\mathfrak{z}), \tag{11}$$

$$\mathfrak{z}_j(0) = \mathfrak{z}_j, \quad \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(0)} = \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j}, \tag{12}$$

$$p_h(0) = p_h; \tag{13}$$

les inégalités suivantes ont lieu:

$$|N_j(t)| < CN, \quad |\hat{N}_j(t)| < CN, \tag{14}$$

où

$$C = 4\frac{\nu^1}{\delta^5 \nu_2}, \tag{15}$$

et où on a posé

$$S_j(t) = \Delta(\mathfrak{z}_j) + N_j 2i\mathfrak{z}_j^2 \Delta''(\mathfrak{z}_j)t, \tag{16}$$

$$\hat{S}_j(t) = \Delta\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j}\right) - \hat{N}_j 2i \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^2} \Delta''\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j}\right)t, \tag{16'}$$

et

$$N_j(t) = \frac{S'_j(t)}{2i\mathfrak{z}_j^2(t)\Delta''_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}_j(t), t)}, \quad \hat{N}_j(t) = \frac{\hat{S}'_j(t)}{-2i\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j^2(t)}\Delta''_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_j(t)}, t\right)}. \tag{17}$$

On a la relation suivante:

$$\Delta'_t(\mathfrak{z}, t) = i\mathfrak{z}\Delta'_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}, t) \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(N_j(t)\frac{\mathfrak{z}+\mathfrak{z}_j(t)}{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j(t)} + \hat{N}_j(t)\frac{1+\hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}}{1-\hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}}\right). \tag{18}$$

De plus il existe une fonction

$$\mathfrak{z} = \vartheta(u, t), \tag{19}$$

définie et holomorphe par rapport aux deux variables u et t dans le domaine

$$\{u, t: u \in U, |t| < R\}, \tag{20}$$

où

$$U = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_{j(1/8)^\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_{j(1/8)^\delta} \cup \bar{g}_{(1/8)^\delta} \cup \bar{\hat{g}}_{(1/8)^\delta}\Big)', \tag{21}$$

qui est, en tant que fonction de la variable t, solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -i\mathfrak{z}\sum_{j=1}^{n}\left(N_j(t)\frac{\mathfrak{z}+\mathfrak{z}_j(t)}{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_j(t)} + \hat{N}_j(t)\frac{1+\hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}}{1-\hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}}\right), \tag{22}$$

considérée dans le domaine

$$\{\mathfrak{z}, t\colon \mathfrak{z} \in \hat{\mathfrak{Z}},\ |t| < R\}, \tag{23}$$

où

$$\hat{\mathfrak{Z}} = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_{j(1/4)^\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_{j(1/4)^\delta} \cup \bar{g}_{(1/4)^\delta} \cup \bar{\hat{g}}_{(1/4)^\delta}\Big)', \tag{24}$$

avec la condition initiale

$$\mathfrak{z} = u \quad \text{pour } t = 0; \tag{25}$$

cette fonction (19) *est, pour t arbitraire et fixé, une fonction univalente, en tant que fonction de la variable u, dans le domaine U. Pour la fonction* (19) *on a dans* (20) *l'inégalité*

$$|\vartheta(u, t) - u| \leqslant \tfrac{1}{16}\delta. \tag{26}$$

En même temps pour t arbitraire, fixé et u variable l'image du domaine U par la fonction (19) *couvre le domaine*

$$\mathfrak{Z} = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_{j(1/16)^\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_{j(1/16)^\delta} \cup \bar{g}_{(1/16)^\delta} \cup \bar{\hat{g}}_{(1/16)^\delta}\Big)'. \tag{27}$$

Il existe donc, au moins pour $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$, *une fonction*

$$u = \vartheta^{-1}(\mathfrak{z}, t) \tag{28}$$

inverse de (19). *Cette fonction est holomorphe par rapport aux deux variables* $\mathfrak{z}$ *et t dans le domaine*

$$\{\mathfrak{z}, t\colon \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z},\ |t| < R\} \tag{29}$$

et elle y vérifie aussi l'inégalité

$$|\vartheta^{-1}(\mathfrak{z}, t) - \mathfrak{z}| \leqslant M|t|, \tag{30}$$

où $M = \dfrac{48}{\delta^3} nCN.$

La fonction (19) *satisfait dans* (20) *à la relation*

$$\Delta\big(\vartheta(u, t), t\big) = \Delta(u). \tag{31}$$

Enfin, dans le cas particulier où la fonction (1) *est rationnelle spéciale, lorsque* $\hat{\mathfrak{z}}_j = \bar{\mathfrak{z}}_j$, $\hat{N}_j = \overline{N}_j$ *et* $g \subset K(0,1)$, $G_j \subset K(0,1)$, $\hat{g} = \tilde{g}$, $\hat{G}_j = \tilde{G}_j$, *les fonctions* (2) *sont également rationnelles spéciales pour t réels et les valeurs* (3) *sont symétriques par rapport à* $K^*(0,1)$. *Il est clair que l'ensemble des points* (4) *est de même situé symétriquement par rapport à* $K^*(0,1)$, *il n'est pourtant pas necessaire de le mettre en évidence par des notations spéciales. En outre, pour ces mêmes t réels et pour u appartenant respectivement aux ensembles* $K(0,1)$, $K^*(0,1)$ *et* $\tilde{K}(0,1)$ *les valeurs de* $\vartheta(u,t)$ *appartiennent respectivement aux mêmes ensembles.*

Démonstration. Considérons les domaines et les nombres mentionnés dans 1 et 2, que nous supposerons fixés dans la suite du raisonnement. Soit ensuite $\mathscr{D}$ la classe de toutes les fonctions rationnelles simples de la forme (1), satisfaisant aux conditions (j)-(vj) et $\mathscr{N}$ — la classe de tous les systèmes (N^0) de 4. Du lemme 1′, 1 nous déduisons tout d'abord que pour toute fonction (1) de cette classe et pour tout système de nombres arbitraires 4, il existe un cercle $|t| < T^*$, dans lequel il existe, pour les fonctions $S_j(t)$ et $\hat{S}_j(t)$ données par les formules (16), une famille de fonctions $\Delta(\mathfrak{z}, t)$ de la forme (2), holomorphes par rapport à t, et il existe des systèmes de fonctions holomorphes $\mathfrak{z}_j(t)$, $1/\hat{\mathfrak{z}}_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$, $p_h(t)$ $(h = 1, \ldots, m)$, pour lesquels sont remplies les conditions (6)-(13) et, ce qui en résulte, est vérifiée la relation

$$\Delta'_t(\mathfrak{z}, t) = i\mathfrak{z}\,\Delta'_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}, t) \sum_{j=1}^{n} \left(N_j(t) \frac{\mathfrak{z} + \mathfrak{z}_j(t)}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_j(t)} + \hat{N}_j(t) \frac{1 + \hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}}{1 - \hat{\mathfrak{z}}_j(t)\mathfrak{z}} \right), \tag{32}$$

où $N_j(t)$ et $\hat{N}_j(t)$ sont définies par les formules (17). Soit $|t| < R_{\Delta N^0}$ d'après la remarque 2, 1, le plus grand des cercles mentionnés plus haut. Soit enfin $|t| < \dot{R}_{\Delta N^0}$ le plus grand cercle contenu dans le précédent, dans lequel les fonctions (3) et (17) satisfont en plus aux conditions (5), (5′) et (14).

On constate facilement que la première partie du lemme signifie simplement que la borne inférieure $\dot{R}$ des nombres $\dot{R}_{\Delta N^0}$ pour $\Delta(\mathfrak{z}) \in \mathscr{D}$ et $(N^0) \in \mathscr{N}$ est positive. Dans ce cas on peut prendre dans la conclusion pour R un nombre arbitraire, au plus égal à $\dot{R}$.

Pour prouver cette première partie du lemme supposons donc le contraire, c.-à-d. que la borne inférieure mentionnée soit égale à zéro. Il en résulte immédiatement que pour tout f naturel il existe une fonction $\Delta_f(\mathfrak{z}) \in \mathscr{D}$ et un système $(N_f^0) \in \mathscr{N}$ de nombres N_{jf}, $\hat{N}_{jf}$ $(j = 1, \ldots, n)$ tels que

$$\dot{R}_{\Delta_f N_f^0} < \frac{1}{f}, \quad f = 1, 2, \ldots \tag{33}$$

Posons

$$\Delta_f(\mathfrak{z}) = \frac{F_{K_f}}{\mathfrak{z}^{K_f}} + \ldots + \hat{F}_{K_f}\mathfrak{z}^{K_f}, \quad F_{K_f} \neq 0, \ \hat{F}_{K_f} \neq 0, \ f = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

et désignons ensuite par

$$\text{(35)} \qquad \zeta_{jf}, \quad \frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad f = 1, 2, \ldots,$$

et

$$\text{(36)} \qquad p_{hf}, \quad h = 1, \ldots, m_f, \; m_f = 2K_f - 2n, f = 1, 2, \ldots,$$

les racines de la dérivé $\Delta'_f(\zeta)$ situées respectivement dans les domaines G_j et $\hat{G}_j$ et à l'extérieur de la somme de ces domaines. Désignons ensuite par

$$\text{(37)} \qquad \Delta_f(\zeta, t) = \frac{F_{K_f}(t)}{\zeta^{K_f}} + \ldots + \hat{F}_{K_f}(t)\zeta^{K_f}, \quad F_{K_f}(t) \neq 0, \hat{F}_{K_f}(t) \neq 0,$$

$$\text{(38)} \qquad \zeta_{jf}(t), \quad \frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)},$$

$$\text{(39)} \qquad p_{hf}(t),$$

respectivement la famille et les fonctions remplissant dans $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$ des conditions analogues à celles de la conclusion

$$\text{(40)} \qquad \Delta'_{f\zeta}(\zeta_{jf}(t), t) = 0, \quad \Delta'_{f\zeta}\left(\frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)}, t\right) = 0,$$

$$\text{(41)} \qquad \Delta'_{f\zeta}(p_{hf}(t), t) = 0,$$

$$\text{(42)} \qquad \Delta_f(\zeta_{jf}(t), t) = S_{jf}(t), \quad \Delta_f\left(\frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)}, t\right) = \hat{S}_{jf}(t),$$

$$\text{(43)} \qquad \Delta_f(p_{hf}(t), t) = \Delta_{hf}, \quad \text{où } \Delta_{hf} = \Delta_f(p_{hf}),$$

$$\text{(44)} \qquad \frac{F_{K_f}(t)}{\hat{F}_{K_f}(t)} = \frac{F_{K_f}}{\hat{F}_{K_f}},$$

$$\text{(45)} \qquad \Delta_f(\zeta, 0) = \Delta_j(\zeta),$$

$$\text{(46)} \qquad \zeta_{jf}(0) = \zeta_{jf}, \quad \frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(0)} = \frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}},$$

$$\text{(47)} \qquad p_{hf}(0) = p_{hf},$$

et

$$\text{(48)} \qquad \zeta_{jf}(t) \in G_{j(1/2)\delta}, \quad \frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)} \in \hat{G}_{j(1/2)\delta},$$

$$\text{(48')} \qquad p_{hf}(t) \in \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_{j(1/2)\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_{j(1/2)\delta}\Big)',$$

$$\text{(49)} \qquad |N_{jf}(t)| < CN, \quad |\hat{N}_{jf}(t)| < CN,$$

où

$$S_{jf}(t) = \Delta_f(\mathfrak{z}_{jf}) + N_{jf} 2i \mathfrak{z}_{jf}^2 \Delta_f''(\mathfrak{z}_{jf}) t, \tag{50}$$

$$\hat{S}_{jf}(t) = \Delta_f\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}}\right) - \hat{N}_{jf} 2i \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}^2} \Delta_f''\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}}\right) t, \tag{50'}$$

$$N_{jf}(t) = \frac{S'_{jf}(t)}{2\mathfrak{z}_{jf}^2(t)\, i\, \Delta''_{f_{\mathfrak{z}_3}}(\mathfrak{z}_{jf}(t), t)}, \qquad \hat{N}_{jf}(t) = \frac{\hat{S}'_{jf}(t)}{-2 \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}^2(t)}\, i\, \Delta''_{f_{\mathfrak{z}_3}}\left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)}, t\right)} \tag{51}$$

et la relation qui en résulte:

$$\Delta'_{ft}(\mathfrak{z}, t) = i\mathfrak{z}\, \Delta'_{f_{\mathfrak{z}}}(\mathfrak{z}, t) \sum_{j=1}^{n} \left(N_{jf}(t) \frac{\mathfrak{z} + \mathfrak{z}_{jf}(t)}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_{jf}(t)} + \hat{N}_{jf}(t) \frac{1 + \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\mathfrak{z}}{1 - \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\mathfrak{z}} \right). \tag{52}$$

Considérons pour f arbitraire l'équation différentielle

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -i\mathfrak{z} \sum_{j=1}^{n} \left(N_{jf}(t) \frac{\mathfrak{z} + \mathfrak{z}_{jf}(t)}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_{jf}(t)} + \hat{N}_{jf}(t) \frac{1 + \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\mathfrak{z}}{1 - \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\mathfrak{z}} \right) \tag{53}$$

avec la condition initiale

$$\mathfrak{z} = u \quad \text{pour } t = 0 \tag{54}$$

dans le domaine

$$\{\mathfrak{z}, t\colon \mathfrak{z} \in \hat{\mathfrak{Z}},\ |t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}\}, \tag{55}$$

où $\hat{\mathfrak{Z}}$ est défini par la formule (24).

Soit maintenant $u \in U$ (voir (21)); alors le bicylindre

$$\{\mathfrak{z}, t\colon |\mathfrak{z} - u| < b,\ |t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}\},$$

où

$$b = \tfrac{1}{8}\delta, \tag{56}$$

est entièrement contenu dans le domaine (55).

Remarquons ensuite que dans ce domaine est réalisée l'inégalité

$$\left| -i\mathfrak{z} \sum_{j=1}^{n} \left(N_{jf}(t) \frac{\mathfrak{z} + \mathfrak{z}_{jf}(t)}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_{jf}(t)} + \hat{N}_{jf}(t) \frac{1 + \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\mathfrak{z}}{1 - \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\mathfrak{z}} \right) \right| < 2nCN \left(\frac{1}{\delta} + \tfrac{1}{4}\delta \right) \frac{2/\delta + \frac{1}{4}\delta}{\frac{1}{4}\delta} < \frac{48}{\delta^3} nCN.$$

En effet, vu (48) et la définition de $\hat{\mathfrak{Z}}$, les inégalités suivantes ont lieu

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_{jf}(t)| > \tfrac{1}{4}\delta \quad \text{et} \quad \left| \mathfrak{z} - \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)} \right| > \tfrac{1}{4}\delta,$$

et, en vertu du fait que $\mathfrak{z} \notin \hat{g}_{(1/4)\delta}$, $\mathfrak{z}_{jf}(t) \notin \hat{g}$ et $1/\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t) \notin \hat{g}$ et $\delta < 1$, nous avons (comp. [18], p. 19)

$$|\mathfrak{z}| < \frac{1}{\delta} + \tfrac{1}{4}\delta, \qquad |\mathfrak{z}_{jf}(t)| < \frac{1}{\delta}, \qquad \left|\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)}\right| < \frac{1}{\delta}, \qquad \tfrac{1}{4}\delta < \frac{1}{\delta}.$$

Posons

$$M = \frac{48}{\delta^3} nCN. \tag{57}$$

Il suit de résultats connus [7], p. 351-356, qu'il existe exactement une seule solution

$$\mathfrak{z} = \vartheta_f(u, t) \tag{58}$$

de l'équation (53), remplissant la condition initiale

$$\vartheta_f(u, 0) = u, \tag{59}$$

définie et holomorphe par rapport à u et t au moins pour la valeur initiale $u \in U$ et pour la valeur de la variable indépendante $|t| < \operatorname{Min}(\dot{R}_{\Delta_f N_f^0}, b/M)$, c.-à-d., vu (56) et (57), pour

$$|t| < \operatorname{Min}\left(\dot{R}_{\Delta_f N_f^0}, \frac{\delta^4}{8 \cdot 48\, nCN}\right). \tag{60}$$

Prenons ensuite f est assez grand pour que

$$\frac{1}{f} < \frac{\delta^4}{8 \cdot 48\, nCN};$$

alors pour ces f, vu (33), le minimum du second membre de (60) est $\dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$ et la solution (58) est déterminée définitivement au moins pour u, t du domaine

$$\{u, t\colon\ u \in U,\ |t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}\}. \tag{61}$$

De plus, de l'unicité des solutions de l'équation (53) avec la condition initiale (54), nous déduisons facilement (voir le raisonnement de [14], p. 97) que pour tout t fixé, $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$, la fonction (58) est univalente par rapport à la variable $u \in U$.

Remarquons encore que dans (61) on a

$$\begin{aligned} &|\vartheta_f(u, t) - u| \\ &= \left| \int_0^t \left(-i\vartheta_f(u, t) \sum_{j=1}^{n} \left(N_{jf}(t) \frac{\vartheta_f(u, t) + \mathfrak{z}_{jf}(t)}{\vartheta_f(u, t) - \mathfrak{z}_{jf}(t)} + \hat{N}_{jf}(t) \frac{1 + \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\, \vartheta_f(u, t)}{1 - \hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)\, \vartheta_f(u, t)} \right) \right) dt \right| \\ &\leqslant M|t| < M \dot{R}_{\Delta_f N_f^0} < M \frac{1}{f}. \end{aligned} \tag{62}$$

Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 70,
PWN, Warszawa 1970, 77 pp.

Observons ensuite que pour les f suffisamment grands, l'image du domaine U par la fonction (58), considéré comme fonction de la variable u, avec t arbitraire et fixé du cercle $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$, couvre le domaine $\mathfrak{Z}$ (voir (27)).

En effet, soit $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{Z}$; dans ce cas le cercle $|u-\mathfrak{z}_0| \leqslant \frac{1}{16}\delta$ appartient au domaine U et, si en outre f est assez grand pour que

$$M\frac{1}{f} < \frac{1}{16}\delta,$$

alors, vu (62), sur la circonférence $|u-\mathfrak{z}_0| = \frac{1}{16}\delta$ est remplie l'inégalité $|\vartheta_f(u, t)-u| < |u-\mathfrak{z}_0|$. D'où, en vertu du théorème de Rouché, nous déduisons que la fonction (58) prend dans le cercle $|u-\mathfrak{z}_0| < \frac{1}{16}\delta$ la valeur $\mathfrak{z}_0$ exactement une fois, donc au moins une fois dans U.

Combinant les remarques précédentes, nous obtenons que pour les f suffisamment grands, pour t arbitraire fixé et pour $u \in U$ variable, il existe au moins pour $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$ une fonction

$$u = \vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t) \tag{63}$$

inverse de (58); cette fonction, comme fonction des deux variables $\mathfrak{z}$ et t, est définie au moins dans le domaine (64):

$$\{\mathfrak{z}, t\colon \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z},\ |t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}\}. \tag{64}$$

Elle est en même temps holomorphe dans ce domaine par rapport aux deux variables, ce qui résulte de la relation $\vartheta_f\big(\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t), t\big) = \mathfrak{z}$ et du théorème connu sur les fonctions implicites.

De plus, conformément à ce qui précède, on a dans (64)

$$\begin{aligned} &|\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t)-\mathfrak{z}| \\ &\quad = \big|\vartheta_f\big(\mathfrak{z}+\big(\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t)-\mathfrak{z}\big), t\big)-\big(\mathfrak{z}+\big(\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t)-\mathfrak{z}\big)\big)\big| \\ &\quad \leqslant M|t| < M\dot{R}_{\Delta_f N_f^0} < M\frac{1}{f}. \end{aligned} \tag{65}$$

Remarquons ensuite que dans (61) on a identiquement

$$\Delta_f\big(\vartheta_f(u, t), t\big) = \Delta_f(u). \tag{66}$$

En effet, cela résulte d'abord du fait que, d'après (52) et la définition de la fonction (58), la dérivé du premier membre de (66) par rapport à t s'annule identiquement, ensuite des conditions initiales (59) et (45).

D'où résulte que dans (64) on a

$$\Delta_f(\mathfrak{z}, t) = \Delta_f\big(\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t)\big) \tag{66'}$$

et par conséquent, si f est choisi tel que

$$M\frac{1}{f} < \frac{1}{32}\delta,$$

on a l'inégalité (voir 2, $\ast$)

$$(67)\qquad |\Delta_f(\mathfrak{z}, t)-\Delta_f(\mathfrak{z})| = \Big|\Delta_f\big(\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t)\big)-\Delta_f(\mathfrak{z})\Big| = \Big|\int_{\mathfrak{z}}^{\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z},t)} \Delta_f'(u)\,du\Big|$$

$$\leqslant \Big(\operatorname*{Max}_{u\in[\mathfrak{z},\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z},t)]} |\Delta_f'(u)|\Big)\cdot|\vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t)-\mathfrak{z}| < \nu^1 M\cdot\frac{1}{f}$$

pour

$$(68)\qquad \mathfrak{z}\in\bigcup_{j=1}^{n} G^*_{j(1/32)\delta}\cup\bigcup_{j=1}^{n}\hat{G}^*_{j(1/32)\delta}.$$

En effet, à cause de (65), (68) et du choix de f, le segment $[\mathfrak{z}, \vartheta_f^{-1}(\mathfrak{z}, t)]$, en particulier son origine, est situé simultanément dans $\mathfrak{Z}$ et dans l'ensemble $\bigcup_{j=1}^{n}\bar{G}_j\cup\bigcup_{j=1}^{n}\bar{\hat{G}}_j$, dans lequel est vérifiée, d'après $\Delta_f(u)\in\mathscr{D}$, l'hypothèse (vj), c.-à-d. l'inégalité $|\Delta_f'(u)| < \nu^1$.

Nous voyons ensuite, en appliquant le principe du maximum, que cette inégalité (67) a lieu également pour $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$ dans l'ensemble fermé $\bigcup_{j=1}^{n}\bar{G}_{j(1/32)\delta}\cup\bigcup_{j=1}^{n}\bar{\hat{G}}_{j(1/32)\delta}$.

Pour les points

$$(69)\qquad \mathfrak{z}\in\bigcup_{j=1}^{n}\bar{G}_{j(1/2)\delta}\cup\bigcup_{j=1}^{n}\bar{\hat{G}}_{j(1/2)\delta},$$

nous obtenons, en tenant compte du fait que leurs distances à la frontière (68) ne sont pas inférieures à $\frac{1}{2}\delta-\frac{1}{32}\delta > \frac{1}{4}\delta$, et en appliquant deux fois la formule de Cauchy, vu (67), les inégalités

$$(70)\qquad |\Delta_{f_{\mathfrak{z}}}'(\mathfrak{z}, t)-\Delta_f'(\mathfrak{z})| < \frac{\nu^1 M\cdot\dfrac{1}{f}}{\frac{1}{4}\delta}$$

et

$$(71)\qquad |\Delta_{f_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}}''(\mathfrak{z}, t)-\Delta_f''(\mathfrak{z})| < \frac{\nu^1 M\cdot\dfrac{1}{f}}{(\frac{1}{4}\delta)^2}.$$

A cause de l'inégalité (71) et de (vj), nous avons dans l'ensemble (69)

$$(72)\qquad |\Delta_{f_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}}''(\mathfrak{z}, t)| \geqslant \nu_2 - \frac{\nu^1 M\cdot\dfrac{1}{f}}{(\frac{1}{4}\delta)^2}$$

et, par conséquent, en vertu de (51), (50′), 4, du fait que $\mathfrak{z}_{jf}$, $\mathfrak{z}_{jf}(t) \notin g \cup \hat{g}$ et de la limitation

$$|\Delta_f''(\mathfrak{z}_{jf})| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K^*_{(\mathfrak{z}_{jf},\delta)}} \frac{\Delta_f'(\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_{jf})^2}\, d\mathfrak{z} \right| \leqslant \frac{\nu^1}{\delta},$$

résultant de la formule de Cauchy et de (v) et (vj), nous obtenons pour $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$

$$|N_{jf}(t)| = |N_{jf}| \frac{|\mathfrak{z}_{jf}|^2 |\Delta_f''(\mathfrak{z}_{jf})|}{|\mathfrak{z}_{jf}(t)|^2 |\Delta''_{f_{\mathfrak{z}_3}}(\mathfrak{z}_{jf}(t), t)|} \leqslant N \frac{\dfrac{1}{\delta^2} \cdot \dfrac{\nu^1}{\delta}}{\delta^2 \left(\nu_2 - \dfrac{\nu^1 M \cdot \dfrac{1}{f}}{(\frac{1}{4}\delta)^2} \right)}, \tag{73}$$

et de même

$$|\hat{N}_{jf}(t)| = |\hat{N}_{jf}| \frac{\left|\dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)}\right|^2 \left|\Delta_f''\left(\dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)}\right)\right|}{\left|\dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)}\right|^2 \left|\Delta''_{f_{\mathfrak{z}_3}}\left(\dfrac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)}, t\right)\right|} \tag{73′}$$

$$\leqslant N \frac{\dfrac{1}{\delta^2} \cdot \dfrac{\nu^1}{\delta}}{\delta^2 \left(\nu_2 - \dfrac{\nu^1 M \cdot \dfrac{1}{f}}{(\frac{1}{4}\delta)^2} \right)}.$$

Si donc f est assez grand pour que

$$\nu_2 - \frac{\nu^1 M \cdot \dfrac{1}{f}}{(\frac{1}{4}\delta)^2} > \frac{1}{2}\nu_2,$$

alors, vu (15), $N_{jf}(t)$ et $\hat{N}_{jf}(t)$ vérifient pour $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$ les inégalités

$$|N_{jf}(t)| \leqslant CN - e, \qquad |\hat{N}_{jf}(t)| \leqslant CN - e, \tag{74}$$

où e désigne un nombre positif, $e < \frac{1}{2}CN$.

En comparant maintenant les coefficients de $\mathfrak{z}^{-K_f}$ et de $\mathfrak{z}^{K_f}$ des deux membres de la relation (52), nous obtenons les deux égalités suivantes:

$$F'_{K_f}(t) = K_f i \sum_{j=1}^{n} \left(N_{jf}(t) - \hat{N}_{jf}(t)\right) F_{K_f}(t)$$

et

$$\hat{F}'_{K_f}(t) = K_f i \sum_{j=1}^{n} \left(N_{jf}(t) - \hat{N}_{jf}(t)\right) \hat{F}_{K_f}(t)$$

d'où, vu (45), il résulte immédiatement que

$$F_{K_f}(t) = F_{K_f} \exp\Big(K_f i \int\limits_{\overrightarrow{[0,t]}} \sum_{j=1}^{n} \big(N_{jf}(\tau) - \hat{N}_{jf}(\tau)\big)\, d\tau\Big)$$

et

$$\hat{F}_{K_f}(t) = \hat{F}_{K_f} \exp\Big(K_f i \int\limits_{\overrightarrow{[0,t]}} \sum_{j=1}^{n} \big(N_{jf}(\tau) - \hat{N}_{jf}(\tau)\big)\, d\tau\Big).$$

Profitant maintenant de l'inégalité (49), nous obtenons les limitations

$$|F_{K_f}(t)| \geqslant |F_{K_f}| \exp(-K_f \cdot 2nCN\dot{R}_{\Delta_f N_f^0}), \tag{75}$$

$$|\hat{F}_{K_f}(t)| \geqslant |\hat{F}_{K_f}| \exp(-K_f \cdot 2nCN\dot{R}_{\Delta_f N_f^0}) \tag{75'}$$

pour $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$.

Il résulte ensuite de l'inégalité (70) que pour f suffisamment grands on a pour $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$

$$|\Delta'_{f\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}, t) - \Delta'_f(\mathfrak{z})| < \tfrac{1}{2} \nu_1$$

dans l'ensemble (69); d'où et de la définition du nombre ν_1 nous déduisons définitivement que pour f suffisamment grands a lieu l'inégalité suivante

$$|\Delta'_{f\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}, t)| \geqslant \tfrac{1}{2} \nu_1 \tag{76}$$

pour

$$\mathfrak{z} \in \bigcup_{j=1}^{n} G^*_{j(1/2)\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \hat{G}^*_{j(1/2)\delta} \tag{76'}$$

et $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$, qui donne immédiatement que pour tout t aucune des racines $\mathfrak{z}_{jf}(t)$, $1/\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)$ ou $p_{hf}(t)$ n'est située sur les frontières de (76'). En combinant (48) et (48') et en tenant en outre, compte du fait que toutes les racines $p_{hf}(t)$ sont distinctes, puisque les valeurs de la fonction (37) pour ces racines sont, en vertu de l'hypothèse (jv) et (43), distinctes, nous concluons que les racines (38) et (39) sont toutes distinctes. D'autre part, comme le nombre de ces racines est égal au degré de la fonction (37), elles sont les seules racines de sa dérivé. Il est facile de voir que, si f est fixé pour le moment, les racines $\mathfrak{z}_{jf}(t)$, $1/\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)$ et $p_{hf}(t)$ pour $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$ sont situées à une distance non inférieure à un nombre positif d des frontières des domaines $G_{j(1/2)\delta}$ resp. $G_{j(1/2)\delta}$. Supposant le contraire, il existerait un j_0 ou un $\hat{j}_0$ ou bien un h_0, ainsi qu'une suite de paramètres $\{t_m\}$, $t_m \to t^*$, $|t^*| = \dot{R}_{\Delta_f N_f^0}$, tels que $\mathfrak{z}_{j_0 f}(t_m) \to \mathfrak{z}^*$, $\mathfrak{z}^* \in G^*_{j_0(1/2)\delta}$ ou $1/\hat{\mathfrak{z}}_{\hat{j}_0 f}(t_m) \to 1/\hat{\mathfrak{z}}^*$, $1/\hat{\mathfrak{z}}^* \in \hat{G}^*_{\hat{j}_0(1/2)\delta}$ ou bien $p_{h_0 f}(t_m) \to p^*$, $p^* \in \bigcup_{j=1}^{n} G^*_{j(1/2)\delta} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \hat{G}^*_{j(1/2)\delta}$. D'autre part, on pourrait prendre, de même que dans la démonstration du lemme 1, 2 (sur le prolon-

gement), en extrayant au besoin une suite partielle de $\{t_m\}$, que $\Delta_f(\mathfrak{z}, t_m) \to \Delta_f^*(\mathfrak{z})$, où $\Delta^*(\mathfrak{z})$ est aussi, vu (75) et (75′), une fonction rationnelle simple; em même temps on devrait avoir $\Delta^{*\prime}(\mathfrak{z}^*) = 0$ ou $\Delta^{*\prime}(1/\hat{\mathfrak{z}}^*) = 0$ ou bien $\Delta^{*\prime}(p^*) = 0$, ce qui est impossible, car sur les frontieres $G^*_{j(1/2)\delta}$, $\hat{G}^*_{j(1/2)\delta}$ on a, à cause de (76), l'inégalité $|\Delta^{*\prime}(\mathfrak{z})| \geqslant \frac{1}{2}\nu_1$. Donc il doit exister un $d > 0$ tel que

$$\mathfrak{z}_{jf}(t) \in G_{j((1/2)\delta+d)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_{jf}(t)} \in \hat{G}_{j((1/2)\delta+d)}, \tag{77}$$

ainsi que

$$p_{hf}(t) \in \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{G}_{j((1/2)\delta-d)} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\hat{G}}_{j((1/2)\delta-d)}\Big)'. \tag{77′}$$

Appliquant maintenant le lemme 1, 2, dans lequel le rôle des domaines G_j resp. $\hat{G}_j$ sera joué par les domaines $G_{j(1/2)\delta}$ resp. $G_{j(1/2)\delta}$, et celui du cercle $|t| < T^*$ par le cercle $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N^0_f}$, nous en déduisons, vu les inégalités (74), (75) et (75′), que la famille (37) et les fonctions (38) et (39) pourront être prolongées au cercle fermé $|t| \leqslant \dot{R}_{\Delta_f N^0_f}$; pareillement, il résulte des relations (77) et (77′) et de la continuité des fonctions (38) et (39) que les relations (48) et (48′) ont lieu dans le cercle fermé $|t| \leqslant \dot{R}_{\Delta_f N^0_f}$.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que la famille (37) et les fonctions (38) et (39) se prolongent comme fonctions holomorphes, en respectant les conditions (40)-(49), à un cercle $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N^0_f} + \eta_f$, $\eta_f > 0$, plus grand que le cercle $|t| < \dot{R}_{\Delta_f N^0_f}$, contrairement à la définition de ce dernier.

Ainsi, conformément à ce qui nous avons annoncé, la borne inférieure $\dot{R}$ des nombres $\dot{R}_{\Delta N^0}$ mentionnés plus haut est positive. Si, en particulier, nous posons

$$R = \min\left(\dot{R}, \frac{\delta^4}{16 \cdot 48\, nCN}\right),$$

alors pour un tel R la première partie de la conclusion est vraie. Démontrons qu'avec le même choix du nombre R la seconde l'est aussi.

En effet, prenons une fonction $\Delta(\mathfrak{z})$ arbitraire, du type indiqué dans 3, une famille correspondante de fonctions (2) et les fonctions (3) et (4) qui remplissent les conditions (5)-(14) dans le cercle $|t| < \dot{R}$. Considérons l'équation différentielle (22) dans le domaine $\{\mathfrak{z}, t\colon \mathfrak{z} \in \hat{\mathfrak{Z}}, |t| < \dot{R}\}$, avec la condition initiale (25).

De même que dans la première partie de la démonstration, il est question des fonctions (58), nous constatons qu'il existe exactement une seule solution

$$\mathfrak{z} = \vartheta(u, t) \tag{78}$$

de l'équation différentielle (22), remplissant la condition initiale $\vartheta(u, 0) = u$ définie et holomorphe par rapport à u et t au moins pour les valeurs initiales $u \in U$ et pour les valeurs de la variable indépendante

$$|t| < R = \operatorname{Min}\left(\dot{R}, \frac{\delta^4}{16 \cdot 48 nCN}\right) \leqslant \operatorname{Min}\left(\dot{R}, \frac{\delta^4}{8 \cdot 48 nCN}\right), \tag{79}$$

donc dans le domaine (20).

De plus nous observons que pour tout t fixé la fonction (78) est univalente par rapport à la variable $u \in U$.

Nous remarquons en outre, comme pour (62), en tenant encore compte de (57) et (79), que

$$|\vartheta(u, t) - u| \leqslant M|t| \leqslant \frac{48}{\delta^3} nCN \frac{\delta^4}{16 \cdot 48 nCN} = \frac{1}{16}\delta.$$

Ensuite, vu cette inégalité de même que pour les fonctions (58), nous voyons que l'image du domaine U par la fonction (78), considérée comme fonction de la variable u avec t arbitraire fixé couvre le domaine $\mathfrak{Z}$.

Récapitulant les remarques précédentes, nous constatons que pour t arbitraire, fixé, $|t| < R$, et $u \in U$ variable, il existe au moins pour $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$ une fonction

$$u = \vartheta^{-1}(\mathfrak{z}, t), \tag{80}$$

inverse de (78). Cette fonction est définie et holomorphe par rapport aux deux variables $\mathfrak{z}$ et t dans le domaine (29) et elle y vérifie aussi l'inégalité

$$|\vartheta^{-1}(\mathfrak{z}, t) - \mathfrak{z}| \leqslant M|t|.$$

Nous remarquons enfin, comme pour (66), que la fonction (78) vérifie dans (20) la relation (31).

Supposons enfin que les conditions indiquées dans le cas particulier de la conclusion sont remplies.

Alors il résulte facilement de la remarque 1, 1 que les fonctions (2) sont rationnelles spéciales, les valeurs (3) sont symétriques par rapport à $K^*(0, 1)$ et les valeurs (17) sont conjuguées.

Prenons à présent $t_0 \in (-R, R)$ arbitraire et soit

$$\lambda = \lambda(t_0, a_0, t) \tag{81}$$

la solution réelle de l'équation réelle

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\sum_{j=1}^{n}\left(N_j(t)\frac{e^{i\lambda} + \mathfrak{z}_j(t)}{e^{i\lambda} - \mathfrak{z}_j(t)} + \overline{N}_j(t)\frac{\bar{e}^{i\lambda} + \bar{\mathfrak{z}}_j(t)}{\bar{e}^{i\lambda} - \bar{\mathfrak{z}}_j(t)}\right), \tag{82}$$

qui remplit la condition initiale $\lambda(t_0, a_0, t_0) = a_0$, où a_0 est un nombre arbitraire réel. Une telle solution existe toujours au moins pour $t \in (-R, R)$ et elle est une fonction holomorphe. De plus, prenant β arbitraire, réel

et $t \in (-R, R)$ arbitraire et prenant ensuite $a_0 = \lambda(t, \beta, t_0)$, nous obtenons, en vertu de l'identiré connue $\lambda(t, \beta, \tau) = \lambda\big(t_0, \lambda(t, \beta, t_0), \tau\big)$, que $\lambda(t_0, a_0, t) = \beta$; cela prouve que toute solution $\lambda(t_0, a_0, t)$ pour t_0, t fixés pour le moment, considérée comme fonction de a_0, prend toutes les valeurs réelles. D'autre part, de (82) et du fait que dans notre cas particulier $\hat{N}_j(t) = \overline{N}_j(t)$ et $\hat{\mathfrak{z}}_j(t) = \bar{\mathfrak{z}}_j(t)$ pour t réels, il résulte facilement que la fonction $\mathfrak{z} = \exp i\lambda(0, a_0, t)$ est une solution de l'équation (22) avec la condition initiale $\mathfrak{z} = e^{ia_0}$ pour $t = 0$. De là et de l'unicité des solutions de l'équation (22) il résulte que les fonctions (81) et (78) sont liées par la relation

$$\vartheta(e^{ia_0}, t) = \exp i\lambda(0, a_0, t).$$

Ainsi pour t réels et $u \in K^*(0, 1)$ on a également $\vartheta(u, t) \in K^*(0, 1)$; en outre, conformément à ce qui précède, toutes les valeurs sur $K^*(0, 1)$ sont les valeurs de la fonction $\vartheta(u, t)$. De ce fait, par tout point de la circonférence unité il passe une solution de l'équation (22), parcourant entièrement sur cette circonférence. Donc, encore en vertu de l'unicité des solutions de cette équation, aucune solution contenant les points de $K(0, 1)$ ou de $\tilde{K}(0, 1)$ ne peut traverser la circonférence $K^*(0, 1)$, ce qui donne immédiatement que pour $u \in K(0, 1)$ resp. pour $u \in \tilde{K}(0, 1)$ est également $\vartheta(u, t) \in K(0, 1)$ resp. $\vartheta(u, t) \in \tilde{K}(0, 1)$.

Remarque 1. Remarquons que des conditions (jv) et (9) il résulte que les racines (4) sont distinctes. Par conséquent, de (5) et (5′) il résulte ensuite que toutes les racines (3) et (4) de la dérivée $\Delta'_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}, t)$ sont distinctes et, comme leur nombre est égal au degré de la fonction (37), alors (3) et (4) sont toutes les racines de cette dérivée, nécessairement simples.

II. APPROXIMATIONS SUCCESSIVES ET RÉSULTAT FINAL

0. FORMULE FONDAMENTALE POUR LES VARIATIONS DES FONCTIONS UNIVALENTES BORNÉES

Soit une fonction arbitraire univalente et bornée dans le sens de Löwner (17, *)

$$b(z) = b_1 z + \ldots, \qquad b_1 > 0, \tag{1}$$

transformant le cercle $K(0, 1)$ en un domaine G.

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Il existe une famille de variations des fonctions univalentes et bornées dans le sens de Löwner, de la forme*

$$b(z, t) = b_1(t) z + \ldots, \tag{2}$$

définie dans un intervalle $I = (-T, T)$ du paramètre t, holomorphe par rapport à t et vérifiant les relations

$$b(z, 0) = b(z), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} b_t'(z, t) = \sum_{j=1}^{n} \Bigg(& \beta_j(t) \left(\left(\zeta_j(t) \frac{b_z'(\zeta_j(t), t)}{b(\zeta_j(t), t)} \right)^2 b(z, t) \times \right. \\ & \times \frac{b(\zeta_j(t), t) + b(z, t)}{b(\zeta_j(t), t) - b(z, t)} - z b_z'(z, t) \frac{\zeta_j(t) + z}{\zeta_j(t) - z} \Bigg) + \\ & + \bar{\beta}_j(t) \left(\overline{\left(\zeta_j(t) \frac{b_z'(\zeta_j(t), t)}{b(\zeta_j(t), t)} \right)^2} \, b(z, t) \, \frac{1 + \overline{b(\zeta_j(t), t)} b(z, t)}{1 - \overline{b(\zeta_j(t), t)} b(z, t)} - \right. \\ & \left. \left. - z b_z'(z, t) \frac{1 + \overline{\zeta_j(t)} z}{1 - \overline{\zeta_j(t)} z} \right) \right). \end{aligned} \tag{4}$$

où $\zeta_j(t)$ et $\beta_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, sont des fonctions holomorphes telles que $|\zeta_j(t)| < 1$ et la quantité n et $\zeta_j(0)$, $\beta_j(0)$ sont des nombres arbitraires donnés d'avance.

La démonstration se composera des cinq parties.

1. APPROXIMATION

Soit $b(z)$ une fonction définie dans $K(1,0)$ et soit $\tilde{b}(z) = 1/\overline{b(1/\bar{z})}$ pour $z \in \tilde{K}(0,1)$; on voit que $\tilde{b}(z)$ transforme d'une façon conforme $\tilde{K}(0,1)$ en $\tilde{G}$ $(11, *)$.

Soit un système arbitraire fini de points

$$\zeta_j \in K(0,1), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

et de leurs symétriques par rapport à $K^*(0,1)$

$$\frac{1}{\bar{\zeta}_j} \in \tilde{K}(0,1), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

et soit

$$\omega_j = b(\zeta_j) \in G \quad \text{et} \quad \frac{1}{\bar{\omega}_j} = \tilde{b}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) \in \tilde{G}. \tag{3}$$

Soit encore une fonction arbitraire $\varkappa(w)$, holomorphe, et différente de zéro aux points (3), symétrique par rapport à la circonférence $K^*(0,1)$ et telle que $\varkappa'(\omega_j) = 0$, $\varkappa''(\omega_j) \neq 0$ et $\varkappa'(1/\bar{\omega}_j) = 0$, $\varkappa''(1/\bar{\omega}_j) \neq 0$.

On voit immédiatement qu'il existe un système de cercles k et K_j, $j = 1, \ldots, n$, contenant resp. 0 et ω_j, à fermetures disjointes et contenues dans G, et il existe un système de cercles symétriques $\tilde{k}$ et $\tilde{K}_j$, $j = 1, \ldots, n$, contenant resp. ∞ et $1/\bar{\omega}_j$, à fermetures disjointes et contenues dans $\tilde{G}$, donc également disjointes de ces cercles, tels que la fonction $\varkappa(w)$ est holomorphe et différente de zéro dans la somme des cercles fermés $\bar{K}_j$ et $\bar{\tilde{K}}_j$, et que sa dérivée, considérée dans la somme de ces cercles, s'annule uniquement aux points ω_j et $1/\bar{\omega}_j$, tandis que sa dérivée seconde y est différente de zéro.

Soit $[\varkappa(w)]^{1/2}$ une fonction définie dans la somme

$$\bigcup_{j=1}^{n} \bar{K}_j \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\tilde{K}}_j,$$

égale dans chaque cercle $\bar{K}_j$ resp. $\bar{\tilde{K}}_j$ à une branche quelconque de la racine carrée de $\varkappa(w)$.

Nous constatons le fait suivant:

LEMME 1 (sur l'approximation). *Il existe une suite $\{\Omega_f(w)\}$ de fonctions rationnelles spéciales et une suite $\{H_f\}$ d'arcs spéciaux correspondant à ces fonctions* $(21, *)$, *tels que les conditions suivantes sont remplies*:

(a) *les domaines $K(0,1) \setminus H_f$ tendent dans le sens du noyau vers le domaine G*;

(b) *$\{\Omega_f(w)\}$, $\{\Omega_f'(w)\}$ et $\{\Omega_f''(w)\}$ tendent dans les cercles $\bar{K}_j$ et $\bar{\tilde{K}}_j$ uniformément vers les fonctions $\varkappa(w)$, $\varkappa'(w)$ et $\varkappa''(w)$ respectivement*;

(c) $\Omega_f'(w)$ *a toutes ses racines simples*;

(d) *sur l'arc* H_f *la dérivée* $\Omega_f'(w)$ *n'a pas de racines à l'exception d'une seule qui est à l'origine de cet arc*;

(e) *les valeurs de la fonction* $\Omega_f(w)$ *aux racines de la dérivée* $\Omega_f'(w)$ *à l'extérieur de la somme des cercles* K_j *et* $\tilde{K}_j$, *et la valeur analogue à l'extrémité de l'arc* H_f *sont toutes distinctes.*

Démonstration. En vertu d'un résultat connu ([14], p. 89), il existe une suite d'arcs simples $\{S_f\}$ partant de la circonférence unité vers son intérieur, ne passant pas par zéro, telle que la suite des domaines $\{K(0, 1)\setminus S_f\}$ tend dans le sens du noyau vers G. Par conséquent, pour f suffisamment grand, les distances des arcs S_f à la somme $k \cup \bigcup_{j=1}^{n} K_j$ sont supérieures à un certain nombre positif. Considérons ensuite, de même que dans [3], p. 12-13, l'homographie $l(w)$ transformant le cercle unité en le demi-plan supérieur, et posons $a = l(0)$. Les arcs S_f se transforment par $l(w)$ en arcs analogues $C_f = l(S_f)$ et les cercles k et K_j se transforment en cercles $l(k)$ et $l(K_j)$. Formons l'arc $\tilde{C}_f$ symétrique de C_f par rapport à l'axe réel et les cercles $l(\tilde{k})$ et $l(\tilde{K}_j)$ symétriques respectivement des précédents par rapport à l'axe réel. Les arcs C_f et $\tilde{C}_f$ forment ensemble un arc F_f symétrique par rapport à l'axe réel. Pour f suffisamment grands la distance de l'arc F_f à la somme

$$l(k) \cup \bigcup_{j=1}^{n} l(K_j) \cup l(\tilde{k}) \cup \bigcup_{j=1}^{n} l(\tilde{K}_j)$$

est supérieure, ce qui est facile à vérifier, à un certain nombre positif. Considérons f arbitraire, suffisamment grand, et l'arc correspondant F_f. L'arc F_f peut être arbitrairement approché dans le sens de Hausdorff (16, 1, I), par un arc analytique A_f de représentation paramétrique

$$\zeta = p_f(\tau), \qquad \tau \in I,$$

où I est le segment $[\overrightarrow{-i, i}]$ et $p_f(\tau)$ est une fonction univalente, définie dans un certain rectangle B_f, symétrique par rapport aux axes de coordonnées et contenant dans son intérieur le segment I (comp. [3], p. 12-13). De plus, en améliorant éventuellement l'approximation, on peut admettre que l'arc A_f est à une distance plus grande qu'un certain nombre positif de la somme des cercles mentionnés. Enfin, on peut admettre que $p_f(\bar{\tau}) = \overline{p_f(\tau)}$ pour $\tau \in B_f$ et aussi en diminuant éventuellement le rectangle B_f, que $D_f = p_f(B_f)$ à une distance plus grande qu'un certain nombre positif de cette même somme de cercles. Examinons maintenant dans le domaine D_f la fonction inverse $p_f^{-1}(\zeta)$. Nous remarquons, vu ce qui précède, que $p_f^{-1}(\bar{\zeta}) = \overline{p_f^{-1}(\zeta)}$ pour $\zeta \in D_f$. Prenons ensuite dans D_f un

domaine fermé simplement connexe et symétrique par rapport à l'axe réel Q_{0f} tel que $I \subset [p_f^{-1}(Q_{0f})]^0$. Formons la fonction composée $\left[\varkappa\left(l^{-1}(\zeta)\right)\right]^{1/2}$ et considérons la fonction $u_f(\zeta)$ qui est égale à $p_f^{-1}(\zeta)$ dans Q_{0f} et à $\left[\varkappa\left(l^{-1}(\zeta)\right)\right]^{1/2}$ dans la somme des cercles $\bigcup_{j=1}^{n}\left(l(\overline{K}_j) \cup l(\overline{\tilde{K}}_j)\right)$. Cette fonction est évidemment holomorphe dans l'esemble

$$\Sigma_f = Q_{0f} \cup \bigcup_{j=1}^{n}\left(l(\overline{K}_j) \cup l(\overline{\tilde{K}}_j)\right),$$

et, comme l'ensemble complémentaire de cet ensemble est un ensemble connexe contenant les points a et $\overline{a}$ et symétrique par rapport à l'axe réel, il résulte facilement des résultats correspondants [3], p. 9, et [18], p. 173, qu'il existe une fonction rationnelle $\pi_f(\zeta)$, symétrique par rapport à l'axe réel, ayant des pôles uniques aux points a et $\overline{a}$, arbitrairement proche de $u_f(\zeta)$ pour $\zeta \in \Sigma_f$, telle que:

(α) $\pi_f'(\zeta)$ et $\pi_f''(\zeta)$ sont resp. arbitrairement proches de $\left[\left(\varkappa\left(l^{-1}(\zeta)\right)\right)^{1/2}\right]'$ et $\left[\left(\varkappa\left(l^{-1}(\zeta)\right)\right)^{1/2}\right]''$ dans l'ensemble $\bigcup_{j=1}^{n}\left(l(K_j) \cup l(\tilde{K}_j)\right)$;

(β) $\pi_f(\zeta)$ est univalente dans l'ensemble Q_{0f};

(γ) $I \subset \left(\pi_f(Q_{0f})\right)^0$.

Posons $\pi_{0f}(\zeta) = \pi_f(\zeta)$ pour $\zeta \in Q_{0f}$. Alors, vu ce qui précède, il existe dans $\pi_{0f}(Q_{0f})$ une fonction inverse $\pi_{0f}^{-1}(\tau)$ et, ce qui est facile à vérifier elle y est arbitrairement proche de $p_f(\tau)$.

Posons

$$T_f = \pi_{0f}^{-1}(I). \tag{4}$$

On voit que T_f est un arc analytique simple, symétrique par rapport à l'axe réel, donc orthogonal à cet axe au point d'intersection; T_f ne contient évidemment pas les points a et $\overline{a}$. De plus, en tenant compte du caractère arbitraire des approximations considérées, on peut admettre que les distances dans le sens de Hausdorff des arcs T_f et A_f et, par conséquent, des arcs T_f et F_f, tendent vers zéro lorsque f tend vers l'infini. En outre, on a

$$\pi_f(\zeta) \to \left(\varkappa\left(l^{-1}(\zeta)\right)\right)^{1/2}, \quad \pi_f'(\zeta) \to \left[\left(\varkappa\left(l^{-1}(\zeta)\right)\right)^{1/2}\right]', \quad \pi_f''(\zeta) \to \left[\left(\varkappa\left(l^{-1}(\zeta)\right)\right)^{1/2}\right]'' \tag{5}$$

uniformément pour

$$\zeta \in \bigcup_{j=1}^{n}\left(l(\overline{K}_j) \cup l(\overline{\tilde{K}}_j)\right).$$

Examinons à présent la fonction

$$\Lambda_f(w) = \varphi\left(\pi_f\left(l(w)\right)\right), \tag{6}$$

où $\varphi(x) = x^2$. On prouve facilement que c'est une fonction rationnelle spéciale. En effet, la fonction rationnelle (6) est partout holomorphe, à l'exception des points 0 et ∞, où elle a des pôles et elle est réelle sur la circonférence $K^*(0, 1)$. Posant maintenant

$$R_f = l^{-1}(P_f), \tag{7}$$

où P_f est une partie de l'arc T_f située dans le demi-plan supérieur fermé, nous constatons que R_f est un arc simple et, comme précédemment, la distance dans le sens de Hausdorff des arcs R_f et S_f tend vers zéro lorsque f tend vers l'infini.

De plus, puisque la fonction $\pi_f(\zeta)$ est symétrique par rapport à l'axe réel et transforme T_f en I et qu'elle est univalente dans $Q_{0f} \supset T_f$ elle s'annule exactement en un seul point de l'arc T_f situé sur l'axe réel et sa dérivée $\pi'_f(\zeta)$ est constamment différente de zéro sur T_f. Par conséquent, comme on le voit de ce qui précède et de (6) et (7), la dérivée $\Lambda'_f(w)$ s'annule à l'origine de l'arc R_f située sur la circonférence du cercle unité, tandis qu'aux points restants de l'arc R_f elle est différente de zéro.

De plus, comme la fonction $\pi_f\big(l(w)\big)$ admet une inverse sur l'arc R_f et le transforme en la partie supérieure du segment I, où la fonction $\varphi(x)$ admet une inverse, la fonction (6) admet également une inverse sur l'arc R_f et le transforme en le segment $\overrightarrow{[0, -1]}$. Un calcul élémentaire facile montre que l'arc R_f est orthogonal à son origine à la circonférence unité.

Cela étant, nous constatons que l'arc R_f est spécial correspondant à la fonction (6) et tel que ses valeurs à son origine et à son extrémité sont resp. 0 et -1.

D'ailleurs, vu (5) et (6), on a

$$\Lambda_f(w) \to \varkappa(w), \qquad \Lambda'_f(w) \to \varkappa'(w), \qquad \Lambda''_f(w) \to \varkappa''(w) \tag{8}$$

uniformément pour $w \in \bigcup_{j=1}^{n} (\overline{K}_j \cup \overline{\widetilde{K}}_j)$.

Enfin, désignant resp. par ε_{0f} et ε_f l'origine et l'extrémité de l'arc R_f et en appliquant successivement (33, 1, I) et la remarque 3, 1, I, nous pouvons approcher arbitrairement chaque fonction $\Lambda_f(w)$ par une fonction rationnelle spéciale $\Omega_f(w)$, suffisamment proche de $\Lambda_f(w)$, dont la dérivée $\Omega'_f(w)$ a toutes ses racines simples et dont les valeurs pour ces racines sont toutes distinctes et différentes de la valeur $-1 + \Omega_f(v_{0f})$, où v_{0f} est la racine de la dérivée $\Omega'_f(w)$ correspondant à la racine ε_{0f} dans le sens de (26, $\varkappa$). Alors, conformément à (36, $\varkappa$), il existe un arc spécial H_f correspondant à la fonction $\Omega_f(w)$, arbitrairement proche dans le sens de

Hausdorff de R_f, sur lequel la fonction $\Omega_f(w)$ admet une inverse et la dérivée $\Omega'_f(w)$ n'a pas de racines à l'exception de son origine v_{0f}, où elle a une racine simple; de plus $\Omega_f(v_f) - \Omega_f(v_{0f}) = \Lambda_f(\varepsilon_f) - \Lambda_f(\varepsilon_{0f})$, donc

$$\Omega_f(v_f) = -1 + \Omega_f(v_{0f}), \tag{9}$$

où v_f désigne l'extrémité de l'arc H_f.

En même temps, comme l'approximation examinée plus haut est arbitraire, on peut admettre que les convergences uniformes suivantes ont lieu

$$\Omega_f(w) - \Lambda_f(w) \to 0, \qquad \Omega'_f(w) - \Lambda_f(w) \to 0, \tag{10}$$

$$\Omega''_f(w) - \Lambda''_f(w) \to 0,$$

et que les distances dans le sens de Hausdorff des arcs H_f et R_f tendent vers zéro.

En définitive, prenant les fonctions $\Omega_f(w)$ et les arcs H_f mentionnés pour ceux dont il est question dans la conclusion du lemme, nous vérifions successivement que, vu la définition de l'arc S_f et les rapports de convergence entre R_f et S_f, H_f et R_f, la condition (a) est remplie; en vertu des relations (8) et (10) la condition (b) est remplie; vu la première propriété de la fonction $\Omega_f(w)$, il en est de même de la condition (c); en vertu de la seconde propriété de l'arc H_f la condition (d) l'est aussi; enfin, vu la seconde propriété de la fonction $\Omega_f(w)$ et (9), la condition (e) est aussi remplie. Soit enfin

$$a_f(z), \quad f = 1, 2, \ldots, \text{ pour } z \in K(0,1), \tag{11}$$

une fonction qui transforme d'une façon conforme le cercle $K(0,1)$ en le domaine $K(0,1) \setminus H_f$, telle que

$$a_f(0) = 0, \qquad a'_f(0) > 0; \tag{12}$$

$$\hat{a}_f(z) \quad \text{pour } z \in \tilde{K}(0,1) \tag{13}$$

est alors une fonction analogue qui transforme d'une façon conforme $\tilde{K}(0,1)$ en le domaine $\tilde{K}(0,1) \setminus \tilde{H}_f$ ((10, $*$), (11, $*$)).

Les fonctions (12) et (13) se prolongent d'une façon continue aux ensembles fermés $\overline{K(0,1)}$ et $\overline{\tilde{K}(0,1)}$, (27, $*$).

Du théorème sur le noyau il résulte que

$$a_f(z) \to b(z) \quad \text{et} \quad \tilde{a}_f(z) \to \tilde{b}(z) \tag{14}$$

presque uniformément dans $K(0,1)$ resp. $\tilde{K}(0,1)$.

2. VARIATION DES FONCTIONS DÉTERMINANTES

Soient $b(z)$ et $\varkappa(w)$ les fonctions et k, K_j, $\tilde{K}_j$, $\tilde{k}$ et ω_j, $1/\overline{\omega}_j$ les cercles et les points introduits dans 1.

Soit $2\varrho^*$ la borne inférieure des distances des points 0, ω_j, $1/\overline{\omega}_j$ et ∞ aux frontières des cercles k, K_j, $\tilde{K}_j$, et $\tilde{k}$.

Soient $\frac{1}{2}\mu^1$, $2\mu_2$ des nombres positifs limitant supérieurement le module $|\varkappa'(w)|$ et inférieurement le module $|\varkappa''(w)|$ sur les systèmes des cercles $\overline{K}_j$ et $\overline{\tilde{K}}_j$, ϱ — un nombre positif arbitraire et assez petit pour que $\varrho < \min(\varrho^*, 1, \sqrt[5]{4\mu^1/\mu_2})$ et $2\mu_1$ un nombre positif limitant inférieurement le module $|\varkappa'(w)|$ sur les systèmes des circonférences $K^*_{j(1/2)\varrho}$ et $\tilde{K}^*_{j(1/2)\delta}$. On a évidemment $\mu_1 < \mu^1$.

En vertu du lemme 1, 1 (sur l'approximation) il existe une suite de fonctions rationnelles spéciales

$$\Omega_f(w) = \frac{D_{L_f}}{w^{L_f}} + \ldots + D_{0f} + \ldots + \overline{D}_{L_f} w^{L_f}, \tag{1}$$

$$D_{L_f} \neq 0,\ D_{0f} \text{ — réel},\ f = 1, 2, \ldots,$$

et d'arcs spéciaux H_f correspondant à ces fonctions, tels que

$$\Omega_f(w) \to \varkappa(w) \tag{2}$$

uniformément sur les cercles $\overline{K}_j$ et $\overline{\tilde{K}}_j$ et tels que sont remplies les conditions (a), (c), (d) et (e) du même lemme. De (2) et des propriétés de la fonction $\varkappa(w)$ il résulte en outre que pour f suffisamment grand chacun des cercles $\overline{K}_j$ et $\overline{\tilde{K}}_j$ contient exactement une seule racine de la dérivée $\Omega'_f(w)$.

Désignons pour ces f suffisamment grands resp. par

$$\omega_{jf}, \quad \frac{1}{\overline{\omega}_{jf}}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$w_{kf}, \quad \frac{1}{\overline{w}_{kf}}, \quad k = 1, \ldots, m'_f, \tag{4}$$

$$v_{lf}, \quad l = 0, \ldots, m''_f, \tag{5}$$

où

$$2n + 2m'_f + (m''_f + 1) = 2L_f, \tag{6}$$

les racines de la dérivée $\Omega'_f(w)$ situées dans les cercles $\overline{K}_j$ et $\overline{\tilde{K}}_j$, dans $K(0,1) \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \overline{K}_j$ et $\overline{\tilde{K}}(0,1) \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\tilde{K}}_j$ et sur la circonférence $K^*(0,1)$, où v_{0f} est l'origine de H_f.

Soit ensuite ϱ_f le minimum des distances des points 0, ω_{jf}, $1/\overline{\omega}_{jf}$ et ∞ aux frontières des cercles correspondants k, K_j, $\tilde{K}_j$ et $\tilde{k}$ contenant ces points.

Il résulte de la convergence (2) que

$$\omega_{jf} \to \omega_j, \qquad \frac{1}{\overline{\omega}_{jf}} \to \frac{1}{\overline{\omega}_j} \tag{6'}$$

et, par conséquent,

$$\varrho_f \to 2\varrho^*. \tag{7}$$

Des définitions des nombres μ^1, μ_2, ϱ et μ_1 et de (2) et (7) il résulte de plus que pour f suffisamment grands

$$|\Omega_f'(w)| < \mu^1, \qquad |\Omega_f''(w)| > \mu_2 \tag{8}$$

sur les systèmes des cercles fermés $\overline{K}_j$ et $\overline{\tilde{K}}_j$,

$$|\Omega_f'(w)| > \mu_1 \tag{9}$$

sur les systèmes des circonférences $K^*_{j(1/2)\varrho}$ et $\tilde{K}^*_{j(1/2)\varrho}$ et

$$\varrho_f > \varrho^* \geqslant \varrho. \tag{10}$$

Soient enfin $A_{jf}, j = 1, \ldots, n, f = 1, 2, \ldots,$ signifie des nombres arbitraires complexes et $\bar{A}_{jf}$ leurs conjugués, tels que les suites $\{A_{jf}\}$, $j = 1, \ldots, n,$ soient convergentes respectivement vers les limites A_j données d'avance, et soit A un nombre limitant supérieurement tous les termes de toutes ces suites.

Alors, en vertu du lemme 1, 3, I (sur la variation), il existe un nombre $S > 0$ qui dépend uniquement du système des cercles k, K_j, $\tilde{K}_j$, et $\tilde{k}$ et des nombres μ_1, μ^1, μ_2, A et ϱ, et qui est indépendant de l'indice f, tel que dans le cercle $|t| < S$ il existe pour toute fonction (1) et pour f suffisamment grand une famille de variations de fonctions rationnelles de la variable w, dépendant du paramètre complexe t, holomorphes par rapport à t, de la forme

$$\Omega_f(w, t) = \frac{D_{L_f}(t)}{w^{L_f}} + \ldots + \hat{D}_{L_f}(t) w^{L_f}, \qquad D_{L_f}(t) \neq 0, \hat{D}_{L_f}(t) \neq 0, \tag{11}$$

et il existe des systèmes de fonctions holomorphes

$$\omega_{jf}(t), \qquad \frac{1}{\hat{\omega}_{jf}(t)}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

$$w_{kf}(t), \qquad \frac{1}{\hat{w}_{kf}(t)}, \qquad k = 1, \ldots, m_f', \tag{13}$$

$$v_{lf}(t), \qquad l = 0, \ldots, m_f'', \tag{14}$$

tels que

$$\Omega'_{fw}(\omega_{jf}(t), t) = 0, \qquad \Omega'_{fw}\left(\frac{1}{\hat{\omega}_{jf}(t)}, t\right) = 0, \tag{15}$$

$$\Omega'_{fw}(w_{kf}(t), t) = 0, \qquad \Omega'_{fw}\left(\frac{1}{\hat{w}_{kf}(t)}, t\right) = 0, \tag{16}$$

$$\Omega'_{fw}(v_{lf}(t), t) = 0, \tag{17}$$

$$\Omega_f(\omega_{jf}(t), t) = S_{jf}(t), \qquad \Omega_f\left(\frac{1}{\hat{\omega}_{jf}(t)}, t\right) = \hat{S}_{jf}(t), \tag{18}$$

$$\Omega_f(w_{kf}(t), t) = \Omega_f(w_{kf}), \qquad \Omega_f\left(\frac{1}{\hat{w}_{kf}(t)}, t\right) = \Omega_f\left(\frac{1}{\overline{w}_{kf}}\right), \tag{19}$$

$$\Omega_f(v_{lf}(t), t) = \Omega_f(v_{lf}), \tag{20}$$

$$\frac{D_{L_f}(t)}{\hat{D}_{L_f}(t)} = \frac{D_{L_f}}{\overline{D}_{L_f}}, \tag{21}$$

$$\omega_{jf}(t) \in K_{j(1/2)\varrho}, \qquad \frac{1}{\hat{\omega}_{jf}(t)} \in \tilde{K}_{j(1/2)\varrho}, \tag{22}$$

$$w_{kf}(t), v_{lf}(t) \in \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{K}_{j(1/2)\varrho} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\hat{K}}_{j(1/2)\varrho}\Big)', \tag{22'}$$

$$\Omega_f(w, 0) = \Omega_f(w), \tag{23}$$

$$\omega_{jf}(0) = \omega_{jf}, \qquad \frac{1}{\hat{\omega}_{jf}(0)} = \frac{1}{\overline{\omega}_{jf}}, \tag{24}$$

$$w_{kf}(0) = w_{kf}, \qquad \frac{1}{\hat{w}_{kf}(0)} = \frac{1}{\overline{w}_{kf}}, \tag{25}$$

$$v_{lf}(0) = v_{lf}, \tag{26}$$

et que les inégalités

$$|A_{jf}(t)| < C_1 A, \qquad |\hat{A}_{jf}(t)| < C_1 A, \qquad C_1 = 4\frac{\mu^1}{\varrho^5 \mu_2}, \tag{27}$$

ont lieu, où on a appliqué les notations

$$S_{jf}(t) = \Omega_f(\omega_{jf}) + A_{jf} 2i \omega_{jf}^2 \Omega''_f(\omega_{jf}) t, \tag{28}$$

$$\hat{S}_{jf}(t) = \Omega_f\left(\frac{1}{\overline{\omega}_{jf}}\right) - \bar{A}_{jf} 2i \frac{1}{\overline{\omega}_{jf}^2} \Omega''_f\left(\frac{1}{\overline{\omega}_{jf}}\right) t, \tag{28'}$$

Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 70,
PWN, Warszawa 1970, 77 pp.

et

(29)
$$A_{jf}(t) = \frac{S'_{jf}(t)}{2\omega_{jf}^2(t)\, i\Omega''_{fww}(\omega_{jf}(t), t)}, \qquad \hat{A}_{jf}(t) = \frac{\hat{S}'_{jf}(t)}{-2\dfrac{1}{\hat{\omega}_{jf}^2(t)}\, i\Omega''_{fww}\left(\dfrac{1}{\hat{\omega}_{jf}(t)}, t\right)}.$$

En outre on a la relation

(30)
$$\Omega'_{ft}(w, t) = iw\Omega'_{fw}(w, t)\sum_{j=1}^{n}\left(A_{jf}(t)\frac{w+\omega_{jf}(t)}{w-\omega_{jf}(t)} + \hat{A}_{jf}(t)\frac{1+\hat{\omega}_{jf}(t)w}{1-\hat{\omega}_{jf}(t)w}\right).$$

De plus, pour tout f indiqué plus haut il existe une fonction

(31)
$$w = \psi_f(y, t),$$

définie et holomorphe par rapport aux deux variables y et t dans le domaine

(32)
$$\{y, t\colon y \in Y,\ |t| < S\},$$

où

(33)
$$Y = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{K}_{j(1/8)\varrho} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\tilde{K}}_{j(1/8)\varrho} \cup \overline{k}_{(1/8)\varrho} \cup \overline{\tilde{k}}_{(1/8)\varrho}\Big)',$$

fonction qui est, comme fonction de la variable t, solution de l'équation différentielle

(34)
$$\frac{\partial w}{\partial t} = -iw\sum_{j=1}^{n}\left(A_{jf}(t)\frac{w+\omega_{jf}(t)}{w-\omega_{jf}(t)} + \hat{A}_{jf}(t)\frac{1+\hat{\omega}_{jf}(t)w}{1-\hat{\omega}_{jf}(t)w}\right),$$

considérée dans le domaine

(35)
$$\{w, t\colon w \in \hat{W},\ |t| < S\},$$

où

(36)
$$\hat{W} = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{K}_{j(1/4)\varrho} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\tilde{K}}_{j(1/4)\varrho} \cup \overline{k}_{(1/4)\varrho} \cup \overline{\tilde{k}}_{(1/4)\varrho}\Big)',$$

avec la condition initiale

(37)
$$w = y \quad \text{pour } t = 0;$$

cette fonction (31), comme fonction de la variable y dans le domaine Y est univalente pour t arbitraire, fixé.

Pour la fonction (31) nous avons dans (33) l'inégalité

(38)
$$|\psi_f(y, t) - y| \leqslant \tfrac{1}{16}\varrho.$$

En même temps pour t arbitraire, fixé et pour y variable, l'image du domaine Y par la fonction (31) couvre le domaine

$$W = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{K}_{j(1/16)\varrho} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\tilde{K}}_{j(1/16)\varrho} \cup \overline{k}_{(1/16)\varrho} \cup \overline{\tilde{k}}_{(1/16)\varrho}\Big)'. \tag{39}$$

Donc, au moins pour $w \in W$ il existe une fonction

$$y = \psi_t^{-1}(w, t) \tag{40}$$

inverse de (31). Cette fonction est holomorphe par rapport aux deux variables w et t dans le domaine

$$\{w, t\colon\ w \in W,\ |t| < S\} \tag{41}$$

et elle y remplit également l'inégalité

$$|\psi_t^{-1}(w, t) - w| \leqslant M_1 |t|, \quad \text{où} \quad M_1 = \frac{48}{\varrho^3} n C_1 A. \tag{42}$$

La fonction (31) satisfait dans (32) à la relation

$$\Omega_t\big(\psi_t(y, t), t\big) = \Omega_t(y). \tag{43}$$

Enfin pour t arbitraire réel, $t \in (-U, U)$, et pour y appartenant resp. à $K(0, 1)$, $K^*(0, 1)$ et $\tilde{K}$ $(0, 1)$ les valeurs des $\psi_t(y, t)$ appartiennent resp. à $K(0, 1)$, $K^*(0, 1)$ et $\tilde{K}(0, 1)$.

3. VARIATION DES FONCTIONS ACCOMMODÉES

Considérons maintenant les systèmes de points (1) et (2) de 1 et la fonction $\sigma(z)$, holomorphe en ces points, définie par la formule

$$\sigma(z) = \varkappa\big(b(z)\big) \tag{1}$$

dans les domaines $b^{-1}(K_j)$ et $\tilde{b}^{-1}(\tilde{K}_j)$.

On déduit par un calcul facile, des propriétés de la fonction $\varkappa(w)$ que

$$\sigma'(\zeta_j) = 0, \quad \sigma'\left(\frac{1}{\overline{\zeta}_j}\right) = 0, \tag{2}$$

$$\sigma''(\zeta_j) \neq 0, \quad \sigma''\left(\frac{1}{\overline{\zeta}_j}\right) \neq 0. \tag{3}$$

Remarquons ensuite qu'il existe un système de cercles q et Q_j, $j = 1, \ldots, n$, contenus dans $K(0, 1)$, analogues à k et K_j, dont les fermetures sont contenues resp. dans les domaines disjoints $b^{-1}(k)$ et $b^{-1}(K_j)$, et contenant resp. les points 0 et ζ_j, et il existe un système de cercles

correspondants $\tilde{q}$ et $\tilde{Q}_j$, $j = 1, \ldots, n$, contenus dans $\tilde{K}(0, 1)$, symétriques des précédents par rapport à la circonférence unité, dont les fermetures sont contenues resp. dans les domaines disjoints $\tilde{b}^{-1}(\tilde{k})$ et $\tilde{b}^{-1}(\tilde{K}_j)$, contenant resp. les points ∞ et $1/\bar{\zeta}_j$, tels que la fonction $\sigma(z)$ est holomorphe dans les cercles fermés disjoints $\overline{Q}_j$ et $\overline{\tilde{Q}}_j$, sa dérivée $\sigma'(z)$ considérée sur la somme de ces cercles fermés s'annule uniquement aux points ζ_j et $1/\bar{\zeta}_j$, et la dérivée seconde $\sigma''(z)$ y est différente de zéro.

Soit $2\tau^*$ la borne inférieure des distances des points 0, ζ_j, $1/\bar{\zeta}_j$ et ∞ aux frontières des cercles correspondants $q, Q_j, \tilde{Q}_j$ et $\tilde{q}$.

Soient $\frac{1}{2}\lambda^1$, $2\lambda_2$ des nombres positifs limitant supérieurement le module $|\sigma'(z)|$ et inférieurement le module $|\sigma''(z)|$ sur les systèmes des cercles $\overline{Q}_j$ et $\overline{\tilde{Q}}_j$, τ un nombre positif arbitraire et assez petit pour que $\tau < \min(\tau^*, 1, \sqrt[5]{4\lambda^1/\lambda_2})$ et $2\lambda_1$ un nombre positif limitant inférieurement le module $|\sigma'(z)|$ sur les systèmes des circonférences $Q^*_{j(1/2)\tau}$ et $\tilde{Q}^*_{j(1/2)\tau}$. On a évidemment $\lambda_1 < \lambda^1$.

Prenons à présent la suite des fonctions composées

$$X_f(z) = \Omega_f(a_f(z)), \quad f = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

où $\Omega_f(w)$ et $a_f(z)$ sont les fonctions (1, 2) et (11, 1). Il est facile de vérifier que les premiers membres de (4) sont des fonctions rationnelles spéciales de la forme

$$X_f(z) = \frac{E_{L_f}}{z^{L_f}} + \ldots + E_{0f} + \ldots + \bar{E}_{L_f} z^{L_f}, \quad E_{L_f} \neq 0, \; E_{0f} \text{ — réel}. \tag{5}$$

De (4), du lemme 1, 1, de (14, 1) et (1) il résulte facilement que

$$X_f(z) \to \sigma(z), \tag{6}$$

lorsque f tend vers l'infini, sur la somme des cercles fermés $\overline{Q}_j$ et $\overline{\tilde{Q}}_j$. De (6) il résulte de plus que pour f suffisamment grand dans chaque $\overline{Q}_j$ et $\overline{\tilde{Q}}_j$ il y a exactement une seule racine de la dérivée $X'_f(z)$ qui est l'image réciproque par la fonction $a_f(z)$ resp. par la fonction $\tilde{a}_f(z)$ de la racine correspondante (3, 2) de la dérivée $\Omega'_f(w)$, située dans le cercle K_j resp. $\tilde{K}_j$. Pareillement, pour f suffisamment grands il y a à l'extérieur de la somme des cercles nommés $m'_f + m''_f$ racines simples de la dérivée $X'_f(z)$ qui constituent les images réciproques des racines restantes (4, 2) et (5, 2) de la dérivée $\Omega'_f(w)$, à l'exception de v_{0f} qui est l'origine de l'arc H_f, et encore d'une racine simple située évidemment sur la circonférence unité. Il est évident d'après (34, $*$) que cette dernière racine est l'image réciproque de l'extrémité de l'arc H_f.

Désignons les racines mentionnées plus haut par

$$\zeta_{jf} = a_f^{-1}(\omega_{jf}), \qquad \frac{1}{\zeta_{jf}} = \tilde{a}_f^{-1}\left(\frac{1}{\overline{\omega}_{jf}}\right), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

$$z_{kf} = a_f^{-1}(w_{kf}), \qquad \frac{1}{\overline{z}_{kf}} = \tilde{a}_f^{-1}\left(\frac{1}{\overline{w}_{kf}}\right), \qquad k = 1, \ldots, m_f', \tag{8}$$

$$u_{lf} = a_f^{-1}(v_{lf}) = \tilde{a}_f^{-1}(\overline{v}_{lf}^{-1}), \qquad l = 1, \ldots, m_f'', \tag{9}$$

$$u_{m_f''+1,f} = a_f^{-1}(v_{m_f''+1,f}) = \tilde{a}_f^{-1}(\overline{v}_{m_f''+1,f}^{-1}), \tag{9'}$$

où $v_{m_f'+1,f}$ et $\overline{v}_{m_f'+1,f}^{-1}$ désignent resp. les extrémités des arcs H_f et $\tilde{H}_f$.

Nous remarquons ensuite facilement, en tenant compte des égalités

$$X_f(z_{kf}) = \Omega_f\big(a_f(z_{kf})\big) = \Omega_f(w_{kf}), \tag{10}$$

$$X_f\left(\frac{1}{\overline{z}_{kf}}\right) = \Omega_f\left(\tilde{a}_f\left(\frac{1}{\overline{z}_{kf}}\right)\right) = \Omega_f\left(\frac{1}{\overline{w}_{kf}}\right), \tag{11}$$

$$X_f(u_{lf}) = \Omega_f\big(a_f(u_{lf})\big) = \Omega_f(v_{lf}), \qquad l = 1, \ldots, m_f''+1, \tag{12}$$

qui résultent de (4), (8) et (9), et de la condition (e) du lemme 1, 1, réalisée pour la fonction $\Omega_f(w)$ par hypothèse que les valeurs de la fonction $X_f(z)$ pour les racines de sa dérivée $X_f'(z)$, situées à l'extérieur du système des cercles Q_j et $\tilde{Q}_j$, sont toutes distinctes.

Soit ensuite τ_f la borne inférieure des distances des points 0, ζ_{jf}, $1/\overline{\zeta}_{jf}$ et ∞ aux circonférences correspondantes $q^*, Q_j^*, \tilde{Q}_j^*$ er $\tilde{q}^*$.

De la convergence (6) il résulte que

$$\zeta_{jf} \to \zeta_j, \qquad \frac{1}{\overline{\zeta}_{jf}} \to \frac{1}{\overline{\zeta}_j} \tag{12'}$$

et, par conséquent,

$$\tau_f \to 2\tau^*. \tag{13}$$

De (6) et (13) il résulte ensuite que pour f suffisamment grand

$$|X_f'(z)| < \lambda^1, \qquad |X_f''(z)| > \lambda_2 \tag{14}$$

sur les systèmes des cercles fermés $\overline{Q}_j$ et $\overline{\tilde{Q}}_j$,

$$|X_f'(z)| > \lambda_1 \tag{15}$$

sur les systèmes des circonférences $Q_{j(1/2)\tau}^*$ et $\tilde{Q}_{j(1/2)\tau}^*$ et

$$\tau_f > \tau^* > \tau. \tag{16}$$

Prenons enfin les nombres complexes B_{jf}, et leurs conjugués $\bar{B}_{jf}$, définis par les formules

$$B_{jf} = A_{jf}\left(\frac{a_f(\zeta_{jf})}{\zeta_{jf}a'_f(\zeta_{jf})}\right)^2, \tag{17}$$

et le nombre

$$B = A\,\frac{4}{\left[\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\varrho\left(K^*(0,1),Q_j^*\right)\right]^2},$$

qui limite supérieurement les modules des nombres B_{jf}, car, en vertu de l'évaluation connue de la dérivée logarithmique des fonctions univalentes et de la définition du nombre A, [14], p. 117, on a

$$\left|\frac{a_f(\zeta_{jf})}{\zeta_{jf}a'_f(\zeta_{jf})}\right| \leqslant \frac{1+|\zeta_{jf}|}{1-|\zeta_{jf}|} \quad \text{et} \quad |A_{jf}| \leqslant A.$$

Alors, en vertu du lemme 1, 4, I (sur la variation), il existe un nombre $V>0$, qui dépend uniquement du système des cercles $q, Q_j, \tilde{Q}_j$ et $\tilde{q}$ et des nombres $\lambda_1, \lambda^1, \lambda_2, B$ et τ, et qui est indépendant de l'indice f, tel que dans le cercle $|t|<V$ il existe pour toute fonction (5), pour f suffisamment grand une famille de variations de fonctions rationnelles de la variable z dépendant du paramètre complexe t, holomorphes par rapport à t, de la forme

$$X_f(z,t) = \frac{E_{L_f}(t)}{z^{L_f}} + \ldots + \hat{E}_{L_f}(t)z^{L_f}, \quad E_{L_f}(t)\neq 0, \quad \hat{E}_{L_f}(t)\neq 0, \tag{18}$$

et des systèmes de fonctions holomorphes

$$\zeta_{jf}(t), \quad \frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)}, \quad j=1,\ldots,n, \tag{19}$$

$$z_{kf}(t), \quad \frac{1}{\hat{z}_{kf}(t)}, \quad k=1,\ldots,m'_f, \tag{20}$$

$$u_{lf}(t), \quad l=1,\ldots,m''_f+1, \tag{21}$$

tels que

$$X'_{fz}\left(\zeta_{jf}(t),t\right)=0, \quad X'_{fz}\left(\frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)},t\right)=0, \tag{22}$$

$$X'_{fz}\left(z_{kf}(t),t\right)=0, \quad X'_{fz}\left(\frac{1}{\hat{z}_{kf}(t)},t\right)=0, \tag{23}$$

$$X'_{fz}\left(u_{lf}(t),t\right)=0, \tag{24}$$

$$X_f\left(\zeta_{jf}(t),t\right)=S_{jf}(t), \quad X_f\left(\frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)},t\right)=\hat{S}_{jf}(t), \tag{25}$$

$$X_f\left(z_{kf}(t),t\right)=\Omega_f(w_{kf}), \quad X_f\left(\frac{1}{\hat{z}_{kf}(t)},t\right)=\Omega_f\left(\frac{1}{\overline{w}_{kf}}\right), \tag{26}$$

$$X_f\big(u_{lf}(t), t\big) = \Omega_f(v_{lf}), \tag{27}$$

$$\frac{E_{L_f}(t)}{\hat{E}_{L_f}(t)} = \frac{E_{L_f}}{\bar{E}_{L_f}}, \tag{28}$$

$$\zeta_{jf}(t) \in Q_{j(1/2)^\tau}, \quad \frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)} \in \tilde{Q}_{j(1/2)^\tau}, \tag{29}$$

$$z_{kf}(t),\ u_{lf}(t) \in \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{Q}_{j(1/2)^\tau} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\tilde{Q}}_{j(1/2)^\tau}\Big)', \tag{29'}$$

$$X_f(z, 0) = X_f(z), \tag{30}$$

$$\zeta_{jf}(0) = \zeta_{jf}, \quad \frac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(0)} = \frac{1}{\bar{\zeta}_{jf}}, \tag{31}$$

$$z_{kf}(0) = z_{kf}, \quad \frac{1}{\hat{z}_{kf}(0)} = \frac{1}{\bar{z}_{kf}}, \tag{32}$$

$$u_{lf}(0) = u_{lf}, \tag{33}$$

et que les inégalités suivantes ont lieu:

$$|B_{jf}(t)| < C_2 B, \quad |\hat{B}_{jf}(t)| < C_2 B, \quad C_2 = 4\frac{\lambda^1}{\tau^5 \lambda_2}, \tag{34}$$

où $S_{jf}(t)$ et $\hat{S}_{jf}(t)$ ont été définis par les formules (28, 2) et (28′, 2) et

$$B_{jf}(t) = \frac{S'_{jf}(t)}{2\zeta^2_{jf}(t)\, i X''_{fzz}\big(\zeta_{jf}(t), t\big)}, \quad \hat{B}_{jf}(t) = \frac{\hat{S}'_{jf}(t)}{-2\dfrac{1}{\hat{\zeta}^2_{jf}(t)}\, i X''_{fzz}\Big(\dfrac{1}{\hat{\zeta}_{jf}(t)}, t\Big)}\ (1). \tag{35}$$

(1) Il est facile de prouver que

$$S_{jf}(t) = X_f(\zeta_{jf}) + B_{jf} 2i \zeta^2_{jf} X''_f(\zeta_{jf}) t \tag{Δ}$$

et d'une façon analogue que

$$\tilde{S}_{jf}(t) = X_f\Big(\frac{1}{\bar{\zeta}_{jf}}\Big) - \bar{B}_{jf} 2i \frac{1}{\bar{\zeta}^2_{jf}} X''_f\Big(\frac{1}{\bar{\zeta}_{jf}}\Big) t. \tag{$\Delta\Delta$}$$

En effet, en dérivant deux fois la relation (4) par rapport à z, posant ensuite ζ_{jf} au lieu de z, en tenant compte de (7) et du fait que ω_{jf} sont racines de la dérivée $\Omega'_f(w)$, nous obtenons

$$\Omega''_f(\omega_{jf}) a'^2_f(\zeta_{jf}) = X''_f(\zeta_{jf}),$$

d'où

$$\omega^2_{jf} \Omega''_f(\omega_{jf}) = \Big(\frac{a_f(\zeta_{jf})}{\zeta_{jf} a'_f(\zeta_{jf})}\Big)^2 \zeta^2_{jf} X''_f(\zeta_{jf}),$$

et en vertu de (17)

$$A_{jf} \omega^2_{jf} \Omega''_f(\omega_{jf}) = B_{jf} \zeta^2_{jf} X''_f(\zeta_{jf});$$

conjointement avec (28, 2) et avec les relations $X_f(\zeta_{jf}) = \Omega_f(\omega_{jf})$ resultant de (4) et (7), cela donne la première de relations mentionnées. La seconde se démontre de façon analogue.

En outre on a la relation

$$X'_{jt}(z,t) = iz X'_{jz}(z,t) \sum_{j=1}^{n} \left(B_{jf}(t) \frac{z+\zeta_{jf}(t)}{z-\zeta_{jf}(t)} + \hat{B}_{jf}(t) \frac{1+\hat{\zeta}_{jf}(t)z}{1-\hat{\zeta}_{jf}(t)z} \right). \tag{36}$$

De plus, pour tout f indiqué plus haut il existe une fonction

$$z = \varphi_f(x,t), \tag{37}$$

définie et holomorphe par rapport aux deux variables x et t dans le domaine

$$\{x,t\colon x \in X,\ |t| < V\}, \tag{38}$$

où

$$X = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{Q}_{j(1/8)\tau} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\tilde{Q}}_{j(1/8)\tau} \cup \overline{q}_{(1/8)\tau} \cup \overline{\tilde{q}}_{(1/8)\tau} \Big)', \tag{39}$$

fonction qui est comme fonction de la variable t, solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -iz \sum_{j=1}^{n} \left(B_{jf}(t) \frac{z+\zeta_{jf}(t)}{z-\zeta_{jf}(t)} + \hat{B}_{jf}(t) \frac{1+\hat{\zeta}_{jf}(t)z}{1-\hat{\zeta}_{jf}(t)z} \right), \tag{40}$$

considéré dans le domaine

$$\{z,t\colon z \in \hat{Z},\ |t| < V\}, \tag{41}$$

où

$$\hat{Z} = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{Q}_{j(1/4)\tau} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\tilde{Q}}_{j(1/4)\tau} \cup \overline{q}_{(1/4)\tau} \cup \overline{\tilde{q}}_{(1/4)\tau} \Big)', \tag{42}$$

avec la condition initiale

$$z = x \quad \text{pour } t = 0; \tag{43}$$

cette fonction, comme la fonction de la variable x dans le domaine X, pour t arbitraire fixé, est univalente.

Pour la fonction (37) nous avons dans (38) l'inégalité

$$|\varphi_f(x,t) - x| \leqslant \tfrac{1}{16}\tau. \tag{44}$$

En même temps pour t arbitraire, fixé et pour x variable, l'image du domaine X par la fonction (37) couvre le domaine

$$Z = \Big(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{Q}_{j(1/16)\tau} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\tilde{Q}}_{j(1/16)\tau} \cup \overline{q}_{(1/16)\tau} \cup \overline{\tilde{q}}_{(1/16)\tau} \Big)'. \tag{45}$$

Donc, au moins pour $z \in Z$ il existe une fonction

$$x = \varphi_f^{-1}(z,t) \tag{46}$$

inverse de (37). Cette fonction est holomorphe par rapport aux deux variables z et t dans le domaine

$$\{z, t\colon z \in Z,\ |t| < V\} \tag{47}$$

et elle y satisfait également à l'inégalité

$$|\varphi_f^{-1}(z, t) - z| \leqslant M_2|t|, \quad \text{où } M_2 = \frac{48}{\tau^3} nC_2B. \tag{48}$$

La fonction (37) vérifie dans (38) la relation

$$X_f\big(\varphi_f(x, t), t\big) = X_f(x). \tag{49}$$

Enfin, pour t arbitraire réell, $t \in (-V, V)$, et pour x appartenant resp. à $K(0, 1)$, $K^*(0, 1)$ et $\tilde{K}(0, 1)$ les valeurs des $\varphi_f(x, t)$ appartiennent resp. à $K(0, 1)$, $K^*(0, 1)$ et $\tilde{K}(0, 1)$.

4. VARIATION DES FONCTIONS INTÉRIEURES

Etudions maintenant pour f suffisamment grand, arbitraire et fixé, les fonctions rationnelles (11, 2) et (18, 3), introduites dans 2 et 3, pour les valeurs du paramètre t, $|t| < T_0 = \min(S, V)$; pour simplifier les notations nous omettrons dans la suite l'indice f des fonctions (11, 2), (18, 3) et des fonctions liées avec elles et nous ferons de même pour leurs indices finaux (12, 2), (13, 2), (14, 2), (29, 2), (19, 3), (20, 3), (21, 3), (35, 3), (31, 2), (37, 3) et (11, 1).

LEMME 1 (sur l'existence et l'unicité de la fonction intérieure). *Si pour un t réel, $-T_0 < t < T_0$, pour un $r > 0$ et pour les fonctions correspondantes* (11, 2) *et* (18, 3) *il existe une fonction algébrique spéciale*

$$\tilde{a}(z) = \tilde{a}_1 z + \ldots, \tag{1}$$

remplissant les conditions

$$\Omega\big(\tilde{a}(z), t\big) = X(z, t) \quad \text{pour } z \in K(0, r) \text{ et } \tilde{a}_1 > 0, \tag{2}$$

cette fonction est unique.

De plus, si pour un t_0 réel, $-T_0 < t_0 < T_0$, il existe une fonction algébrique spéciale

$$a_0(z) = a_{10} z + \ldots, \tag{3}$$

remplissant les conditions initiales

$$\Omega\big(a_0(z), t_0\big) = X(z, t_0) \quad \text{pour } z \in K(0, 1) \text{ et } a_{10} > 0, \tag{4}$$

et

$$a_0\big(\zeta_j(t_0)\big) = \omega_j(t_0), \tag{5}$$

$$a_0\big(z_k(t_0)\big) = w_k(t_0), \tag{6}$$

$$a_0\big(u_l(t_0)\big) = v_l(t_0), \quad l \neq m'' + 1, \tag{7}$$

alors pour tout t d'un certain entourage (t_0-h, t_0+h) il existe une famille de variations de fonctions algébriques spéciales de la forme

$$a(z,t) = a_1(t)z+\dots, \tag{8}$$

déterminée d'une façon unique, holomorphe par rapport à t et remplissant les conditions

$$\Omega\big(a(z,t),t\big) = X(z,t) \quad \text{pour } z\in K(0,1) \text{ et } a_1(t)>0, \tag{9}$$

les conditions

$$a\big(\zeta_j(t),t\big) = \omega_j(t), \tag{10}$$

$$a\big(z_k(t),t\big) = w_k(t), \tag{11}$$

$$a\big(u_l(t),t\big) = v_l(t), \quad l\neq m''+1, \tag{12}$$

et la condition initiale

$$a(z,t_0) = a_0(z). \tag{13}$$

Démonstration. Pour établir la première partie de la conclusion, examinons pour un certain t les fonctions (11, 2) et (18, 3). Nous déduisons des relations $D_L(t)\neq 0$ et $E_L(t)\neq 0$ que ces fonctions sont différentes de zéro pour w et z de certains entourages $|w|<\varrho$ et $|z|<r$. Soient

$$\Omega_L(w,t) = \sqrt[L]{\Omega(w,t)} = \frac{\sqrt[L]{D_L(t)}}{w}+\dots \tag{14}$$

et

$$X_L(z,t) = \sqrt[L]{X(z,t)} = \frac{\sqrt[L]{E_L(t)}}{z}+\dots \tag{15}$$

les branches des radicaux des fonctions (11, 2) et (18, 3) déterminées dans les entourages correspondants $|w|<\varrho$ et $|z|<r$, choisies de façon que

$$\sqrt[L]{D_L(t)}\Big/\sqrt[L]{E_L(t)} > 0. \tag{16}$$

Un tel choix est possible, car, étant donné (2), on a $D_L(t) = a_1^L E_L(t)$ et, par conséquent $\arg D_L(t) = \arg E_L(t)$. De (2) nous déduisons facilement, en extrayant les racines des deux membres et en tenant compte de (14), (15) et (16), que dans un certain entourage du point $z=0$ la fonction (1) remplissant (2) s'exprime par la formule

$$\tilde{a}(z) = \Omega_L^{-1}\big(X_L(z,t),t\big), \tag{16'}$$

ce qui donne immédiatement l'unicité annoncée.

Passant à la seconde partie de la conclusion, nous montrerons tout d'abord que dans un certain entourage du point t_0 existent les fonctions (8) qui remplissent les conditions (9).

En effet, supposant le contraire, il existerait une suite de valeurs du paramètre t,

$$t_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

tendant vers t_0, pour lesquelles il n'existerait pas de fonction correspondante (8) (comp. [3], p. 17-23). Examinant les fonctions (11, 2) et (18, 3) dans l'entourage du point t_0, nous voyons, à cause de la continuité de leurs coefficients au point t_0 et des relations $D_L(t_0) \neq 0$ et $E_L(t_0) \neq 0$, que ces fonctions sont différentes de zéro pour t, w et z de certains entourages $|t-t_0| < h_0$, $|w| < \varrho_0$ et $|z| < r_0$ (comp. [5]). Soient

$$\Omega_L(w, t) = \sqrt[L]{\Omega(w, t)} = \frac{\sqrt[L]{D_L(t)}}{w} + \ldots \tag{18}$$

et

$$X_L(z, t) = \sqrt[L]{X(z, t)} = \frac{\sqrt[L]{E_L(t)}}{z} + \ldots \tag{19}$$

pour $|t-t_0| < h_0$ les branches des radicaux des fonctions (11, 2) et (18, 3) définies dans les entourages correspondants $|w| < \varrho_0$ et $|z| < r_0$, choisies de façon que

$$\sqrt[L]{D_L(t)} / \sqrt[L]{E_L(t)} > 0.$$

Ces branches existent, car, étant donné (4), on a $D_L(t_0) = a_{10}^L E_L(t_0)$; d'autre part, vu (21, 2) et (28, 3) et la remarque que pour t réel $\hat{D}_L(t) = \bar{D}_L(t)$ et $\hat{E}_L(t) = \bar{E}_L(t)$, on a les égalités

$$D_L(t)/\bar{D}_L(t) = D_L(t_0)/\bar{D}_L(t_0),$$
$$E_L(t)/\bar{E}_L(t) = E_L(t_0)/\bar{E}_L(t_0),$$

d'où nous déduisons en définitive que $\arg D_L(t) = \arg E_L(t)$, ce qui rend possible le choix désiré des branches. Nous constatons ensuite facilement, en extrayant les racines des deux membres de l'équation $\Omega(w, t_\nu) = X(z, t_\nu)$, que pour tout ν suffisamment grand, tel que $|t_\nu - t_0| < h_0$, il existe dans un entourage $|z| < r_0^*$, fixé et indépendant de ν, exactement une seule fonction holomorphe $a_\nu(z)$, définie par la formule

$$a_\nu(z) = \Omega_L^{-1}\big(X_L(z, t_\nu), t_\nu\big) = a_{1\nu} z + \ldots, \tag{20}$$

et remplissant les conditions

$$\Omega\big(a_\nu(z), t_\nu\big) = X(z, t_\nu), \quad a_{1\nu} > 0. \tag{21}$$

Soit r_ν le rayon de convergence de la série du second membre de (20). Puisque la fonction du premier membre de (20) est holomorphe au

moins dans l'entourage fixe $|z| < r_0^*$, et que, en raison de la définition de la suite (17), elle ne peut être holomorphe dans tout le cercle unité, on a toujours $r_0^* \leqslant r_\nu < 1$. La fonction (20), considérée dans le cercle $|z| < r_\nu$, y remplit évidemment la première des conditions (21) et, par suite, elle se prolonge au cercle fermé $|z| \leqslant r_\nu$, (27, $*$). Sur la circonférence $|z| = r_\nu$ il doit évidemment exister un point y_ν, en lequel la fonction (20) n'est pas holomorphe. Si nous posons

$$x_\nu = a_\nu(y_\nu), \tag{22}$$

il est évidént que

$$\Omega'_w(x_\nu, t_\nu) = 0, \tag{23}$$

car dans le cas contraire la fonction (20) serait d'après (21), holomorphe au point y_ν. En extrayant au besoin des suites partielles, nous pouvons admettre l'existence des limites

$$\begin{cases} \lim\limits_{\nu\to\infty} r_\nu = \hat{r} \geqslant r_0^* > 0, \quad \hat{r} \leqslant 1, \\ \lim\limits_{\nu\to\infty} y_\nu = \hat{y}, \\ \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu(z) = \hat{a}(z) = \hat{\alpha}_1 z + \ldots, \end{cases} \tag{24}$$

et dans ce cas $\hat{a}(z)$ est une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < \hat{r}$; cette fonction satisfait dans le cercle mentionné, en vertu de (21), (24) et de la convergence de la suite (17) vers t_0, à la relation

$$\Omega\big(\hat{a}(z), t_0\big) = X(z, t_0) \tag{25}$$

avec $\hat{\alpha}_1 = \lim\limits_{\nu\to\infty} a_{1\nu} \geqslant 0$ et $\hat{\alpha}_1 = \sqrt[L]{D_L(t_0)}/\sqrt[L]{E_L(t_0)}$, donc, vu l'unicité démontrée ci-dessus, elle est identique à la fonction (3) pour $|z| < \hat{r}$; en outre elle se prolonge évidemment, ainsi que $a_0(z)$, au cercle fermé $|z| \leqslant \hat{r}$. Ensuite, vu (22), (24) et (28, $*$), nous constatons que la limite

$$\hat{x} = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \hat{a}(\hat{y}) = a_0(\hat{y}), \tag{26}$$

existe, d'où, on obtient, d'après (23),

$$\Omega'_w(\hat{x}, t_0) = 0. \tag{27}$$

Les cas suivants sont donc possibles: pour un certain $j = 1, \ldots, n$

$$\hat{x} = \omega_j(t_0) \quad \text{et} \quad \hat{y} = \zeta_j(t_0), \tag{28}$$

ou bien pour un certain $k = 1, \ldots, m'$

$$\hat{x} = w_k(t_0) \quad \text{et} \quad \hat{y} = z_k(t_0), \tag{29}$$

ou enfin pour un certain $l = 0, \ldots, m''$

$$\hat{x} = v_l(t_0) \quad \text{et} \quad |\hat{y}| = 1. \tag{30}$$

Nous disons que dans le cas (28) on doit avoir

$$x_\nu = \omega_j(t_\nu) \tag{31}$$

et

$$y_\nu = \zeta_j(t_\nu) \tag{32}$$

pour ν suffisamment grands. En effet, si $x_\nu \neq \omega_j(t_\nu)$ pour un nombre infini d'indices ν, il résulterait de (15, 2), (23), (26) et (28), de la continuité de la fonction (12, 2) et de la définition de la suite (17) que

$$\Omega'_w(\omega_j(t_\nu), t_\nu) = 0, \quad \Omega'_w(x_\nu, t_\nu) = 0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \omega_j(t_0), \quad \lim_{\nu\to\infty} \omega_j(t_\nu) = \omega_j(t_0),$$

d'où, passant à la limite, $\omega_j(t_0)$ serait une racine au moins double de l'équation $\Omega'_w(w, t_0) = 0$, contrairement au fait que toutes les racines de la dérivée sont simples (comp. la remarque 1, 3, I). De la même façon nous démontrons la relation (32) pour ν suffisamment grands. En effet si $y_\nu \neq \zeta_j(t_\nu)$ pour un nombre infini de ν, la fonction $X(z, t_\nu) - \Omega(\omega_j(t_\nu), t_\nu)$ aurait, en vertu de (25, 3), (18, 2) et (22, 3), une racine double $\zeta_j(t_\nu)$ et, vu (31), (22) et (21), cette même fonction aurait également une autre racine y_ν; ces racines étant distinctes et tendant, en vertu de la continuité de (19, 3) et en vertu de (24) et (28), vers une limite commune $\zeta_j(t_0)$, le point $\zeta_j(t_0)$ devrait être une racine au moins triple de la fonction $X(z, t_0) - \Omega(\omega_j(t_0), t_0)$, donc au moins double de la dérivée $X'_z(z, t_0)$, contrairement au fait que toutes les racines de cette dérivée sont simples (comp. la remarque 1, 3, I). De (31) et (32) pour ν suffisamment grand, du fait que $\omega_j(t_\nu)$ et $\zeta_j(t_\nu)$ sont des racines simples des dérivées $\Omega'_w(w, t_\nu)$ et $X'_z(z, t_\nu)$ et des relations (21) et (22) il résulterait que la fonction (20) est, en vertu de (29, $*$), holomorphe au point y_ν, contrairement à l'hypothèse. Ainsi le cas examiné est impossible. De la même façon on prouve que le cas (29) l'est également. Il nous reste donc à démontrer l'impossibilité du cas (30). Raisonnant comme auparavant nous constatons que

$$x_\nu = v_l(t_\nu) \tag{33}$$

pour ν suffisamment grands. Ensuite, en considérant la fonction $X(z, t_\nu) - \Omega(v_l(t_\nu), t_\nu)$, nous constatons, en vertu de (33), (22) et (21) et de ce que le nombre soustrait est réel, que cette fonction a deux racines différentes y_ν et $1/\overline{y}_\nu$, tendant, vu (24), vers la même limite $\hat{y}$; d'où nous déduisons que $\hat{y}$ est une racine au moins double de la fonction limite

$X(z, t_0) - \Omega\big(v_l(t_0), t_0\big)$, donc également une racine de la dérivée $X'_z(z, t_0)$, c'est-à-dire on doit avoir $X(\hat{y}, t_0) - \Omega\big(v_l(t_0), t_0\big) = 0$ et $X'_z(\hat{y}, t_0) = 0$. Donc

$$\hat{y} = u_h(t_0), \tag{33'}$$

où h est l'un des nombres $1, \ldots, m''+1$. Puisque l'on a ensuite, en vertu de (28, $\ast$),

$$x_\nu = a_\nu(y_\nu) \to a_0\big(u_h(t_0)\big),$$

il s'ensuit, vu (26) et (30), que

$$v_l(t_0) = a_0\big(u_h(t_0)\big);$$

de ce qui précède et de (4), (20, 2) et (27, 3), nous tirons que

$$\Omega\big(v_l(t_0), t_0\big) = \Omega\big(a_0\big(u_h(t_0)\big), t_0\big) = X\big(u_h(t_0), t_0\big), \tag{34}$$

$$\Omega\big(v_l(t_0), t_0\big) = \Omega(v_l), \tag{35}$$

$$X\big(u_h(t_0), t_0\big) = \Omega(v_h), \tag{36}$$

donc

$$\Omega(v_l) = \Omega(v_h), \tag{37}$$

d'où nous déduisons que $h = l$, car les valeurs de la fonction $\Omega(w)$ pour tous les zéros de sa dérivée, situés sur la circonférence unité et sa valeur à l'extrémité de l'arc H sont toutes distinctes, (comp. la condition (e) du lemme 1, 1). En particulier, il résulte de là que le cas $\hat{x} = v_0(t_0)$ n'est pas possible, car $h > 0$. Dans le cas où l est l'un des nombres $1, \ldots, m''$, on a, conformément à (33'),

$$\hat{y} = u_l(t_0).$$

Revenant à présent à la fonction $X(z, t_\nu) - \Omega\big(v_l(t_\nu), t_\nu\big)$, nous constatons, en vertu de (33), (22), (21) et (27, 3) (20, 2) et de la continuité de $u_l(t)$, qu'elle a trois racines différentes y_ν, $1/\overline{y}_\nu$ et $u_l(t_\nu)$ tendant vers une limite $u_l(t_0)$. Le point $u_l(t_0)$ devrait donc être une racine au moins triple de la fonction $X(z, t_0) - \Omega\big(v_l(t_0), t_0\big)$, donc au moins double de sa dérivée $X'_z(z, t_0)$, ce qui n'a pas lieu (comp. la remarque 1, 3, I). Le cas (30) est donc aussi impossible pour $l = 1, \ldots, m''$.

L'impossibilité de tous les cas (28), (29) et (30) prouve, vu la supposition contraire, l'existence dans un certain intervalle $(t_0 - h, t_0 + h)$ d'une fonction algébrique spéciale de la forme (8), remplissant les conditions (9) partout dans le cercle unité.

L'unicité de la fonction (8) résulte de la première partie de la conclusion.

Le fait que la condition initiale (13) est remplie est une conséquence de l'unicité.

Du fait que les fonctions $\Omega(w, t)$ et $X(z, t)$ sont holomorphes et du théorème correspondant sur l'analycité des fonctions implicites ou bien de la représentation (16′), il résulte facilement que la fonction (8) est holomorphe par rapport à t.

Démontrons maintenant que pour h suffisamment petit la fonction (8) vérifie également les relations (10), (11) et (12). Supposons le contraire, p. ex. admettons qu'il existe un l parmi les nombres $1, \ldots, m''$ et une suite de valeurs du paramètre t,

$$t_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

tendant vers t_0, tels que

$$a\big(u_l(t_\nu), t_\nu\big) \neq v_l(t_\nu). \tag{38}$$

Alors, en posant

$$\xi_\nu = a\big(u_l(t_\nu), t_\nu\big), \tag{39}$$

nous tirons de (9) et (39) que

$$\Omega(\xi_\nu, t_\nu) - X\big(u_l(t_\nu), t_\nu\big) = 0. \tag{40}$$

D'autre part, en vertu de (27, 3), (20, 2) et (17, 2), il vient

$$\Omega\big(v_l(t_\nu), t_\nu\big) - X\big(u_l(t_\nu), t_\nu\big) = 0 \tag{41}$$

et

$$\Omega'_w\big(v_l(t_\nu), t_\nu\big) = 0. \tag{42}$$

Enfin, comme (39) et (13), (28, $*$), (7) et la continuité des fonctions correspondantes (14, 2), (11, 2), (18, 3), (21, 3), entraînent

$$\xi_\nu \to a_0\big(u_l(t_0)\big) = v_l(t_0),$$

$$v_l(t_\nu) \to v_l(t_0),$$

$$\Omega(w, t_\nu) - X\big(u_l(t_\nu), t_\nu\big) \to \Omega(w, t_0) - X\big(u_l(t_0), t_0\big),$$

il résulterait de (40), (41) et (42) que $v_l(t_0)$ est une racine au moins double de la dérivée $\Omega'_w(w, t_0)$, ce qui n'a pas lieu. Il en est de même dans le cas des relations (10) et (11).

De ce fait la démonstration est achevée.

LEMME 2. *Dans chaque intervalle* $\langle -T, T \rangle \subset (-T_0, T_0)$ *il existe, déterminée d'une façon unique, une famille de fonctions du type* (8), *holomorphes par rapport à* t, *remplissant les conditions* (9), *les conditions* (10), (11) *et* (12) *et la condition*

$$a(z, 0) = a(z), \tag{43}$$

où $a(z)$ *est la fonction* (11, 1).

Démonstration. Considérons une classe $\mathscr{K}$ d'intervalles fermés $\langle -\tau_1, \tau_2\rangle \subset \langle -T, T\rangle$, $\tau_1, \tau_2 \geqslant 0$, dans lesquels on peut former, conformément à la première partie du lemme 1, une famille de fonctions du type (8) remplissant les conditions (9), les conditions (10), (11), (12) et la condition initiale (43). Cette classe n'est pas vide, car elle contient l'intervalle $\langle 0, 0\rangle$ dans lequel la fonction (11, 1) forme la famille mentionnée. Désignons par $\{-\tau_1, \tau_2\}$ l'intervalle qui est la somme de tous les intervalles de la classe examinée. De l'unicité des fonctions (1) remplissant les conditions (2) il résulte directement d'une façon connue que dans l'intervalle $\{-\tau_1, \tau_2\}$ on peut former une famille de fonctions du type (8) remplissant les conditions (9), les conditions (10), (11), (12) et la condition (43).

Démontrons à présent que la famille de fonctions mentionnée plus haut dans l'intervalle $\{-\tau_1, \tau_2\}$ peut être prolongée comme famille de fonctions du type (8), en respectant les conditions (9)-(12) et (43), à l'intervalle fermé $\langle -\tau_1, \tau_2\rangle$. Démontrons en premier lieu que ce prolongement peut être fait à l'intervalle fermé à droite $\{-\tau_1, \tau_2\rangle$.

Prenons à cet effet une suite arbitraire de valeurs du paramètre t:

$$t_\nu \to \tau_2,$$

telle que la suite $\{a(z, t_\nu)\}$ soit convergente vers une certaine limite

$$\hat{a}(z) = \hat{\alpha}_1 z + \ldots, \qquad z \in K(0, 1), \ \hat{\alpha}_1 \geqslant 0, \tag{44}$$

ce qui est possible, car la suite $\{a(z, t_\nu)\}$, étant bornée, est normale (comp. (30, $*$)). La fonction (44) est donc algébrique spéciale et remplit les conditions limites

$$\Omega\big(\hat{a}(z), \tau_2\big) = X(z, \tau_2) \quad \text{pour } z \in K(0, 1), \ \hat{\alpha}_1 > 0, \tag{45}$$

$$\hat{a}\big(\zeta_j(\tau_2)\big) = \omega_j(\tau_2), \tag{46}$$

$$\hat{a}\big(z_k(\tau_2)\big) = w_k(\tau_2), \tag{47}$$

$$\hat{a}\big(u_l(\tau_2)\big) = v_l(\tau_2), \qquad l \neq m'' + 1. \tag{48}$$

La fonction (44) remplit donc, comme il est facile de le constater, les conditions du lemme 1 pour $t_0 = \tau_2$, $-T_0 < \tau_2 < T_0$. Pour h suffisamment petit il existe donc, pour tout t de l'intervalle $(\tau_2 - h, \tau_2 + h)$, une fonction algébrique spéciale, déterminée d'une façon unique, holomorphe par rapport à t, de la forme

$$\hat{a}(z, t) = \hat{\alpha}_1(t) z + \ldots, \qquad z \in K(0, 1), \tag{49}$$

qui remplit les conditions

$$\Omega\big(\hat{a}(z, t), t\big) = X(z, t) \quad \text{pour } z \in K(0, 1), \ \hat{\alpha}_1(t) > 0, \tag{50}$$

les conditions

$$\hat{a}\big(\zeta_j(t), t\big) = \omega_j(t), \tag{51}$$

$$\hat{a}\big(z_k(t), t\big) = w_k(t), \tag{52}$$

$$\hat{a}\big(u_l(t), t\big) = v_l(t), \quad l \neq m''+1, \tag{53}$$

et la condition initiale

$$\hat{a}(z, \tau_2) = \hat{a}(z). \tag{54}$$

Considerons maintenant la partie commune des intervalles $\{-\tau_1, \tau_2\}$ et $(-\tau_2-h, \tau_2+h)$. Dans cette partie deux familles de fonctions (8) et (49) remplissent les conditions (2) du lemme 1. Alors, en vertu de la première partie de ce lemme, nous avons

$$a(z, t) = \hat{a}(z, t). \tag{55}$$

Comme la famille (49) est holomorphe par rapport à t au point τ_2, la famille (8) peut, en vertu de (55), être prolongée de l'intervalle $\{-\tau_1, \tau_2\}$ à l'intervalle $\{-\tau_1, \tau_2\rangle$, comme famille holomorphe par rapport à t, en respectant les conditions (9), les conditions (10), (11), (12) et la condition (43).

On constate de la même façon qu'il est possible de prolonger la famille (8), en respectant les propriétés et les conditions mentionnées, de l'intervalle $\{-\tau_1, \tau_2\}$ à l'intervalle fermé à gauche $\langle -\tau_1, \tau_2\}$.

Ainsi nous avons démontré qu'on peut prolonger la famille (8) à l'intervalle fermé $\langle -\tau_1, \tau_2\rangle$, comme famille holomorphe par rapport à t, en respectant les conditions (9)-(12) et (43).

De cette façon on a évidemment $\{-\tau_1, \tau_2\} = \langle -\tau_1, \tau_2\rangle$.

Il est facile de constater que $\langle -\tau_1, \tau_2\rangle = \langle -T, T\rangle$. En effet, si p. ex. $\tau_2 < T$, il existerait dans la classe $\mathscr{K}$ des intervalles un intervalle plus large qui ne se contiendrait pas dans l'intervalle $\langle -\tau_1, \tau_2\rangle$, ce qui évidemment n'est pas possible: ce serait p. ex. tout intervalle fermé $\langle -\tau_1, \tau_2+h'\rangle$, où $0 < h' < h$, et la famille de fonctions du type (8), remplissant les conditions (9)-(12) et (43), serait la famille des fonctions définies par les formules

$$\check{a}(z, t) = \begin{cases} a(z, t), & \tau_1 \leqslant t < \tau_2, \\ \hat{a}(z, t), & \tau_2 \leqslant t \leqslant \tau_2+h'. \end{cases}$$

Ainsi la démonstration est achevée.

COROLLAIRE. *Dans l'intervalle* $(-T_0, T_0)$ *existe, déterminée d'une façon unique, une famille de fonctions du type* (8), *holomorphes par rapport à* t, *remplissant les conditions* (9), *les conditions* (10), (11) *et* (12) *et la condition*

$$a(z, 0) = a(z), \tag{56}$$

où $a(z)$ *est la fonction* (11, 1).

Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 70,
PWN, Warszawa 1970, 77 pp.

Démonstration. Il suffit ici de remarquer que l'intervalle $(-T_0, T_0)$ est la somme de tous les intervalles fermés $\langle -T, T\rangle$ contenus dans cet intervalle, et de profiter de l'unicité des fonctions (1) qui remplissent la condition (2).

LEMME 3. *La famille de fonctions du type* (8) *dont il est question dans le lemme* 2 *et dans la conclusion de ce lemme, vérifie dans l'intervalle* $(-T_0, T_0)$ *l'équation*

$$(57)\qquad a'_t(z,t) = \sum_{j=1}^{n}\Big\{\beta_j(t)\Big[\Big(\zeta_j(t)\,\frac{a'_z(\zeta_j(t),t)}{a(\zeta_j(t),t)}\Big)^2 a(z,t)\,\frac{a(\zeta_j(t),t)+a(z,t)}{a(\zeta_j(t),t)-a(z,t)} - z a'_z(z,t)\,\frac{\zeta_j(t)+z}{\zeta_j(t)-z}\Big] + \bar\beta_j(t)\Big[\overline{\Big(\zeta_j(t)\,\frac{a'_z(\zeta_j(t),t)}{a(\zeta_j(t),t)}\Big)^2}\times a(z,t)\,\frac{1+\overline{a(\zeta_j(t),t)}\,a(z,t)}{1-\overline{a(\zeta_j(t),t)}\,a(z,t)} - z a'_z(z,t)\,\frac{1+\overline{\zeta_j(t)}z}{1-\overline{\zeta_j(t)}z}\Big]\Big\},$$

où l'on a pris

$$(57')\qquad \beta_j(t) = iB_j(t).$$

Démonstration. Dérivons d'abord l'identité (9) successivement par rapport à t et à z; nous obtenons les relations

$$(58)\qquad \Omega'_w\big(a(z,t),t\big)a'_t(z,t) + \Omega'_t\big(a(z,t),t\big) = X'_t(z,t),$$

$$(58')\qquad \Omega'_w\big(a(z,t),t\big)a'_z(z,t) = X'_z(z,t).$$

Si à présent $z\in K(0,1)$ et diffère des points (19, 3) et (20, 3), alors, à cause de (10), (11) et de l'univalence des fonctions (8), $\Omega'_w\big(a(z,t),t\big) \neq 0$ et évidemment $X'_z(z,t)\neq 0$ et $a'_z(z,t)\neq 0$. Divisant ensuite pour ces mêmes z (58) par (58′) et multipliant la relation ainsi obtenue par $a'_z(z,t)$, nous avons

$$a'_t(z,t) = \frac{X'_t(z,t)}{X'_z(z,t)}\,a'_z(z,t) - \frac{\Omega'_t\big(a(z,t),t\big)}{\Omega'_w\big(a(z,t),t\big)},$$

d'où, en vertu de (31, 2) et (36, 3), du fait que $\hat A_j(t) = \bar A_j(t)$, $\hat B_j(t) = \bar B_j(t)$, $\hat\omega_j(t) = \bar\omega_j(t)$ et $\hat\zeta_j(t) = \bar\zeta_j(t)$ pour t réel, et de (10), nous obtenons

$$(59)\qquad a'_t(z,t) = iza'_z(z,t)\sum_{j=1}^{n}\Big(B_j(t)\,\frac{z+\zeta_j(t)}{z-\zeta_j(t)} + \bar B_j(t)\,\frac{1+\bar\zeta_j(t)z}{1-\bar\zeta_j(t)z}\Big) - ia(z,t)\sum_{j=1}^{n}\Big(A_j(t)\,\frac{a(z,t)+a(\zeta_j(t),t)}{a(z,t)-a(\zeta_j(t),t)} + \bar A_j(t)\,\frac{1+\overline{a(\zeta_j(t),t)}\,a(z,t)}{1-\overline{a(\zeta_j(t),t)}\,a(z,t)}\Big)$$

pour z différents de (19, 3) et (20, 3). Multipliant ensuite les deux membres de (59) par $z-\zeta_j(t)$, où j est fixé, et passant à la limite pour $z \to \zeta_j(t)$, nous avons

$$A_j(t) = B_j(t)\left(\zeta_j(t)\,\frac{a'_z(\zeta_j(t), t)}{a(\zeta_j(t), t)}\right)^2. \tag{60}$$

Mettant enfin dans (59) au lieu de $A_j(t)$ le second membre de (60), nous obtenons (57) pour $z \in K(0, 1)$ et différents des points (19, 3) et (20, 3). La relation (57) a lieu également en ces points, puisque ces deux membres sont continus partout dans le cercle unité.

Soulignons que ce qui a été dit des fonctions $a(z)$, $\Omega(w, t)$, $X(z, t)$, $\omega_j(t)$, $1/\hat{\omega}_j(t)$, $w_k(t)$, $1/\hat{w}_k(t)$, $v_l(t)$, $\zeta_j(t)$, $1/\hat{\zeta}_j(t)$, $z_k(t)$, $1/\hat{z}_k(t)$, $u_l(t)$, $A_j(t)$, $\hat{A}_j(t)$, $B_j(t)$, $\hat{B}_j(t)$, $\psi(y, t)$ et $\varphi(x, t)$, s'applique, conformément à la convention adoptée au début, aussi aux fonctions analogues de 1, 2 et 3, dépendant de l'indice f. Dans la suite nous profiterons de ces formules, en indiquant explicitement que les fonctions mentionnées et les autres qui leur sont liées dépendent de l'indice f.

5. PASSAGE À LA LIMITE ET DÉDUCTION DE LA FORMULE FONDAMENTALE

Examinons à présent les expressions $\Omega_f(w, t)$ et $X_f(z, t)$, introduites dans 2 et 3, pour f suffisamment grands et pour $|t| < T_0 = \min(U, V)$.

En vertu de 4 il existe pour tout f fixé et pour t réel de l'intervalle $-T_0 < t < T_0$ une fonction intérieure

$$a_f(z, t) = a_{1f}(t)z + \ldots, \qquad z \in K(0, 1),\ a_{1f}(t) > 0, \tag{1}$$

holomorphe par rapport à t, vérifiant l'équation correspondante

$$\Omega_f(a_f(z, t), t) = X_f(z, t), \tag{2}$$

avec la condition

$$a_f(z, 0) = a_f(z). \tag{3}$$

En vertu de 2 et 3, il existe pour $\Omega_f(w, t)$ resp. $X_f(z, t)$ des fonctions

$$w = \psi_f(y, t), \tag{4}$$

resp.

$$z = \varphi_f(x, t), \tag{5}$$

définies et holomorphes au moins pour les variables $y \in Y$, $|t| < T_0$, resp. $x \in X$, $|t| < T_0$ qui sont, comme fonctions de la variable t, solutions des équations différentielles

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -iw\sum_{j=1}^{n}\left(A_{jf}(t)\,\frac{w+\omega_{jf}(t)}{w-\omega_{jf}(t)} + \hat{A}_{jf}(t)\,\frac{1+\hat{\omega}_{jf}(t)w}{1-\hat{\omega}_{jf}(t)w}\right), \tag{6}$$

resp.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -iz\sum_{j=1}^{n}\left(B_{jf}(t)\,\frac{z+\zeta_{jf}(t)}{z-\zeta_{jf}(t)} + \hat{B}_{jf}(t)\,\frac{1+\hat{\zeta}_{jf}(t)z}{1-\hat{\zeta}_{jf}(t)z}\right), \tag{7}$$

avec les conditions initiales

$$w = y \quad \text{pour } t = 0, \tag{8}$$

resp.

$$z = x \quad \text{pour } t = 0. \tag{9}$$

Les fonctions (4) et (5) sont pour t, $|t| < T_0$, arbitraire, fixé, univalentes comme fonctions des variables y resp. x dans les domaines Y resp. X.

En même temps, pour t, $|t| < T_0$, arbitraire, fixé, et pour $x \in X$ variable l'image du domaine X par la fonction (5) couvre le domaine Z. Il existe donc une fonction

$$x = \varphi_f^{-1}(z, t), \tag{10}$$

inverse de (5) au moins pour $z \in Z$. Cette fonction est holomorphe pour $z \in Z$, $|t| < T_0$ et elle vérifie l'inégalité

$$|\varphi_f^{-1}(z, t) - z| \leqslant M_2|t|. \tag{11}$$

Enfin les fonctions (4) resp. (5) satisfont aux relations

$$\Omega_f\big(\psi_f(y, t), t\big) = \Omega_f(y), \tag{12}$$

resp.

$$X_f\big(\varphi_f(x, t), t\big) = X_f(x) \tag{13}$$

pour $y \in Y$, $|t| < T_0$ resp. $x \in X$, $|t| < T_0$.

Comme les suites de fonctions holomorphes

$$\{\omega_{jf}(t)\}, \quad \{\hat{\omega}_{jf}(t)\}, \quad \{A_{jf}(t)\}, \quad \{\hat{A}_{jf}(t)\}, \tag{14}$$

resp.

$$\{\zeta_{jf}(t)\}, \quad \{\hat{\zeta}_{jf}(t)\}, \quad \{B_{jf}(t)\}, \quad \{\hat{B}_{jf}(t)\}, \tag{15}$$

figurant dans les équations (6) resp. (7), considérées pour $|t| < T_0$, sont bornées, d'après (22, 2) et (27, 2) resp. (29, 3) et (34, 3), nous pouvons supposer qu'elles convergent presque uniformément vers des limites

$$\omega_j(t), \quad \hat{\omega}_j(t), \quad A_j(t), \quad \hat{A}_j(t), \tag{14'}$$

resp.

$$\zeta_j(t), \quad \hat{\zeta}_j(t), \quad B_j(t), \quad \hat{B}_j(t), \tag{15'}$$

holomorphes pour $|t| < T_0$. Alors les suites des solutions (4) resp. (5), considérées dans les domaines

$$\{y, t: y \in Y, |t| < T_0\}, \tag{16}$$

resp.

$$\{x, t: x \in X, |t| < T_0\}, \tag{17}$$

convergent presque uniformément vers les fonctions

$$w = \psi(y, t), \tag{18}$$

resp.

$$z = \varphi(x, t), \tag{19}$$

holomorphes dans ces domaines, qui sont, comme fonctions de la variable t, solutions des équations

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -iw \sum_{j=1}^{n} \left(A_j(t) \frac{w + \omega_j(t)}{w - \omega_j(t)} + \hat{A}_j(t) \frac{1 + \hat{\omega}_j(t) w}{1 - \hat{\omega}_j(t) w} \right), \tag{20}$$

resp.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -iz \sum_{j=1}^{n} \left(B_j(t) \frac{z + \zeta_j(t)}{z - \zeta_j(t)} + B_j(t) \frac{1 + \hat{\zeta}_j(t) z}{1 - \hat{\zeta}_j(t) z} \right), \tag{21}$$

avec les conditions initiales

$$w = y \quad \text{pour } t = 0, \tag{22}$$

resp.

$$z = x \quad \text{pour } t = 0. \tag{23}$$

En effet, la convergence des suites (14) resp. (15) vers (14′) resp. (15′) entraîne facilement que les seconds membres de (6) resp. (7) convergent presque uniformément vers les seconds membres (20), resp. (21), dans (16) resp. (17). Ensuité, de même que dans 3, I, il résulte de (22, 2) et (27, 2) resp. (29, 3) et (34, 3) et des définitions des domaines Y et X, que les seconds membres (6) resp. (7) sont bornés uniformément par les nombres $\frac{48}{\varrho^3} nC_1 A$ resp. $\frac{48}{\tau^3} nC_2 B$. L'application de la méthode des fonctions majorantes [10], p. 16-29, montre également que les solutions (4) resp. (5) sont bornées uniformément dans les domaines (16) resp. (17), donc elles forment des suites normales. Ce qui précède, conjointement avec l'unicité des solutions des équations (20), (22) resp. (21), (23) et avec le fait simple que les limites des suites partielles arbitraires, extraites des suites des solutions (4) resp. (5), sont solutions des équations limites (20) resp. (21), mène de façon connue à la remarque précédente.

Les fonctions (18) et (19) sont évidemment, pour t arbitraire, fixé, des fonctions univalentes comme fonctions de y resp. x dans les domaines Y resp. X (comp. [10], p. 97).

En même temps, pour t arbitraire, fixé, et pour $x \in X$ variable l'image du domaine X par la fonction (19) couvre le domaine Z. Il existe donc au moins pour $z \in Z$ une fonction

$$x = \varphi^{-1}(z, t) \tag{24}$$

inverse de (19). Cette fonction est holomorphe pour $z \in Z$, $|t| < T_0$, elle satisfait à l'inégalité

$$|\varphi^{-1}(z, t) - z| \leqslant M_2 |t| \tag{25}$$

et

$$\varphi^{-1}(z, t) \in K^*(0, 1) \quad \text{pour } z \in K^*(0, 1) \text{ et } t \text{ réel, } t \in (-T_0, T_0), \tag{26}$$

$$\varphi^{-1}(z, t) \in K(0, 1) \quad \text{pour } z \in K(0, 1) \text{ et } t \text{ réel, } t \in (-T_0, T_0). \tag{27}$$

En continuant, nous observons que la suite des fonctions inverses (10), considérées dans le domaine

$$\{z, t\colon z \in Z, |t| < T_0\}, \tag{28}$$

converge presque uniformément vers la fonction (24).

En effet, de la convergence en tout point des fonctions (5), admettant des inverses, vers la limite inversible (19), il résulte d'une façon évidente la convergence en tout point des fonctions inverses (10) vers la fonction inverse (24); la suite des fonctions (10) étant normale, car les valeurs des fonctions (10) appartiennent à l'ensemble borné X, la convergence mentionnée est presque uniforme, [18], p. 52.

Remarquons à présent que la frontière G^* du domaine $G = b\big(K(0, 1)\big)$ est située dans le domaine Y, donc la distance $\varrho(G^*, Y')$ est positive. Remarquons ensuite que l'univalence de la fonction $b(z)$ entraîne immédiatement qu'il existe un anneau R tangent intérieurement à la circonférence $K^*(0, 1)$, assez étroit pour que $R \subset X$ et que son image $b(R)$ est arbitrairement proche de la frontière G^* au sens de Hausdorff, et, par suite, $\overline{b(R)} \subset Y$. Remarquons enfin que, vu (26), (27) et (25), il existe pour la fonction (24) un entourage réel $I^* = (-T^*, T^*)$, $T^* < T_0$, du point $t = 0$, assez petit et un anneau ouvert $P = \{z\colon r_0 < |z| < 1\} \subset Z$, assez étroit pour que

$$\varphi^{-1}(z, t) \in R \tag{29}$$

dans l'ensemble

$$\{z, t\colon z \in P, t \in I^*\}. \tag{30}$$

En nous basant sur ce qui précède, nous pouvons définir dans l'ensemble (30) la fonction

$$\hat{b}(z, t) = \psi\big(b\,(\varphi^{-1}(z, t)), t\big). \tag{31}$$

Mais, en vertu de ce qui a été dit plus haut, la fonction (24) est définie au moins dans l'ensemble ouvert des variables complexes

$$\{z, t\colon z \in P, |t| < T^*\}, \tag{32}$$

contenant l'ensemble (30); ensuite, comme l'image de ce dernier par la fonction (24) est, en vertu de (29), contenue dans R, on peut trouver un ensemble ouvert E des variables complexes z et t, contenu dans l'ensemble (32) et contenant l'ensemble (30), tel que la relation (29) ait lieu également dans l'ensemble E, plus large que (30).

En même temps, d'après ce qui précède, la fonction (18) est définie au moins dans l'ensemble des variables complexes

$$\{y, t\colon y \in b(R), |t| < T^*\}. \tag{33}$$

Récapitulant ce qui précède, nous constatons que le second membre de (31) est défini et holomorphe au moins dans l'ensemble E et dans la suite nous allons considérer la fonction (31) dans cet ensemble.

Remarquons enfin que, vu (31), (22) et (23), on a

$$\hat{b}(z, 0) = b(z). \tag{34}$$

Soit maintenant $K^*(0, r)$, où $r_0 < r < 1$, une circonférence arbitraire, fixée, située dans P et soit $I = (-T, T)$ un entourage arbitraire, réel du point $t = 0$, contenu avec sa fermeture dans l'entourage précédent I^*. Nous avons alors pour la fonction (1) la représentation

$$a_f(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K^*(0,r)} \frac{a_f(\zeta, t)}{\zeta - z} d\zeta \tag{35}$$

pour $z \in K(0, r)$, $t \in I$ et pour tout f. D'autre part, désignant par $\varepsilon(r)$ la distance euclidienne de l'ensemble $\{z, t\colon z \in K^*(0, r), t \in \bar{I}\}$ à la frontière de l'ensemble E, nous voyons que la fonction (31) est, pour tout $z \in K^*(0, r)$ fixé, holomorphe par rapport à la variable complexe t dans le rectangle ouvert $Q(r)$ de côtés parallèles aux axes de coordonnées, à la médiane I et à la hauteur $\frac{2}{3}\varepsilon(r)$.

Posons

$$S_r = \{z, t\colon z \in K^*(0, r), t \in \overline{Q(r)}\}. \tag{36}$$

Nous avons d'abord, vu la définition de l'ensemble S_r,

$$S_r \subset E \tag{37}$$

et, par conséquent, vu la définition de l'ensemble E et (12, $*$),

$$\varphi^{-1}(S_r) \subset \varphi^{-1}(E) \subset R. \tag{38}$$

Les fonctions (10) étant définies au moins dans l'ensemble (32) et y tendant presque uniformément vers la limite (24), les images $\varphi_f^{-1}(S_r)$

de l'ensemble fermé (36), contenu dans (32), tendent dans le sens de Hausdorff vers l'image $\varphi^{-1}(S) = \overline{\varphi^{-1}(S_r)} \subset R$; par conséquent, pour f suffisamment grand les images $\varphi_f^{-1}(S_r)$ sont contenues dans un ensemble fermé $R_1 \subset R$. En même temps, vu la convergence (14, 1), les images $a_f(R_1)$ tendent dans le sens de Hausdorff vers l'image $F_1 = b(R_1) = \overline{b(R_1)} \subset b(R)$ et, par conséquent, pour f suffisamment grand les images $a_f(R_1)$ sont contenues dans un ensemble fermé $F_2 \subset b(R)$. Enfin les fonctions (4) sont définies au moins dans l'ensemble (33).

Récapitulant ce qui précède, nous constatons en définitive que pour f suffisamment grand les fonctions composées

$$\hat{b}_f(z, t) = \psi_f\big(a_f(\varphi_f^{-1}(z, t), t)\big) \tag{39}$$

sont définies au moins dans l'ensemble fermé S_r; comme $\varphi_f^{-1}(z, t)$, $a_f(\zeta)$ et $\psi_f(y, t)$ sont définies resp. au moins dans les ensembles ouverts E, $K(0, 1)$ et (33), contenant resp. S_r, R et $\{y, t\colon y \in F_2, |t| < T^*\}$, il est facile de constater que les fonctions (39) sont définies au moins dans un ensemble ouvert $\mathfrak{S}_r$ tel que $S_r \subset \mathfrak{S}_r \subset E$ et, de même que la fonction (31), elles sont holomorphes dans $\mathfrak{S}_r$; par conséquent, ce qui suffira dans la suite, elles sont continues dans l'ensemble

$$\{z, t\colon z \in K^*(0, r), t \in Q(r)\} \subset S_r \subset \mathfrak{S}_r \tag{40}$$

et holomorphes par rapport à t pour z fixé. En même temps, de la convergence presque uniforme des suites des fonctions $\varphi_f^{-1}(z, t)$, $a_f(\zeta)$ et $\psi_f(y, t)$ resp. dans les ensembles E, $K(0, 1)$ et (33) resp. vers les limites $\varphi^{-1}(z, t)$, $b(\zeta)$ et $\psi(y, t)$, il résulte que

$$\hat{b}_f(z, t) \to \hat{b}(z, t) \tag{41}$$

presque uniformément dans $\mathfrak{S}_r$; par conséquent, la convergence (41) est uniforme dans S_r et, à plus forte raison, dans l'ensemble (40). De plus, dans l'ensemble

$$\{z, t\colon z \in K^*(0, r), t \in \bar{I}\} \subset S_r \subset \mathfrak{S}_r \tag{42}$$

l'égalité

$$\hat{b}_f(z, t) = a_f(z, t) \tag{43}$$

a lieu.

En effet, vu (39), (12), (4, 3) et (13),

$$\begin{aligned} \Omega_f\big(b_f(z, t), t\big) &= \Omega_f\big(\psi_f\big(a_f(\varphi_f^{-1}(z, t)), t\big)\big) = \Omega_f\big(a_f(\varphi_f^{-1}(z, t))\big) \\ &= X_f\big(\varphi_f^{-1}(z, t)\big) = X_f\big(\varphi_f(\varphi_f^{-1}(z, t), t), t\big) = X_f(z, t) \end{aligned} \tag{44}$$

et, vu (39), (9), (8) et (43, 4), on a

$$\hat{b}_f(z, 0) = a_f(z, 0); \tag{45}$$

d'où l'on déduit que pour tout $z \in K^*(0, r)$, fixé, tel que $\Omega'_{fw}\big(\hat{b}_f(z, 0), 0\big) \neq 0$, en vertu de (44), (2) et (45) et du théorème sur l'unicité des fonctions implicites, aura lieu l'égalité (43), d'abord pour les t de l'intervalle $\bar{I}$ suffisamment proches de zéro, et ensuite, à cause de l'analycité des deux membres par rapport à t dans cet intervalle, l'égalité (43) aura lieu dans tout l'intervalle; enfin, pour $z \in K^*(0, r)$ tel que

$$\Omega'_{fw}\big(\hat{b}_f(z, 0), 0\big) = 0, \tag{46}$$

l'égalité (43) résulte de ce qui précède, de la continuité des deux membres de (43) et du fait que l'ensemble des points où a lieu (46) est isolé.

Considerons maintenant l'expression

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K^*(0, r)} \frac{\hat{b}_f(\zeta, t)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{47}$$

dans l'ensemble

$$\{z, t\colon z \in K(0, r), t \in Q(r)\}; \tag{48}$$

nous déduisons facilement des propriétés de la fonction (39) dans l'ensemble (40) que l'expression examinée (47) est une fonction holomorphe des variables z et t dans l'ensemble (48). En outre la convergence uniforme (41) dans (40) entraîne immédiatement que la suite (47) converge presque uniformément vers l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K^*(0, r)} \frac{\hat{b}(\zeta, t)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{49}$$

L'expressions (49) est évidemment une fonction holomorphe au moins dans l'ensemble (48).

D'autre part, nous observons que pour $z \in K(0, r)$ et $t \in Q(r)$, réel, c.-à-d. dans l'ensemble

$$\{z, t\colon z \in K(0, r), t \in I\}, \tag{50}$$

on a, vu (43) et (35),

$$a_f(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K^*(0, r)} \frac{\hat{b}_f(\zeta, t)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{51}$$

Mais, puisque la suite des expressions (47) est, comme on l'a constaté plus haut, convergente presque uniformément dans (48), la suite (1) est convergente, pour tout $t \in I$, fixé, en tout point du cercle $K(0, r)$. Donc, comme les fonctions (1) sont pour $t \in I$, fixé, définies, univalentes et bornées dans tout le cercle $K(0, 1)$ et, par conséquent, y forment une suite normale, il résulte, en définitive, de ce qui précède et de la convergence de la suite

(1) aux points du cercle $K(0, r)$, que pour $t \in I$, fixé, la suite (1) converge presque uniformément dans tout le cercle $K(0, 1)$ vers une fonction

$$b(z, t) = b_1(t)z + \ldots, \tag{52}$$

définie dans l'ensemble

$$\{z, t\colon z \in K(0, 1), t \in I\}, \tag{53}$$

univalente et bornée comme fonction de z pour t fixé.

Il résulte de la formule (51) et des convergences de (1) vers (52) et de (47) vers (49), établies plus haut, qu'on peut écrire la fonction (52) dans l'ensemble (50) sous la forme

$$b(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K^*(0, r)} \frac{\hat{b}(\zeta, t)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{54}$$

Mais, comme on l'a remarqué, les expressions (47) et (49) étant des fonctions holomorphes des variables z et t de l'ensemble (48), les formules (51) et (54) permettent de prolonger les fonctions (1) et (52) comme fonctions holomorphes également à l'ensemble (48); de plus, prenant les prolongements, mentionnés plus haut, pour tous les ensembles (48) correspondant aux nombres r, $r_0 < r < 1$, nous remarquons qu'ils déterminent dans la somme de ces ensembles

$$\bigcup_{r_0 < r < 1} \{z, t\colon z \in K(0, r), t \in Q(r)\} \supset \{z, t\colon z \in K(0, 1), t \in I\} \tag{55}$$

certaines fonctions holomorphes qui sont les prolongements des fonctions (1) et (52). Ces fonctions sont ainsi définies d'une façon univoque. En effet, désignant par $b_r(z, t)$ la fonction définie par la formule (54), prenons deux valeurs différentes $r_1 < r_2$ et soit z, t un point fixé du produit $\{z, t\colon z \in K(0, r_1), t \in Q(r_1)\} \cap \{z, t\colon z \in K(0, r_2), t \in Q(r_2)\}$; alors $z \in K(0, r_1) \cap \cap K(0, r_2)$ et $t \in Q(r_1) \cap Q(r_2)$ et, vu (54) et les égalités des intégrales curvilignes correspondantes, on a

$$b_{r_2}(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K^*(0, r_2)} \frac{\hat{b}(\zeta, t)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{K^*(0, r_1)} \frac{\hat{b}(\zeta, t)}{\zeta - z} d\zeta = b_{r_1}(z, t),$$

ce qui prouve l'unicité des prolongements mentionnés des fonctions (52) à la somme (55). On peut faire le même raisonnement pour les fonctions (1), en y remplacant la formule (54) par la formule (51). Les fonctions (1) et (52), ainsi prolongées à l'ensemble ouvert (55), seront désignées dans la suite par les mêmes symboles $a_f(z, t)$ et $b(z, t)$.

Nous prouverons à présent que la fonction $b(z, t)$ de (52) remplit les conditions de notre théorème.

En effet, le fait que la fonction $b(z, t)$ est univalente, bornée et holomorphe a déjà été prouvé plus haut.

La condition (3, 0) est réalisée comme conséquence immédiate de (34) et (54).

Il ne nous reste plus qu'à prouver que dans l'ensemble (53) a lieu l'égalité (4, 0) ainsi que les conditions supplémentaires concernant les propriétés des fonctions $\zeta_j(t)$ et $\beta_j(t)$.

A cet effet remarquons, en premier lieu, que la convergence presque uniforme dans (48) de la suite (47) vers (49), entraîne que pour les fonctions prolongées (1) et (52) a lieu la convergence presque uniforme

$$a_f(z, t) \to b(z, t) \tag{56}$$

dans (48) pour tout r, $r_0 < r < 1$, d'où il résulte facilement que (56) a lieu presque uniformément dans la somme (55), Remarquons ensuite que la convergence presque uniforme de (56) dans (55) entraîne immédiatement les convergences analogues pour les dérivées:

$$a'_{ft}(z, t) \to b'_t(z, t) \tag{57}$$

et

$$a'_{fz}(z, t) \to b'_z(z, t). \tag{58}$$

Prenant enfin des arguments z, t arbitraires, fixés de l'ensemble (53), tels que $z \neq \zeta_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, et, par conséquent, $b(z, t) \neq b\big(\zeta_j(t), t\big)$ et, tenant compte du fait que pour f suffisamment grand $z \neq \zeta_{jf}(t)$ et, par conséquent, $a_f(z, t) \neq a_f\big(\zeta_{jf}(t), t\big)$, nous déduisons de la convergence des suites (15) vers (15′) et des convergences (56), (57) et (58), en passant à la limite pour f tendant vers l'infini dans les équations (44, 4), la relation de la forme demandée (4, 0) avec fonctions $b(z, t)$, $\zeta_j(t)$ et $\beta_j(t) = iB_j(t)$ définies dans (52) et (15). Ces fonctions, comme on l'a constate plus haut, sont holomorphes. De plus, du fait que $\zeta_j(t) \in Q_j$ il résulte immédiatement que $|\zeta_j(t)| < 1$. Enfin, de (14, 1), (12′, 3), (17, 3) et des relations admises $A_{jf} \to A_j$ (cf. p. 48) il résulte d'abord que

$$B_{jf} \to A_j \left(\frac{b(\zeta_j)}{\zeta_j b'(\zeta_j)} \right)^2;$$

en même temps, il résulte ensuite des relations (57′, 4), (35, 3), (31, 3), (30, 3), de (Δ) et ($\Delta\Delta$) de la page 55 que $\beta_{jf}(0) = iB_{jf}$, et enfin, en vertu de (57′, 4) et de la définition des fonctions $B_j(t)$, que $\beta_{jf}(0) = iB_{jf}(0) \to iB_j(0) = \beta_j(0)$. Récapitulant ce qui précède, nous obtenons

$$\beta_j(0) = iA_j \left(\frac{b(\zeta_j)}{\zeta_j b'(\zeta_j)} \right)^2;$$

vu le caractère arbitraire de A_j, cela prouve que $\beta_j(0)$ peuvent prendre des valeurs arbitraires données d'avance.

Ainsi la démonstration du théorème a été entièrement achevée dans les parties 1-5.

Bibilographie

[1] Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes bornées*, Coll. Math. 1 (1948), p. 168–169.

[2] — *Sur les fonctions univalentes bornées*, Rozprawy Mat. 2 (1953).

[3] — *Sur les fonctions univalentes algébriques bornées*, ibidem 10 (1955).

[4] — *Fonctions univalentes inverses. Polynomes univalents*, Bull. Soc. Sc. Lettres Łódź 9.7 (1958), p. 1–21.

[5] — *Fonctions algébriques et le théorème de Riemann*, Rozprawy Mat. (à paraitre).

[6] — and J. Ławrynowicz, *On the coefficients of univalent polynomials*, Coll. Math. 16 (1967), p. 27–33.

[7] J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, New York and London 1960.

[8] P. L. Duren and M. Schiffer, *The theory of the second variation in extremum problems for univalent functions*, J. Analyse Math. 10 (1962), p. 193–252.

[9] I. Dziubiński, *Equation générale de Löwner*, Bull. Soc. Sc. Lettres Łódź 11.4 (1960), p. 1–8.

[10] В. В. Голубев, *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, Москва-Ленинград 1950.

[11] Г. М. Голузин, *Метод вариаций в конформном отображении, I*, Мат. сб. 19 (61): 2 (1946), p. 203–236.

[12] — *Метод вариаций в конформном отображен ии,II*, ibidem 21(63): 1 (1947), p. 83—117.

[13] — *Метод вариаций в конформном отображении, III*, ibidem 21 (63): 1 (1947), p. 119–132.

[14] — *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва 1966.

[15] J. Janikowski, *Méthodes algébriques et équation de Löwner*, Bull. Soc. Sc. Lettres Łódź 12.16 (1961), p. 1–9.

[16] J. Ławrynowicz, *On the coefficient problem for univalent polynomials*, Proc. Camb. Phil. Soc. 64 (1968), p. 87–98.

[17] H. L. Royden, *The coefficient problem for bounded functions*, Proc. Nat. Ac. Sc. USA (1949), p. 657–662.

[18] S. Saks and A. Zygmund, *Analytic functions*, Monografie Mat. 28, Warszawa 1965.

[19] A. C. Schaeffer and D. C. Spencer, *The coefficients of schlicht functions I*, Duke Math. J. 10 (1943), p. 611–635; *II*, ibidem 12 (1945), p. 107–125; *III*, Proc. Nat. Ac. Sc. Wash. 32 (1946), p. 111–116.

[20] — *A variational method in conformal mapping*, Duke Math. J. 14 (1947), p. 949–966.

[21] — *Coefficient regions for schlicht functions*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 35 (1950).

[22] M. Schiffer, *A method of variation within the family of simple functions*, Proc. London Math. Soc. 44 (1938), p. 432–449.

[23] M. Schiffer, *Variation of the Green's function and theory of the p–valued functions*, Amer. J. Math. 65 (1943), p. 341–360.

[24] L. Siewierski, *Sur les fonctions univalentes, algébriques dans le demi-plan*, Bull. Soc. Sc. Lettres Łódź 7.4 (1956), p. 1–17.

[25] — *Sur la variation locale des fonctions univalentes, algébriques dans le demi-plan*, ibidem 8.3 (1957), p. 1–16.

[26] — *Sur les fonctions extrémales dans les familles des fonctions univalentes, algébriques dans le demi-plan*, ibidem 8.9 (1957), p. 1–30.

[27] J. Śladkowska, *Polynômes quasi-univalents et univalents. Variations élémentaires et polynômes extrémaux*, Soc. Sc. Łódź. 64 (1960), p. 1–36.

[28] R. Zawadzki, *Sur les fonctions univalentes, algébriques*, Bull. Soc. Sc. Lettres, Łódź 8.1 (1957), p. 1–21.

[29] — *Les équations des fonctions extrémales dans les familles des fonctions univalentes, algébriques, non-bornées*, ibidem 8.10 (1957), p. 1–21.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ

PROCEEDINGS OF THE FIRST FINNISH-POLISH
SUMMER SCHOOL IN COMPLEX ANALYSIS

1977 Podlesice pp. 1-9

A SIMPLE METHOD OF DERIVING THE LÖWNER EQUATION WITH HELP OF ALGEBRAIC FUNCTIONS

Zygmunt Charzyński and Julian Ławrynowicz (Łódź)

Contents page

Introduction 1
1. An approximation lemma 2
2. An algebraic approach to the Löwner equation 5
References 9

Introduction

The Löwner equation is well known to research mathematicians interested in the complex analysis. Since the fundamental work of Löwner [10] appeared it became widely applied as the so-called parametrical method – a powerful variational tool. Analogues of Löwner's equation were also derived for quasiconformal mappings (cf. [9]).

The parametrical method for conformal mappings of the unit disc consists in fact of studying a partial differential equation for a function $w = f(z,t)$, $|z| < 1$, $0 \leq t \leq T$, whose solutions are homotopical contractions of conformal mappings to the identity mapping. With the help of this method it was possible to obtain a number of basic informations inaccessible for other methods.

The methods of deriving the Löwner equation are rather lengthy, difficult, and cumbersome. Only recently Pommerenke [11, 12] has proposed a relatively short method based on geometrical considerations. The present method relies upon analytical considerations, in particular a method of algebraic functions due to the first named author [1, 2].

The method of algebraic functions can be applied to various problems, both solved (in order to obtain an alternative simpler proof) and new (cf. e. g. [2, 4-8]). Our proof will thus serve as an effective example how to work with this method. The approach is based: firstly, on approximation of arbitrary arcs by the lines of constancy of the imaginary part of rational functions (Section 1) and, secondly, on simple analytical relations yielded by differentiations of the algebraic equation of the homotopy in question with respect to the real parameter and the complex variable as well (Section 2); cf. [1, 3, 5, 7, 13].

Proceedings of the First Finish-Polish Summer School
in Complex Analysis at Podlesice 1977.
Uniwersytet Łódzki, Łódź 1977, 9 pp.

The method of algebraic functions was introduced in 1955 and developed in the following years. The proof of Löwner's theorem, presented here, is essentially due to Janikowski [7] who published it in 1960.

Throughout this lecture note any holomorphic function of the form $b(z) = \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots$, $|z| < 1$, such that $|b(z)| < 1$ and with the first coefficient β_1 positive, is called bounded in the sense of Löwner. We also set $K(z;r) = \{z: |z| < r\}$, $K^*(z,r) = \{z: |z| = r\}$, and call every closed regular arc beginning on $K^*(z,r)$ and contained, except for its initial point, in $K(z,r)$, a simple arc in $K(z,r)$.

Under a special rational function of degree $2n$ we mean a function of the form

$$(0.1)\quad \Omega(w) = D_L w^{-L} + \ldots + D_1 w^{-1} + D_0 + \bar{D}_0 + \bar{D}_1 w + \ldots + \bar{D}_L w^L, \quad D_L \neq 0.$$

Any such function is real-valued on $K^*(0,1)$ and also along some simple arcs in $K(0,1)$, beginning at zeros of the derivative Ω'. If such an arc does not contain the origin, it is called a special arc. Finally, under a special univalent function we understand any function of the form $a(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots$, bounded in the sense of Löwner, which maps conformally $K(0;1)$ onto $K(0;1)\setminus R$, where R is a special arc described above. In this case

$$(0.2)\quad X = \Omega \circ a$$

appears easily to be a special rational function of the same degree as Ω, i.e. a satisfies an algebraic equation of the form (0.2), where Ω and X are special rational functions of the same degree. The study of this equation is the essential point of the method.

Hereafter we denote the open upper half plane as $\mathbb{C}^+$, the real axis by I^o, and abbreviate "with respect to" as "w.r.t."

1. An approximation lemma

As announced before, we need some auxiliary result on approximation.

Let $q: U \to \mathbb{C}$ be a holomorphic function and U an open set symmetric w.r.t. I^o. Suppose that $q(z) = \overline{q(\bar{z})}$ for $z \in U$. Consider another set E symmetric w.r.t. I^o, contained in the complement of U, and such that its closure has common points with all components of the complement of U. Finally, consider any closed subset V of U, symmetric w.r.t. I^o. We have

LEMMA 1. The function $q|V$ can be arbitrarily approximated by a rational function $\varkappa$ with the following properties:

(i) all poles of $\varkappa$ belong to E,

(ii) $\varkappa(z) = \overline{\varkappa(\bar{z})}$ for $z \in V$.

Proof. By the theorem of Runge for any $\varepsilon > 0$ there exists a rational function σ whose only poles lie in E and which satisfies the inequality

$$|\sigma(z) - q(z)| < \varepsilon \quad \text{for } z \in V.$$

Hence, by the symmetry of V w.r.t. I^0, we also have $|\sigma(\bar{z}) - q(\bar{z})| < \varepsilon$. On putting

$$\varkappa(z) = \tfrac{1}{2}[\sigma(z) + \overline{\sigma(\bar{z})}] \quad \text{for } z \in V$$

we observe immediately that $\varkappa$ satisfies conditions (i) and (ii). Moreover, by the symmetry of $\varkappa$ and q, we have

$$|\varkappa(z) - q(z)| = |\tfrac{1}{2}[\sigma(z) - q(z)] + \tfrac{1}{2}\overline{[\sigma(\bar{z}) - q(\bar{z})]}| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

The lemma is thereby proved.

Consider now a univalent function $r: W \to \mathbb{C}$, W being closed, another holomorphic function $s: W \to \mathbb{C}$, and a closed set Z contained in the interior of W. We have

LEMMA 2. If s is sufficiently close to r in W, s is univalent in Z.

Proof. Suppose that the conclusion of the lemma is false so that on W there is a sequence (s_n) of holomorphic functions, uniformly convergent to r and such that

$$(1.1) \quad s_n(z_n') = s_n(z_n''), \quad n = 1,2,\ldots,$$

where $z_n', z_n'' \in Z$, $z_n' \neq z_n''$, $n = 1,2,\ldots$. Selecting, if necessary, subsequences, we may assume that (z_n') and (z_n'') have some limits z_0' and z_0'', respectively. The case $z_0' \neq z_0''$ is impossible since, by (1.1) and the uniform convergence of s_n to r, $r(z_0') = r(z_0'')$ and, on the other hand, r is, by hypothesis, one-to-one. Therefore $z_0' = z_0'' = z_0$, say.

Consider now the function r on an arbitrary circle $K^*(z_0;\varepsilon)$, ε being sufficiently small, and denote by m the greatest lower bound of $|r(z) - r(z_0)|$ on $K^*(z_0;\varepsilon)$. Since r is univalent, we have $m > 0$ and

$$(1.2) \quad |r(z) - s_n(z)| < \tfrac{1}{3}m \quad \text{for } z \in K^*(z_0;\varepsilon).$$

Consequently,

$$(1.3) \quad |s_n(z) - r(z_0)| > \tfrac{2}{3}m \quad \text{for } z \in K^*(z_0;\varepsilon)$$

for n sufficiently large. Denoting by s_n^0 the values (1.1) for $n = 1,2,\ldots$, respectively, we see that $s_n^0 \to r(z_0)$, whence

$$(1.4) \quad |s_n - r(z_0)| < \tfrac{1}{3}m$$

Proceedings of the First Finish-Polish Summer School
in Complex Analysis at Podlesice 1977.
Uniwersytet Łódzki, Łódź 1977, 9 pp.

for n sufficiently large. Combining (1.2) and (1.3) we obtain

(1.5) $|s_n(z) - s_n| > \frac{1}{3}m$ for $z \in K^*(z_0;\varepsilon)$

for n sufficiently large.

If (1.5) is the case, (1.2) yields that the sum $[s_n(z) - s_n] + [r(z) - s_n(z)] = r(z) - s_n$ must have in $K(z_0;\varepsilon)$ the same number of zeros as $s_n(z) - s_n$, and so at least two zeros because of the definition of (z_n'), (z_n''), and (s_n). This is again impossible, so the proof is completed.

Lemmas 1 and 2 enable us to prove the following APPROXIMATION LEMMA:

LEMMA 3. Any univalent function, bounded in the sense of Löwner, can be arbitrarily approximated by a special univalent function.

Proof. In view of the Carathéodory kernel theorem, it is sufficient to prove the lemma in the case where the univalent function b in question, bounded in the sense of Löwner, transforms $K(0;1)$ onto $K(0;1) \setminus S$, where S is a simple arc in $K(0;1)$ which does not contain the origin ([10], pp. 105–106).

To this end let us consider a fractional linear transformation $w \mapsto \lambda(w)$ which maps $K(0;1)$ onto $\mathbb{C}^+$ and fulfills the conditions $\lambda(0) = a$ and $\lambda(\infty) = \bar{a}$. The arc S is transformed onto a simple arc $C = \lambda(S)$ in $\mathbb{C}^+$ which does not contain the origin. Consider also the arc $\bar{C}$ symmetric to C w.r.t. I^0. The sum F of both arcs is a simple arc symmetric w.r.t. I^0. It has exactly one meet point with this axis and does not contain a and $\bar{a}$.

The arc F can be approximated by an analogous arc H, expressed parametrically by $\zeta = p(t)$, $t \in I$, I being the imaginary interval $[-i;i]$ and p a univalent function defined in a simply connected domain $B \supset I$, symmetric w.r.t. I^0; moreover, $p(\bar{t}) = \overline{p(t)}$ for $t \in B$ and $a, \bar{a} \in D = p[B]$. Consider now in D the inverse function p^{-1}. By the construction of p, we have

$$p^{-1}(\bar{\zeta}) = \overline{p^{-1}(\zeta)} \quad \text{for } \zeta \in D.$$

Hence, by Lemmas 1 and 2, there is a rational function π with exactly two poles at a and $\bar{a}$, satisfying the condition

(1.6) $\pi(\bar{\zeta}) = \overline{\pi(\zeta)}$ everywhere,

which is univalent and arbitrarily close to p^{-1} in a closed set $Q_0 \subset D$, $\pi[Q_0] \supset I$. Let $\pi_0 = \pi|Q_0$ and

(1.7) $T = \pi_0^{-1}[I]$.

We observe that T is an analytic simple arc, symmetric w.r.t. I^o and arbitrarily close to H. Furthermore, if π_o is sufficiently close to p^{-1}/Q_o, T_o has exactly one meet point with I^o since the tangent to H at the meet point with I^o is perpendicular to I^o. Suppose that $a, \bar{a} \in T$.

Consider next the composed function $w \mapsto \pi \circ l(w)$ which, by construction, is a special rational function. Let

$$R = l^{-1}[T_o], \tag{1.8}$$

where T_o is the part of T situated in $\overline{\mathbb{C}}^+ \cup I^o$. The arc R is simple and arbitrarily close to S.

Let now $z \mapsto a(z)$ be a univalent function, bounded in the sense of Löwner, which transforms K(0;1) onto $E = K(0;1) \setminus R$. It can easily be seen that this function extends continuously onto the closed unit disc. Clearly, a is arbitrarily close to b and there remains to prove that it satisfies an equation of the form (0.2), where Ω and X are special rational functions of the same degree which do not reduce to constant functions.

In order to prove this fact, set

$$\Omega = \varphi \circ \pi \circ l, \tag{1.9}$$

where

$$\varphi(x) = x^2 \tag{1.10}$$

and consider the function X, defined by (0.2).

Since (1.9) is a special rational function which does not reduce to a constant function, we only have to prove that the same holds for the function (0.2). To this end let us consider this function on $K^*(0;1)$ and remark that it is real-valued there. In fact, for $z \in K^*(0;1)$ we have $a(z) \in K^*(0;1) \cup R$. By (1.6), (1.10), and the definition of $w \mapsto l(w)$, the function (1.9) sends $K^*(0;1)$ into I^o and, by (1.7), (1.8), and the definition of I, the same concerns R. Moreover, the function (0.2) is holomorphic in K(0;1) except for an exactly one pole at the origin. Therefore this function has to be a special rational function which does not reduce to a constant function, as desired.

In addition, we observe that a small change of π_o in (1.9) enables us to make all zeros of the derivative Ω' simple and situated outside of R.

2. An algebraic approach to the Löwner equation

Consider a special rational function Ω given by (0.1) and a special arc R. Let $\{R_t : 0 \leq t \leq T\}$ be the family of its partial arcs de-

Proceedings of the First Finish-Polish Summer School
in Complex Analysis at Podlesice 1977.
Uniwersytet Łódzki, Łódź 1977, 9 pp.

pending continuously on t and satisfying the conditions $R_t \subset R_\tau$ for $t \le \tau$, $R_0 = \{\sigma\}$, $|\sigma| = 1$, and $R_T = R$. Suppose that, for $0 \le t \le T$, $a(\ ,t)$ is the special univalent function which transforms $K(0;1)$ onto $K(0;1) \setminus R_t$ so that $a(0,t) = 0$, $a'(\ ,0) \equiv (\partial/\partial z)a(\ ,t) = 0$, and satisfies the equation (0.2), where $X(\ ,t)$ is a special rational function. A change of the parameter t into $-\log a'(0,t)$ leads to the normalization $a'(0;t) = e^{-t}$. As observed at the end of Section 1, keeping the full generality, we may suppose that, all zeros of the derivative Ω' are simple and do not lie on R. We have

LÖWNER'S THEOREM. The functions $a(\ ,t)$, $0 \le t \le T$, satisfy the (Löwner) equation

$$(2.1)\quad \dot{a}(z,t) = -a'(z,t)\, z \frac{1 + z\varkappa(t)}{1 - z\varkappa(t)}, \quad |z| < 1,$$

with a continuous $\varkappa$, $|\varkappa| = 1$, subject to the initial condition $a(z,0) = z$, $|z| < 1$, where $a' = (\partial/\partial z)a$ and $\dot{a} = (\partial/\partial t)a$.

Proof [7]. We begin with proving the Lipschitz condition for the coefficients of the expansion $a(z,t) = \alpha_1(t)z + \alpha_2(t)z^2 + \dots$ To this end let

$$h(z,t,\tau) = a^{-1}(a(z,t),\tau) \equiv h_1(t,\tau)z + h_2(t,\tau)z^2 + \dots, \quad t \le \tau,$$

and

$$[h(z,t,\tau)]^p = h_p^{(p)}(t,\tau)z^p + h_{p+1}^{(p)}(t,\tau)z^{p+1} + \dots, \quad p = 1,2,\dots$$

Clearly, $h_p^{(p)}(t,\tau) = e^{-p(\tau - t)}$ and, by a simple application of Schwarz's lemma (cf. [10]):

$$\left| \frac{[h(z,t,\tau)]^p}{z^p} - h_p^{(p)}(t,\tau) \right| \le \{1 - [h_p^{(p)}(t,\tau)]^2\} \frac{|z|}{1 - |z| h_p^{(p)}(t,\tau)},$$

so we have

$$|h_{p+1}^{(p)}(t,\tau)z + h_{p+2}^{(p)}(t,\tau)z^2 + \dots| \le [1 - e^{-2p(\tau - t)}] \frac{|z|}{1 - |z| e^{-p(\tau - t)}}.$$

For $|z| < \frac{1}{2}$ this implies $|h_{p+1}^{(p)}(t,\tau)z + h_{p+2}^{(p)}(t,\tau)z^2 + \dots| \le 1 - e^{-2p(\tau - t)}$.

But $1 - e^{-2p(\tau - t)} < 2p(\tau - t) \le 2L(\tau - t)$ for $p = 1,\dots,L$, where L is the degree of X. Then, by Cauchy's inequality

$$|h_n^{(p)}(t,\tau)| \le 2^L L \quad \text{for } p = 1,\dots,L,\ n = p+1,\dots,L.$$

Also,

$$\alpha_n(\tau) - \alpha_n(t) = \alpha_1(t)h_n^{(1)}(t,\tau) + \dots + \alpha_{n-1}(t)h_n^{(n-1)}(t,\tau) + \alpha_n(t)[h_n^{(n)}(t,\tau) - 1].$$

Finally we observe that there are finite constants c_1 and c_2 such that $|\alpha_j(t)| \le c_1$, $j = 1,\dots,L$, $0 \le t \le T$, and $h_n^{(n)}(t,\tau) - 1 \le c_2(\tau - t)$ for $t < \tau$, so we obtain the desired Lipschitz continuity:

$$|\alpha_n(\tau) - \alpha_n(t)| \le c_1[2^L L(n-1) + c_2](\tau - t) \quad \text{for } n = 1,\dots,L.$$

From (0.2) it follows that the coefficients of $X(\ ,t)$ are rational functions of the coefficients $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots$ Hence $X(\ ,t)$ and $X'(\ ,t)$ are continuous and differentiable almost everywhere. Let

(2.2) w_k, $k = 1,\dots,P$, and ω_l, $l = 1,\dots,Q$; ,

denote all distinct zeros of Ω', situated on $K(0;1)$ and $K^*(0;1)$, respectively. Hence

(2.3) $2P + Q + 1 = 2L$.

Denote further by

(2.4) $z_k(t)$, $k = 1,\dots,P$, and $\varphi_l(t)$, $l = 1,\dots,Q$,

the points which correspond to (2.2) with ζ omitted under $a^{-1}(\ ,t)$. Hence (0.2) yields

(2.5) $\Omega(w_k) = \Omega(a(z_k(t),t)) = X(z_k(t),t)$, $k = 1,\dots,P$,

and simultaneously

(2.6) $\Omega(\omega_l) = \Omega(a(\varphi_l(t),t)) = X(\varphi_l(t),t)$, $l = 1,\dots,Q$.

Moreover, any $a(\ ,t)$ is univalent (in particular, holomorphic) in some neighbourhoods of (2.4) and, by (0.2), X has zeros at (2.4) as well, so we arrive at

(2.7) $X'(z_k(t),t) = 0$, $k = 1,\dots,P$; $X'(\varphi_l(t),t) = 0$, $l = 1,\dots,Q$.

Furthermore the zeros (2.4) are simple: since X' has $2L$ zeros, all zeros of X' have to be simple. Thus (2.4) give rise to be continuous functions of t, differentiable almost everywhere. Finally, comparing the coefficients standing at the powers of z on both sides of (0.2), we conclude that the coefficient D_L of Ω, defined in (0.1), and the analogous coefficient E_L of X satisfy the relation

(2.8) $E_L(t) = D_L e^{Lt}$.

Now, from (2.5) and (2.6) we deduce the relations

(2.9) $X'(z_k(t),t)\dot{z}_k(t) + \dot{X}(z_k(t),t) = 0$, $k = 1,\dots,P$

(2.10) $X'(\varphi_l(t),t)\dot{\varphi}_l(t) + \dot{X}(\varphi_l(t),t) = 0$, $l = 1,\dots,Q$.

Proceedings of the First Finish-Polish Summer School
in Complex Analysis at Podlesice 1977.
Uniwersytet Łódzki, Łódź 1977, 9 pp.

Hence, by (2.7),

$$(2.11)\quad \dot{X}(z_k(t),t) = 0,\ k = 1,\dots,P;\ \dot{X}(\varphi_l(t),t) = 0,\ l = 1,\dots,Q.$$

Let us compare the functions $z \mapsto \dot{X}(z,t)$ and $z \mapsto i\,z\,X'(z,t)$. By (2.11) and (2,7) we conclude that they have the same $2L-1$ zeros (2.4), where also the conjugate zeros $1/\overline{z_k(t)}$, $k = 1,\dots,P$, are included. Suppose that $1/\varkappa(t)$, $|\varkappa(t)| = 1$, denotes the supplementary $2L$-th zero of $z \mapsto i\,z\,X'(z,t)$, and $1/\varkappa_*(t)$, $|\varkappa_*(t)| = 1$, the supplementary $2L$-th zero of $z \mapsto \dot{X}(z,t)$. Then

$$(2.12)\quad [1 - z\varkappa(t)]\dot{X}(z,t) = C[1 - z\varkappa_*(t)]\,i\,z\,X'(z,t),$$

where C is a constant.

Finally we compare the coefficients standing at the highest and the lowest power of z on both sides of (2.12). By (2.8) we obtain

$$\dot{E}_L(t) = L\,D_L\,e^{Lt} = L\,E_L(t),\quad \dot{E}_L(t) = Ci[-L\,E_L(t)],\quad -\overline{\dot{E}_L(t)}\varkappa(t) = CiL\overline{E_L(t)}\varkappa_*(t).$$

Therefore $C = i$ and $\varkappa_* = -\varkappa$, so (2.12) becomes

$$(2.13)\quad \dot{X}(z,t) = -X'(z,t)z\,\frac{1 + z\varkappa(t)}{1 - z\varkappa(t)}$$

for almost every t. But the zeros $1/\varkappa(t)$ are simple, whence the right-hand side of the equation (2.13) is continuous in t everywhere, and this yields the existence of the derivative on the left-hand side of (2.13) for every t. Thus, by the implicit function theorem,

$$(2.14)\quad \Omega'(a(z,t))\dot{a}(z,t) = \dot{X}(z,t),\quad \Omega'(a(z,t))a'(z,t) = X'(z,t)$$

where in the first relation we exclude the points (2.4). The last restiriction is, however, unnecessary as it follows directly from the Cauchy formula. The conclusion of the theorem is now a direct consequence of (2.13) and (2.14).

Remarks. 1. In the above considerations, when determining the functions $a(\ ,t)$ we have applied the Riemann mapping theorem. With help of essential relations (2.5) - (2.7), by which the singularities of Ω and $\dot{X}$ are removed, we can also prove, however, the existence of $a(\cdot\ ,t)$, i.e. the Riemann mapping theorem [4].

2. The method of algebraic functions, applied here, enables also to establish formulae for variations of all orders in the case of bounded univalent functions [5].

3. Instead of considering equations of the form (0.2) we may discuss equations of the type $z = P(A(z))$, where P is a polynomial of the form $P(w) = w + C_2w^2 + \dots + C_Lw^L$, and A is a function univalent in the unit disc with expansion $A(z) = z + A_2z^2 + \dots$ [2, 6, 8].

References

[1] CHARZYŃSKI, Z.: Sur les fonctions univalentes algébriques bornées, Rozprawy Mat. 10 (1955), 41 pp.

[2] —— : Fonctions univalentes inverses. Polynomes univalentes, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 9, 7 (1958), 21 pp.

[3] —— and J. ŚLADKOWSKA: Remarques sur l'approximation de l'arc simple par les arcs brisés, réguliers et arcs analytiques, ibid. 17, 1 (1966), 9 pp.

[4] —— and —— : Fonctions algébriques et variations analytiques des fonctions univalentes, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 70 (1970), 77 pp.

[5] —— and —— : Fonctions algébriques et le théorème de Riemann, ibid., to appear.

[6] —— and J. ŁAWRYNOWICZ: On the coefficients of univalent polynomials, Colloq. Math. 16 (1967), 27-33.

[7] JANIKOWSKI, J.: Méthode algébrique et équation de Löwner, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 12, 16 (1961), 9 pp.

[8] ŁAWRYNOWICZ, J.: On the coefficient problem for univalent polynomials, Proc. Cambridge Philos. Soc. 64 (1968), 87-98.

[9] —— in cooperation with J. KRZYŻ: The parametrical method for quasiconformal mappings in the plane, Lecture notes, to appear.

[10] LÖWNER, K.: Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I, Math. Ann. 89 (1923), 103-121.

[11] POMMERENKE, Ch.: Über die Subordination analytischer Funktionen, J. Reine Angew. Math. 218 (1965), 159-173.

[12] —— : Univalent functions (Mathematische Lehrbücher 25), Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen 1975.

[13] ŚLADKOWSKA, J.: Sur l'approximation de courbes arbitraires par les lignes de niveau des fonctions rationelles, J. Analyse Math. 14 (1965), 409-431.

Proceedings of the First Finish-Polish Summer School
in Complex Analysis at Podlesice 1977.
Uniwersytet Łódzki, Łódź 1977, 9 pp.

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ
1978 Vol. XXVIII, 5

Zygmunt Charzyński, Andrzej Kozłowski

GEOMETRY OF POLYNOMIALS (I)

Summary. In this paper there have been given information on polynomials and domains accociated with them, on distinguished polynomials, and on the behaviour of holomorphic mappings in a neighbourhood of a singular point.

Introduction

In this part of the paper there appear some notions and properties concerning polynomials and sets associated with them.

There have been given information on the degree of connectivity of associated sets (IV), on distinguished polynomials (VI), and on properties of certain mappings in a neighbourhood of a singular point.

The above is connected, on the one hand, with the interpolation of the Chebyshev type, used in the complex domain by Z. Charzyński in the papers [2] and [3] and considered in the real domain by J. Mycielski and S. Paszkowski in the paper "A Generalization of Chebyshev Polynomials" - Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Vol. VIII, No 7, 1960. On the other hand, they are strictly connected with the univalent polynomials dealt with by Z. Charzyński in the paper [2] quoted above.

1. Polynomials and sets associated with them

I. A polynomial of the form

$$P(w) = w + c_2 w^2 + \ldots + c_{m+1} w^{m+1} , \quad m \geq 1, \tag{1.1}$$

will be called normalized.

It is seen at once that normalized polynomials do not reduce to constants, and that the zeros of their derivatives are different from zero.

II. Let

$$w_k , \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

denote the zeros of the derivative of the polynomial (1.1), differing from one another, while

$$\gamma_k , \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.3}$$

their multiplicities. In this situation, the polynomial (1.1) may be presented in the form

$$P(w) = \int_0^w \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{w}{w_k}\right)^{\gamma_k} dw . \tag{1.4}$$

III. Classes of univalent functions of the form

$$f(z) = z + A_2 z^2 + \ldots , \qquad |z| < 1 ,$$

or

$$g(\zeta) = \zeta + b_0 + \frac{b_1}{\zeta} + \ldots , \qquad |\zeta| > 1, \; g(\zeta) \neq 0 ,$$

will be denoted by S or Σ_0, respectively.

It is clear that a set of values of the functions $f(z)$, or $g(\zeta)$, covers a disc with centre 0 and radius 1/4, or the exterior of a disc with centre 0 and radius 4 (cf. [7], 1.1, pp. 12, 22).

IV. Let an arbitrary polynomial of the form

$$E(\zeta) = G_1\zeta + \ldots + G_h\zeta^h , \quad G_h \neq 0, \quad h > 0 \tag{1.5}$$

be given. Let further r be any positive number. For the described polynomial and number, by $\lambda_{E,r}$ we shall denote a set of all points ζ such that

$$|E(\zeta)| < r. \tag{1.6}$$

The set $\lambda_{E,r}$ is obviously non-empty, open and bounded, and on its boundary there is

$$|E(\zeta)| = r . \tag{1.7}$$

Every component of this set is, as can easily be perceived, a simply connected domain (cf. [2], Lemma 1, p. 8). What is more, it has to contain the roots of the polynomial (1.5).

Indeed, if any component did not contain the roots of the polynomial (1.5), there would exist on it a branch of the logarithm of this polynomial. The real part of this branch, extensible in a continuous way to the boundary of the component, would reduce there to a constant equal to Log r. In this context, the discussed branch and, what follows, the polynomial (1.5) would reduce to constants, which cannot happen.

As a consequence of the above, the number of components of the set $\lambda_{E,r}$ is finite, not greater than h. As a further consequence, the closure $\overline{\lambda_{E,r}}$ is a union of the continua-closures of

the above-mentioned components. Every component of this closure is a union of a finite number of such continua.

Finally, for each component of the set $\lambda_{E,r}$, the difference between the number of roots of the polynomial E, situated in it, and the number of zeros of its derivative E' is 1, considering the multiplicities of the roots (cf. [6], 192, p. 142).

A component of the set $\lambda_{E,r}$, containing the point 0, is called a domain associated with the polynomial (1.5) and the number r, and denoted by $\mu_{E,r}$.

In the case when r is equal to 1, a suitable associated domain will be denoted by μ_E (cf. [2], p. 8).

If all the zeros of the derivative E' are situated in the set $\overline{\lambda_{E,r}}$, then this set is connected.

In fact, in the contrary case, for $r' > r$ sufficiently close to r the set $\lambda_{E,r'}$ would possess more than one component and contain all the zeros of the derivative. Consequently, since, in view of the previous, within each component the number of roots of the polynomial E exceeds by 1 the number of zeros of the derivative, then within all the components of the set $\lambda_{E,r'}$ the number of roots of E would exceed by more than one the number of zeros of the derivative E', which is impossible.

A polynomial of the type (1.1) which is univalent in μ_P will be shortly called univalent; it transforms μ_P into a unit disc; the polynomial (1.1) is thereby in μ_P a function inverse to a function A(z) of the class S, transforming the unit disc into μ_E (cf. [2], Lemma 2, p. 8).

In order that the polynomial P be univalent, it is sufficient that the zeros (1.2) of its derivative all lie outside μ_P (cf. [2], Lemma 4, p. 8).

With the polynomial given earlier and an arbitrary non-negative r we may consider, similarly to the above, a set of all points ζ such that

$$|E(\zeta)| > r \,. \tag{1.8}$$

This set is obviously open, contains the exterior of some neighbourhood of the point 0, and on its boundary there is

$$|E(\zeta)| = r \,. \tag{1.9}$$

Moreover, this set is connected, in other words it is a domain, or else it would have a bounded component in whose interior and on the boundary there would hold the relations (1.8) and (1.9), respectively, which is impossible (cf. [8], Chapter III, (12.5)). By analogy to the previous, the domain considered will be denoted by $\hat{\mu}_{E,r}$.

In the case when r equals 1, a corresponding domain will be denoted by $\hat{\mu}_R$.

Let now be given an arbitrary polynomial of the type (1.5), of the form

$$Q(w) = w^{m+1} + D_1 w^m + \ldots + D_m w \,, \quad m > 1. \tag{1.10}$$

Assume that $\hat{\mu}_Q$ is a simply connected domain. As is easily seen, then and only then there exists in $\hat{\mu}_Q$ a holomorphic branch of the (m+1)st root of the polynomial (1.10) of the form

$$R(w) = w \sqrt[m+1]{1 + \frac{D_1}{w} + \ldots + \frac{D_m}{w^m}} = w + \ldots \tag{1.11}$$

(cf. [8], Chapter IV, (3.1)). It is seen at once that the function $|R(w)|$ extends in a continuous manner to the boundary $\partial\hat{\mu}_Q$, where,

in conformity with (1.9), there is $|R(w)| = 1$. Hence, continuing to consider the reciprocal $1/R(w)$, we obtain by ([8], Chapter III (10.2) and VIII) that the function (1.11) is in the set $\hat{\mu}_Q$ univalent and transforms it into the exterior of a unit disc. The function (1.11) is thereby in μ_Q a function inverse to a function $B(z)$ of the class Σ_o, transforming the exterior of the unit disc into $\hat{\mu}_Q$. At last, from the previous it follows that in order that the domain $\hat{\mu}_Q$ be simply connected, i.e. that its complement $\overline{\lambda_{Q,1}}$ be connected, it is sufficient that the zeros of its derivative all lie outside $\hat{\mu}_Q$, i.e. in $\overline{\lambda_{Q,1}}$.

V. The zero w^o of the derivative of the polynomial (1.1) will be called distinguished if $w^o \in \partial\mu_{P,r^o}$, where $r^o = |P(w^o)|$.

VI. The polynomial (1.1) will be called distinguished when all the zeros (1.2) of its derivative are distinguished, that is, when there hold the relations

$$w_k \in \partial\mu_{P,r_k}, \quad \text{where} \quad r_k = |P(w_k)|, \quad k = 1,\ldots,n.$$

In the contrary case, the polynomial (1.1) is called non-distinguished.

If all the numbers r_k, $k = 1,\ldots,n$, appearing in the definition of a distinguished polynomial, are equal to 1, then this polynomial is called canonical.

Distinguished polynomials do exist.

Indeed, e.g. polynomials realizing the extrema of harmonic functionals are such polynomials (cf. [2], Theorem 5). What is more, the very polynomials constitute a basis for introducing the discussed notion.

VII. We shall understand the closeness of polynomials in the sense of the closeness of their corresponding coefficients.

VIII. We accept the notions of: the almost uniform convergence, shortly convergence, and almost boundedness of sequences according to ([8], Chapter I, § 2).

We notice that in the version of Rouché's theorem, given in ([8], Chapter III, (10.2)), instead of the continuity of the functions $\Phi(z)$ and $\psi(z)$ on the set F, it suffices only to accept the continuity of their absolute values $|\Phi(z)|$ and $|\psi(z)|$.

IX. We accept the notions of the kernel and the convergence in the sense of the kernel of a sequence of simply connected domains after ([4], p. 62; [7], p. 28).

X. If a sequence

$$P_f(w), \quad f = 1,2,\ldots, \tag{1.12}$$

of normalized polynomials converges to an analogous polynomial $P(w)$, and a sequence of positive numbers r_f converges to an analogous number r, then a sequence of associated domains μ_{P_f,r_f} converges in the sense of the kernel to an associated domain $\mu_{P,r}$ (cf. [2], Lemma 5, p. 9).

2. Information on the behaviour of a holomorphic mapping in some neighbourhood of a singular point

Let be given a function $F(\zeta)$ holomorphic in some heighbourhood of a point ζ_o, assuming at this point its value $w_o = F(\zeta_o)$ with a certain finite multiplicity m. Then, as is seen at

once, there exist in some neighbourhood ζ_o single-valued branches $\sqrt[m]{F(\zeta)-F(\zeta_o)}$. Let us take any of them, fixed for the sequel, and put

$$\tau = \Phi(\zeta) = w_o + \sqrt[m]{F(\zeta)-F(\zeta_o)} \quad (2.1)$$

It is clear that (2.1) is locally invertible in the neighbourhood ζ_o, that, consequently, in some sufficiently small neighbourhood $\varkappa_o$ of the value w_o there exists a function

$$\zeta = \psi(\tau) \quad (2.2)$$

inverse to (2.1), restricted to a suitable domain Δ_o containing ζ_o. In this situation, we have in Δ_o

$$F(\zeta) = w_o + (\Phi(\zeta) - w_o)^m. \quad (2.3)$$

Let us divide the neighbourhood $\varkappa_o$, by means of 2m successive radii issuing from w_o, into 2m successive open circular sectors with obtuseness $2\pi/2m$ lying between them. Next, consider successive arcs and domains being images under (2.2) of the radii and sectors described above.

It is clear that these arcs and domains are, except for the point ζ_o, disjoint and compose the domain Δ_o; moreover, each of the arcs is contained in the boundaries of exactly two successive domains.

Finally, each of these domains contains points arbitrarily close to ζ^o. Hence, we further easily obtain, by (2.3), that the function given at the beginning transforms the mentioned successive arcs into segments, issuing from w_o in one or the other direction alternately, of some straight line p_o passing through w_o, and successive domains into semidiscs situated alternately on one

or the other side of p_o. The direction of the straight line p_o depends, in an easy way, on the direction of the derivative $F^{(m)}(\zeta_o)$ and the directions of the divisive radii.

Assuming in particular that $F(\zeta)$ is a branch of the logarithm of a function $f(\zeta)$ holomorphic and different from zero at the point ζ_o, taking its value m-tuply there, having regard to the fact that $F^{(m)}(\zeta_o) = \frac{f^{(n)}(\zeta_o)}{f(\zeta_o)}$ and choosing the divisive radii with directions of the 2m-th roots of the number -1, we easily obtain, in view of the preceding information, that corresponding arcs will go into segments of the vertical p_o passing through w_o, whereas corresponding domains into semidiscs on one or the other side of the straight line p_o. Hence, we eventually have that on the mentioned arcs there will be $|f(\zeta)| = |f(\zeta_o)|$, while in the mentioned domains $|f(\zeta)| < |f(\zeta_o)|$ or $|f(\zeta)| > |f(\zeta_o)|$, alternately.

References - see Part III.

Institute of Mathematics
Łódź University

Presented at the Session of Mathematical-Physical Commission of Society of Arts and Sciences of Łódź by Z.Charzyński on June 30, 1977.

Geometria wielomianów. I

Streszczenie

W pracy tej podano informacje o wielomianach i obszarach z nimi związanych, o wielomianach wyróżnionych oraz o zachodzeniu się odwzorowań holomorficznych w otoczeniu punktu osobliwego.

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ
1978 Vol. XXVIII, 6

Zygmunt Charzyński, Andrzej Kozłowski

GEOMETRY OF POLYNOMIALS (II)

Summary. In this paper there have been examined properties of polynomials in the sense of interdependence between the positions of the roots of a polynomial and the zeros of its derivative. There have also been given information on the preservation of position of the zeros of the derivative on the lemniscates, under a local variation of the polynomial.

Introduction

In the present paper there have been investigated properties of polynomials in the aspect of local and global independence between the lemniscate domains, or the lemniscates in which the modulus of a polynomial is bounded by some constant or equal to it, and the positions of the roots of the polynomial and the zeros of its derivative, in particular, the position of these zeros on the lemniscate.

There have been given information on the preservation of position of the zeros of the derivative on the lemniscates, under a local variation of the polynomial (Lemmas 1,2,3,4 and Theorems 1, 1', 2), as well as on the relationship between the zeros of the derivative and the values of the polynomial in the zeros (Theorem 3).

The last is an interesting phenomenon concerning the so-called distortion for polynomials.

The above investigations, like those presented in Part I, are connected with the interpolation of the Chebyshev type and with univalent functions.

We accept here the terminology, notations and facts given in Part I.

1. Local configurations

We shall investigate here the facts connected with the position of the derivative of a polynomial on the boundaries of the domains described earlier.

Let again be given an arbitrary normalized polynomial $P(w)$ of the type (1.1) from Part I and let w^* be a given point, different from all the zeros of the derivative of the polynomial $P(w)$ and situated on the boundary $\partial\mu_{P,r^*}$ where $r^* = |P(w^*)|$ is a positive number.

Lemma 1. All the points w sufficiently close to w^*, satisfying the condition $|P(w)| = r^*$, also lie on the boundary $\partial\mu_{P,r^*}$.

Proof. Indeed, from Part I, pp.8-10 it follows that there exists a domain Δ^* containing w^* and two regular arcs issuing from w^* and two domains with properties described there, on which there are $|P(w)| = r^*$ and $|P(w)| < r^*$ or $|P(w)| > r^*$, respectively; each of the arcs is contained in the boundary of each of the domains. The first of these domains must obviously have points in common with the associated domain μ_{P,r^*} and, as a consequence, must be

contained in it. Thereby, the mentioned arcs both being contained in the boundary, and therefore in the closure of the first of the mentioned domains, must all the more be contained in the closure of the associated domain; since, as is seen at once, they do not contain points of this domain, they must eventually be contained in the boundary $\partial\mu_{P,r}$.

Lemma 2. Every continuous curve containing w^*, which contains no zeros of the derivative of the polynomial $P(w)$ besides , perhaps, the initial or terminal points, and along which there is $|P(w)| = r^*$, lies entirely on the boundary $\partial\mu_{P,r^*}$.

Proof. Taking any such curve

$$w = w(t), \qquad \alpha \leq t \leq \beta , \qquad w(t^*) = w^*, \tag{1.1}$$

it suffices to consider the largest interval of the parameter, containing t^*, in which the points (1.1) lie on the boundary $\partial\mu_{P,r}$ and, making use of the closedness of the boundary and of Lemma 1, to deduce in the known manner that it must be the entire interval $[\alpha,\beta]$.

Let w_o denote any of the zeros of the derivative of the polynomial $P(w)$ with some multiplicity γ_o, such that $w_o \in \partial\mu_{P,r_o}$, where $r_o = |P(w_o)|$.

Lemma 3. If

$$P^\cdot(w) = w + C_2^\cdot w^2 + \ldots + C_{m+1}^\cdot w^{m+1} \tag{1.2}$$

is an arbitrary normalized polynomial, sufficently close to the polynomial $P(w)$, while $w_o^\cdot$ the zero of the derivative of the po-

lynomial (1.2), with the same (as above) multiplicity γ_o and sufficiently close to w_o, then w_o^* belongs to the boundary $\partial\mu_{P^*,r_o^*}$, where $r_o^* = |P^*(w_o^*)|$.

Proof. From Part I pp.8-10 it follows that in the described situation, in some sufficiently small neighbourhood δ_o of the point w_o^*, containing no zeros of the derivative $P'(w)$, different from w_o^*, the set of all the points w of this neighbourhood, for which $|P^*(w)| = r_o^*$, is contained in the sum of $2(\gamma_o+1)$ analytic arcs issuing from w_o^* and, besides, disjoint. In the sequel, from (X) it follows that δ_o contains points of the domain μ_{P^*,r_o^*}, and since it contains the point w_o^* not belonging to this domain, then it has to contain the boundary points of the domain μ_{P^*,r_o^*} and, as a further consequence, situated on one of the described arcs. But then, by Lemma 2, the entire such arc and, in particular, its initial point w_o^* must lie on the boundary $\partial\mu_{P^*,r_o^*}$.

Lemma 4. If, for the given polynomial (1.1), from Part I a point w_o lies on the boundary of more than one component of the set λ_{P,r_o} defined earlier, where $r_o = |P(w_o)|$, then this point must be a zero of the derivative of this polynomial.

Proof. Let us assume conversely that the point w_o lies on the boundary of several such components and suppose it is different from all the zeros of the derivative of the polynomial (1.1) from Part I. In this situation, consider for w_o, analogous to the ones described in Lemma 1 for w*: domain Δ_o containing w_o, and two respective arcs and two domains with properties described in Part I, pp.8-10. Exactly in

one of these domains, which will be denoted by δ, the relation $|P(w)| < r_o$ holds, whereas in the other domains as well as on both arcs this relation does not hold. Hence, as is seen at once, all the points w sufficiently close to w_o, for which the mentioned relation holds, must belong to δ, and what follows, the domain δ must be contained in each component of the set λ_{P,r_o}, possessing on the boundary the point w_o. Consequently, there can exist at most one such component, which contradicts the assumption.

Consider now the polynomial (1.1) from Part I with zeros of the derivative (1.2) from Part I with the multiplicities (1.3) from Part I.

Assume now that the polynomial considered is distinguished, i.e. that there hold the relations

$$w_k \in \partial\mu_{P,r_k}, \text{ where } r_k = |P(w_k)|, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{1.3}$$

Theorem 1. If

$$P^{\cdot}(w) = w + C_2^{\cdot}w^2 + \ldots + C_{m+1}^{\cdot}w^{m+1} \tag{1.4}$$

is an arbitrary normalized polynomial, sufficiently close to the polynomial (1.1) from Part I, whose derivative $P^{\cdot\prime}(w)$ has the zeros

$$w_k^{\cdot}, \quad k = 1,\ldots,n, \tag{1.5}$$

sufficiently close to (1.2) from Part I, with the same multiplicities (1.3), from Part I, then the polynomial (1.4) is also distinguished, i.e. there hold the relations

$$w_k^{\cdot} \in \partial\mu_{P^{\cdot},r_k^{\cdot}}, \text{ where } r_k^{\cdot} = |P^{\cdot}(w_k^{\cdot})|, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{1.6}$$

Proof. Indeed, this follows immediately from the previous Lemma 3.

Let us assume in turn that the polynomial under consideration is non-distinguished, and that the values of this polynomial in the zeros of its derivative

$$\zeta_k = P(w_k), \quad k = 1,\ldots,n, \tag{1.7}$$

are, as far as the absolute value is concerned, different from one another.

Theorem 1'. If $P^*(w)$ is an arbitrary normalized polynomial, sufficiently close to the polynomial (1.1) from Part I, whose derivative possesses the zeros w_k^*, $k = 1,\ldots,n$, sufficiently close to (1.2) from Part I, with the same (as above) multiplicities, then the polynomial (1.4) is also non-distinguished.

Proof: We obtain this by contradiction and by making use of the posterior Theorem 1 of Part III.

Theorem 2. If the polynomial (1.1) from Part I is distinguished, then there exists a distinguished polynomial arbitrarily close to it

$$P^*(w) = w + C_2^* w^2 + \ldots + C_{m+1}^* w^{m+1}, \tag{1.8}$$

whose derivative has the zeros arbitrarily close to (1.2) from Part I, with the multiplicities (1.3) from Part I, and which in these zeros assumes values different from one another as regards the absolute value.

Proof. Accepting the notations (1.7), let us take an arbitrary system of numbers

(1.9) $$\zeta_k^{\cdot} \ , \ k = 1,\ldots,n.$$

different from ~~the~~ one another as regards the absolute value and sufficiently close to (1.7). Then, by ([2], Lemma 2, p. 4), there exists a normalized polynomial $P^{\cdot}(w)$, arbitrarily close to and of the same degree as (1.1) from Part I, whose derivative has the zeros with the multiplicities (1.3) from Part I at some points

(1.10) $$w_k^{\cdot} \ , \ k = 1,\ldots,n,$$

arbitrarily close to (1.2) from Part I, and which in the roots (1.10) assumes the chosen values (1.9). At the same time, by the preceding theorem, the polynomial $P^{\cdot}(w)$ is distinguished. Consequently, it satisfies the conditions of the proposition.

2. Global configurations

Let

(2.1) $$P(w) = w + C_2 w^2 + \ldots + C_{m+1} w^{m+1} \ , \quad m \geq 1 \ ,$$

be an arbitrary normalized polynomial. Let further

(2.2) $$w_k \ , \ k = 1,\ldots,n,$$

denote the zeros of the derivative of the polynomial (2.1), different from one another, whereas

(2.3) $$\gamma_k \ , \ k = 1,\ldots,n,$$

their multiplicities. Let next

(2.4) $$\zeta_j = P(w_j) \ , \ j = 1,\ldots,n.$$

Theorem 3. Between the positions of the zeros (2.2) and the values (2.4) the following relations hold

$$(2.5)\qquad \frac{1}{4}\,(\operatorname*{Min}_{1\le j\le n}|\zeta_j|) \le |w_k| \le 4^{(m+1)}\,(\operatorname*{Max}_{1\le j\le n}|\zeta_j|)^{(m+1)},\quad k = 1,\dots,n.$$

Proof. It is evident that we may confine ourselves to the case when no value of (2.4) is equal to zero. Denote by e and E the respective extrema on the left and the right sides of (2.5).

Consider first the polynomial

$$(2.6)\qquad S(t) = \frac{1}{e}\,P(t\cdot e) = t + C_2 e t^2 + \dots + C_{m+1} e^m t^{m+1}\ .$$

We easily verify that the derivative $S'(t)$ has the zeros $t_k = w_k : e$ with the multiplicities (2.3), and that $S(t_k) = \zeta_k : e$; on account of the definition of the number e, there is $|S(t_k)| \ge 1$; consequently, the zeros t_k lie outside the associated domain $\mu_{S,1}$. Hence it appears that the polynomial (2.6) is univalent, and so, the mentioned domain contains a disc with centre 0 and radius $1/4$ (cf. IV, III of Part I). Consequently, there is $|t_k| \ge 1/4$, which gives the left side of formula (2.5).

Let us in turn consider the polynomial

$$(2.7)\qquad T(s) = \frac{1}{E}\,P\Big(s\sqrt[m+1]{\frac{E}{C_{m+1}}}\Big) = s^{m+1} + \frac{C_m}{E}\Big(\frac{E}{C_{m+1}}\Big)^{\frac{m}{m+1}} s^m + \dots + \frac{1}{E}\Big(\frac{E}{C_{m+1}}\Big)^{\frac{1}{m+1}}\cdot s.$$

We verify with ease that the derivative $T'(s)$ has the zeros $s_k = w_k : \sqrt[m+1]{\frac{E}{C_{m+1}}}$ with the multiplicities (2.3), and that $T(s_k) = \zeta_k : E$; on account of the definition of the number E, there

is $|T(s_k)| \leq 1$; consequently, the zeros s_k lie outside the domain $\hat{\mu}_T$. Hence it appears that the function

$$R(s) = s \sqrt[m+1]{1 + \frac{C_m}{E}\left(\frac{E}{C_{m+1}}\right)^{\frac{m}{m+1}} \frac{1}{s} + \ldots + \frac{1}{E}\left(\frac{E}{C_{m+1}}\right)^{\frac{1}{m+1}} \frac{1}{s^m}} = s + \ldots$$

is univalent in $\hat{\mu}_T$, and so the mentioned domain contains the exterior of a disc with centre 0 and radius 4 (cf. IV, III of Part I). In this context, there is $|s_k| \leq 4$, $k = 1,\ldots,n$, which gives, in view of $|C_{m+1}| = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{|w_1^{\gamma_1} \ldots w_n^{\gamma_n}|}$, first

$$|w_k| \leq 4 \sqrt[m+1]{E} \cdot \sqrt[m+1]{|w_1^{\gamma_1} \ldots w_n^{\gamma_n}|} \cdot \sqrt[m+1]{m+1}, \tag{2.8}$$

$k = 1,\ldots,n$,

and next, by raising both sides of (2.8) to the power γ_k and multiplying,

$$|w_1^{\gamma_1} \ldots w_n^{\gamma_n}| \leq 4^m \cdot E^{\frac{m}{m+1}} \cdot |w_1^{\gamma_1} \ldots w_n^{\gamma_n}|^{\frac{m}{m+1}} \cdot (m+1)^{\frac{m}{m+1}}, \tag{2.9}$$

that is,

$$\sqrt[m+1]{|w_1^{\gamma_1} \ldots w_n^{\gamma_n}|} \leq (4^m \cdot E^{\frac{m}{m+1}})(m+1)^{\frac{m}{m+1}}, \tag{2.10}$$

which finally, in conjunction with (2.8), gives the right side of (2.5).

References - see Part III.

Institute of Mathematics
Łódź University

Presented at the Session of Mathematical-Physical Commission of Society of Arts and Sciences of Łódź by Z. Charzyński on June 30, 1977.

Geometria wielomianów. II

Streszczenie

W pracy tej zbadano własności wielomianów w sensie zależności między położeniem pierwiastków wielomianu i pierwiastków jego pochodnej. Podane są również informacje o zachowaniu położenia pierwiastków pochodnej na lemniskatach przy wariacji lokalnej wielomianu.

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ
1978 Vol, XXVIII, 7

Zygmunt Charzyński, Andrzej Kozłowski

GEOMETRY OF POLYNOMIALS (III)

Summary. In the paper there have been examined properties of polynomials in the aspect of global interdependence between the domains bounded by the lemniscates, the position of the zeros of the derivative of a polynomial and the position of the values of the polynomial in these zeros. There have also been given information on the processes of passing to a limit as well as on the relationship between the zeros of the derivative and the values of the polynomial in these zeros.

1. Introduction

In the present paper there have been examined properties of polynomials in the aspect of global interdependence between the lemniscates and lemniscate domains, and the position of the zeros of the derivative of a polynomial and of the values of the polynomial in these zeros.

There have been given information on the processes of passing to the limit (Lemmas and 2, Theorem 1 and 1') and on the relationships between the zeros of the derivative, as well as on the values of the polynomial in these zeros (Lemma 3, Theorems 2).

The above investigations, like those presented in Parts I and II are connected with the interpolation of the Chebyshev type and with the univalent functions.

We accept here the terminology, notations and facts given in Parts I and II.

2.Convergence

We shall give here a number of properties connected with the passing to the limit with the zeros of the derivative of a polynomial and values of the polynomial in these zeros.

Let be given an arbitrary sequence of normalized polynomials

$$P_f(w) \ , \quad f = 1,2,\ldots, \tag{2.1}$$

convergent to an analogous polynomial $P(w)$.

Lemma 1. If we are given a sequence of points different from zero

$$w_{of} \in \hat{\mu}_{P_f,r_f} \ , \text{ where } \ r_f = |P_f(w_{of})| > 0, \ f = 1,2,\ldots, \tag{2.2}$$

convergent to a point w_o different from zero, then there exists a continuum Γ containing both points 0 and w_o , such that

$$|P(w)| \leq r \quad \text{for} \quad w \in \Gamma \ , \text{ where } r = |P(w_o)| . \tag{2.3}$$

Consequently, there exists a continuum Γ_o containing the points 0 and w_o and being a union of a finite number of closures of the components of the set $\lambda_{P,r}$, among them the closure of the associated domain $\mu_{P,r}$.

Proof. Let us put

$$\Gamma_f = \overline{(\bigcup_{j=f}^{\infty} \bar{\mu}_{P_j,r_j})}, \quad f = 1,2,\ldots, \tag{2.4}$$

It is clear at once that the sets in parantheses on the right side of (2.4) are connected, as the unions of connected sets containing the common point 0, and that they contain the points w_{of} different from zero; at the same time, they form a decreasing sequence. Consequently, assuming additionally the convergence of (2.2) to w_o, the closures of these sets are continua containing the points 0 and w_o, forming a decreasing sequence. Hence, in view of the known fact, the intersection Γ of the sets (2.4) is a continuum containing evidently the points 0 and w_o (cf. |5|, 5, p. 110). At the same time, taking an arbitrary f and then any

$$w^o \in \bigcup_{j=f}^{\infty} \bar{\mu}_{P_j, r_j} , \tag{2.5}$$

we have that there exists a $j^o > f$ such that $w^o \in \bar{\mu}_{P_{j^o}, r_{j^o}}$, and so $|P_{j^o}(w^o)| \leq r_{j^o}$, and what follows,

$$\inf_{j \geq f} |P_j(w^o)| \leq |P_{j^o}(w^o)| \leq \sup_{j \geq f} r_j ; \tag{2.6}$$

since, by the assumption of convergence, the left sides of the relation (2.6) tend to $P(w^o)$, while the right one to r, therefore we eventually have $|P(w^o)| \leq r$ for the arguments satisfying (2.5). Hence we obtain that this relation holds on Γ_f and, in view of the arbitrariness of f, that (2.3) holds.

In the light of these facts, the continuum defined above satisfies the conditions of the first part of the proposition. In

order to obtain the second part of the proposition, it will suffice to take on Γ_o that component of the set $\overline{\lambda_{P,r}}$ which contains Γ and to make use of the previous information on the components of this set (cf. IV, Part I).

Let be given a sequence of normalized polynomials of degree (m+1), of the form

$$P_f(w) = w + C_{2,f}w^2 + \ldots + C_{m+1,f}w^{m+1} \quad , \quad f = 1,2,\ldots, \tag{2.7}$$

where m is a natural number greater than one, and where the last coefficients do not vanish. Let us further assume that the derivatives of the polynomials possess n distinct zeros

$$w_{jf} \quad , \quad j = 1,\ldots,n, \tag{2.8}$$

with the multiplicities

$$\gamma_j \quad , \quad j = 1,\ldots,n, \quad \gamma_1 + \ldots + \gamma_n = m \quad , \tag{2.9}$$

independent of f. We further assume that the seguences of the zeros (2.8) are convergent to the finite or infinite limits

$$w_j \quad , \quad j = 1,\ldots,n, \tag{2.10}$$

Let finally

$$P_f(w_{jf}) = \zeta_{jf} \quad , \quad f = 1,2,\ldots, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{2.11}$$

be the values of the polynomials (2.7) in the zeros of their derivatives, and let lastly

$$r_{jf} = |\zeta_{jf}|, \quad f = 1,2,\ldots, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{2.12}$$

Lemma 2. With the previous assumptions and notations, and with the given integer $0 \leq k < n$, if the first k of the sequences (2.12) are convergent to certain finite limits different from zero

$$r_j \ , \ j = 1,\ldots,k, \tag{2.13}$$

and if the respective zeros from (2.8) are distinguished, i.e. that the relations

$$w_{jf} \in \partial\mu_{P_f,r_{jf}} \ , \ j = 1,\ldots,k, \tag{2.14}$$

hold, while the remaining sequences from (2.8) tend to infinity, then : the sequence (2.7) tends to some normalized polynomial $P(w)$; the first k limits from (2.10) are finite, whereas the remaining are infinite; the degree of the polynomial $P(w)$ is $\gamma_1 + \ldots \gamma_k + 1$; there hold the relations

$$|P(w_j)| = r_j \ , \quad j = 1,\ldots,k. \tag{2.15}$$

Moreover, if, in addition, the limits are different from one another, then the corresponding limits from (2.10) are also different from one another; they are zeros of the derivative of the polynomial $P(w)$, with multiplicities γ_j , $j = 1,\ldots,k$; the zeros w_j , $j = 1,\ldots,k$, are distinguished, i.e. there hold the relations

$$w_j \in \partial\mu_{P,r_j} \ , \quad j = 1,\ldots,k. \tag{2.16}$$

Additional variants of the proposition hold when all the sequences (2.12) tend to finite limits, or when all of them tend to infinite limits. Then the proposition holds with the omission of fragments resulting from the non-existence of infinite limits, or finite, in (2.10).

Proof. From the assumption it follows first that the sequences (2.8) are bounded below. Consequently, according to Theorem 3, from Part II, the sequences (2.8) are bounded below, too. Thereby, representing the polynomials (2.7) in the form

$$\int_0^w \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{w}{w_{jf}}\right)^{\gamma_j} dw \,, \tag{2.17}$$

we can see that they are almost bounded in the plane, and therefore, in view of the convergence of the sequences (2.8), convergent to a certain normalized polynomial.

Next, since this polynomial does not reduce to a constant, then there exists a circle on which its values are, as regards the absolute value, greater than a number r which is in turn greater than all the numbers (2.13) and, what follows this, in view of the uniform convergence of the polynomials (2.7) to P(w), for sufficiently large f there is $|P_f(w)| \geq r$ on the mentioned circle. Thereby, for every $1 \leq j \leq k$, the connected set $\bar{\mu}_{P_f, r_{jf}}$ containing zero, in which there is $|P_f(w)| \leq r_{jf}$, has to lie inside the quoted circle; in consequence of the last fact and the assumption on convergence, the corresponding points from (2.8) lie inside the very circle; i.e. the corresponding limits from (2.10) are finite,

while the remaining limits from (2.10) must be infinite; for if any limit w_j were finite, then, in view of the convergence of the polynomials and sequences (2.8), the limits of the values (2.11) and, what follows this, (2.12) would also have to be finite, despite the assumption; hence further, taking account of the assumptions on the sequences (2.8) and making use of the representations (2.17) once again, we get, for the limit $P(w)$, the representation

$$\int_0^w \cdot \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{w}{w_j}\right)^{\gamma_j} dw; \tag{2.18}$$

next, from the convergence of the polynomials (2.7) and zeros (2.9), we easily obtain the relations (2.15). Proceeding to the proof of the other part of the proposition, under additional assumptions we first obtain, according to (2.15), that the respective limits

$$w_j \ , \quad j = 1,\ldots,k \tag{2.19}$$

must be different from one another, and next, from the representation (2.18) we can perceive at once that they are zeros of the derivative $P'(w)$, with the described multiplicities. Lastly, taking into consideration any zero w_j of (2.19), we deduce from the convergence of the polynomials and zeros as well as from the relation (2.14) and Lemma 1 that this zero belongs to a certain continuum being a union of a finite number of the continua - closures of the components of the set λ_{P,r_j} , among them the associated domain $\mu_{P,r}$.

Supposing now that (2.16) does not hold, we would have that the number of components of the mentioned union must be greater than one; the closure $\bar{\mu}_{P,r_j}$ of the associated domain must have a common point with the closure of some other component, which is, in view of Lemma 4 of Part II, some zero w_l of the derivative of the polynomial $P(w)$, different, by hypothesis, from w_j and situated on the boundary $\partial\lambda_{P,r_j}$; consequently, there would have to be $|P(w_l)| = r_j$. On the other hand, according to (2.15), there would be $|P(w_l)| = r_l$. That is impossible since the numbers (2.13) are, by assumption, different from one another.

The establishment of additional variants of the proposition runs similarly and in a somewhat simpler way.

Let again be given a sequence of normalized polynomials of the type (2.7) with zeros of the derivative (2.8) and with multiplicities (2.9). At the same time, let be given a polynomial of the same degree

$$P(w) = w + C_2 w^2 + \ldots + C_{m+1} w^{m+1} , \tag{2.20}$$

with zeros of the derivative

$$w_j , \quad j = 1,\ldots,n, \tag{2.21}$$

with multiplicities (2.9), as above. Let at last the sequence (2.7) be convergent to the limit (2.20), and the sequence of zeros (2.8) to the limits (2.21).

In this situation, there occur facts given below.

Theorem 1. If the sequence (2.7) consists of distinguished polynomials, and if the values of the limit polynomial (2.20) in the zeros of the derivative

(2.22) $$\zeta_j = P(w_j), \quad j = 1,\ldots,n,$$

are, as regards the absolute value, different from one another and different from zero, then the limit polynomial (2.20) is distinguished, too.

Proof. Accepting the notations (2.11), (2.12) and

(2.23) $$r_j = |\zeta_j| , \quad j = 1,\ldots,n,$$

we easily verify that, for the sequence (2.7) and polynomial (2.20), Lemma 2 holds in the variant of all the limits (2.12) finite and different from one another. Consequently, there must hold, among others, the relations (2.16) with $k = n$, which indicates that the polynomial (2.20) is distinguished.

Theorem 1'. If the sequence (2.7) consists of non-distinguished polynomials, then the limit polynomial (2.20) is non-distinguished, too.

Proof. We obtain this by contradiction and making use of Theorem 1 of Part II.

3. Drawing the values and zeros apart

Below we shall give an essential fact predicating of an arbitrary reduction of ratios of the arguments of interpolation.

Consider with arbitrary natural numbers, fixed for the time being

(3.1) $$\gamma_j \ , \quad j = 1,\ldots,n, \quad m+1 = \gamma_1+\ldots+\gamma_n+1 \ ,$$

any polynomial

(3.2) $$P(w) = w + C_2 w^2 + \ldots + C_{m+1} w^{m+1}$$

of degree m+1. Assume that the derivative $P'(w)$ of the polynomial (3.2) has n zeros

(3.3) $$w_j \ , \quad j = 1,\ldots,n,$$

different from zero and from one another, with multiplicities (3.1). Let us take into consideration the values of the polynomial (3.2) in the zeros of its derivative

(3.4) $$\zeta_j = P(w_j) \ , \quad j = 1,\ldots,n.$$

In this situation, the following facts take place.

Lemma 3. i) For every natural $1 \leq k < n$, pair of numbers $0 < G' < G''$ and $\varepsilon > 0$, there exists a $U > 0$ such that, for every distunguished polynomial of the type (3.2) and quantities (3.1) and (3.3) associated with it, the systems of relations

(3.5) $$G' < |\zeta_h| < G'' \ , \ h = 1,\ldots,k, \quad |\zeta_l| > U, \ l = k+1,\ldots,n,$$

involve the system of relations

(3.6) $$|w_h : w_l| < \varepsilon, \quad h = 1,\ldots,k, \quad l = k+1,\ldots,n.$$

ii) For every w_o and every $\varepsilon > 0$, there exists a $U > 0$ such that, for every polynomial of the type (3.2), not necessarily

distinguished, and quantities (3.1) and (3.3) associated with it, the system of relations

$$|\zeta_l| > U \ , \ l = 1,\dots,n, \tag{3.7}$$

involves the system of relations

$$|w_o : w_l| < \varepsilon, \quad l = 1,\dots,n. \tag{3.8}$$

Proof. ad i) In the contrary case, there would exist $0 < G_o' < G_o''$ and ε_o such that for every V, in particular equal to f, when $f = 1,2,\dots$, there would exist a polynomial $P_f(w)$ of the type (3.2) with zeros of the derivative

$$w_{jf} \ , \quad j = 1,\dots,n, \tag{3.9}$$

with multiplicities (3.1) and with values of the polynomial $P_f(w)$ in these zeros

$$\zeta_{jf} = P_f(w_{jf}), \quad j = 1,\dots,n, \tag{3.10}$$

such that

$$G_o' < |\zeta_{hf}| < G_o'' \ , \ h = 1,\dots,k, \ |\zeta_{lf}| > f, \quad l = k+1,\dots,n, \tag{3.11}$$

while for some indices $h^{(f)}$ and $l^{(f)}$ there would be

$$|w_{h^{(f)}f} : w_{l^{(f)}f}| \geq \varepsilon_o \ . \tag{3.12}$$

At the same time, choosing subsequences, if necessary, we may assume that with f tending to infinity, the sequences (3.9) and (3.10) are convergent to some finite or infinite limits (cf. Lemma 2). Then, however, according to (3.11) and Lemma 2, the respec-

tive first k sequences from (3.9) would converge to finite limits, whereas the remaining to infinite limits. And this would contradict (3.12).

ad ii) In the contrary case, there would exist a w_{oo} and analogous numbers, polynomials, zeros, values, indices, such that

$$|\zeta_{lf}| > f \ , \quad l = 1,\ldots,n, \tag{3.13}$$

while

$$|w_{oo} : w_{l(f)}| \geq \varepsilon_o \ . \tag{3.14}$$

Hence, the reasoning runs similarly as before, with the application of the respective variant of Lemma 2.

Theorem 2. For every $\varepsilon > 0$, there exists a system of intervals

$$(U_k \ , \ V_k), \quad k = 1,\ldots,n, \tag{3.15}$$

$$1 \leq U_1 < V_1 < \ldots \leq U_n < V_n < +\infty$$

such that, for every distinguished polynomial of the type (3.2) and corresponding zeros (3.3) of its derivative as well as values (3.4) of the polynomial in the zeros (3.3), the system of relations

$$U_k < |\zeta_k| < V_k \ , \ k = 1,\ldots,n, \tag{3.16}$$

involves the system of relations

$$|w_{k-1} : w_k| < \varepsilon, \ k = 1,\ldots,n, \tag{3.17}$$

with the convention $w_o = 1$.

Proof. The desired system is defined inductively as follows:

1° as U_1 we adopt any number not less than 1, defined in Lemma 3, ii), while as V_1 any number greater than it;

2° as U_k we adopt any number U not less than V_{k-1}, defined in Lemma 3, i), with $G^{\cdot} = U_{k-1}$, $G^{\cdot\cdot} = V_{k-1}$ for $1 < k \leq n$, while as V_k any number greater than it.

In this situation, according to 1°, 2° and ii), i), the system (3.16) involves the system (3.17).

References

[1] Bieberbach L. - Lehrbuch der Funktionentheorie II. Berlin 1927.

[2] Charzyński Z. - Fonctions univalentes inverses. Polynomes univalentes, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Classe III, 9, 7 (1958).

[3] Charzyński Z. - Sur les fonctions univalentes, algébrigues, bornées. Rozprawy matematyczne X. 1955.

[4] Gołuzin G.M. /Голузин Г.М./ Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва 1952.

[5] Kuratowski C. - Topologie II Warszawa - Wrocław 1948.

[6] Pólya G., Szegö G. - Problems and Theorems in Analysis, Vol. 1. New York 1972.

[7] Pommerenke Ch. - Univalent Functions - with a chapter on

Quadratic Differentials by Gerd Jensen, Vandenhoeck Ruprecht in Göttingen 1975.

[8] Saks S., Zygmund A. - Analytic Functions, Warszawa 1965.

Institute of Mathematics
Łódź University

Presented at the Session of Mathematical-Physical Commission of Society of Arts and Sciences of Łódź by Z. Charzyński on June 30, 1977.

Geometria wialomianów. III

Streszczenie

W pracy zbadano własności wielomianów w aspekcie globalnej zależności między obszarami ograniczonymi lemniskatami, położeniem pierwiastów pochodnej wielomianu i położeniem wartości wielomianu w tych pierwiastkach. Podano również informacje o procesach przejścia do granicy oraz zależnościach między pierwiastkami pochodnej i wartościami wielomianu w tych pierwiastkach.

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ
1978 Vol. XXVIII, 8

Zygmunt Charzyński, Andrzej Kozłowski

INTERPOLATION OF THE CHEBYSHEV TYPE ON ZEROS OF THE DERIVATIVE OF A POLYNOMIAL (I)

Summary. The paper concerns the interpolation of the Chebyshev type, consisting in constructing a polynomial which assumes presupposed values in the zeros of its derivative. With suitable notations the idea is to invert a certain algebraic single-valued mapping. There have been examined properties of this mapping, concerning continuity, local invertibility and multiplicity of assuming the values.

Introduction

In the investigations of univalent functions, carried out by Z. Charzyński in [1] and in the paper "Sur les fonctions univalentes algébriques, bornées" - Rozprawy Matematyczne X, 1955, there has appeared, in a natural way, a new kind of interpolation of the Chebyshev type in the complex domain; it consisted in determining a rational function, or a polynomial, assuming presupposed values in the zeros of their derivative.

With a suitable approach this interpolation consists in solving some system of algebraic equations, i.e. presents an analytic multiple-valued mapping, inverse to a certain algebraic single-valued one.

At the same time, J. Mycielski and S. Paszkowski in the paper "A Generalization of Chebyshev Polynomials" - Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Vol. VIII, No 7, 1960, dealt with the same kind of interpolation in the real domain, in the aspect of approximation.

The above facts point at some general importance of this type of interpolation.

In this part of the paper there have been examined a single-valued mapping, mentioned above (cf. (1.9)), from the viewpoint of continuity (jj), local invertibility (hh) and multiplicity of assuming the values (j).

Notations and terminology

I We accept here the terminology, notations and properties from [4].

II A part of the space C^n, composed of the points $(z_1,\ldots,z_n)$ with coordinates different from zero, will be denoted by C^n_*.

III A part of the space C^n, composed of the points $(z_1,\ldots,z_n)$ with coordinates different from zero and different from one another, will be denoted by $\hat{C}^n$.

IV Let $\varkappa$ be any positive number, less than 1. A domain composed of the points $(z_1,\ldots,z_n)$ of the space C^n whose coordinates satisfy the conditions

$$\left| \frac{z_{k-1}}{z_k} \right| < \varkappa \qquad , \quad k = 1,\ldots,n,$$

with the convention $z_o = 1$, will be denoted by $C^n_{\varkappa}$.

It will be useful to denote by D_1^n an analogous domain of the points whose coordinates fulfil the conditions

$$\left| \frac{z_{k-1}}{z_k} \right| < 1, \qquad k = 1,\ldots,n.$$

A domain composed of the points $(z_1,\ldots,z_n)$ of the space C^n whose coordinates satisfy the conditions

$$\left| \frac{z_{k-1}}{z_k} \right| < 1, \qquad k = 1,\ldots,n,$$

with the convention $z_o = 0$, will be denoted by D_o^n.

V The point $z = (z_1,\ldots,z_n)$ of the space C^n will be called bounded below by a number g through the coordinates when $|z_k| > g$, $k = 1,\ldots,n$. The boundedness from above by some number G will be defined analogously. On the ground of the above, we define in an ordinary way the similar boundedness from above and from below , and finally the boundedness of a set of points.

VI With the variables $z_1,\ldots,z_n$, the mapping $\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_n)$, where $\eta_k = \nu_k \cdot z_k$, $k = 1,\ldots,n$, and where ν_k, $k = 1,\ldots,n$, are complex numbers with the absolute values one, will be called a rotation.

Special interpolation

Polynomials of one variable, of the form

$$P(w) = w + c_2 w^2 + \ldots + c_{m+1} w^{m+1}, \quad m > 1, \tag{1.1}$$

will be called normalized. One can easily observe that normalized polynomials do not reduce to constants and that the zeros of their derivatives are different from zero.

Consider now an arbitrary normalized polynomial P described above. Let r be any positive number. By $\lambda_{P,r}$ we shall denote a set of all points $w \in C$ such that $|P(w)| < r$. It is clear that this set is open and bounded; there is $|P(w)| = r$ on its boundary; each component of this set is a simply connected domain (cf. [1], Lemma 1, p. 8). A component of the described set, containing the point zero, will be called a domain associated with the polynomial P and number r, and denoted by $\mu_{P,r}$. In the case of $r = 1$ we shall denote a suitable domain by μ_P (cf. [1], p. 7).

A polynomial which is univalent in μ_P will be shortly called univalent (cf. [5], Chapter VI, p. 250).

Let

$$w_1, \ldots, w_n , \tag{1.2}$$

be an arbitrary system of complex numbers different from zero. Let further

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n , \tag{1.3}$$

be an arbitrary system of natural numbers-exponents. In this situation a normalized polynomial of the variable w, of degree m+1, where $m = \gamma_1 + \ldots \gamma_n$, of the form

$$P(w) = \int_0^w \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{w}{w_k}\right)^{\gamma_k} dw, \tag{1.4}$$

will be called associated with the systems of numbers (1.2) and

exponents (1.3). It is immediately observed that the numbers (1.2) are zeros of the derivative of the polynomial (1.4); if they differ from one another, then the exponents (1.3) are their multiplicities.

In the sequel, we shall assume that the exponents (1.3) are fixed and we shall not mention them.

The zero w^o of the derivative of the polynomial P will be called distinguished if $w^o \in \partial\mu_{P,r^o}$, where $r^o = |P(w^o)|$.

The polynomial P will be called distinguished if all the zeros of its derivative are distinguished. In the contrary case, the polynomial is called non-distinguished.

Now let be given an arbitrary system of n numbers

$$\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \tag{1.5}$$

different from zero. Assume that for the system (1.5) there exists a system of numbers different from zero

$$w = (w_1,\ldots,w_n) \tag{1.6}$$

such that, for a suitable associated polynomial (1.4), the equalities

$$P(w_k) = \zeta_k \ , \ k = 1,\ldots,n, \tag{1.7}$$

hold.

In the described situation, the correspondence of any system defined above (1.6) to the system (1.5) will be called special

interpolation, in short- interpolation. At the same time, (1.5) and (1.6) will be called systems of variables and systems of arguments, corresponding to them, or in short, variables and arguments of interpolation; $P(w)$ will be called a polynomial of interpolation.

The variables (1.5) and arguments (1.6) need not differ from one another, but to different variables (1.5) different arguments (1.6) must correspond, by (1.7). In particular, if the variables (1.5) are all different from one another, i.e. belong to $\hat{C}^n$, then the same fact concerns the arguments (1.6). At the same time, the latter are multiple zeros of the derivative $P'(w)$ with multiplicities $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ (cf. (1.4)).

The mapping $\mathcal{P}$

Below, we shall give a closer examination to special interpolation from the point of view of certain local and global properties.

For the purpose, let us first note that the associated polynomial (1.4) depends not only on the variable w, but also on the numbers (1.2), which in the sequel will sometimes be signified more clearly by putting

$$P(w;w_1,\ldots,w_n) = \int_0^w \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{w}{w_k}\right)^{\gamma_k} dw. \tag{1.8}$$

At the same time, it will be convenient to introduce, in a suitable set of points $(w_1,\ldots,w_n)$ of the space C^n, a special mapping $\mathcal{P} = (P_1,\ldots,P_n)$, where

$$P_k(w_1,\ldots,w_n) = P(w_k;w_1,\ldots,w_n), \quad k = 1,\ldots,n. \tag{1.9}$$

With this notation, as well as (1.5) and (1.6), it can be seen that the interpolation considered is equivalent to the solution of the equation $\mathcal{P}(w) = \zeta$, that is, of the system of equations

$$\int_0^{w_k} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{w}{w_j}\right)^{\gamma_j} dw = \zeta_k , \quad k = 1,\ldots,n, \tag{1.10}$$

with given variables (1.5) and unknown arguments (1.6) of interpolation. Furthermore, by applying the notations

$$z_k = \frac{1}{\zeta_k} , \ k = 1,\ldots,n, \quad z = (z_1,\ldots,z_n), \tag{1.11}$$

$$u_k = \frac{1}{w_k} , \ k = 1,\ldots,n, \quad u = (u_1,\ldots,u_n), \tag{1.12}$$

equations (1.10) can be replaced by the equivalent ones

$$\int_0^{1/u_k} \prod_{j=1}^{n} (1 - wu_j)^{\gamma_j} dw = \frac{1}{z_k} , \quad k = 1,\ldots,n, \tag{1.13}$$

$$z_k u_k^{m+1} \int_0^{1/u_k} \prod_{j=1}^{n} (1 - \tau u_j)^{\gamma_j} d\tau = u_k^{m+1}, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{1.14}$$

The numbers given (1.11) and unknown (1.12) must also be different from zero. On account of close connections, the systems (1.11) and (1.12), satisfying equations (1.14), will be called variables and arguments of interpolation, too.

And here are a few properties of variables and arguments of interpolation, resulting from equations (1.10) and (1.14), respectively.

j) For a given system of variables of interpolation (1.11), there exists at most a finite number of systems of arguments of interpolation (1.12), corresponding to it.

Indeed, it is equivalent to the fact that with (1.11) given, equations (1.14) have at most a finite number of solutions with respect to the arguments (1.12). In turn, the latter follows immediately from ([3], theorem 1).

jj) If we are given: an arbitrary sequence of variables of interpolation

$$z_f = (z_1^{(f)},\ldots,z_n^{(f)}),\ f = 1,2,\ldots, \tag{1.15}$$

and a sequence of any arguments of interpolation, corresponding to them

$$u_f = (u_1^{(f)},\ldots,u_n^{(f)}),\ f = 1,2,\ldots, \tag{1.16}$$

both sequences converging to certain limits different from zero $z = (z_1,\ldots,z_n)$ and $u = (u_1,\ldots,u_n)$, respectively, then these limits are variables and arguments of interpolation, corresponding to them.

In fact, we obtain this by passing to a limit in equations of the type (1.14), holding for the variables and arguments (1.15) and (1.16).

jjj) Between the positions of the variables (1.5) and arguments (1.6) of interpolation, the relations

$$(1.17)\qquad \frac{1}{4}\,(\operatorname*{Min}_{1\le j\le n}|\zeta_j|) \le |w_k| \le 4^{m+1}\,(\operatorname*{Max}_{1\le j\le n}|\zeta_j|)^{(m+1)},\quad k = 1,\ldots,n,$$

hold (cf. [2], theorem 3 of Part II).

And here are some further properties of variables and arguments of interpolation, treated as implicit functions.

h) If w is an arbitrary point of the set $\hat{C}^n$, and $\zeta = \mathcal{P}(w)$, then, for every $\zeta^\bullet$ sufficiently close to ζ, there exists some $w^\bullet$ sufficiently close to w such that $\mathcal{P}(w^\bullet) = \zeta^\bullet$; at the same time, $w^\bullet$ is a holomorphic mapping with respect to $\zeta^\bullet$; the value $s = w^\bullet$ is the only one sufficiently close to w, satisfying the equation $\mathcal{P}(s) = \zeta^\bullet$.

Indeed, this follows immediately from the fact indicated elsewhere (cf. [1], lemma 2, p. 4).

In view of the above, a special mapping transforms the neighbourhoods of the point w of the set $\hat{C}^n$ into sets containing a certain neighbourhood of the image $\zeta = \mathcal{P}(w)$. Consequently, the image $\mathcal{P}(\hat{C}^n)$ of the open set $\hat{C}^n$ of the points w, under a special mapping, is open. Since the set $\hat{C}^n$ of points ζ is everywhere dense, finally, the intersection $\mathcal{P}(\hat{C}^n) \cap \hat{C}^n$ is non-empty, i.e. there exist points $w \in \hat{C}^n$ such that $\zeta = \mathcal{P}(w)$ also belongs to $\hat{C}^n$.

hh) If w is an arbitrary point of the set $\hat{C}^n$, then the special mapping $\mathcal{P}$, restricted to a certain sufficiently small neighbourhood of this point, has the inverse mapping $I = (I_1,\ldots,I_n)$, holomorphic on some open set containing the point $\zeta = \mathcal{P}(w)$. At the

same time, for $\zeta^{\cdot}$ sufficiently close to ζ, the value $s = I(\zeta^{\cdot})$ is the only one arbitrarily close to w, satisfying the equation $\mathcal{P}(s) = \zeta^{\cdot}$.

The above is a consequence of the property (h), (cf. [5], Chapter III, (12.1), (12.2), (12.4)).

hhh) The functions P_k, $k = 1,\ldots,n$, of the special mapping $\mathcal{P}$ are homogeneous of degree 1. Hence it appears that the functions I_k, $k = 1,\ldots,n$, of the inverse mapping I are also homogeneous of degree 1.

Indeed, the homogeneity of the functions P_k, $k = 1,\ldots,n$, follows immediately from (1.8). Hence, for τ close to 1, we have in a certain neighbourhood of the point ζ

$$(1.18)\qquad P_k(\tau I_1(\zeta_1^{\cdot},\ldots,\zeta_n^{\cdot}),\ldots,\tau I_n(\zeta_1^{\cdot},\ldots,\zeta_n^{\cdot})) = \tau\zeta_k^{\cdot}\ ,\ k = 1,\ldots,n,$$

and

$$(1.19)\qquad P_k(I_1(\tau\zeta_1^{\cdot},\ldots,\tau\zeta_n^{\cdot}),\ldots,I_n(\tau\zeta_1^{\cdot},\ldots,\tau\zeta_n^{\cdot})) = \tau\zeta_k\ ,\ k = 1,\ldots,n.$$

It follows from the uniqueness mentioned in hh) that, for τ sufficiently close to 1, the values $I_k(\tau\zeta_1^{\cdot},\ldots,\tau\zeta_n^{\cdot})$ and $\tau I_k(\zeta_1^{\cdot},\ldots,\zeta_n^{\cdot})$, $k = 1,\ldots,n$, coincide, which implies the announced homogeneity.

References - see Part III.

Institute of Mathematics
Łódź University

Presented at the Session of Mathematical-Physical Commission
of Society of Arts and Sciences of Łódź by Z. Charzyński
on June 30, 1977

Interpolacja typu Czebyszewa na zerach pochodnej wielomianu.I

Streszczenie

Praca dotyczy interpolacji typu Czebyszewa polegającej na zbudowaniu wielomianu przyjmującego w zerach swojej pochodnej z góry zadane wartości. Przy odpowiednich oznaczeniach chodzi o odwrócenie pewnego odwzorowania algebraicznego jednowartościowego. Zbadano własności tego odwzorowania dotyczące ciągłości, lokalnej odwracalności i krotności przyjmowania wartości.

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁODŹ
1978 Vol. XXVIII, 9

Zygmunt Charzyński, Andrzej Kozłowski

INTERPOLATION OF THE CHEBYSHEV TYPE ON ZEROS OF THE DERIVATIVE OF A POLYNOMIAL (II)

Summary. The paper concerns the interpolation of the Chebyshev type, treated as an analytic multiple-valued mapping, inverse to a certain algebraic single-valued one. There have been given some classification of analytic elements, information on critical points, arbitrary continuability of branches and on the representation of branches as compositions of certain simple mappings.

Introduction

In the present part of the paper there has been investigated the interpolation of the Chebyshev type, treated as an analytic multiple-valued function, inverse to a certain mapping.

There have been given some classification of analytic elements, information on critical points (iiii) arbitrary continuability of branches (5i), representation of branches in certain Reinhardt domains by means of root mappings (theorem 1).

These investigations, like those presented in Part I, are connected with Z. Charzyński's papers [1] and "Sur les fonctions univalentes algébriques, bornées" - Rozprawy Matematyczne X, 1955 as well as with the papers by J. Mycielski and S. Paszkowski "A Gene-

ralization of Chebyshev Polynomials" - Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Vol. VIII, No 7, 1960.

We accept here the terminology, notations and facts given in Part I.

The mapping $\mathcal{P}^{-1}$. The function of interpolation $\mathcal{P}^{-1}$

Consider the special mapping $\mathcal{P}$ defined by formulae (1.9) of Part I. Treating it as an analytic mapping, we have that there exists a mapping $\mathcal{P}^{-1}$, inverse to it, which will be called a general mapping of interpolation (cf. [5], Chapter VI, p. 254). Let be given an arbitrary element $\{I,\zeta\}$ of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$, where $I = (I_1,\ldots,I_n)$, and where I_k, $k = 1,\ldots,n$, are holomorphic function in some neighbourhood of the point $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$. Assume that the centre ζ of this element belongs to $\hat{C}^n$, and that our element is inverse to the element $\{\mathcal{P},w\}$ of the mapping $\mathcal{P}$, where $w = I(\zeta)$.

In this situation, the element $\{I,\zeta\}$ is continued along each continuous curve L issuing from the point ζ and lying in $\hat{C}^n$.

Indeed, by hypothesis it follows easily that $\mathcal{P}(w) = \zeta$ and that w belongs to $\hat{C}^n$. In the sequel let $\zeta(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ be a parametric description of the curve L. We shall show that there exists exactly one analogous curve K issuing from the point w, lying in $\hat{C}^n$, with description $w(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, such that along it there is always $\mathcal{P}(w(t)) = \zeta(t)$. To that end, we first note that if $\hat{\zeta} = \zeta(\hat{t})$ is a point of the curve, corresponding to the parameter $\hat{t}$, and $\hat{w}$ a point such that $\mathcal{P}(\hat{w}) = \hat{\zeta}$, then in some neighbourhood of the parameter $\hat{t}$ there exists exactly one continuous curve $\hat{K}$ with description $\hat{w}(t)$, along which there is $\mathcal{P}(\hat{w}(t)) = \zeta(t)$ with the initial condition $\hat{w}(\hat{t}) = \hat{w}$. Indeed, this follows immediately from the evident fact

that $\hat{w}$ belongs to $\hat{C}^n$, and from ((h), (hh) of Part I) when one assumes there that $w = \hat{w}$, $\zeta = \hat{\zeta}$ and finally $\hat{w}(t) = I(\zeta(t))$. Next we note that if we are given two continuous curves $\dot{K}$ and $\ddot{K}$ with descriptions $\dot{w}(t)$ and $\ddot{w}(t)$, $\lambda \leq t \leq \mu$, along which there are $\mathcal{P}(\dot{w}(t)) = \zeta(t)$ and $\mathcal{P}(\ddot{w}(t)) = \zeta(t)$, then the coincidence of initial points of these curves involves the coincidence of the very curves in the entire course. In fact, it suffices to consider the largest interval of the parameter $[\lambda, \hat{t})$ within which the curves $\dot{K}$ and $\ddot{K}$ under consideration coincide, then extend this by continuity to the point $\hat{t}$, and finally, show by applying the previous that $\hat{t} = \mu$. In the sequel, passing to a proper justification, we have by the first remark that there exist non-empty intervals of the parameter $[\alpha, t^o)$, in which there are curves K^o with descriptions $w^o(t)$, issuing from the point w, $\mathcal{P}(w^o(t)) = \zeta(t)$ being along them; what is more, by the second remark it easily follows that there exists a largest such interval $\tilde{I} = [\alpha, \hat{t})$ and in it a suitable curve $\tilde{K}$ with description $\tilde{w}(t)$ such that $\mathcal{P}(\tilde{w}(t)) = \zeta(t)$. Let us then take an arbitrary sequence of parameters $t^{(f)}$, $f = 1,2,\ldots$, tending from the left to $\hat{t}$, and suitable sequences $(\zeta(t^{(f)}))$ and $(\tilde{w}(t^{(f)}))$; obviously there is $\mathcal{P}(\tilde{w}(t^{(f)})) = \zeta(t^{(f)})$. Since the sequence $(\zeta(t^{(f)}))$ with terms from $\hat{C}^n$ tends to a limit $\hat{\zeta} = \zeta(\hat{t})$ also belonging to $\hat{C}^n$, therefore it is bounded below and above through the coordinates by some positive numbers; consequently, the same concerns the sequence $(\tilde{w}(t^{(f)}))$ (cf. V and (jjj) of Part I). So, choosing subsequences, if necessary, we may assume that $(\tilde{w}(t^{(f)}))$ converges to a certain limit $\hat{w}$ belonging to $\hat{C}^n$; besides, by ((jj) of Part I), there is $\mathcal{P}(\hat{w}) = \hat{\zeta}$. Hence, according to the first remark, there exists in some neighbourhood $\hat{I}$ of the point $\hat{t}$ a curve $\hat{K}$ with description $\hat{w}(t)$, along which $\mathcal{P}(\hat{w}(t)) = \zeta(t)$, while $\hat{w}(\hat{t}) = \hat{w}$. At the same time, from

((h) of Part I) it follows immediately that for sufficiently large f the values $\tilde{w}(t^{(f)})$ and $\hat{w}(t^{(f)})$ coincide. This involves, according to the second remark, the coincidence of the curves $\tilde{K}$ and $\hat{K}$ on the intersection $\tilde{I} \cap \hat{I}$. That, in turn, allows us to extend the curve $\tilde{K}$, in an evident way, to a certain curve K with description w(t), issuing from w and defined on the union of sets $\tilde{I} \cup \hat{I}$; obviously, along this curve there is $\mathcal{P}(w(t)) = \zeta(t)$. Hence it easily appears that $\hat{t} = \beta$ and $\tilde{I} \cup \hat{I} = [\alpha,\beta]$, which, in conjunction with the previous, indicates that K is the desired curve. Its uniqueness follows at once from the second remark. Finally, taking a chain $\{\mathcal{P},w(t)\}$, $\alpha \leq t \leq \beta$ of elements of the mapping $\mathcal{P}$ along K, and then a chain of inverse elements, we easily verify that it is the desired continuation of the element $\{I,\zeta\}$ given at the beginning along the curve L.

Basing on the above, it is possible to show more, namely, that every element $\{I,\zeta\}$ of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$ with centre ζ lying in $\hat{C}^n$ is inverse to the element $\{\mathcal{P},w\}$, where $w = I(\zeta)$, of the mapping $\mathcal{P}$ and, what follows, that

$$\mathcal{P}(I(\zeta^\cdot)) = \zeta^\cdot \tag{2.1}$$

for $\zeta^\cdot = (\zeta_1^\cdot,\ldots,\zeta_n^\cdot)$ from some neighbourhood of the point ζ; the numbers $w_k^\cdot = I_k(\zeta_1^\cdot,\ldots,\zeta_n^\cdot)$ are arguments of interpolation, corresponding to the variables of interpolation $\zeta_k^\cdot$, $k = 1,\ldots,n$; in particular, a suitable value w of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$ satisfies the equation

$$\mathcal{P}(w) = \zeta, \tag{2.2}$$

(cf. p. 7, Part I).

Indeed, by the nature of things,the above-described element $\{I,\zeta\}$ is a continuation of some element $\{I^{o},\zeta^{o}\}$ of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$, inverse to the element $\{\mathcal{P},w^{o}\}$ of the mapping $\mathcal{P}$, where $\mathcal{P}(w^{o}) = \zeta^{o}$; this continuation takes place along a certain curve L^{1} lying in C^{n} and joining ζ^{o} and ζ. And since the set $C^{n} \setminus \hat{C}^{n}$ is obviously thin, then there exists, as is easily seen, a curve L lying in an arbitrarily narrow hull, open and connected, of the curve L, joining the points ζ^{o} and ζ and lying, moreover, in $\hat{C}^{n}$ (cf. [6], p. 359). Then the element $\{I,\zeta\}$ is a continuation of $\{I^{o},\zeta^{o}\}$ along L^{o} (cf. [6], p. 150). Consequently, in accordance with the previous, a suitable chain of elements of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$ along L^{o} consists of elements inverse to the respective elements of the mapping $\mathcal{P}$ and, in particular, this concerns the given terminal element $\{I,\zeta\}$.

Every point of a natural subdomain of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$, belonging to $\hat{C}^{n}$, is a centre of at most a finite quantity of different elements of the mapping.

In fact, we notice that to different analytic elements $\{I^{(1)},\zeta\}$, $\{I^{(2)},\zeta\}$ of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$, possessing the same centre situated in $\hat{C}^{n}$, there must correspond different values $w^{(1)} = I^{(1)}(\zeta)$, $w^{(2)} = I^{(2)}(\zeta)$ of the mapping in this centre. For, in the contrary case, both elements would have to be identical as inverse to the same element $\{\mathcal{P},w\}$ of the mapping $\mathcal{P}$, where w would be a common value $w^{(1)} = w^{(2)}$. On the ground of the above, the quantity of different elements of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$, with the same centre ζ situated in $\hat{C}^{n}$, coincides with the quantity of different values w of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$ at the point ζ. In turn, these values satisfy equation (2.2). At last, according to ((j), Part I), the-

re exists at most a finite number of different solutions to this equation.

Let $\{I,\zeta\}$ be any element of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$, having a centre ζ in the set $\hat{C}^n$, and let $w = I(\zeta)$, where $w = (w_1,\ldots,w_n)$; $w_k = I_k(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ will be the value of the function of this element in its centre. Consider a suitable polynomial P of the form

$$P(t) = \int_0^t \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{t}{w_k}\right)^{\gamma_k} dt \,, \tag{2.3}$$

associated with a system of numbers $w_1,\ldots,w_n$ (cf. (1.4), Part I).

In this situation, the element $\{I,\zeta\}$ is called distinguished when the polynomial (2.3) is distinguished, that is, when the relations

$$w_k \in \partial\mu_{P,r_k} \,, \quad \text{where} \quad r_k = |P(w_k)|, \quad k = 1,\ldots,n, \tag{2.4}$$

hold. In the contrary case, this element is called non-distinguished (cf. [2], VI, Part I).

In accordance with ([2], Part I, VI), the distinguished elements do exist.

A branch of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$, consisting of distinguished or non-distinguished elements, will be called distinguished or non-distinguished, respectively.

And here are a few properties of the above-mentioned concepts.

i) There exist elements of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$, with centres in $\hat{C}^n$.

Indeed, according to the second part of ((h), Part I) and ((hh), Part I), there exist analytic elements $\{\mathcal{P},w\}$ of a special mapping, for which $\zeta = \mathcal{P}(w)$ belong to $\hat{C}^n$. Consequently, the inversions of these elements have their centres in the set $\hat{C}^n$.

ii) In the set $\hat{C}^n$ there are branches of a general mapping of interpolation.

In fact, each element spoken about in (i) determines such a branch.

iii) In the set $\hat{C}^n$ there is at most one branch of a general mapping of interpolation.

Indeed, it suffices to demonstrate that each two elements of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$, with centres in $\hat{C}^n$, can be joined there by a chain. Now, taking into account any such elements, we have that they are inverse to some elements $\{\mathcal{P},w_1\}$ and $\{\mathcal{P},w_2\}$ of the mapping $\mathcal{P}$, with $\mathcal{P}(w_1) \in \hat{C}^n$ and $\mathcal{P}(w_2) \in \hat{C}^n$, and what follows this, according to (Part I, p. 6), $w_1 \in \hat{C}^n$ and $w_2 \in \hat{C}^n$. Next, we easily verify that a set Γ of all these points in the space C^n, which either do not belong to $\hat{C}^n$ themselves, or whose images $\mathcal{P}(w)$ do not belong to $\hat{C}^n$, is thin and, consequently, does not cut the space C^n (cf. [6], p. 359). Since, in view of the above, the centres w_1 and w_2 do not belong to Γ, the elements considered of the mapping $\mathcal{P}$ can be joined by a chain of elements of this mapping $\{\mathcal{P},w(t)\}, \alpha \le t \le \beta$, with centres $w(t)$ lying outside the set Γ (cf. [6], p. 359); thereby, $w(t) \in \hat{C}^n$ and $\mathcal{P}(w(t)) \in \hat{C}^n$. Hence, it immediately follows that the elements of the chain are invertible. Forming a suitable chain of elements of the inverse mapping $\mathcal{P}^{-1}$, we have that the points $\mathcal{P}(w(t)) \in \hat{C}^n$ are centres of its elements, and

that it joins the elements of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$, chosen at the beginning (cf. [5], Chapter VI, (5.1)). Putting the above information together, we eventually have that in $\hat{C}^n$ tehre is exactly one branch of the mapping P^{-1}. This branch will be denoted by P_{λ}^{-1} and called the function of interpolation.

The function of interpolation is a restriction of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$ to the set $\hat{C}^n$ since, according to ii), each element of this mapping with its centre in $\hat{C}^n$ determines there the only acceptable branch $\mathcal{P}_{\lambda}^{-1}$, and so, it belongs to this branch (cf. [4], V, Part I)

iiii) No branch of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$ in a domain contained in $\hat{C}^n$ possesses critical points there. This concerns, in particular, the function of interpolation.

Indeed, this follows immediately from the fact that for every point ζ^* of the domain, in an arbitrarily chosen neighbourhood of this point provided it is contained in the domain, each element of the branch is, according to the previous information, inverse to a certain element of the mapping $\mathcal{P}$ and is continuable along every curve lying in a chosen neighbourhood (cf. [5], p. 265).

5i) Every branch of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$ in a domain contained in $\hat{C}^n$ is arbitrarily continuable and strictly finitely valued . This particularly concerns the function of interpolation.

Indeed, an arbitrary continuability of such a branch follows immediately from (iiii) and ([5], Chapter VI, p. 256). At the same time, as was shown earlier, the mapping $\mathcal{P}^{-1}$ and, all the more, its branch have finite numbers of elements with centres in $\hat{C}^n$. Hence, in juxtaposition with the previous, follows the strict finite valuedness of the branch (cf. [5], Chapter VI, p. 256).

6i) In every domain in $\hat{C}^n$ there are branches of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$

In fact, from an arbitrary continuability of the function of interpolation in $\hat{C}^n$ it follows that every point of this set, in particular, every point of the domain under consideration, is the centre of some element of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$; the very element determines there a certain branch of the mapping.

7i) For every $g > 0$ there exists a $l > 0$ such that, for every element $\{I,\zeta\}$ of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$, in which the centre ζ is bounded below through the coordinates by a number g, the value $w = I(\zeta)$ is bounded below through the coordinates by a number l (cf. V, Part I).

This follows at once from ((jjj), Part I) because by putting $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$, $I = (I_1,\ldots,I_n)$ and $w = (w_1,\ldots,w_n)$, we have that the numbers $w_k = I_k(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$, $k = 1,\ldots,n$, are the arguments of interpolation which correspond to the variables of interpolation ζ_k, $k = 1,\ldots,n$.

From the above it follows, in turn, that in every set of points, bounded below through the coordinates by a number g, the set of values of an arbitrary branch of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$ is bounded below through the coordinates by a number l.

Similar properties hold for the boundedness from above.

8i) For every number $\varepsilon \in (0,1]$, there exists a point $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \in D_1^n$ such that the values of each distinguished branch of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$ at the point ζ belong to the set C_ε^n (cf. IV, Part I).

This obviously follows at once from ((jjj),Part I) for the points $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ satisfying ([2], Part III, (3.16)).

9i) In the sets $C_{\varkappa}^{n}$, $0 < \varkappa < 1$ and D_{1}^{n} the distinguished, or non-distinguished elements of the general mapping of interpolation determine the distinguished, or non-distinguished branches of this mapping.

Indeed, let be given an arbitrary chain of elements along some curve lying in any of the described sets

$$\{I^{(t)},\zeta(t)\}, \qquad \alpha \leq t \leq \beta , \tag{2.5}$$

where

$$\zeta(t) = (\zeta_1(t),\ldots,\zeta_n(t) \text{ and } I^{(t)} = (I_1^{(t)},\ldots,I_n^{(t)}). \tag{2.6}$$

Let us put

$$w(t) = w_1(t),\ldots,w_n(t) \; ; \; w_j(t) = I_j^{(t)}(\zeta_1(t),\ldots,\zeta_n(t)), \tag{2.7}$$

$j = 1,\ldots,n.$

For the arguments (2.7) let us compose a suitable associated polynomial

$$P^{(t)}(w) = \int_0^w \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{w}{w_k(t)})^{\gamma_k} \, dw. \tag{2.8}$$

In accordance with ((1.8), (1.9), Part I), (2.1) and (2.8), we have here $\zeta_j(t) = P^{(t)}(w_j(t))$, $j = 1,\ldots,n$. In connection with the previous (cf. (2.4)), the elements (2.5) are distinguished, or non-distinguished, depending on whether the polynomials (2.8) are distinguished, or non-distinguished (cf. [2], VI, Part I). Moreover, under the evident continuity of the function $w_j(t)$, $j = 1,\ldots$

...,n, with an arbitrary t, for t' sufficiently close to t the polynomial $P^{(t)}(w)$ and the zeros of its derivative $w_j(t')$, j = 1,... ...,n, are arbitrarily close to the polynomial P and the zeros of its derivative $w_j(t)$, j = 1,...,n, with the same multiplicities of corresponding zeros. Besides, the values (2.7) must differ from one another as regards the modulus, on account of the position of the curve $\zeta(t)$. Then, by ([2], theorems 1 and 1', Part II), for t' sufficiently close to t the polynomials $P^{(t')}(w)$ are distinguished, or non-distinguished, depending on what the polynomial $P^{(t)}(w)$ is like. Hence, it follows immediately that the sets of those t for which either the polynomial (2.8) or the element (2.5) is distinguished, or non-distinguished, are both open. So, one of them must be the entire interval $[\alpha,\beta]$, depending on what the initial element is like. This immediately gives the announced property.

Theorem 1. Every branch $\mathfrak{M}$ of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$ in the set D_o^n is a composition: of a certain holomorphic mapping

$$A: g_k(\tau_1,\ldots,\tau_n), \quad k = 1,\ldots,n, \tag{2.9}$$

in the Cartesian product

$$T = P(0;0,+\infty) \times P(0;0,1) \times \ldots \times P(0;0,1);$$

of some analytic root, mapping

$$\mathcal{L}: (\sqrt[\gamma_1]{\sigma_1}, \ldots, \sqrt[\gamma_n]{\sigma_n}), \tag{2.10}$$

in the same product T; of a holomorphic mapping, uniquely invertible

(2.11) $$C:(\zeta_1/\zeta_1,\ \zeta_1/\zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_{n-1}/\zeta_n),$$

in the set D_o^n.

Proof. Taking an inverse mapping C^{-1} in T and forming a composition $\mathcal{W} \circ C^{-1}$ (cf. [5], Chapter VI, § 9), we easily see that it is an analytic mapping, arbitrarily continuable and finitely valued (cf. (5i); [5], Chapter VI, (9.1)). So, according to ([4], Theorem 1, Part I), it is a composition $(A \circ \alpha)$ of a certain mapping of the type (2.9) and of a mapping of the type (2.10). Hence, forming compositions of the same mapping $\mathcal{W} \circ C^{-1} = A \circ \alpha$ and of the mapping C, we easily obtain that these compositions are $\mathcal{W}$ on the one hand, and $(A \circ \alpha) \circ C$ on the other hand, which concludes the proof (cf. [4], IV, Part I).

References - see Part III.

Institute of Mathematics
Łódź University

Presented at the Session of Mathematical-Physical Commission of Society of Arts and Sciences of Łódź by Z. Charzyński on June 30, 1977.

Interpolacja typu Czebyszewa na zerach pochodnej wielomianu.II

Streszczenie

Praca dotyczy interpolacji typu Czebyszewa traktowanej jako odwzorowanie analityczne wieloznaczne odwrotne do pewnego odwzorowania algebraicznego jednowartościowego. Podano klasyfikację elementów analitycznych, informację o punktach krytycznych, dowolnej przedłużalności gałęzi i o przedstawialności gałęzi jako złożeń pewnych prostych odwzorowań.

Zakład Graficzny Wydawnictw Naukowych w Łodzi
Zam. 796/78 n. 350+30 egz. I-11 Cena zł 10,–

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ
1978 Vol. XXVIII, 10

Zygmunt Charzyński, Andrzej Kozłowski

INTERPOLATION OF THE CHEBYSHEV TYPE ON ZEROS OF THE DERIVATIVE OF A POLYNOMIAL (III)

Summary. In this part of the paper there have been examined the mappings Q and Q^{-1} strictly connected with the ones from Part I and II.

Introduction

The present part is a complement of the preceding ones and concerns certain mappings Q and Q^{-1} strictly connected with the mappings P and P^{-1} from the preceding parts.

There have been given properties of the above-mentioned mappings in the aspect of some integral equations, arbitrary continuability of branches, finite valuedness, and of rotations being a composition of the mapping with the inverse one.

We accept the terminology, notations and facts given in Part I.

The mapping Q

With the preceding matter from Part I (cf. (1.9)), another mapping, discussed below, is connected.

With the same, as formerly, numbers (1.3) from Part I, let us

introduce in a suitable set of points $w = (w_1,\ldots,w_n)$ of the space C^n a mapping $Q = (Q_1,\ldots,Q_n)$, where

$$(1.1)\quad Q_k(w_1,\ldots,w_n) = (-1)^{\gamma_0+\ldots+\gamma_k+1}\,\frac{\left[(\gamma_k-1)(\gamma_0+\ldots+\gamma_k)+\gamma_k\right]}{(\gamma_0+\ldots+\gamma_k+1)(\gamma_0+\ldots+\gamma_k)}\cdot$$

$$\cdot\,\frac{w_k^{\gamma_0+\ldots+\gamma_{k-1}+1}}{w_0^{\gamma_0}\ldots w_{k-1}^{\gamma_{k-1}}}\,,\qquad k = 1,\ldots,n,$$

with the conventions $w_0 = 1$, $\gamma_0 = 0$.

At first, it is easily seen that each Reinhardt domain C has, as the image under Q, some analogous domain D, and conversely, each Reinhardt domain D is the image under Q of some analogous domain C (cf. [4], VII, Part I).

Let us next take an arbitrary pair of such domains C and D, and consider the mapping Q restricted to C. Let N_k, $k = 1,\ldots,n$, be any circles with centres 0 whose Cartesian product is contained in the domain C. Let further M_k, $k = 1,\ldots,n$, be analogous circles whose Cartesian product is contained in D. Let finally F be any holomorphic function of the variables $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$, defined in the domain D.

We shall demonstrate that the integral

$$(1.2)\qquad \int_{M_1}\ldots\int_{M_n} F(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\zeta_1^{-1}\ldots\zeta_n^{-1}\,d\zeta_1\ldots d\zeta_n$$

is equal to the integral

$$(1.3)\qquad \int_{N_1}\ldots\int_{N_n} (F\circ Q)(w_1,\ldots,w_n)w_1^{-1}\ldots w_n^{-1}\,dw_1\ldots dw_n\,.$$

In fact, on account of the holomorphy of the functions under the integrals in (1.2) and (1.3), the corresponding integrals do not depend on the choice of circles. Consequently, it will suffice to prove the equality of the above integrals, the circles being appropriately chosen. So, assume that the radii of the first circles whose Cartesian product lies in C are

$$r_k \ , \ k = 1,\ldots,n, \tag{1.4}$$

while the radii of the second circles are

$$\rho_k = \frac{\left[(\gamma_k-1)(\gamma_o+\ldots+\gamma_k)+\gamma_k \right]}{(\gamma_o+\ldots+\gamma_k+1)(\gamma_o+\ldots+\gamma_k)} \cdot \frac{r_k^{\gamma_o+\ldots+\gamma_{k-1}+1}}{r_o^{\gamma_o} \ldots r_{k-1}^{\gamma_{k-1}}} \ , \ k = 1,\ldots,n. \tag{1.5}$$

In this situation, as can easily be verified, the Cartesian product of the second circles lies in D.

Consider now the polycircles $(\gamma_o+\ldots+\gamma_{k-1}+1)\cdot M_k$, $k = 1,\ldots,n$, in the form

$$\zeta_k = \rho_k e^{i\psi_k}, \ \theta_k \le \psi_k < \theta_k + (\gamma_o+\ldots\gamma_{k-1}+1)2\pi, \tag{1.6}$$

$$k = 1,\ldots,n,$$

where

$$\theta_k = -(\gamma_o+\ldots\gamma_{k-1}+1)\left[\frac{\gamma_o}{(\gamma_o+1)} \psi_o + \frac{\gamma_1}{(\gamma_o+1)(\gamma_o+\gamma_1+1)} \psi_1 + \right. \tag{1.7}$$

$$\left. + \frac{1}{(\gamma_o+\gamma_1+1)(\gamma_o+\gamma_1+\gamma_2+1)} \psi_2 +\ldots+ \right.$$

$$+\frac{1}{(\gamma_0+\ldots+\gamma_{k-2}+1)(\gamma_0+\ldots+\gamma_{k-1}+1)}\psi_{k-1}\Big]+$$

$$+\Big[\gamma_0+\frac{\gamma_1}{\gamma_0+1}+\frac{\gamma_2}{\gamma_0+\gamma_1+1}+\ldots+\frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_0+\ldots\gamma_{k-2}+1}+$$

$$+\frac{\gamma_0+\ldots+\gamma_k+1}{\gamma_0+\ldots\gamma_{k-1}+1}\Big]\Pi\,,$$

$k = 1,\ldots,n,$ *)

with the convention $\psi_0 = 0$, (cf. [5], Introduction, § 12). Note that the first of the integrals considered is equal to the integral

$$(1.8)\quad (i)^n \int_{\theta_1}^{\theta_i+2\Pi} \ldots \int_{\theta_n}^{\theta_n+(\gamma_1+\ldots+\gamma_{n-1}+1)2\Pi} F(\rho_1 e^{i\psi_1},\ldots,\rho_n e^{i\psi_n})\,d\psi_1\ldots d\psi_n,$$

divided by

$$(1.9)\qquad (\gamma_0+1)(\gamma_0+\gamma_1+1)\cdot\ \ldots\ \cdot(\gamma_0+\ldots\gamma_{k-1}+1).$$

Now let us replace the variables in the integral (1.8) by the transformation

$$(1.10)\quad \psi_k = (\gamma_0+\ldots+\gamma_{k-1}+1)\varphi_k-(\gamma_0\varphi_0+\ldots\gamma_{k-1}\varphi_{k-1})+(\gamma_0+\ldots+\gamma_k+1)\Pi,$$

$k = 1,\ldots,n,$

with the convention $\varphi_0 = 0$, where

$$(1.11)\qquad 0 \le \varphi_k < 2\Pi, \quad k = 1,\ldots,n.$$

*) for $k = 1$, we assume $\gamma_0+\ldots\gamma_{k-2}+1 = 1$.

It is easily ascertained that the Jacobian of this transformation is equal to (1.9). Consequently, taking into account (1.5) we notice that the integral (1.2) is equal to the integral

$$(1.12)\quad (i)^n \int_0^{2\Pi} \dots \int_0^{2\Pi} (F^{\circ}Q)(r_1 e^{i\varphi_1},\dots,r_n e^{i\varphi_n})\, d\varphi_1 \dots d\varphi_n \ .$$

Representing now the circles N_k, $k = 1,\dots,n$, in the form $w_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $0 \le \varphi_k < 2\Pi$, $k = 1,\dots,n$, and taking account of this in the integral (1.3) , we notice that this integral equals the integral (1.12) , which completes the proof of the equality of the integrals (1.2) and (1.3) .

The mapping Q^{-1}

Treating now Q as an analytic mapping, we have that the exists a mapping Q^{-1}, inverse to it (cf. [5], Chapter VI, p. 254). An arbitrary element of the mapping Q^{-1} is an inversion of some element of the mapping Q. At the same time, in C^n_* there is exactly one branch of the mappong Q^{-1}, which will be denoted by Q^{-1}_* . Every branch of the mapping Q^{-1} in a domain contained in C^n_* is there arbitrarily continuable and strictly finitely valued. In particular, this concerns the branch Q^{-1}_* being a restriction of the mapping Q^{-1} to the set C^n_* (cf. [4], V, Part I).

Indeed, the proofs of these properties run similarly to those of analogous properties of the mapping $\mathcal{P}^{-1}$ and its branches (cf. (iii), (iiii), (5i); Part II).

Let us take again a pair of domains C and D defined at the beginning and consider in D arbitrary branches of the mapping Q^{-1}.

In this situation, the following properties of these branches occur

1) Every branch $\mathcal{G}$ of the mapping Q^{-1} in the set D is a restriction of the mapping Q^{-1} to the set D (cf. [4], V, Part I); there exists exactly one such branch in D; all the values of this branch belong, of course, to C.

In fact, this follows immediately from ([4], V, VII, VIII, Part I) and the definition of the inverse function.

2) Every composition $\mathcal{G} \circ Q$ defined in C reduces to a certain rotation ρ restricted to C (cf. VI, Part I); the number of all different rotations ρ is finite and does not exceed $(\gamma_0+1)(\gamma_0+\gamma_1+1)\ldots(\gamma_0+\gamma_1+\ldots+\gamma_{k-1}+1)$; for every such rotation , the composition $Q \circ \rho$ coincides with Q.

Indeed, let $\{Q,w^0\}$ be an arbitrary element belonging to the mapping Q, with centre $w^0 \in C$. Let further $\zeta^0 = Q(w^0) \in D$, and let $\{K,\zeta^0\}$ be an arbitrary element belonging to $\mathcal{G}$, with centre ζ^0. The latter is then an inversion of some element $\{Q,t^0\}$ belonging to Q, with centre $t^0 \in C$, where $Q(t^0) = \zeta^0$ and $K(\zeta^0) = t^0$. Consequently, the composition $Q \circ \mathcal{G}$ constructed on the basis of the suitable, above-mentioned elements, reduces to identity. Next, forming on the basis of suitable elements the multiple compositions $Q \circ (\mathcal{G} \circ Q)$ and $(Q \circ \mathcal{G}) \circ Q$, we obtain, by ([4],Part I), the equality

$$Q \circ (\mathcal{G} \circ Q) = (Q \circ \mathcal{G}) \circ Q = Q. \tag{1.13}$$

Taking now into consideration an element $\{K \circ Q,w^0\}$ belonging to $\mathcal{G} \circ Q$, we have, in conformity with (1.13), in some neighbour-

hood of the point w^o, the equality

$$(1.14) \qquad (Q \circ (K \circ Q))(w) = Q(w).$$

Accepting $(K \circ Q)(w) = t$, where $w = (w_1,\ldots,w_n)$ and $t = (t_1,\ldots,t_n)$, we notice that $Q(t) = Q(w)$, which, according to (1.1) gives the following equalities

$$(1.15) \quad (-1)^{(\gamma_o+\ldots+\gamma_k+1)} \frac{[(\gamma_k-1)(\gamma_o+\ldots+\gamma_k)+\gamma_k]}{(\gamma_o+\ldots+\gamma_k+1)(\gamma_o+\ldots+\gamma_k)} \cdot$$

$$\cdot \frac{w_k^{(\gamma_o+\ldots+\gamma_{k-1}+1)}}{w_o^{\gamma_o} \ldots w_{k-1}^{\gamma_{k-1}}} =$$

$$= (-1)^{(\gamma_o+\ldots+\gamma_k+1)} \frac{[(\gamma_k-1)(\gamma_o+\ldots+\gamma_k)+\gamma_k]}{(\gamma_o+\ldots+\gamma_k+1)(\gamma_o+\ldots+\gamma_k)} \cdot$$

$$\cdot \frac{t_k^{(\gamma_o+\ldots+\gamma_{k-1}+1)}}{t_o^{\gamma_o} \ldots t_{k-1}^{\gamma_{k-1}}},$$

$k = 1,\ldots,n$.

From these equalities, by means of an easy induction, we get

$$(1.16) \qquad t_k = \tau_k \cdot w_k, \quad k = 1,\ldots,n,$$

where $\tau_1 = 1$ and each of the remaining numbers τ_k, $k = 2,\ldots,n$, is some root of a suitable degree $(\gamma_1+\ldots+\gamma_{k-1}+1)$ out of the product $\tau_1\ldots\tau_{k-1}$. Consequently, $K \circ Q$ in the element $\{K \circ Q, w^o\}$ is of the form (1.16), and, as is not difficult to see, the composition $(\mathcal{G} \circ Q)$ determined by this element is of the form (1.16) in the entire

set C too; from the definition of the numbers $\tau_1,\ldots,\tau_n$, it easily follows that this composition reduces in C to a certain rotation ρ, dependent, of course, on these numbers. The quantity of all rotations is finite and equal to the quantity of all possible systems of numbers $\tau_1,\ldots,\tau_n$, which does not exceed, as is easily seen, $(\gamma_o+1)(\gamma_o+\gamma_1+1)\ldots(\gamma_o+\ldots+\gamma_{k-1}+1)$. From (1.14) it follows immediately that for every rotation ρ, the composition $Q\circ\rho$ coincides with Q.

The rotations considered here will be called associated with Q.

lll) The valuedness of the mapping $\mathscr{G}$ does not exceed the quantity of rotations associated with Q.

Indeed, let us consider all the elements of our mapping with the same centre, at an arbitrary point $\zeta^o \in D$. A composition of any of these elements with a suitable element of the mapping Q determines a certain rotation (cf. (ll)). At the same time, to different elements $\{K_1,\zeta^o\}$, $\{K_2,\zeta^o\}$ of our mapping there correspond different rotations. In the contrary case, in view of the non-vanishing of the Jacobian of the mapping Q at a point w^o such that $Q(w^o) = \zeta^o$ as well as in view of the equality $K_1 \circ Q = K_2 \circ Q$, we immediately obtain the equality of the elements $\{K_1,\zeta^o\}$ and $\{K_2,\zeta^o\}$ (cf. [4], Proof of Theorem 2, Part II). Consequently, we notice at once that the quantity of the above-considered elements of our mapping does not exceed the quantity of rotations associated with Q, which simultaneously completes the proof of the property.

REFERENCES

[1] Charzyński Z. - Fonctions univalentes inverses. Polynomes univalentes, Bull. Sci. Lettres Łódź Classe III, 9, 7 (1958).

[2] Charzyński Z., Kozłowski A. - Geometry of Polynomials I, II and III (to be published in Bull. of Łódź Sc. Soc.).

[3] Kozłowski A. - Remark on systems of algebraic equations. (to be published in Bull. of Łódź Sc. Soc.).

[4] Kozłowski A. - Some properties of multiple-valued functions and mappings of several variables I and II (to be published in Bull. of Łódź Sc. Soc.).

[5] Saks S., Zygmund A. - Analytic Functions, Warszawa 1965.

[6] Шабат Б.В. - Введение в комплексный анализ, Москва 1969.

Institute of Mathematics
Łódź University

Presented at the Session of Mathematical-Physical Commission of Society of Arts and Sciences of Łódź by Z. Charzyński on June 30, 1977.

Interpolacja typu Czebyszewa na zerach pochodnej wielomianu, III

Streszczenie

W części tej zbadane są odwzorowania Q i Q^{-1} związane ściśle z odwzorowaniami z części I i II.

Z. Charzyński

Special interpolation of the Chebyshev type

The interpolation we shall speak about consists in determining a polynomial of degree $n+1$

$$(1) \qquad P(w) = C_0 + C_1 w + \ldots + C_{n+1} w^{n+1} \quad , \quad C_{n+1} \neq 0 \, ,$$

assuming preassigned values $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ in different zeros of its derivative $w_1, \ldots, w_n$, that is, satisfying the interpolation conditions

$$(2) \qquad P(w_k) = \zeta_k \quad , \quad P'(w_k) = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, n,$$

and some additional initial, boundary conditions, and the like.

Ordinary Lagrange's interpolation consists in determining a polynomial which, in preassigned arguments $w_1, \ldots, w_n$ takes preassigned values $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$.
In contradiction to this, in special interpolation of the Chebyshev type arguments are unknown - at disposal, but it is additionally reguired that also the derivative of the polynomial should vanish in these arguments, i.e., that it should assume given values doubly there.

Considering, for a moment, the matter in the real domain and taking into account that then the values of the polynomial in zeros of its derivative are its local extrema, we may treat the interpolation in question as the determination of

a polynomial which would possess preassigned extrema $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ in some unknown arguments $w_1,\ldots,w_n$.

If, under the normalization $C_{n+1} = 1$, the arguments $w_1,\ldots,w_n$ lie inside the interval $<-1,+1>$, whereas the interior and boundary extrema $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$, $P(-1),P(1)$ are so chosen that the graph of the polynomial should deviate from the abscissa axis as minimally as possible, i.e., that $\mathrm{Max}\,(|\zeta_1|,\ldots,|\zeta_n|,|P(-1)|,|P(1)|)$ should be the smallest, then the special interpolation leads to a Chebyshev polynomial. Hence its name as proposed.

The interpolation in question appeared in a local aspect in the present author's papers of 1955 and 1958 considering univalent functions ([2], [1]), and next, it was circumstantially investigated in a global aspect in the papers of the author and A. Kozłowski of 1978 ([3], [4]).

A special case of this interpolation in the real domain was examined in a global aspect by Davis, J. Mycielski and S. Paszkowski, and also by M.B. Korobkova in 1957, 1960, 1972 ([5], [7], [6]).

And here is certain information about some results:

I. A problem of mutual position of zeros of the derivative of a polynomial and its values in these zeros may be considered. It turns out that "distortion" restrictions hold here.

Theorem. If polynomial (1) is normalized by the conditions $P(0) = 0$, $P'(0) = 1$, then, between the above-

mentioned zeros and values, the relations

$$(3)\quad \frac{1}{4}\ \operatorname*{Min}_{j=1,\dots,n} |\zeta_j| \le |w_k| \le 4^{m+1}(m+1)\ \operatorname*{Max}_{j=1,\dots,n} |\zeta_j|,\ k = 1,\dots,n,$$

hold (cf. [3], II, p. 8).

II. A problem of existence and uniqueness of special interpolation may be considered. And so, since suitable, easy to derive, equations for the unknown quantities $w_1,\dots,w_n$ are not linear, in the class of complex polynomials the interpolation in question has, in general, several solutions. In order to obtain the uniqueness, it is necessary to limit the class of polynomials which are to realize the interpolation.

Let us confine ourselves to real polynomials for which all zeros of the derivative are real; in consequence, values of polynomials in these zeros lie on the real axis. The above-mentioned authors, Davis, Mycielski and Paszkowski, Korobkova, showed, under suitable additional conditions, the existence and uniqueness of such polynomials realizing special interpolation ([5], [7], [6]).

Let us limit ourselves to polynomials (1), canonical, i.e., normalized by the additional conditions $P(0) = 0$, $P'(0) = 1$ and such that all zeros of their derivative lie on the border of the greatest domain μ_p containing 0, in which $|P(w)| < 1$; in consequence, values of polynomials in these zeros lie on the unit circle. Canonical polynomials occur as extremal ones when univalent functions

are investigated (cf. [1], p. 20) . L. Kaczmarek has lately obtained for them the result below.

Theorem. For any preassigned values $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$, lying on the unit circle, different from one another, there exists exactly one canonical polynomial (1) realizing special interpolation.

Moreover, if the given values lie symmetrically with respect to the real axis, then the same holds for the zeros $\nu_1,\ldots,\nu_n$ of the derivative of polynomial (1).

REFERENCES

[1] Charzyński Z., Fonctions univalentes inverses. Polynomes univalentes, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Classe III 9.7(1958).

[2] Charzyński Z., Sur les fonctions univalentes, algébriques bornées, Rozprawy Matematyczne X (1955).

[3] Charzyński Z., Kozłowski A., Geometry of polynomials (I, II, III), Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź XXVIII 5,6,7 (1978).

[4] Charzyński Z., Kozłowski A., Interpolation of the Chebyshev type on zeros of the derivative of a polynomial (I, II, III) Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź, XXVIII 8,9,10 (1978).

[5] Davis , Extrema of a Polynomial, Amer. Math. Monthly 64, 9 (1957).

[6] Korobkova, M.B., A theorem on the existence of a spline--polynomial with a given sequence of extrema, Mat. Zametki 11 (1972), 251-258 .

[7] Mycielski J., Paszkowski S., A Generalization of Chebyshev Polynomials, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math., Astr., Phys., 8,7 (1960), 433-438.

POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

KOMITET REDAKCYJNY
KAROL BORSUK redaktor
ANDRZEJ BIAŁYNICKI-BIRULA, BOGDAN BOJARSKI,
ZBIGNIEW CIESIELSKI, JERZY ŁOŚ, WIKTOR MAREK,
ZBIGNIEW SEMADENI

CXCV

ZYGMUNT CHARZYŃSKI
et
JANINA ŚLADKOWSKA-ZAHORSKA

Application de la méthode des fonctions algébriques à la représentation conforme

WARSZAWA 1982
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 5
Notions préliminaires 7
I. Fonctions rationnelles spéciales 17
1. Interpolation locale. 17
2. Approximation des fonctions rationnelles spéciales 23
3. Approximation des arcs 27
II. Transformation par les fonctions algébriques spéciales 31
1. Étude de la fonction intérieure 31
2. Représentation avec une seule coupure 36
III. Théorèmes de Riemann et de Löwner 38
1. Familles de Löwner 38
2. Démonstration du résultat fondamental 40
3. L'équation de Löwner pour les domaines spéciaux 53
Bibliographie 55

Introduction

Ce travail contient un développement nouveau de la méthode des fonction algébriques et certaines applications de cette méthode. Elle a été utilisée pour la première fois par Z. Charzyński dans [3] dans l'étude des problèmes extrémaux, ensuite dans [4], enfin par Z. Charzyński et J. Śladkowska dans [6] pour obtenir la variation intérieure. Dans le présent travail elle est développée dans la direction de la représentation de Riemann et de l'homotopie de Löwner.

L'idée essentielle de cette méthode consiste à opérer, non pas sur des domaines plans arbitraires, mais sur des domaines spéciaux, bornés par les lignes de niveau des parties imaginaires de certaines fonctions rationnelles, c'est-à-dire sur des domaines tels que sur leurs frontières s'annule la partie imaginaire de certaines fonctions rationnelles.

En limitant ainsi le genre des domaines considérés, on ne diminue pas essentiellement la généralité, car on peut approcher arbitrairement au sens du noyau une large classe de domaines plans par des domaines sur les frontières desquels s'annule la partie imaginaire d'une certaine fonction rationnelle; p. ex., on peut approcher chaque domaine G avec une coupure par un domaine analogue D, qui est borné par les lignes de niveau dè la partie imaginaire d'une fonction rationnelle R (v. [3], lemme 7, le lemme 1, 3, I de ce travail et une généralisation de [12], théorème 1). La construction de cette fonction rationnelle est simple et fondée en principe sur le théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes et sur le théorème de Runge.

La partie imaginaire $\operatorname{Im} R$ de la fonction rationnelle mentionnée jouit alors de propriétés analogues à celles de la fonction de Green du domaine D: elle s'annule sur la frontière de D et elle est partout harmonique, à l'exception d'un nombre fini de points singuliers correspondant aux pôles de la fonction R (dans les considérations du présent travail tels sont les domaines $K(0, 1) \setminus H_t$, limités par les lignes de niveau $K^*(0, 1) \cup H_t$ de la partie imaginaire de la fonction $\Omega(w)$ avec une singularité polaire au point 0, v. pp. 38–40).

Enfin la représentation conforme A du cercle unité sur un domaine spécial avec une coupure satisfait à une équation algébrique de la forme $R(A(z)) = S(z)$, où S est également une fonction rationnelle liée à R par certaines relations arithmétiques (dans nos considérations cette représenta-

Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 195,
PWN, Warszawa 1982, 55 pp.

tion est donnée par la fonction $a(z, t)$, où le paramètre de propagation t est fixé pour le moment, et la relation mentionnée plus haut est $\Omega(a(z, t)) = \chi(z, t)$; les relations arithmétiques sont basées sur l'écartement des singularités, c'est-à-dire sur l'égalité des fonctions $\Omega(w)$ et $\chi(z, t)$ pour les racines des derivées correspondantes (v. 1, III, théorème fondamental, les relations (13), les notations (12) et les relations essentielles (8)). L'équation mentionnée est analogue à l'équation $\mathscr{F}(A(z)) = \log z$, qui lie la représentation conforme à la fonction de Green, en outre $\mathscr{F}$ signifie ici une fonction analytique multivoque, générée par la fonction de Green.

Le caractère de ce travail est monographique. Il comprend des notions préliminaires et trois chapitres, dont chacun peut être considéré comme une note séparée. Cependant, ayant en vue l'idée dominante commune on a jugé utile de le réunir en un tout plus étendu.

Ainsi, dans les notions préliminaires on trouvera les définitions et les résultats dont on profite dans la suite; les plus importants sont les résultats qui concernent les représentations locales des angles à l'aide de fonctions holomorphes, pp. 13–15, et ceux qui concernent les propriétés locales des fonctions implicites.

Le chapitre I traite, d'une part, de l'interpolation du type de Čebyšev, qui intervient déjà dans [3] et [4] chez Z. Charzyński, dans [6] chez Z. Charzyński et J. Śladkowska, et dans [10] chez J. Mycielski et S. Paszkowski dans des considérations concernant l'approximation. D'autre part, ce chapitre contient des lemmes sur l'approximation des fonctions rationnelles par des fonctions rationnelles de structure analogue, mais données de propriétés complémentaires, et sur l'approximation des arcs de Jordan par des arcs qui sont lignes de niveau de la partie imaginaire de certaines fonctions rationnelles.

Le chapitre II contient l'étude des fonctions holomorphes dans le cercle unité, qui satisfont à une certaine équation algébrique et sont appelées fonctions algébriques spéciales; on trouve que ces fonctions sont bornées, univalentes et on détermine la forme de ces fonctions dans l'entourage des points ordinaires et singuliers de la circonférence unité.

Le chapitre III contient une démonstration du théorème de Riemann pour les domaines $K(0, 1)\setminus H_t$ mentionnés plus haut, qui revient à démontrer l'existence de la fonction représentante $a(z, t)$ comme solution de l'équation du type $\Omega(a(z, t)) = \chi(z, t)$. On y arrive en faisant varier continûment avec le paramètre t le second membre de cette équation, de façon à écarter les singularités; la fonction intérieure $a(z, t)$ varie avec le second membre de l'équation à partir de l'identité jusqu'à la représentation cherchée. Il importe de signaler le point délicat du cas (36), qui permet, quand $T = 0$, de passer du cercle entier au cercle avec une petite coupure, pp. 46–47. Le procédé qui suit est fondé sur l'appareil banal du théorème des fonctions implicites et de l'interpolation du type de Čebyšev. Le chaptire mentionné contient ensuite

une démonstration très courte du difficile théorème de Löwner. De cette façon, par un seul procédé on établit l'existence de la représentation conforme (Riemann) et son expression par la composition successive de représentations multiples, proches de l'identité, avec une petite coupure, de la forme

$$z-\varepsilon z\frac{1+z\varkappa}{1-z\varkappa}+o(\varepsilon),$$

c'est-à-dire en passant de l'identité à la représentation avec une grande coupure (Löwner). On observe le même fait sous une forme plus dissimulée dans la démonstration du théorème de Riemann due à Montel (v. [11], pp. 225–229); la fonction qui y figure, $F = F_3 \circ F_2 \circ F_1$, proche de l'identité, avec le paramètre a choisi proche de la circonférence du cercle, a une forme analogue à celle mentionnée plus haut (Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes bornées*, Dissertationes Math. 2, pp. 11–16) et, en fait, on obtient la représentation mayennant la composition multiple de telles fonctions, ce qui est caché par la prise de la borne supérieure m.

Ce travail, avec ceux que nous avons cités précédemment, achève une certaine étape dans les recherches basées sur l'idée présentée au début. Ils permettent de présenter sous un aspect uniforme les éléments principaux de la théorie classique et contemporaine des représentations conformes, tels que le théorème de Riemann, la variation intérieure et la paramétrisation de Löwner.

Les calculs sont longs, mais le procédé est simple, difficile à exprimer avec toute la précision voulue, mais facile à concevoir.

Signalons enfin au lecteur que dans ce travail les théorèmes, les lemmes et les formules d'une même partie sont cités en indiquant leurs numéros, ceux d'une même chapitre en indiquant leurs numéros et ceux de la partie correspondante, enfin ceux d'un autre chapitre en indiquant leurs numéros, ceux de la partie et du chapitre correspondants.

Notions préliminaires

Notations et définitions.

1. (a, b), $[a, b]$ et $\{a, b\}$ désigneront resp. un intervalle ouvert d'extrémités a et b, un intervalle fermé de mêmes extrémités et un intervalle d'extrémités a et b, dans le cas où l'on ne saura pas si les extrémités lui appartiennent ou non.

2. $[\overrightarrow{p, q}]$ désignera un segment orienté d'origine p et d'extrémité q, où p et q sont des nombres arbitraires complexes.

3. Dans le cas d'un ensemble plan E nous emploierons aussi les symboles E^*, E', E^0, $\bar{E}$ pour désigner respectivement la frontière, l'ensemble complémentaire dans le plan entier, l'intérieur, la fermeture de l'ensemble E.

4. $K(a, r)$ désignera le cercle de centre a et de rayon r, et sera appelé entourage du point a de rayon r.

5. $S(a, r)$ désignera l'entourage $K(a, r)$ excepté son centre a et sera dit voisinage du point a de rayon r.

6. Pour un point a situé sur l'axe réel les parties de l'entourage $K(a, r)$ située dans le demi-plan ouvert inférieur et supérieur, le point a étant compris ou non, seront appelées respectivement demi-entourage ou demi-voisinage inférieur et supérieur.

6′. Pour un point a situé sur la circonférence unité $K^*(0, 1)$ les parties de l'entourage $K(a, r)$ situées à l'intérieur et à l'extérieur de cette circonférence, le point a étant compris ou non, seront appelées respectivement demi-entourage ou bien demi-voisinage intérieur ou extérieur.

7. $\tilde{A}$ désignera l'ensemble symétrique de l'ensemble A par rapport à la circonférence unité $K^*(0, 1)$; en particulier, $\tilde{K}(0, 1)$ désignera l'extérieur du cercle unité.

8. $\varrho(x, y)$, $\varrho(x, A)$ et $\varrho(A, B)$ désigneront respectivement la distance des points x, y, la distance du point x à l'ensemble A, la distance des ensembles A, B.

9. Le nombre $h(A, B)$ défini par la formule

$$h(A, B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\varrho(a, b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\varrho(b, a)\}$$

s'appellera distance des ensembles A et B au sens de Hausdorff.

10. Nous admettons les notions concernant les courbes plans et les notions adoptées dans l'Introduction, §12 de [11]. Outre le paramètre t d'une courbe parcourant un segment $[a, b]$, c'est-à-dire un segment de l'axe réel, nous utiliserons également un paramètre t parcourant un segment $[ai, bi]$.

11. Nous appellerons secteur circulaire l'ensemble des points du plan complexe de la forme $\zeta = \zeta_0 + \varkappa e^{i\tau}$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa^*$, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $0 < \tau_2 - \tau_1 \leqslant 2\pi$, y compris le point ζ_0. Le point ζ_0 sera appelé centre, le nombre $\varkappa^*$ — rayon, les nombres τ_1, τ_2 — limites angulaires et la différence $\tau_2 - \tau_1$ — écart du segment considéré.

12. Nous adoptons les notions de noyau, une suite de domaines plans, de convergence et de limite au sens du noyau d'une suite de domaines plans définies dans [2].

13. Les points de la circonférence unité serons aussi notés sous la forme $e^{i\alpha}$ sans indiquer que α est réel.

14. Nous appellerons domaine avec une coupure ou domaine de Löwner le domaine simplement connexe contenu dans $K(0, 1)$, de la forme $B = K(0, 1) \setminus L$, où L est un arc de Jordan partant d'un point quelconque de la

Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 195,
PWN, Warszawa 1982, 55 pp.

circonférence $K^*(0, 1)$ à l'intérieur de $K(0, 1)$ et ne passant pas par le point 0; en même temps l'arc L sera dit coupure de Löwner.

15. Nous dirons que l'ensemble $E \subset \overline{K(0, 1)}$ remplit presque le cercle $K(0, 1)$, si la différence $\overline{K(0, 1)} \setminus E$ ne contient pas de points intérieurs.

16. Etant donnée une courbe C: $\zeta = \zeta(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, nous appellerons la fonction $\zeta(\tau)$ et l'ensemble des valeurs de cette fonction Γ respectivement représentation paramétrique et image géométrique de C.

Suivant le sens du contexte le terme C signifiera la représentation paramétrique, ou l'image géométrique de la courbe, ou encore les deux en même temps. Pareillement, étant donnée une fonction $f(\zeta)$ quelconque, définie sur l'image géométrique de la courbe, $f(C)$ signifiera la fonction composée $f(\zeta(\tau))$, ou l'image de l'ensemble $f(\Gamma)$, ou encore les deux à la fois. En particulier, lorsque $f(\zeta)$ est une fonction complexe, $f(C)$ représente également une courbe plane.

17. Nous appellerons distance habituelle de deux courbes de représentations C_1: $\zeta = \zeta_1(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, et C_2: $\zeta = \zeta_2(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, le nombre $\sup_{\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta} |\zeta_2(\tau) - \zeta_1(\tau)|$.

17′. Nous dirons qu'une suite de courbes C_n: $\zeta = \zeta_n(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, $n = 1, 2, \ldots$, est convergente au sens paramétrique vers une courbe C: $\zeta = \zeta(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, si la distance habituelle des C_n à C tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

18. Etant donnée une fonction $f(\zeta)$, définie dans un ensemble D situé dans le demi-plan supérieur ou dans le cercle unité, nous désignerons par $\bar{f}(\zeta)$ ou $\tilde{f}(\zeta)$ la fonction définie dans l'ensemble symétrique correspondant par la formule

$$\bar{f}(\zeta) = \overline{f(\bar{\zeta})} \quad \text{ou} \quad \tilde{f}(\zeta) = \left(\overline{f(\bar{\zeta}^{-1})}\right)^{-1}.$$

Si $f(\zeta)$ est holomorphe, alors $\bar{f}(\zeta)$ ou $\tilde{f}(\zeta)$ est holomorphe et réciproquement.

19. Les fonctions à arguments et à valeurs complexes seront appelées fonctions complexes ou, s'il n'y a pas de malentendu à craindre, simplement fonctions.

20. Une fonction sera appelée symétrique, si pour tout couple de points symétriques par rapport à l'axe réel ou à la circonférence unité elle est en même temps définie ou non et si elle y prend des valeurs symétriques par rapport à l'axe réel ou à la circonférence unité. Ainsi il existe quatre genres de fonctions symétriques selon le genre de la symétrie de la variable indépendante et dépendante. A deux d'entre eux sont liées les notations indiqués plus haut.

21. Une fonction sera appelée holomorphe en un point ζ_0, si elle est définie au point ζ_0, si ζ_0 est un point d'accumulation des arguments ζ, pour

lesquels la fonction en question est définie, et si l'on peut la prolonger à une fonction holomorphe dans ζ_0.

22. Nous dirons que la fonction $f(\zeta)$ prend en ζ_0 la valeur ω_0 avec la multiplicité γ, si $f(\zeta)$ peut être représentée dans un certain entourage du point ζ_0, partout où $f(\zeta)$ existe, par la formule $\omega_0+\omega_1((\zeta-\zeta_0)^\gamma)+\omega_2((\zeta-\zeta_0)^\gamma)^2+\ldots$, où γ est un exposant réel positif, $\omega_1 \neq 0$, et $(\zeta-\zeta_0)^\gamma$ est une certaine branche de la puissance; nous supposons que $f(\zeta)$ est définie en ζ_0.

23. Une fonction rationnelle $\delta(\zeta)$ ayant des pôles de mêmes multiplicités seulement aux points 0 et ∞ et réelle sur la circonférence-unité, c'est-à-dire de la forme

$$\delta(\zeta) = \frac{f_k}{\zeta^k} + \ldots + \frac{f_1}{\zeta} + f_0 + \bar{f}_1 + \ldots + \bar{f}_k \zeta^k, \quad k \geqslant 1,\ f_k \neq 0,\ f_0 - \text{réel},$$

sera appelée fonction rationnelle spéciale de degré $2k$.

24. Soit $\mathscr{J}$ un arc régulier (v. [11], pp. 91–92) de Jordan, contenu dans le cercle $K(0, 1)$, à l'exception de son origine qui est située sur la circonférence $K^*(0, 1)$, et qui ne passe pas par zéro. Soit ensuite $\delta(\zeta)$ une fonction rationnelle spéciale. Nous appellerons $\mathscr{J}$ arc spécial correspondant à la fonction $\delta(\zeta)$, si cette derniére prend sur celui-ci uniquement des valeurs réelles.

Dans la suite nous bornerons, sans l'indiquer chaque fois, aux arcs spéciaux orthogonaux à la circonférence-unité.

Il est évident que si $\delta(\zeta)$ est une fonction rationnelle spéciale, alors $i\zeta\delta'(\zeta)$ l'est également, de même degré $2k$ et sans terme constant.

25. Nous appellerons domaine spécial un domaine de la forme $K(0, 1)\setminus\mathscr{J}$, où $\mathscr{J}$ est un arc spécial.

26. Nous appellerons proches deux fonctions $f_1(\zeta)$ et $f_2(\zeta)$ holomorphes dans un domaine D, si elles diffèrent peu dans un ensemble fermé contenu dans D, suffisamment grand.

On voit facilement que deux fonctions rationnelles spéciales de même degré sont proches, si leurs coefficients respectifs sont proches et réciproquement.

27. Nous mettons les fonctions de la variable τ à valeurs situées sur la circonférence-unité également sous la forme $e^{i\alpha(\tau)}$ sans indiquer que $\alpha(\tau)$ est constamment réel. Par continuité de la fonction prise sous cette forme nous comprendrons la continuité de $\alpha(\tau)$.

28. Nous dirons que la fonction

$$a(z) = a_1 z + \ldots, \quad a_1 > 0,\ z \in K(0, 1),$$

est une fonction algébrique spéciale, si elle satisfait dans le cercle unité à l'équation

$$\Omega(a(z)) = \chi(z),$$

où $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ sont des fonctions rationnelles spéciales. En même temps, nous appellerons les fonctions $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ resp. déterminante et accommodée. Nous appellerons parfois la fonction $a(z)$ fonction intérieure.

29. Une fonction $f(z)$ de la forme

$$f(z) = b_1 z + \ldots, \quad b_1 > 0,$$

holomorphe, univalente et satisfaisant à la condition

$$|f(z)| < 1$$

dans le cercle unité, sera appelée fonction de Löwner.

Résultats auxiliaires. Nous indiquerons ici quelques simples faits qui nous seront utiles dans la suite.

30. Chaque fonction réelle $f(t)$, continue dans un intervalle $[0, T]$, peut être arbitrairement approchée par des polynômes pairs.

Pour le démontrer prenons dans l'intervalle $[0, T^2]$ la fonction

$$\hat{f}(\tau) = f(\sqrt{\tau})$$

et approchons-la suffisamment dans cet intervalle par un polynôme $\hat{P}(\tau)$. Alors, comme on le voit, le polynôme pair $P(t^2)$ approche arbitrairement $f(t)$ dans l'intervalle $[0, T]$.

31. Chaque fonction $f(t)$, continue dans un intervalle fini $[0, T]$ et telle que $f(0) = 0$ peut y être approchée arbitrairement par des polynômes impairs.

Il suffit à cet effet de prendre la fonction continue

$$f^*(t) = \begin{cases} f(\delta)/\delta, & 0 \leqslant t \leqslant \delta, \\ f(t)/t, & \delta \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

où δ est un nombre arbitraire positif suffisamment petit et, en tenant compte de ce qui précède, de l'approcher suffisamment par un certain polynôme pair $P^*(t)$. Alors il est évident que le polynôme impair $tP^*(t)$ approchera $f(t)$ arbitrairement dans l'intervalle $[0, T]$.

32. Etant donnée une fonction $F(\zeta)$, holomorphe en un point ζ_0, qui ne se réduit pas à une constante et prend au point ζ_0 une valeur réelle r_0 avec une certaine multiplicité k, il existe un système de $2k$ arcs réguliers L_j^+, L_j^-, $j = 1, \ldots, k$, partant du point ζ_0 et, à l'exception de ce point, disjoints et tels que fonction $F(\zeta)$ est réelle sur ces arcs et seulement sur ces arcs dans chaque entourage suffisamment petit de ζ_0.

En effet, représentant la fonction donnée sous la forme $F(\zeta) = r_0 + (\zeta - \zeta_0)^k F_1(\zeta)$ et prenant dans un entourage suffisamment petit du point ζ_0 une branche arbitraire du radical $G(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)\sqrt[k]{F_1(\zeta)}$, nous vérifions facilement qu'on peut mettre les arcs demandés $L_j^{\pm}$ sous la forme para-

métrique $\zeta = \zeta_0 + G^{-1}(\varepsilon_j^{\pm} t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $j = 1, \ldots, k$, où T est un nombre positif suffisamment petit, et $\varepsilon_j^{\pm}$, $j = 1, \ldots, k$, sont les k-ièmes racines de ± 1 (v. [11], p. 165). Nous constatons aussi facilement qu'un tel système d'arcs est localement unique, ou bien, ce qui est le même, qu'il existe un entourage du point ζ_0 tel que tout arc le long duquel la fonction $F(\zeta)$ est réelle, partant de ζ_0 et contenu dans cet entourage, est compris dans un arc du système.

De ce qui précède nous déduisons facilement qu'étant donnés un arc régulier L et une fonction $F(\zeta)$ holomorphe sur L, qui ne se réduit pas à une constante sur L et qui est réelle sur L, il existe un arc régulier l, partant d'une extrémité de L et, à l'exception de ce point, disjoint avec lui, tel que F est également réelle sur l.

33. Soient $U(w)$ et $V(z)$ des fonctions holomorphes resp. aux points w_0 et z_0, qui y prennent leurs valeurs avec les multiplicités resp. r et s et telles que $U(w_0) = V(z_0)$; on suppose que z_0 est sur l'axe réel ou sur la circonférence-unité.

On vérifie que pour qu'il existe une fonction implicite $w = b(z)$ dans un demi-entourage du point z_0, telle que $U(b(z)) = V(z)$ et $b(z_0) = w_0$, il faut et il suffit que cette fonction ait la forme

$$b(z) = U_0^{-1}(V_0(z)),$$

où

$$U_0(w) = (w - w_0)\sqrt[r]{U_1(w)}, \qquad V_0(z) = \sqrt[r]{(z - z_0)^s}\sqrt[r]{V_1(z)},$$

où nous admettons

$$U(w) - U(w_0) = (w - w_0)^r U_1(w), \qquad V(z) - V(z_0) = (z - z_0)^s V_1(z)$$

et où il faut choisir les branches des radicaux convenables ou bien arbitraires.

Des faits analogues ont lieu pour l'entourage du point z_0, sous condition supplémentaire que s soit un multiple de r; $b(z)$ est alors évidemment holomorphe au point z_0 et y prend la valeur w_0 avec la multiplicité s/r.

Si en outre les fonctions données $U(w)$ et $V(z)$ sont symétriques par rapport à l'axe réel et les points w_0 et z_0 sont sur cet axe, si $s = r$ et si pour les arguments appartenant au demi-plan donné les valeurs de $b(z)$ appartiennent, par exemple aussi à ce même demi-plan, alors $b(z)$ est également symétrique par rapport à l'axe réel et conserve le sens de cet axe au point z_0, c'est-à-dire $b'(z_0) > 0$.

Il en est de même pour la symétrie par rapport à la circonférence-unité.

34. Soit $b(z)$ une fonction holomorphe en un point z_0 sur l'axe réel, symétrique par rapport à cet axe et respectant son sens, c'est-à-dire telle que $b'(z_0) > 0$; alors pour les arguments z situés dans un entourage suffisamment petit du point z_0 les valeurs de la fonction $b(z)$ au-dessus de l'axe réel, sur l'axe réel et au dessous de l'axe réel sont situées d'une façon analogue. Par conséquent, si l'image par $b(z)$ d'un entourage λ_0 du point z_0 couvre d'une

façon univalente un entourage μ_0 du point w_0, alors les images des parties inférieure et supérieure de λ_0 couvrent respectivement les parties inférieure et supérieure de μ_0.

Il en est de même pour la symétrie par rapport à la circonférence-unité pour les demi-entourages intérieur et extérieur.

35. Soit une suite de fonctions $\{M_f(\zeta)\}$, holomorphes dans un entourage ω de rayon r d'une certain point ζ_0 et convergente dans celui-ci presque uniformément vers une certaine limite $M(\zeta)$, admettant une fonction inverse. Alors, appliquant le théorème de Hurwitz, nous obtenons facilement qu'il existe un entourage λ du point ζ_0 et entourage μ de l'image $\tau_0 = M(\zeta_0)$ tels que pour f suffisamment grands les fonctions $M_f(\zeta)$ admettent des fonctions inverses dans λ, les images $M_f(\lambda)$ couvrent μ et la suite des fonctions inverses $\{M_f^{-1}(\tau)\}$ tend dans μ presque uniformément vers $M^{-1}(\tau)$. La situation est analogue dans le cas où l'on remplace l'entourage par le voisinage et l'on suppose que les fonctions $M_f(\zeta)$ et $M(\zeta)$ ont en ζ_0 des pôles simples.

Nous obtenons une généralisation facile de ce qui précède en remplaçant pour les fonctions $M_f(\zeta)$ l'entourage constant ω par l'entourage variable ω_f de même rayon r et de centre ζ_f tendant vers ζ_0. Il suffit à cet effet de considérer la suite $\{M_f(\zeta-\zeta_0+\zeta_f)\}$ et d'appliquer ce qui précède.

On généralise encore facilement ce dernier résultat en supposant de plus que les points ζ_f et ζ_0 sont sur l'axe réel, que $M_f(\zeta)$ sont symétriques par rapport à cet axe et, par suite, que ω_0 est également réel et que la transformation $M(\zeta)$ respecte le sens de l'axe réel. Alors, nous pouvons remplacer les entourages λ et μ par les demi-voisinages inférieur et supérieur. Il suffit pour cela d'appliquer encore le théorème de Rouché. Il en est de même pour la symétrie par rapport à la circonférence.

On peut enfin remplacer dans ce qui précède les entourages par les voisinages et supposer que les fonctions $M_f(\zeta)$ et $M(\zeta)$ ont aux points ζ_f et ζ_0 des pôles simples. Il suffit pour cela de considérer les inverses de ces fonctions et de leur appliquer les considérations précédentes.

36. Soit une fonction de la forme

$$f(z) = w_0 + w_1(z-z_0) + w_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

en un point z_0, qui y prend la valeur w_0 avec la multiplicité (1), soit en outre $\alpha = \arg w_1$. Soit ensuite $\mathscr{R}^*$ un secteur circulaire de centre z_0, composé des points de la forme $z = z_0 + re^{i\varphi}$, où $0 \leqslant r < r^*$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, d'écart $\varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi/(1)$. Alors il existe des nombres $\varepsilon_0 > 0$ et $\sigma_0 > 0$, suffisamment petits, tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et tout $0 < \sigma < \sigma_0$ existe un $\eta > 0$ tel que tout point du secteur circulaire S, composé des points $w = w_0 + \varrho e^{i\psi}$, où $0 \leqslant \varrho < \eta$, $(1)\varphi_1 + \alpha + \sigma < \psi < (1)\varphi_2 + \alpha - \sigma$, d'écart $\varphi_2 - \varphi_1 - 2\sigma$, est admis d'une façon univalente exactement en un seul point du secteur partiel $\mathscr{R}$ contenu dans $\mathscr{R}^*$, composé des points $z = z_0 + re^{i\varphi}$, où $0 < r < \varepsilon$, $\varphi_1 < \varphi$

$< \varphi_2$. En même temps il existe un $\sigma_{10} > 0$ tel que pour tout $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma_{10}$ et tout $\eta_1 > 0$ existe un $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$ tel que l'image du secteur $\mathscr{R}_1$, contenu dans $\mathscr{R}^*$, composé des points $z = z_0 + re^{i\varphi}$, où $0 \leqslant r < \varepsilon_1$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, est contenue dans le secteur circulaire S_1, composé des points $w = w_0 + \varrho e^{i\psi}$, où $0 \leqslant \varrho < \eta_1$, $(1)\varphi_1 + \alpha - \sigma_1 < \psi < (1)\varphi_2 + \alpha + \sigma_1$, d'écart $\varphi_2 - \varphi_1 + 2\sigma_1$. A cet endroit il faut introduire la restriction évidente $(1)(\varphi_2 - \varphi_1) < 2\pi$.

En effet, prenons comme ε_0 un nombre positif arbitraire, fixé dans la suite, assez petit pour que $f(z)$ admette une inverse dans l'entourage $v = \{|z - z_0| < \varepsilon_0\}$ et prenons comme σ_0 un nombre positif arbitraire, fixé dans la suite, plus petit que $\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$. Posons $\tau = f(v)$ et désignons par $z = g(w)$, $w \in \tau$, la fonction inverse de $w = f(z)$, $z \in v$; il est évident que $z_0 = g(w_0)$. Etant donné que le quotient $\dfrac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0}$ est différent de zéro dans un entourage du point w_0, alors il y existe, comme on le voit facilement, une branche déterminée de la fonction

$$\log \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = L(w),$$

telle que

$$\operatorname{Im} L(w_0) = \arg g'(w_0) = \arg \frac{1}{f'(z_0)} = -\alpha.$$

Prenons maintenant $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et $\sigma \leqslant \sigma_0$ arbitraires. De la continuité de la fonction $L(w)$ nous tirons qu'il existe un $\hat{\eta} > 0$ tel que pour $|w - w_0| < \hat{\eta}$ on a $|L(w) - L(w_0)| < \operatorname{Min}(\sigma, |L(w_0)|)$ et $w \in \tau$. Soit

$$\eta = \operatorname{Min}\left(\hat{\eta}, \frac{\varepsilon}{\exp 2|L(w_0)|}\right)$$

le nombre η demandé. Alors tout point du secteur correspondant $S \subset \tau$, mentionné plus haut, est, en vertu du théorème de Rouché, l'image exacte d'un seul point $z = g(w)$ de l'entourage v, en outre on a

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |g(w) - g(w_0)| = |(w - w_0)\exp L(w)| \\ &\leqslant |w - w_0| \exp\left(|L(w_0)| + |L(w) - L(w_0)|\right) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\exp 2|L(w_0)|} \exp 2|L(w_0)| = \varepsilon \end{aligned}$$

et en même temps

$$\left|\arg \frac{z - z_0}{w - w_0} - (-\alpha)\right| = |\operatorname{Im} L(w) - \operatorname{Im} L(w_0)| < \sigma,$$

ou $|\arg(z - z_0) - \psi + \alpha| < \sigma$, donc

$$\varphi_1 < \operatorname{Arg}(z - z_0) < \varphi_2$$

et de là définitivement $z \in \mathscr{R}$. Cela nous donne la première partie de la propriété annoncée. Pour obtenir la seconde il suffit d'étudier dans v une branche du

$$\log \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = L_1(z),$$

telle que $\operatorname{Im} L_1(z_0) = \alpha$, ensuite de choisir d'abord $\varepsilon > 0$ assez petit pour que

$$|L_1(z)-L_1(z_0)| < \operatorname{Min}(\sigma_1, |L_1(z_0)|) \quad \text{pour} \quad |z-z_0| < \hat{\varepsilon}$$

et enfin de prendre

$$\varepsilon_1 = \operatorname{Min}\left(\hat{\varepsilon}_1, \frac{\eta_1}{2\exp|L(z_0)|}\right).$$

37. Nous obtenons une généralisation facile de ce qui précède en considérant dans $\mathscr{R}$ les fonctions de la forme

$$f(z) = w_0 + w_p\big((z-z_0)^{1/q}\big)^p + w_{p+1}\big((z-z_0)^{1/q}\big)^{p+1} + \ldots$$

où p et q sont des nombres naturels quelconques, $w_p \neq 0$. Alors nous obtenons un énoncé qui correspond directement au précédent en y remplaçant le symbole (1) par (p/q) et α par

$$\alpha + \left(p \arg(\hat{z}-z_0)^{1/q} - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cdot\frac{p}{q}\right),$$

où

$$\hat{z} = z_0 + \frac{r}{2}\exp\left(i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right).$$

Pour cela il suffit de présenter la fonction $f(z)-w_0$ sous forme de la composition

$$\big(g\big((z-z_0)^{1/q}\big)\big)^p, \quad \text{où} \quad g(\zeta) = \zeta(w_p + w_{p+1}\zeta + \ldots)^{1/p},$$

avec un choix arbitraire de la branche de la puissance $1/p$, et ensuite de profiter de ce qui précède pour $g(\zeta)$ et des propriétés des fonctions-puissances. A l'endroit correspondant il faut introduire la restriction évidente $(p/q)(\varphi_2-\varphi_1) \leqslant 2\pi$.

Remarquons de plus que dans le cas $(p/q)(\varphi_2-\varphi_1) > 2\pi$ on peut de même prouver que tout point de l'entourage de rayon η du point w_0 est admis d'une façon univalente au moins en un point du secteur correspondant $\mathscr{R}$.

38. Soit S^*: $w = w_0 + \varrho e^{i\psi}$, où $0 \leqslant \varrho < \varrho^*$, $\psi_1 < \psi < \psi_2$, $\psi_2-\psi_1 \leqslant 2\pi$, un secteur circulaire. Soit ensuite H: $w = w(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\gamma$ ou, s'il y a lieu, $t_0-\gamma \leqslant t \leqslant t_0+\gamma$, $w(t_0) = w_0$, un arc régulier, partant de l'origine w_0, qui peut passer par w_0.

Alors ont lieu les propriétés suivantes relatives à la configuration du secteur S^* et de l'arc H.

Si l'écart du secteur S^* est plus grand que π et l'arc H passe par w_0, H doit avoir des points communs avec l'intérieur de S^*.

Si le secteur S^* est contenu dans le cercle $K(0, 1)$, excepté le centre w_0, qui est sur la circonférence $K^*(0, 1)$, et si l'écart du secteur est plus grand que $\pi/2$ et l'arc H part de l'origine w_0 orthogonalement à l'intérieur du cercle $K(0, 1)$, alors H doit avoir des points communs avec l'intérieur de S^*.

En effet, supposant que le nombre $d = \psi_2 - \psi_1 - \pi$ est positif, nous constatons facilement qu'au moins un des deux secteurs circulaires de centre w_0, de rayon ϱ^* et d'écart d, symétriques par rapport au point w_0, doit être contenu dans S^*. D'autre part, prenant deux tels secteurs, symétriques par rapport à la tangente à l'arc H au point w_0, par lequel cet arc passe, nous voyons immédiatement que chacun de ces secteurs contient des points de l'arc H différents de w_0.

La combinaison de ces faits donne la première des propriétés annoncées. Supposant ensuite que le nombre $d = \psi_2 - \psi_1 - \pi/2$ est positif, nous avons d'abord

$$\arg(-w_0) - \pi/2 < \psi_1 < \psi_2 < \arg(-w_0) + \pi/2,$$

lorsque l'intérieur de S^* est contenu dans $K(0, 1)$, d'où il s'ensuit que le secteur circulaire de centre w_0, de rayon ϱ^* et d'écart $\mathrm{Min}(\pi/4, d)$, symétrique par rapport à la direction $-w_0$, doit être contenu dans S^*. D'autre part, nous voyons immédiatement que ce secteur contient des points différents de w_0 de l'arc H, partant de w_0 orthogonalement à l'intérieur de $K(0, 1)$. Rapprochant ces faits on obtient la seconde des propriétés annoncées.

39. Soient L_0 une coupure de Löwner et B un domaine simplement connexe, contenu dans $K(0, 1)$, dont la frontière B^* est contenue dans $K^*(0, 1) \cup L_0$.

Alors B est un domaine de Löwner de la forme $K(0, 1) - L$, où l'arc L est une partie de l'arc L_0 de même origine.

En effet, prenant le point ζ de l'arc L_0 le plus éloigné de l'origine ζ_0 de ces arcs et appartenant à B^*, nous déduisons du fait que B^* et L_0 sont connexes que l'arc partiel L contenu dans L_0, joignant ζ_0 et ζ, est contenu dans B^* et, par conséquent, $B^* \subset K^*(0, 1) \cup L$. D'autre part, il est évident que $K^*(0, 1) \cup L \subset B^*$, car si, au contraire, un point ζ^* de la circonférence $K^*(0, 1)$ n'appartenait pas à B^*, donc à l'arc L_0, alors, prenant sur ce dernier le point ζ_0^* le plus proche de ζ^*, nous verrions qu'à l'intérieur du segment $[\zeta^*, \zeta_0^*]$, donc à l'intérieur de $K^*(0, 1)$ et en dehors de L_0 il existerait des points de la frontière B^*, contrairement à l'hypothèse.

Comparant les inclusions précédentes on obtient l'énoncé demandé.

40. Soit $f(\zeta)$ une fonction holomorphe qui ne se réduit pas à une

constante dans un domaine D. Alors l'ensemble des points ζ, pour lesquels $\operatorname{Im} f(\zeta) = 0$, ne contient pas de points intérieurs.

En effet, cela résulte immédiatement du principe du maximum pour les fonctions holomorphes.

I. Fonctions rationnelles spéciales

1. Interpolation locale. Soit à présent une fonction rationnelle spéciale de la forme

$$\chi(z) = \frac{E_L}{z^L} + \ldots + E_0 + \ldots + \bar{E}_L z^L \tag{1}$$

$$= \frac{\alpha_L + i\beta_L}{z^L} + \ldots + \alpha_0 + \ldots + (\alpha_L - i\beta_L) z^L,$$

$$E_L \neq 0,\ E_0 \text{ réel},\ L \geqslant 1.$$

Supposons que la dérivée $\chi'(z)$ de cette fonction ait toutes ses racines simples. Désignons celles d'entre elles qui sont dans $K(0, 1)$ et sur $K^*(0, 1)$, en distinguant parmi ces dernières une seule, respectivement par

$$z_k = \varrho_k e^{i\sigma_k}, \quad k = 1, \ldots, Q, \tag{2}$$

$$e^{i\varphi_l}, \quad l = 1, \ldots, R, \tag{3}$$

$$e^{i\vartheta}. \tag{4}$$

Supposons ensuite que la fonction $\chi(z)$ prenne aux points (2) et (3) les valeurs

$$\zeta_k = p_k + iq_k, \tag{5}$$

$$v_l. \tag{6}$$

Supposons enfin que

$$\chi''(e^{i\vartheta}) e^{2i\vartheta} > 0. \tag{7}$$

Soit T un nombre positif arbitraire. Alors, on peut déduire le résultat suivant.

LEMME 1 (sur l'interpolation). *Pour tout paramètre t réel suffisamment proche de T il existe en même temps une fonction rationnelle spéciale déterminée d'une façon univoque*

$$\tilde{\chi}(z, t) = \frac{\tilde{E}_L(t)}{z^L} + \ldots + \tilde{E}_0(t) + \ldots + \overline{\tilde{E}_L(t)}\, z^L \tag{8}$$

$$= \frac{\tilde{\alpha}_L(t) + i\tilde{\beta}_L(t)}{z^L} + \ldots + \tilde{\alpha}_0(t) + \ldots + (\tilde{\alpha}_L(t) - i\tilde{\beta}_L(t)) z^L,$$

$$\tilde{E}_L(t) \neq 0,\ \tilde{E}_0(t) - \textit{réel},$$

2 – Dissertationes Mathematicae CXCV

arbitrairement proche de (1), *et un système de points, aussi univoquement déterminés*

$$\tilde{z}_k(t) = \tilde{\varrho}_k(t)\, e^{i\tilde{\sigma}_k(t)}, \quad k = 1, \ldots, Q, \tag{9}$$

$$e^{i\tilde{\varphi}_l(t)} \quad l = 1, \ldots, R, \tag{10}$$

$$e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, \tag{11}$$

arbitrairement proches respectivement de (2), (3) *et* (4), *tels que les conditions suivantes sont remplies*:

$(\tilde{1})$
$$\tilde{\chi}(z, T) = \chi(z),$$
$$\tilde{z}_k(T) = z_k,$$
$$e^{i\tilde{\varphi}_l(T)} = e^{i\varphi_l},$$
$$e^{i\tilde{\vartheta}(T)} = e^{i\vartheta},$$

$(\tilde{1}\tilde{1})$
$$\tilde{E}_L(t) = e^{L(t-T)} E_L,$$

$(\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1})$ *les points* (9), (10) *et* (11) *sont racines de la dérivée de la fonction* (8) *et la fonction* (8) *elle-même prend aux points* (9) *et* (10) *respectivement les valeurs* (5) *et* (6), *c'est-à-dire*

$$\tilde{\chi}\big(\tilde{z}_k(t), t\big) = \zeta_k, \tag{12}$$

$$\tilde{\chi}(e^{i\tilde{\varphi}_l(t)}, t) = v_l, \tag{13}$$

$$\tilde{\chi}'_z\big(\tilde{z}_k(t), t\big) = 0, \tag{14}$$

$$\tilde{\chi}'_z(e^{i\tilde{\varphi}_l(t)}, t) = 0, \tag{15}$$

$$\tilde{\chi}'_z(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t) \neq 0; \tag{16}$$

$(\tilde{1}\tilde{\text{v}})$ *les coefficients de la fonction* (8) *et les points* (9), (10) *et* (11) *sont les fonctions holomorphes du paramètre* t,

$(\tilde{\text{v}})$ *la fonction*

$$\varkappa(t) = \tilde{\chi}(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t) \tag{17}$$

est croissante et, par conséquent, en vertu de la première et de la dernière des conditions $(\tilde{1})$, *elle vérifie l'inégalité*

$$\tilde{\chi}(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t) \geqslant \chi(e^{i\vartheta}) \quad \textit{pour} \quad t \geqslant T; \tag{18}$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $t = T$; *en outre on a constamment*

$$\varkappa'(t) = 2\tilde{\chi}''_{zz}(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t)\, e^{2i\tilde{\vartheta}(t)}. \tag{17'}$$

Démonstration. Prenons

$$E_0 = \alpha_0, \quad E_s = \alpha_s + i\beta_s, \quad s = 1, \ldots, L.$$

Nous remarquons immédiatement que l'existence de la fonction (8) et des systèmes (10) et (11), remplissant les conditions $(\tilde{1})$–$(\tilde{1}\tilde{1}\tilde{1})$, équivaut à

l'existence d'une solution unique du système d'équations réelles

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{L} (\dot{\alpha}_s \cos \dot{\sigma}_k s - \dot{\beta}_s \sin \dot{\sigma}_k s)\left(\frac{1}{\dot{\varrho}_k^s} + \dot{\varrho}_k^s\right) = p_k,\\
&\sum_{s=0}^{L} (\dot{\alpha}_s \sin \dot{\sigma}_k s - \dot{\beta}_s \cos \dot{\sigma}_k s)\left(-\frac{1}{\dot{\varrho}_k^s} + \dot{\varrho}_k^s\right) = q_k,\\
&\sum_{s=0}^{L} (\dot{\alpha}_s \cos \dot{\varphi}_l s + \dot{\beta}_s \sin \dot{\varphi}_l s)\, 2 = v_l,\\
&\sum_{s=1}^{L} s(\dot{\alpha}_s \cos \dot{\sigma}_k s + \dot{\beta}_s \sin \dot{\sigma}_k s)\left(-\frac{1}{\dot{\varrho}_k^s} + \dot{\varrho}_k^s\right) = 0,\\
&\sum_{s=1}^{L} s(\dot{\alpha}_s \sin \dot{\sigma}_k s - \dot{\beta}_s \cos \dot{\sigma}_k s)\left(\frac{1}{\dot{\varrho}_k^s} + \dot{\varrho}_k^s\right) = 0,\\
&\sum_{s=1}^{L} s(\dot{\alpha}_s \sin \dot{\varphi}_l s - \dot{\beta}_s \cos \dot{\varphi}_l s)(1+1) = 0,\\
&\dot{\alpha}_L = \alpha_L e^{L(t-T)},\\
&\dot{\beta}_L = \beta_L e^{L(t-T)}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

par rapport aux inconnues réelles

$$\dot{\alpha}_s,\ \dot{\beta}_s,\ s = 0, 1, \ldots, L, \quad \dot{\varrho}_k,\ \dot{\sigma}_k,\ \dot{\varphi}_l, \tag{20}$$

suffisamment proches des valeurs initiales respectives

$$\alpha_s,\ \beta_s,\ \varrho_k,\ \sigma_k,\ \varphi_l, \tag{21}$$

avec t arbitraire, donné d'avance, suffisamment proche de T, et les inconnues (20) doivent être des fonctions holomorphes du paramètre t. Ces équations sont formées en remplaçant dans (12), (13), (14), (15) et (11) les inconnues (9) et (10) et les coefficients de la fonction (8) respectivement par

$$\dot{\varrho}_k e^{i\dot{\sigma}_k},\ e^{i\dot{\varphi}_l},\ \dot{\alpha}_s + i\dot{\beta}_s,$$

et en séparant les parties réelles et imaginaires. Pour démontrer l'existence de la solution annoncée du système (19), il suffit de démontrer que le déterminant fonctionnel des premiers membres de (19) par rapport aux inconnues (20), calculé pour les valeurs initiales (21), est différent de zéro. Admettons que dans les lignes successives de ce déterminant figurent les dérivées partielles des premiers membres successifs de (19) par rapport aux inconnues (20). Pour la démonstration supposons, au contraire, que le déterminant ne soit pas différent de zéro. Il existerait alors un système de nombres ne

s'annulant pas simultanément

$$\Delta\alpha_0,\ \Delta\alpha_s,\ \Delta\beta_s,\ s = 1, \ldots, L, \tag{22}$$
$$\Delta\varrho_k,\ \Delta\sigma_k,\ k = 1, \ldots, Q, \quad \Delta\varphi_l,\ l = 1, \ldots, R,$$

tel que la somme des produits des éléments de chaque ligne du déterminant par ces nombres serait égale à zéro. Calculant à partir de (19) les éléments du déterminant et effectuant les calculs indiqués ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{L} (\Delta\alpha_s \cos\sigma_k s + \Delta\beta_s \sin\sigma_k s)\left(\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right) = 0,\\
&\sum_{s=0}^{L} (\Delta\alpha_s \sin\sigma_k s - \Delta\beta_s \cos\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right) = 0,\\
&\sum_{s=0}^{L} (\Delta\alpha_s \cos\varphi_l s + \Delta\beta_s \sin\varphi_l s)\cdot 2 = 0,\\
&\sum_{s=1}^{L} s(\Delta\alpha_s \cos\sigma_k s + \Delta\beta_s \sin\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right) +\\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(-\alpha_s \sin\sigma_k s + \beta_s \sin\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\Delta\sigma_k +\\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \cos\sigma_k s + \beta_s \sin\sigma_k s)\left(\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\frac{\Delta\varrho_k}{\varrho_k} = 0,\\
&\sum_{s=1}^{L} s(\Delta\alpha_s \sin\sigma_k s - \Delta\beta_s \cos\sigma_k s)\left(\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right) +\\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \cos\sigma_k s + \beta_s \sin\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\Delta\sigma_k +\\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \sin\sigma_k s - \beta_s \cos\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\frac{\Delta\varrho_k}{\varrho_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, Q,\\
&\sum_{s=1}^{L} s(\Delta\alpha_s \sin\varphi_l s - \Delta\beta_s \cos\varphi_l s)\cdot 2 +\\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \cos\varphi_l s + \beta_s \sin\varphi_l s)\cdot 2\Delta\varphi_l = 0, \quad l = 1, \ldots, R,\\
&\Delta\alpha_L = 0,\\
&\Delta\beta_L = 0,
\end{aligned} \tag{23}$$

(24)

Considérons maintenant la fonction rationnelle spéciale de la forme

$$\sum_{s=0}^{L-1} [(\Delta\alpha_s + i\Delta\beta_s) z^{-s} + (\Delta\alpha_s - i\Delta\beta_s) z^s]. \tag{25}$$

Nous déduisons de (23), en tenant compte des deux dernières relations (24), que les nombres (2) et (3) sont racines de la fonction (25) et, étant donné que celle-ci est une fonction rationnelle spéciale de degré $2L-2$ et qu'elle possède $2L-1$ racines, elle est identiquement nulle. Donc

$$\Delta\alpha_s = 0, \quad \Delta\beta_s = 0, \quad s = 0, \ldots, L. \tag{26}$$

Vu les égalités précédentes, les égalités (24) prendront la forme

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=2}^{L} s^2(-\alpha_s \sin\sigma_k s + \beta_s \cos\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\Delta\sigma_k + \\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \cos\sigma_k s + \beta_s \sin\sigma_k s)\left(\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\frac{\Delta\varrho_k}{\varrho_k} = 0, \\
&\sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \cos\sigma_k s + \beta_s \sin\sigma_k s)\left(\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\Delta\sigma_k + \\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \sin\sigma_k s - \beta_s \cos\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\frac{\Delta\varrho_k}{\varrho_k} = 0, \\
&\sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \cos\varphi_l s + \beta_s \sin\varphi_l s)\cdot 2\Delta\varphi_l = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Posons

$$\chi_2(z) = z\chi'(z) + z^2\chi''(z) = \sum_{s=2}^{L} s^2[(\alpha_s + i\beta_s) z^{-s} + (\alpha_s - i\beta_s) z^s]. \tag{28}$$

Multiplions maintenant les deux premières égalités (27) respectivement par ϱ_k et $\varrho_k i$ et ensuite additionnons-les membre à membre; nous obtiendrons alors, après un calcul facile, vu (28), les égalités

$$\chi_2(\varrho_k e^{i\sigma_k})(\Delta\varrho_k + \varrho_k i\Delta\sigma_k) = 0. \tag{29}$$

En même temps, d'après (28) et la définition des nombres (2), on a

$$\chi_2(\varrho_k e^{i\sigma_k}) = (\varrho_k e^{i\sigma_k})^2 \chi''(\varrho_k e^{i\sigma_k}), \tag{30}$$

et, comme les nombres (2) sont des racines simples de la dérivée $\chi'(z)$, les expressions (30) doivent être différentes de zéro. Ainsi (29) donne $\Delta\varrho_k = 0$, $\Delta\sigma_k = 0$. Pareillement nous déduisons que l'on a aussi $\Delta\varphi_l = 0$. Ainsi tous les nombres (22) devraient être nuls, contrairement à l'hypothèse. Donc le déterminant considéré plus haut doit être différent de zéro et, par conséquent, il existe une solution des équations (19) par rapport aux inconnues (20), déterminée d'une façon univoque, c'est-à-dire que la fonction et les

points demandés existent; comme point (11) nous prenons la racine manquante de la dérivée. En vertu des théorèmes correspondants, il résulte de (19) que les coefficients de la fonction (8) et les nombres (9) et (10) remplissent la condition ($\tilde{\text{iv}}$). De cette dernière condition et du fait que (11) est une racine simple de la dérivée $\tilde{\chi}'_z(z, t)$ résulte que cette racine est également une fonction holomorphe. Dérivant les relations (12), (13) et (17) membre à membre et tenant compte de (14), (15) et (16), nous obtenons les égalités

$$\tilde{\chi}'_t(\tilde{z}_k(t), t) = 0, \quad k = 1, \ldots, Q, \tag{31}$$

$$\tilde{\chi}'_t(e^{i\tilde{\varphi}_l(t)}, t) = 0, \quad l = 1, \ldots, R, \tag{32}$$

$$\tilde{\chi}'_t(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t) = \varkappa'(t), \tag{33}$$

et évidemment

$$\tilde{\chi}'_t(z, t) = \sum_{s=0}^{L} \left(\frac{\tilde{E}'_s(t)}{z^s} + \overline{\tilde{E}'_s(t)}\, z^s \right), \tag{34}$$

et

$$\tilde{E}'_L(t) = L\tilde{E}_L(t).$$

En même temps remarquons que

$$\tilde{\chi}'_z(z, t)zi = \sum_{s=1}^{L} \left(\frac{-s\tilde{E}_s(t)\, i}{z^s} + \overline{s\tilde{E}_s(t)}\, iz^s \right). \tag{35}$$

De (31), (32) et (33) résulte que la fonction rationnelle spéciale (34) a les mêmes racines que la fonction analogue (35), à l'exception d'une seule (11). De cette façon

$$\tilde{\chi}'_t(z, t) = \tilde{\chi}'_z(z, t)zi \frac{z - e^{i\delta(t)}}{z - e^{i\tilde{\vartheta}(t)}} c(t), \tag{36}$$

où $e^{i\delta(t)}$ désigne une racine (34) non comprise dans (31) et (32) et $c(t)$ est une certaine constante. Mais, comparant les coefficients extrèmes de la fonction (34) et de la fonction (25), nous trouvons facilement que

$$c(t) = -i, \quad e^{i\delta(t)} = -e^{i\tilde{\vartheta}(t)}.$$

Prenant la valeur (34) au point $e^{i\tilde{\vartheta}(t)}$, nous obtenons de (33), vu (36), la formule (17'). De là et de (7) résulte immédiatement ($\tilde{\text{v}}$) pour t suffisamment proche de T.

Remarque. Supposons donné un point t_f suffisamment proche de T, tel que dans un entourage de celui-ci soient définis la famille de fonctions rationnelles spéciales

$$\chi(z, t) = \frac{E_L(t)}{z^L} + \ldots + E_0(t) + \ldots + \overline{E_L(t)}\, z^L \tag{37}$$

et les systèmes de fonctions

$$z_k(t), \quad k = 1, \ldots, Q, \tag{38}$$

$$e^{i\varphi_l(t)}, \quad l = 1, \ldots, R, \tag{39}$$

$$e^{i\vartheta(t)}, \tag{40}$$

analogues à (8), (9), (10) et (11) et remplissant les conditions (ii)–(iv) (que nous n'écrivons pas) analogues à ($\tilde{\text{i}}\tilde{\text{i}}$)–($\tilde{\text{i}}\tilde{\text{v}}$) et la condition (i'), énonçant que pour $t = t_f$ la fonction rationnelle spéciale (37) et les points (38), (39) et (40) sont suffisamment proches de la fonction (1) et des points (2), (3) et (4) respectifs; alors dans l'entourage mentionné du point t_f les fonctions (37), (38), (39) et (40) se confondent avec (8), (9), (10) et (11).

En effet, de la dernière condition (i') et de la continuité des fonctions (37)–(40) résulte que dans un petit entourage du point t_f elles sont aussi suffisamment proches de la fonction (1) et des points (2), (3) et (4). Par conséquent, de la forme analogue des équations ($\tilde{\text{i}}\tilde{\text{i}}$)–($\tilde{\text{i}}\tilde{\text{v}}$) et (ii)–(iv) et de l'unicité de leurs solutions par rapport aux inconnues (20) à proximité des valeurs initiales (21) pour t proches de T, résulte l'identité annoncée des fonctions mentionnées.

2. Approximation des fonctions rationnelles spéciales. Donnons ici un résultat sur l'approximation des fonctions rationnelles spéciales, mentionnées auparavant, par des fonctions analogues, d'une structure un peut plus simple.

LEMME 1 (sur l'écartement des racines de la dérivée). *Pour une fonction rationnelle spéciale arbitraire $\delta(\zeta)$ il existe une fonction rationnelle spéciale $\mathring{\delta}(\zeta)$ qui lui est arbitrairement proche et dont la dérivée possède uniquement des racines simples.*

Démonstration. Soit ζ_0, $|\zeta_0| < 1$, une racine de la dérivée $\delta'(\zeta)$ au moins double; alors $1/\overline{\zeta}_0$ est également une racine de la dérivée $\delta'(\zeta)$ de même multiplicité que ζ_0 et $\delta'(\zeta)$ peut être représentée sous forme du produit

$$\delta'(\zeta) = \frac{1}{i\zeta}(\zeta - \zeta_0)\left(\frac{1}{\zeta} - \overline{\zeta}_0\right)\delta_1(\zeta), \tag{1}$$

où $\delta_1(\zeta)$ est une fonction rationnelle spéciale pour laquelle ζ_0 et $1/\overline{\zeta}_0$ sont des racines dont la multiplicité est plus petite de 1 que pour la dérivée $\delta'(\zeta)$. Démontrons qu'il existe un point $\mathring{\zeta}_0$ suffisamment proche de ζ_0 et tel que la fonction

$$\eta(\zeta) = \frac{1}{i\zeta}(\zeta - \mathring{\zeta}_0)\left(\frac{1}{\zeta} - \overline{\mathring{\zeta}}_0\right)\delta_1(\zeta) \tag{2}$$

est la dérivée d'une certaine fonction rationnelle spéciale $\mathring{\delta}(\zeta)$, arbitrairement

proche de la fonction $\delta(\zeta)$, et que, la fonction $\eta(\zeta)$ possède les mêmes racines et de même multiplicité que la dérivée $\delta'(\zeta)$ à l'exception des racines ζ_0 et $1/\bar{\zeta}_0$, dont la multiplicité comme racines de la fonction $\eta(\zeta)$ est plus petite de 1, et, à l'exception des racines nouvelles $\dot{\zeta}_0$ et $1/\bar{\dot{\zeta}}_0$, qui sont déjà simples. En effet, à cause de (1) et (2) il est facile de voir que $\eta(\zeta)$ sera la dérivée d'une fonction rationnelle spéciale, si dans son développement de Laurent le coefficient de ζ^{-1} sera nul. Posant

$$\delta_1(\zeta) = \frac{C_{n-1}}{\zeta^{n-1}} + \ldots + \frac{C_1}{\zeta} + C_0 + \bar{C}_1\zeta + \ldots + \bar{C}_{n-1}\zeta^{n-1}, \tag{3}$$

où C_0 est réel, nous remarquons qu'il faut cela que $\dot{\zeta}_0$ vérifie l'équation

$$(1+\dot{\zeta}_0\bar{\dot{\zeta}}_0)C_0 - \dot{\zeta}_0 C_1 - \bar{\dot{\zeta}}_0\bar{C}_1 = 0. \tag{4}$$

Comme on aura à prouver dans la suite que $\eta(\zeta)$ est la dérivée d'une fonction rationnelle spéciale arbitrairement proche de la fonction $\delta(\zeta)$, il faudra démontrer non seulement que l'équation (4), comme équation en l'inconnue $\dot{\zeta}_0$, possède une solution, mais aussi qu'elle a une solution arbitrairement proche du nombre ζ_0 et différente de ζ_0. Posons $\zeta_0 = \varrho_0 e^{i\theta_0}$, $\dot{\zeta}_0 = \dot{\varrho}_0 e^{i\dot{\theta}_0}$, $C_1 = re^{i\alpha}$; l'équation (4) prendra alors la forme

$$(1+\dot{\varrho}_0^2)C_0 - 2r\dot{\varrho}_0\cos(\alpha-\dot{\theta}_0) = 0. \tag{5}$$

De (1) et (3) il résulte de plus que

$$(1+\varrho_0^2)C_0 - 2r\varrho_0\cos(\alpha-\theta_0) = 0. \tag{6}$$

Désignons le premier membre de (5) par $f(\dot{\varrho}_0, \dot{\theta}_0)$; alors, en vertu de (5) et (6),

$$f(\varrho_0, \theta_0) = 0 \quad \text{et} \quad f'_{\dot{\varrho}_0}(\varrho_0, \theta_0) = \frac{C_0}{\varrho_0}(\varrho_0^2 - 1).$$

Si donc $C_0 \neq 0$, alors $f'_{\dot{\varrho}_0}(\varrho_0, \theta_0) \neq 0$ et du théorème des fonctions implicites il résulte que l'équation (5) possède une solution $\dot{\varrho}_0, \dot{\theta}_0$ arbitrairement proche du couple ϱ_0, θ_0, donc l'équation (4) a une solution $\dot{\zeta}_0 = \dot{\varrho}_0 e^{i\dot{\theta}_0}$ arbitrairement proche du nombre $\zeta_0 = \varrho_0 e^{i\theta_0}$. Si, au contraire, $C_0 = 0$, alors $f(\varrho_0, \theta_0) = -2r\varrho_0\cos(\alpha-\theta_0) = 0$, d'où $r = 0$ ou $\cos(\alpha-\theta_0) = 0$. Dans le premier cas l'équation (5) est satisfaite pour $\dot{\varrho}_0, \dot{\theta}_0$ arbitraires, donc l'équation (4) a une solution $\dot{\zeta}_0 = \dot{\varrho}_0 e^{i\dot{\theta}_0}$ arbitrairement proche de $\zeta_0 = \varrho_0 e^{i\theta_0}$, tandis que dans le second cas on a $f'_{\dot{\theta}_0}(\varrho_0, \theta_0) = -2r\varrho_0\sin(\alpha-\theta_0) \neq 0$ et, il résulte encore du théorème des fonctions implicites que l'équation (5) a une solution $\dot{\varrho}_0, \dot{\theta}_0$, arbitrairement proche du couple ϱ_0, θ_0, par conséquent l'équation (4) a une solution $\dot{\zeta}_0 = \dot{\varrho}_0 e^{i\dot{\theta}_0}$, arbitrairement proche du nombre $\zeta_0 = \varrho_0 e^{i\theta_0}$.

Soit ensuite $e^{i\theta_0}$ une racine de la dérivée $\delta'(\zeta)$, au moins double, située sur la circonférence $K^*(0, 1)$; alors on peut représenter $\delta'(\zeta)$ sous forme du produit

$$\delta'(\zeta) = \frac{1}{i\zeta}\left(e^{-i\frac{\theta_0}{2}}\sqrt{\zeta} - e^{i\frac{\theta_0}{2}}\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)\delta_1(\zeta), \tag{7}$$

où $\delta_1(\zeta)$ est une fonction rationnelle spéciale de la forme (3), pour laquelle $e^{i\theta_0}$ ou bien n'est pas une racine, ou bien est une racine dont la multiplicité est plus petite de 2 que pour la dérivée $\delta'(\zeta)$. Démontrons que sur la circonférence $K^*(0, 1)$ il existe deux points distincts $e^{i\dot{\theta}_0}$ et $e^{i\ddot{\theta}_0}$, arbitrairement proche du point $e^{i\theta_0}$ et tels que la fonction

$$\eta(\zeta) = \frac{1}{i\zeta}\left(e^{-i\frac{\dot{\theta}_0}{2}}\sqrt{\zeta} - e^{i\frac{\dot{\theta}_0}{2}}\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)\left(e^{-i\frac{\ddot{\theta}_0}{2}}\sqrt{\zeta} - e^{i\frac{\ddot{\theta}_0}{2}}\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)\delta_1(\zeta) \tag{8}$$

est la dérivée d'une certaine fonction rationnelle spéciale $\dot{\delta}(\zeta)$, arbitrairement proche de la fonction $\delta(\zeta)$, et que la fonction $\eta(\zeta)$ a les mêmes racines et de même multiplicité que la dérivée $\delta'(\zeta)$, à l'exception d'une racine de celle-ci, qui n'est pas une racine de la fonction $\eta(\zeta)$, ou bien en est une, mais dont la multiplicité est plus petite de 1 ou 2 que sa multiplicité en tant que racine de la fonction $\delta'(\zeta)$, et à l'exception d'une racine nouvelle ou de racines nouvelles, déjà simples, $e^{i\dot{\theta}_0}$ et $e^{i\ddot{\theta}_0}$. En effet, de (7) et (8) on déduit facilement que $\eta(\zeta)$ est la dérivée d'une fonction rationnelle spéciale, si dans son développement de Laurent le coefficient de ζ^{-1} s'annule, et pour cela il faut que les nombres $e^{i\dot{\theta}_0}$ et $e^{i\ddot{\theta}_0}$ vérifient l'équation

$$C_0\left(e^{i\frac{\dot{\theta}_0-\ddot{\theta}_0}{2}} + e^{-i\frac{\dot{\theta}_0-\ddot{\theta}_0}{2}}\right) - C_1 e^{-i\frac{\dot{\theta}_0+\ddot{\theta}_0}{2}} - \bar{C}_1 e^{i\frac{\dot{\theta}_0+\ddot{\theta}_0}{2}} = 0. \tag{9}$$

En outre, de même que dans le cas précédent, il faut démontrer qu'il existe des nombres $e^{i\dot{\theta}_0}$ et $e^{i\ddot{\theta}_0}$ qui non seulement remplissent l'équation (9), mais sont arbitrairement proches du nombre $e^{i\theta_0}$ et sont différents entre eux. Posons $C_1 = re^{i\alpha}$; l'équation (9) prendra la forme

$$r\cos\left(\alpha - \frac{\dot{\theta}_0+\ddot{\theta}_0}{2}\right) - C_0\cos\frac{\dot{\theta}_0-\ddot{\theta}_0}{2} = 0. \tag{10}$$

De (7) et (8) il résulte de plus que

$$r\cos(\alpha-\theta_0) - C_0 = 0. \tag{11}$$

Si à présent nous désignons le premier membre (10) par $f(\dot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0)$, alors, en vertu de (10) et (11),

$$f(\theta_0, \theta_0) = 0, \qquad f'_{\dot{\theta}_0}(\theta_0, \theta_0) = f'_{\ddot{\theta}_0}(\theta_0, \theta_0) = \tfrac{1}{2}r\sin(\alpha-\theta_0).$$

Si donc $r \neq 0$ et $\sin(\alpha-\theta_0) \neq 0$, alors p. ex. $f'_{\dot{\theta}_0}(\theta_0, \theta_0) \neq 0$ et du théorème des fonctions implicites il résulte que l'équation (10) a une solution $\dot{\theta}_0$, $\ddot{\theta}_0$, $\dot{\theta}_0 \neq \ddot{\theta}_0$, arbitrairement proche du couple θ_0, θ_0, donc l'équation (9) a une solution $e^{i\dot{\theta}_0}$, $e^{i\ddot{\theta}_0}$, arbitrairement proche du couple $e^{i\theta_0}$, $e^{i\theta_0}$ et telle que

$e^{i\dot{\theta}_0} \neq e^{i\ddot{\theta}_0}$. Si par contre $r = 0$, alors il résulte de (11) que $C_0 = 0$ et que l'équation (9) a une solution $e^{i\dot{\theta}_0}$, $e^{i\ddot{\theta}_0}$, arbitrairement proche du couple $e^{i\theta_0}$, $e^{i\theta_0}$ et telle que $e^{i\dot{\theta}_0} \neq e^{i\ddot{\theta}_0}$. Si, d'autre part, $\sin(\alpha-\theta_0) = 0$, alors $\cos(\alpha-\theta_0) = \pm 1$, d'où, envertu de (11), nous déduisons que $C_0 = \pm r$ et l'équation (10) prend la forme

$$\sin\frac{\theta_0-\dot{\theta}_0}{2}\sin\frac{\theta_0-\ddot{\theta}_0}{2} = 0.$$

Si donc $\dot{\theta}_0 = \theta_0$ et $\ddot{\theta}_0 \neq \theta_0$ est un nombre arbitrairement proche de θ_0, le couple $\dot{\theta}_0$, $\ddot{\theta}_0$ est une solution de l'équation (10), donc dans ce cas aussi l'équation (9) possède une solution $e^{i\dot{\theta}_0}$, $e^{i\ddot{\theta}_0}$.

De cette façon il a été démontré dans les deux cas que la fonction $\eta(\zeta)$, définie par la formule (2) ou (8), est la dérivée d'une fonction rationnelle spéciale $\dot{\delta}(\zeta)$, pour un choix convenable des nombres $\dot{\zeta}_0$ ou $e^{i\dot{\theta}_0}$, $e^{i\ddot{\theta}_0}$; en outre, elle est arbitrairement proche de la fonction $\delta(\zeta)$ et les racines de la fonction $\eta(\zeta)$ et de la dérivée $\delta'(\zeta)$ sont les mêmes et possèdent la même multiplicité, à l'exception d'une ou de deux racines multiples de la dérivée $\delta'(\zeta)$ qui ne sont pas racines de la fonction $\eta(\zeta)$, ou bien sont, mais telles que leur multiplicité est plus petite de 1 ou 2, et à l'exception d'une ou de deux racines simples qui sont racines de la fonction $\eta(\zeta)$ et ne sont pas racines de la dérivée $\delta'(\zeta)$.

Tenant compte de ce qui précède, on arrive, en répétant ce précède un nombre fini de fois, diminuant successivement la multiplicité des racines multiples de la dérivée $\delta'(\zeta)$, à une fonction $\dot{\delta}(\zeta)$ rationnelle spéciale, arbitrairement proche de la fonction $\delta(\zeta)$, dont la dérivée possède exclusivement des racines simples.

Il résulte de ce qui précède qu'étant donnée une fonction $\Pi(\zeta)$, symétrique par rapport à l'axe réel et possédant des pôles seulement aux points quelconques a et $\bar{a}$, respectivement au-dessus et au-dessous de cet axe, nous pouvons l'approcher arbitrairement par une fonction analogue, dont la dérivée a exclusivement des racines simples. Nous obtiendrons ce résultat à l'aide d'une transformation homographique transformant les points a et $\bar{a}$ en 0 et ∞, dans laquelle la fonction $\Pi(\zeta)$ se transforme en une fonction rationnelle spéciale.

Remarque. On peut observer que, si l'on se donne une fonction rationnelle spéciale $\dot{\delta}(\zeta)$, dont la dérivée a toutes ses racines simples, il existe une fonction analogue rationnelle spéciale $\ddot{\delta}(\zeta)$, arbitrarement proche de $\dot{\delta}(\zeta)$, dont la dérivée a toutes racines simples, telle que les valeurs de $\ddot{\delta}(\zeta)$ pour toutes les racines de la dérivée sont distinctes.

En effet, il suffit d'appliquer le lemme 1 (sur l'interpolation), [6], p. 15–16, en choisissant les valeurs (6), (7) de ce lemme de telle façon qu'elles soient distinctes.

Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 195,
PWN, Warszawa 1982, 55 pp.

3. Approximation des arcs. Les observations que nous allons faire sur les arcs seront nécessaires dans la suite.

LEMME 1 (sur l'approximation des arcs). *Chaque arc de Jordan partant orthogonalement d'un point quelconque de* $K^*(0, 1)$ *et en outre contenu entièrement à l'intérieur de* $K(0, 1)$, *ne passant pas par* 0, *peut être arbitrairement approché, dans le sens de la distance de Hausdorff, par un arc spécial analogue, correspondant à une fonction rationnelle spéciale* $\Omega(w)$. *De plus, la dérivée* $\Omega'(w)$ *a uniquement des racines simples, toutes situées en dehors de l'arc spécial cité, à l'exception d'un seul qui est l'origine de cet arc.*

Démonstration. Soit un arc quelconque J de Jordan du type mentionné plus haut, partant d'un point quelconque $e^{i\gamma}$ de la circonférence.

Considérons une transformation homographique $l(w)$ quelconque qui transforme le cercle unité en le demi-plan supérieur de façon que les points 0, ∞ et $e^{i\gamma}$ soient amenés respectivement en des points a, $\bar{a}$ et 0. L'arc J sera alors amené en un arc R de Jordan, partant orthogonalement du point 0, en outre entièrement contenu dans le demi-plan supérieur et ne passant pas par a.

Démontrons que cet arc R peut être arbitrairement approché par un arc analytique F analogue, ne passant pas par a, de représentation paramétrique

$$p(\tau i), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \tag{1}$$

où $p(t)$ est une fonction holomorphe dans un ensemble ouvert contenant le segment I d'extrémités $-i$ et i, symétrique par rapport à l'axe réel. En effet, remarquons tout d'abord que par une approximation facile on peut admettre que J est un arc régulier, orthogonal à $K^*(0, 1)$ au point $e^{i\gamma}$ [5], et, par suite, R est un arc régulier, orthogonal à l'axe réel au point 0. Soit

$$r(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1 \tag{2}$$

une représentation de l'arc R. Posons en premier lieu pour chaque couple de paramètres τ', τ''

$$s(\tau', \tau'') = \begin{cases} \left|\dfrac{r(\tau'')-r(\tau')}{\tau''-\tau'}\right| & \text{pour} \quad \tau' \neq \tau'', \\ |r'(\tau')| = |r'(\tau'')| & \text{pour} \quad \tau' = \tau''. \end{cases} \tag{3}$$

Etant donné que la fonction (2) admet une fonction inverse et une dérivée continue et différente de zéro, (3) est une fonction positive, continue; sa borne inférieure m est donc positive. En outre la partie imaginaire de la dérivée $r'(\tau)$ est différente de zéro au point 0. Donc, posant

$$q(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Im}\{r(\tau)\}}{\tau} & \text{pour} \quad \tau \neq 0, \\ \operatorname{Im}\{r'(0)\} \neq 0 & \text{pour} \quad \tau = 0, \end{cases} \tag{4}$$

nous remarquons que la fonction continue (4) doit être constamment positive, car l'arc R est entièrement contenu, à l'exception de son origine, dans le demi-plan supérieur. Ainsi la fonction (4) possède une borne supérieure positive.

Appliquant maintenant (30, 31, *), nous pouvons trouver des polynômes $x_1(\tau)$ et $y_1(\tau)$ à coefficients réels, de degré resp. impair et pair, tels que

$$|x_1(\tau)+iy_1(\tau)-r'(\tau)| < m, \tag{5}$$

$$|y_1(\tau)-\operatorname{Im}\{r'(\tau)\}| < n, \tag{6}$$

et que, en même temps,

$$|x_1(\tau)+iy_1(\tau)-r'(\tau)| < \varepsilon, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \tag{7}$$

où $\varepsilon > 0$ est un nombre arbitraire, suffisamment petit. Posant pour tout t complexes

$$x(t) = \int_0^t x_1(\tau)\,d\tau, \quad y(t) = \int_0^t y_1(\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

et ensuite, prenant en considération le fait que les fonctions (8) sont impaires resp. paires, nous avons

$$x(t) = X(t^2), \quad y(t) = tY(t^2). \tag{9}$$

Prenons ensuite comme fonction holomorphe demandée (1) le polynôme

$$p(t) = X(-t^2)+tY(t^2). \tag{10}$$

Nous tirons alors de (9) et (10)

$$p(\tau i) = x(\tau)+iy(\tau). \tag{11}$$

De là, en intégrant (5) entre deux valeurs arbitraires du paramètre τ' et τ'', nous obtenons

$$\left|\frac{p(\tau'' i)-p(\tau' i)}{\tau''-\tau'} - \frac{r(\tau'')-r(\tau')}{\tau''-\tau'}\right| < m. \tag{12}$$

En même temps on peut écrire (12) sous la forme

$$|(p(\tau i))'_\tau - r'(\tau)| \leqslant m. \tag{13}$$

Etant donné que le nombre à soustraire dans (12) admet une valeur absolue au moins égale à m, le nombre dont on le soustrait dans (12) ne peut jamais s'annuler. Cela signifie que $p(\tau i)$ est une fonction admettant une fonction inverse. De même il résulte de (13) que la dérivée $(p(\tau i))'_\tau$ également ne s'annule jamais. Ainsi (11) représente un certain arc analytique F. Ensuite, en intégrant (6) entre 0 et une valeur arbitraire τ du paramètre, on obtient facilement

$$\left|\frac{\operatorname{Im}\{p(\tau i)\}}{\tau} - \frac{\operatorname{Im}\{r(\tau)\}}{\tau}\right| < n. \tag{14}$$

Comme le nombre à soustraire dans (14) admet une valeur absolue au moins égale à n, la valeur dont on le soustrait doit être toujours différente de zéro, dont le signe est le même que le signe du nombre à soustraire. Ainsi $\operatorname{Im}\{p(\tau i)\}$ est constamment positif pour τ différent de zéro, ce qui signifie que F est entièrement contenu, à l'exception peut-être de l'origine, dans le demi-plan supérieur. En même temps il résulte de (8) que 0 est l'origine de F. En outre, comme $x_1(\tau)$ est une fonction impaire, en vertu de (9) et (10), la dérivée de la représentation (11) au point 0 est purement imaginaire, ce qui montre que l'arc F part orthogonalement du point 0 de l'axe réel. Enfin de (7) et (8) il résulte en intégrant (7) entre 0 et une valeur arbitraire τ

$$|p(\tau i)-r(\tau)| < \varepsilon\tau \leqslant \varepsilon, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Ainsi pour ε suffisamment petit F ne contient pas a. Récapitulant les observations précédentes, nous voyons que l'arc F représenté par (11) réalise l'approximation demandée. Remarquons aussi que de la symétrie de la fonction $p(t)$ par rapport à l'axe réel il résulte facilement que (11) représente un arc régulier dans l'intervalle $[-1, 1]$ du paramètre τ.

Démontrons ensuite que l'arc F peut être arbitrairement approché par un arc analytique C analogue ne passant pas par a et tel qu'il existe une fonction rationnelle $\Pi(\zeta)$ n'ayant des pôles qu'aux points a et $\bar{a}$, symétriques par rapport à l'axe réel, et prenant sur C des valeurs purement imaginaires. De plus, la fonction rationnelle mentionnée peut être choisie de telle façon qu'elle ait uniquement des racines simples, dont seulement une, à savoir 0, est sur C, et que sa dérivée ait aussi uniquement des racines simples, dont aucune n'appartient à C. Afin de le démontrer, considérons un rectangle arbitraire B, symétrique par rapport à l'axe réel, contenant le segment I mentionné plus haut, assez petit pour que la fonction (11) admette une fonction inverse dans B et que l'image $D = p(B)$ ne contienne pas les points a et $\bar{a}$. Il est évident que D est également symétrique par rapport à l'axe réel et contient F. Considérons dans D la fonction inverse $p^{-1}(\zeta)$. On voit qu'elle est aussi symétrique par rapport à l'axe réel. On sait par le théorème de Runge que pour $p^{-1}(\zeta)$ on peut trouver une fonction rationnelle $\Pi(\zeta)$, ayant des pôles uniquement aux points a et $\bar{a}$, symétrique par rapport à l'axe réel et arbitrairement proche de $p^{-1}(\zeta)$ dans un domaine fermé Q_0, contenu dans D et contenant F dans son intérieur. De même, en modifiant arbitrairement peu $\Pi(\zeta)$, nous pouvons obtenir, en vertu du lemme 1, 2, que toutes les racines de la dérivée $\Pi'(\zeta)$ soient simples. De plus, si l'approximation est suffisante, la valeur $\Pi(0)-p^{-1}(0) = \Pi(0)-0$ sera arbitrairement petite; ainsi la différence $\Pi_1(\zeta) = \Pi(\zeta)-\Pi(0)$ approche aussi arbitrairement la fonction $p^{-1}(\zeta)$ dans Q_0. En outre, modifiant arbitrairement la fonction $\Pi_1(\zeta)$ en y ajoutant une constante réelle, nous pouvons obtenir que cette fonction ait uniquement des racines simples. Il est connu que, si l'approximation est suffisante, alors $\Pi_1(\zeta)$ admettra une inverse dans Q_0 et l'image $E = \Pi_1(Q_0)$ contiendra dans son

intérieur l'image réciproque $p^{-1}(F) = I$. Prenant $\Pi_0(\zeta) = \Pi_1(\zeta)$ dans $\zeta \in Q_0$, nous voyons que le long de I la fonction inverse $\Pi_0^{-1}(t)$ est arbitrairement proche de $p(t)$. Considérons l'arc C de représentation paramétrique

$$z = \Pi_0^{-1}(\tau i), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{15}$$

De ce qui précède on déduit qu'il est analytique, arbitrairement proche de F, qu'il part du point 0 et qu'il est contenu dans Q_0, donc ne passe pas par a, et que la fonction $\Pi_0(\zeta)$ est purement imaginaire le long de C. En outre, comme la fonction $\Pi_0(\zeta)$ admet une fonction inverse dans $Q_0 \supset C$, sa dérivée ne peut pas avoir de racines sur C et possède elle-même exactement une racine réelle, égale à 0. Enfin, comme

$$\frac{\operatorname{Im} p\{\tau i\}}{\tau}, \quad 0 < \tau < 1,$$

aune borne inférieure positive, avec une approximation suffisante il en sera de même pour la fonction

$$\frac{\operatorname{Im}\{\Pi_0^{-1}(\tau i)\}}{\tau}, \quad 0 < \tau < 1,$$

et, par conséquent, nous aurons

$$\operatorname{Im}\{\Pi_0^{-1}(\tau i)\} > 0, \quad 0 < \tau < 1,$$

donc l'arc C est contenu, à l'exception de son origine, dans le demi-plan supérieur.

Prenons maintenant l'arc H de représentation

$$w = l^{-1}(\Pi_0^{-1}(\tau i)), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{16}$$

On vois facilement de (15) que H est un arc analytique, partant de $e^{i\gamma}$ à l'intérieur de $K(0, 1)$, ne passant pas par 0; en outre, si les approximations mentionnées plus haut de l'arc R par F et ensuite de l'arc F par C sont suffisantes, H sera arbitrairement proche de J (v. [6], (36, *), pp. 13–14). En même temps, considérant la fonction $\Omega(w) = (\Pi(l(w)))^2$, nous déduisons facilement des raisonnement précédents que $\Omega(w)$ est rationnelle spéciale, que sa dérivée a uniquement des zéros simples situés en dehors de l'arc H, à l'exception d'un seul situé à l'origine $e^{i\gamma}$ de cet arc, et enfin que, conformément à (16), elle est réelle sur H, qui est par suite un arc spécial correspondant à la fonction $\Omega(w)$, donc que toutes les conditions de la conclusion sont réalisées.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que, avec les notations employées plus haut, tout domaine de Löwner $K(0, 1)\setminus J$ est la limite dans le sens du noyau d'une suite de domaines spéciaux du type $K(0, 1)\setminus H$.

II. Transformations par les fonctions algébriques spéciales

1. Étude de la fonction intérieure. Nous donnerons ici quelques informations sur les fonctions algébriques considérées plus haut.

THÉORÈME 1. *Etant données une fonction intérieure* $w = a(z)$ *et les fonctions correspondantes: déterminante* $\Omega(w)$ *et accommodée* $\chi(z)$ *de* (28, $*$), *elles ont les propriétés suivantes:*

(i) $a(z)$ *se prolonge comme fonction finie et continue au cercle unité fermé.*

(ii) $a(z)$ *transforme* $K(0, 1)$ *en un domaine* G, *contenu dans* $K(0, 1)$, *de telle façon que son ensemble complémentaire dans la fermeture de* $K(0, 1)$ *ne contient pas de points intérieurs.*

(iii) $a(z)$ *est univalente dans* $K(0, 1)$.

(iv) *Pour tout point* z_0 *du cercle* $K(0, 1)$ *et pour son image* $w_0 = a(z_0)$ *la nullité de* $\chi'(z)$ *au point* z_0 *avec une certaine multiplicité équivaut à celle de* $\Omega(w)$ *au point* w_0 *avec la même multiplicité.*

(v) *La frontière* G^* *se confond avec l'image de la circonférence* $K^*(0, 1)$ *par* $a(z)$; *elle se compose des points pour lesquels* $\Omega(w)$ *est réelle et contient la circonférence* $K^*(0, 1)$.

(vi) *Pour tout point* z^* *situé sur la circonférence* $K^*(0, 1)$ *et pour son image* $w^* = a(z^*)$ *située sur la frontière* G^* *on a dans un certain demi-entourage intérieur du cercle du point* z^* *le développement*

$$a(z) = w^* + \alpha_p^* \left((z - z^*)^{1/q}\right)^p + \alpha_{p+1}^* \left((z - z^*)^{1/q}\right)^{p+1} + \alpha_{p+2}^* \left((z - z^*)^{1/q}\right)^{p+2} + \ldots,$$

où $p-1$ *et* $q-1$ *désignent respectivement les multiplicités de* z^* *et* w^* *comme racines des dérivées* $\chi'(z)$ *et* $\Omega'(w)$, $\alpha_p^* \neq 0$, $\alpha_{p+1}^*, \ldots$ *sont des coefficients et* $(z - z^*)^{1/q}$ *est une certaine branche du radical; en outre* $p \leqslant 2q$.

(vii) *Tout point* w^* *de la frontière* G^* *est l'image par* $a(z)$ *d'un nombre fini de points de la circonférence* $K^*(0, 1)$, *en outre la somme des multiplicités correspondantes avec lesquelles la valeur* w^* *est admise en ces points est* 2 *ou* 1 *suivant que* w^* *est à l'intérieur du cercle* $K(0, 1)$ *ou sur la circonférence* $K^*(0, 1)$.

Démonstration. La démonstration se composera de sept parties, qui correspondent aux propriétés mentionnées dans la conclusion.

ad (i). La propriété demandée résulte directement de (40, $*$).

ad (ii). Posons d'abord $\Gamma = a(K^*(0, 1))$. On déduit de ce qui précède que Γ est un ensemble borné et fermé. De plus, en vertu de (28, $*$), $\Omega(\Gamma) = \chi(K^*(0, 1))$, ce qui entraîne que la fonction $\Omega(w)$ est réelle sur Γ et que Γ ne contient pas le point 0, car la fonction $\chi(z)$ est réelle et bornée sur $K^*(0, 1)$ et $\Omega(w)$ est infinie au point 0. On voit aussi immédiatement que G^* est contenu dans Γ, car $a(z)$ est une fonction holomorphe dans $K(0, 1)$. Ainsi

G^* est un ensemble borné et, par suite, G est également borné. On peut ensuite démontrer que le continu Γ ne partage pas le domaine G. Supposons en effet, par le contraire, que la différence $G \setminus \Gamma$ ne soit pas connexe. Alors, outre la composante évidente de cette différence S_0, contenant le point 0, il existe une seconde composante analogue S; de plus, comme partie de G, elle est bornée. La frontière de cette composante est évidemment contenue dans la somme $G^* \cup \Gamma$, donc dans Γ. Par suite, conformément à ce qui précède, la fonction $\Omega(w)$, holomorphe dans le domaine borné S, aurait sur la frontière de ce domaine une partie imaginaire égale à zéro et, par conséquent, elle devrait se réduire à une constante, ce qui n'a pas lieu. Cela posé, on peut déjà démontrer que la propriété demandée a lieu. En effet, dans le cas contraire, l'une des différences $G \setminus \overline{K(0, 1)}$ ou $K(0, 1) \setminus \bar{G}$ serait, comme il est facile de le voir, un ensemble non vide, ouvert, borné, ne contenant pas 0, en outre la frontière de cet ensemble serait contenue dans $G^* \cup K^*(0, 1)$, donc à plus forte raison dans $\Gamma \cup K^*(0, 1)$; en étudiant la partie imaginaire de la fonction $\Omega(w)$, on aboutirait de même que précédémment à une contradiction.

ad (iii). Désignons maintenant par Z l'ensemble fini de tous les points z pour lesquels on a $z = 0$, ou $\chi'(z) = 0$, et par W l'ensemble fini de tous les points w pour lesquels $w = 0$, ou bien $\Omega'(w) = 0$, ou bien qu'il existe un $z \in Z$ tel que $\Omega(w) = \chi(z)$. Etant donné, d'après ce qui précède, que $G \setminus \Gamma$ est un domaine, $G \setminus (\Gamma \cup W)$ l'est aussi. Soit maintenant μ une courbe continue d'équation

$$w = w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

partant d'un point $w_0 \in G \setminus (\Gamma \cup W)$, entièrement contenue, à l'exception peut-être de son extrémité, dans l'ensemble $G \setminus (\Gamma \cup W)$. Soit ensuite $z_0 \in K(0, 1)$ un point tel que $a(z_0) = w_0$. Alors on peut démontrer qu'il existe exactement une courbe continue λ de représentation

$$z = z(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2}$$

partant du point z_0, contenue entièrement dans $K(0, 1) \setminus Z$ et telle que μ est l'image de λ par la transformation $a(z)$, c'est-à-dire que

$$w(t) = a(z(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{3}$$

En effet, considérons la classe des intervalles $[0, b]$, contenus dans $[0, 1]$, pour lesquels il existe exactement une fonction continue du type (2) qui satisfait dans cet intervalle à la relation (3). On voit que cette classe est non vide, car l'intervalle $[0, 0]$ lui appartient. On voit en outre que les valeurs (2) sont situées en dehors de $K^*(0, 1)$ et de Z, car les valeurs (1) sont situées en dehors de Γ et W. Soit ensuite $[0, \beta)$ la somme des intervalles de

la classe considérée. Observons d'abord que dans l'intervalle $[0, \beta\}$ il existe exactement une courbe continue (2), du type décrit, qui remplit dans $[0, \beta\}$ la condition (3). Il suffit à cet effet de prendre pour chaque t la valeur commune de toutes les fonctions (2) de la classe considérée qui sont définies pour t. Nous observons en second lieu que β égale 1. Pour cela démontrons que si $\beta < 1$, il existerait un intervalle $[0, \beta^*]$ de la classe des intervalles mentionnée plus haut, effectivement plus large que $[0, \beta\}$. En effet, supposant $\beta < 1$, prenons une suite arbitraire de paramètres $\{t_n\}$, tendant vers β à gauche, et la suite correspondante des valeurs $\{z(t_n)\}$. Choisissant au besoin des suites partielles, on peut supposer que la dernière suite est convergente vers une limite ζ située dans $\overline{K(0, 1)}$. En même temps la suite $\{w(t_n)\}$ tend évidemment vers $\omega = w(\beta)$; en outre, en tenant compte de (3) et du fait que $a(z)$ peut être continûment etendue au cercle fermé, on obtient, vu (40, $*$),

$$\omega = a(\zeta) \tag{4}$$

et, par conséquent, d'après (28, $*$),

$$\Omega(w) = \chi(\zeta).$$

De $\beta < 1$ et des hypothèses faites sur μ il résulte que le point ω n'appartient ni à Γ ni à W, c'est-à-dire qu'il ne se confond avec aucune des racines de la dérivée $\Omega'(w)$; par conséquent, en vertu de (3) et (4), le point ζ n'est pas situé sur $K^*(0, 1)$, donc il est situé dans $K(0, 1)$, et il ne se confond ni avec zéro, ni avec aucune des racines de la dérivée $\chi'(z)$. Ainsi on tire facilement de (28, $*$) que la fonction $a(z)$ possède au point ζ une dérivée différente de zéro; nous voyons donc, en désignant cette fonction dans un petit entourage du point ζ par $a_0(z)$, que dans l'image de cet entourage, contenant à l'intérieur le point ω, il existe une fonction $a_0^{-1}(w)$, inverse de $a_0(z)$. De là nous concluons immediatement que dans un entourage suffisamment petit du point β, existe exactement une fonction continue

$$\hat{z}(t), \quad \beta - h \leqslant t \leqslant \beta + h, \tag{5}$$

qui y remplit la condition

$$w(t) = a\big(\hat{z}(t)\big) \tag{6}$$

et la condition initiale

$$\hat{z}(\beta) = \zeta, \tag{7}$$

définie par la formule

$$\hat{z}(t) = a_0^{-1}\big(w(t)\big).$$

En même temps on aura évidemment pour n suffisamment grands

$$\hat{z}(t_n) = a_0^{-1}\big(w(t_n)\big), \quad t_n > \beta - h,$$

Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 195,
PWN, Warszawa 1982, 55 pp.

et, par conséquent,

$$\hat{z}(t_n) = z(t_n).$$

Formons pour un tel n la fonction suivante

$$z^*(t) = \begin{cases} z(t) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_n, \\ \hat{z}(t) & \text{pour} \quad t_n \leqslant t \leqslant \beta^* = \beta + h. \end{cases} \tag{8}$$

Elle est continue et remplit la condition

$$w(t) = a\big(z^*(t)\big), \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta^*,$$

et, en vertu de la définition du μ, elle est entièrement contenue dans $K(0, 1) \setminus Z$. De plus, elle est la seule courbe continue remplissant dans cet intervalle la condition (3). En effet, prenant une fonction continue

$$z^{**}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta^*, \tag{9}$$

qui remplit la condition

$$w(t) = a\big(z^{**}(t)\big), \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta^*,$$

nous déduisons de l'hypothèse de l'unicité de la fonction (2) dans $[0, \beta\}$ qu'on doit avoir

$$z^{**}(t) = z^*(t) = z(t),$$

et, par conséquent, conformément à la définition de ζ,

$$z^{**}(\beta) = \zeta.$$

De là et de l'unicité de la fonction continue (5), introduite plus haut, qui remplit (6) et (7) dans $[\beta - h, \beta + h]$, résulte qu'on doit aussi avoir

$$z^{**}(t) = z^*(t) = z(t),$$

et (9) doit se confondre avec (8), et l'unicité annoncée a bien lieu. Donc dans l'intervalle $[0, \beta^*]$ il existerait une courbe λ du type décrit. Ainsi $\beta = 1$. Remarquons encore qu'en vertu de (3) et de (28, $*$) on a constamment

$$\Omega\big(w(t)\big) = \chi\big(z(t)\big), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

De là il résulte en particulier que si μ aboutit au point 0, c'est-à-dire si $w(t) \to 0$ pour $t \to 1$, on a $\Omega\big(w(t)\big) \to \infty$, alors également $\chi\big(z(t)\big) \to \infty$, et enfin $z(t) \to 0$, c'est-à-dire que λ aboutit au petit 0.

De ce qui précède on déduit facilement que la propriété (iii) a lieu. Pour cela supposons le contraire, à savoir que deux points distincts z_0^* et z_0^{**} du

cercle $K(0, 1)$ soient amenés par la transformation $w = a(z)$ au même point $w_0^* \in G$. Effectuant une translation arbitrairement petite des points w_0^*, z_0^* et z_0^{**}, on peut supposer que w_0^* n'appartient pas à $\Gamma \cup W$, et z_0^* et z_0^{**} n'appartiennent pas à Z. De ce que le continu Γ ne partage pas le domaine G nous déduisons qu'il existe une courbe continue μ qui part de w_0^*, est entièrement contenue dans $G \setminus (\Gamma \cup W)$ à l'exception de son extrémité, et a son extrémité en 0. Par suite, en vertu de ce qui précède, la courbe citée est l'image par $w = a(z)$ de deux courbes analogues λ_1 et λ_2 qui partent respectivement des points z_0^* et z_0^{**} et aboutissent, conformément à ce qui précède, également au point 0 et qui n'ont, à l'exception de 0, aucun point commun. Cependant les points $w \in \mu$, suffisamment proches de zéro, seraient alors les images par $w = a(z)$ de deux points $z_1 \in \lambda_1$ et $z_2 \in \lambda_2$, distincts et arbitrairement proches de zéro, ce qui est impossible, car $a(z)$ admet das l'entourage de zéro une inverse.

ad (iv). De (28, $*$), prenant encore en considération l'univalence de $a(z)$, nous obtenons immédiatement la propriété demandée (iv).

ad (v). En vertu d'une observation précédente on a $G^* \subset \Gamma$, il suffit donc de démontrer que l'inverse a également lieu. En effet, si cela n'avait pas lieu, comme Γ est évidemment contenu dans $\overline{K(0, 1)}$, puisque $|a(z)| < 1$, Γ devrait avoir un point commun w_0 avec G. Autrement dit, il existerait des points $\zeta_0 \in K^*(0, 1)$ et $z_0 \in K(0, 1)$ tels que $a(\zeta_0) = a(z_0) = w_0$. Mais, puisque la fonction $a(z)$ est analytique dans z_0 et qu'elle n'est pas constante, l'image d'un certain entourage du point z_0 couvrirait un certain entourage de w_0, donc $a(z)$ étant continue dans ζ_0, elle aurait un point commun avec l'image analogue d'un demi-entourage intérieur du point ζ_0, ce qui est impossible, car $a(z)$ est univalente. De cette façon la première partie de la propriété demandée est établie. Ensuite, en vertu d'une autre observation précédente, la fonction $\Omega(w)$ est réelle sur Γ c'est-à-dire sur G^*. Enfin, avec une autre observation précédente, G est contenu dans $K(0, 1)$ et la fermeture de G contient $\overline{K(0, 1)}$, ce qui entraine immédiatement que la dernière partie de la propriété demandée a lieu.

ad (vi). De (28, $*$), de la continuité de $a(z)$ et (33, $*$) résulte directement la première partie de la propriété demandée; en outre, comme chaque demi-entourage intérieur du point z^*, suffisamment petit, contient un secteur circulaire de centre z^* et d'écart arbitrairement proche de π et comme $a(z)$ est univalente, il en résulte facilement, en vertu de (33, $*$), que la seconde partie de la propriété demandée est remplie. En effet, du fait cité plus haut et de (37, $*$) résulte que l'image par $a(z)$ de chaque demi-entourage intérieur du point z^*, suffisamment petit, couvre d'une façon univalente un secteur circulaire de centre w^* et d'écart arbitrairement proche de $\pi p/q$, et en même temps cette image est située dans un secteur analogue d'écart aussi arbitrairement proche de $\pi p/q$.

ad (vii). Prenons maintenant le point considéré w^* et désignons par $z_j, j = 1, \ldots,$ une suite finie arbitraire de points où $a(z)$ prend la valeur w^* et désignons par p_j/q_j les multiplicités avec lesquelles la valeur w^* est admise en z_j; conformément à ce qui précède nous constatons que les images des demi-entourages des points correspondants z_j, suffisamments petits, couvrent certains secteurs circulaires de centre w^* et d'écarts suffisamment proches de $\pi p_j/q_j$ et que ces images sont en même temps contenues dans les secteurs analogues; nous voyons maintenant, d'une part, en vertu des observations précédantes, comme la fonction $a(z)$ est univalente et que ses valeurs appartiennent à $K(0, 1)$, que les premiers des secteurs cités ne peuvent pas avoir de points communs, c'est-à-dire

$$\pi\frac{p_1}{q_1} + \ldots \leqslant \pi, \quad \text{soit} \quad \pi\frac{p_1}{q_1} + \ldots \leqslant 2\pi,$$

suivant la situation du point w^*. En particulier nous constatons, vu les inégalites évidentes $1 \leqslant p_j \leqslant 2L+1$, $1 \leqslant q_j \leqslant 2L+1$ et, par suite,

$$\frac{p_j}{q_j} \geqslant \frac{1}{2L+1},$$

que le nombre des points z_j est borné supérieurement par le nombre fini $2(2L+1)$, donc que le nombre de tous les points de la circonférence $K^*(0, 1)$ amenés par $a(z)$ en w^*, pour lesquels nous conservons les notations précédentes, est fini. D'autre part, en vertu des observations précédentes, comme les valeurs de $a(z)$ pour z appartenant à $K(0, 1)$ couvrent d'une façon dense $K(0, 1)$, nous trouvons que les seconds des secteurs cités plus haut doivent couvrir un demi-entourage ou un entourage du point w^*, suivant la situation de ce point, donc

$$\pi\frac{p_1}{q_1} + \ldots \geqslant \pi \quad \text{ou} \quad \pi\frac{p_1}{q_1} + \ldots \geqslant 2\pi.$$

Récapitulant les faits signalés dernièrement on obtient immédiatement la propriété demandée.

2. Représentation avec une seule coupure. Nous allons maintenant compléter les considérations précédentes.

THÉORÈME 1. *Si avec les hypothèses précédentes la fonction $a(z)$ transforme le cercle $K(0, 1)$ en un domaine spécial $G = K(0, 1) \setminus H$, où H est un arc spécial correspondant à $\Omega(w)$, et si la dérivée $\Omega'(w)$ a toutes ses racines simples, situées en dehors de H, à l'exception d'une située à l'origine de H, les propriétés suivantes ont lieu*:

(j) *La dérivée $\chi'(z)$ a toutes ses racines simples.*

(jj) *Chaque point de la frontière G^* qui est une racine de la dérivée $\Omega'(w)$ située sur $K^*(0, 1)$, différente de l'origine de l'arc H, est l'image de multiplicité*

exactement 1 *d'un seul point de la circonférence* $K^*(0, 1)$ *qui est une racine de la dérivée* $\chi'(z)$, *et en ce point la dérivée de la fonction intérieure* $a(z)$ *s'annule.*

Démonstration. La démonstration se composera de deux parties, comme dans le paragraphe précédent.

ad (j). Considérons une racine arbitraire z^* de la dérivée $\chi'(z)$, située sur la circonférence $K^*(0, 1)$ et son image $w^* = a(z^*)$ sur la frontière G^* et admettons les notations (vi) du paragraphe précédent. Conformément aux hypothèses et au choix de z^* on a ici $q = 1$ ou 2 et $p \geqslant 2$. Considérons maintenant le premier cas $q = 1$, où w^* n'est pas une racine de la dérivée $\Omega'(w)$. En vertu de (vi) on doit avoir $p = 2$, donc z^* est une racine simple de la dérivée $\chi'(z)$. De plus, dans ce cas w^* doit être l'extrémité de l'arc H. En effet, nous déduisons facilement de (37, $*$) que l'image par $a(z)$ d'un demi-entourage intérieur du point z^*, arbitraire, suffisamment petit, couvre un secteur circulaire de centre w^* et d'écart arbitrairement proche de 2π. Par conséquent le point w^* ne peut pas être situé sur H, à l'exception de son extrémité, car en vertu de (38, $*$), l'image du demi-entourage mentionné plus haut devrait contenir des points de l'arc H. De même, il résulte de (38, $*$) que le point w^* ne peut être sur $K(0, 1)$; w^* est donc l'extrémité de H et, de plus, vu (vii), w^* ne peut être l'image d'aucun autre point de la circonférence $K^*(0, 1)$, différent de z^*. De cette façon le cas considéré peut avoir lieu tout au plus pour une seule des racines de la dérivée $\chi'(z)$, situées sur $K^*(0, 1)$. Considérant ensuite le second cas $q = 2$, où w^* est une racine de la dérivée $\Omega'(w)$, nous constatons en premier lieu que w^* ne peut être sur l'arc H en dehors de son origine, car il n'existe pas de racines de la dérivée mentionnée. Ensuite, raisonant comme précédemment, nous constatons, en vertu de (37, $*$) et (38, $*$), que w^* ne peut être situé à l'origine de l'arc H, donc que dans le cas considéré le point w^* doit être sur $K^*(0, 1)$ en dehors de H. De plus, en vertu (vii), on doit avoir ici $p = 2$, donc z^* doit être une racine simple de la dérivée $\chi'(z)$ et alors le point w^* ne peut être l'image d'aucun point de la circonférence $K^*(0, 1)$ différent de z^*. Des observations précédentes il résulte en particulier que toutes les racines de $\chi'(z)$ situées sur $K(0, 1)$ sont simples et que, si $z^* \in K^*(0, 1)$, $\chi'(z^*) = 0$ et $w^* = a(z^*)$, alors w^* est une racine de la dérivée $\Omega'(w)$, située en dehors de l'origine de H, ou bien w^* est l'extrémité de l'arc H; en outre w^* ne peut être l'image d'aucun point de la circonférence $K^*(0, 1)$ différent de z^*. En même temps les nombres des racines de $\chi'(z)$ et $\Omega'(w)$ situées sur $K(0, 1)$ doivant être évidemment égaux, donc les nombres des racines de ces dérivées situées sur $K^*(0, 1)$ doivent également être égaux, d'où nous déduisons évidemment que le point w^* est une racine de la dérivée $\Omega'(w)$ pour toutes les racines de la dérivée $\chi'(z)$, situées sur $K^*(0, 1)$, à l'exception d'une seule pour laquelle w^* est l'extrémité de l'arc H. De plus, conformément à (28, $*$), toutes les racines de la dérivée $\chi'(z)$ situées dans $K(0, 1)$ sont amenées par $a(z)$, en respectant les multiplicités, en toutes les

racines de la dérivée $\Omega'(w)$ situées dans G, donc dans $K(0, 1)$; comme ces dernières sont simples par hypothèse, les racines de $\chi'(z)$ mentionnées, situées dans $K(0, 1)$, et évidemment celles dans $\tilde{K}(0, 1)$, doivent être simples. Récapitulant ces dernières considérations et les précédentes, nous obtenons la propriété demandée.

ad (jj). La première et la seconde partie de la propriété demandée résulte directement des raisonnements précédents, la troisième partie est une conséquence de ce qui précède et de (vii).

Dans les considérations ultérieures nous nous servirons, suivant le cas, de la fonction intérieure dans le cercle unité ouvert ou fermé.

III. Théorèmes de Riemann et de Löwner

1. Familles de Löwner. Soit

$$\Omega(w) = \frac{D_L}{w^L} + \ldots + \bar{D}_L w^L, \qquad D_L \neq 0, \ L \geqslant 1, \tag{1}$$

une fonction rationnelle spéciale, H – un arc lui correspond et enfin $G = K(0, 1) \setminus H$ – le domaine spécial correspondant.

Supposons en outre que la dérivée $\Omega'(w)$ possède uniquement des racines simples, situées en dehors de l'arc H, excepté son origine.

Désignons ensuite respectivement par

$$\begin{aligned} &w_k, && k = 1, \ldots, Q, \\ &e^{i\omega_l}, && l = 1, \ldots, R, \\ &e^{i\tau} \end{aligned} \tag{2}$$

toutes les racines de la dérivée $\Omega'(w)$ situées à l'intérieur de $K(0, 1)$, sur la circonférence $K^*(0, 1)$ et à l'origine de l'arc H. Admettons enfin que les valeurs

$$\Omega(w_k), \qquad \Omega(e^{i\omega_l}), \qquad \Omega(e^{i\tau}) \tag{3}$$

sont distinctes et que

$$\Omega''(e^{i\tau}) e^{2i\tau} > 0. \tag{4}$$

Nous allons déduire le résultat fondamental que voici.

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Pour la fonction $\Omega(w)$ et l'arc H donnés plus haut il existe une famille de fonctions rationnelles spéciales*

$$\chi(z, t) = \frac{E_L(t)}{z^L} + \ldots + \overline{E_L(t)}\, z^L \tag{5}$$

et une famille de points complexes

$$z_k(t) \in K(0, 1), \quad k = 1, \ldots, Q,$$

$$e^{i\varphi_l}(t), \quad l = 1, \ldots, R, \tag{6}$$

$$e^{i\vartheta}(t),$$

qui dépendent du paramètre réel t, parcourant un intervalle fini $[0, T]$, *telles que*

1° *les relations suivantes ont lieu*

$$\chi(z, 0) = \Omega(z),$$

$$z_k(0) = w_k,$$

$$e^{i\varphi_l(0)} = e^{i\omega_l}, \tag{7}$$

$$e^{i\vartheta(0)} = e^{i\tau},$$

$$E_L(t) = e^{Lt} D_L,$$

$$\chi'_z(z_k(t), t) = 0,$$

$$\chi(z_k(t), t) = \Omega(w_k), \tag{8}$$

$$\chi'_z(e^{i\varphi_l(t)}, t) = 0,$$

$$\chi(e^{i\varphi_l(t)}, t) = \Omega(e^{i\omega_l}),$$

$$\chi'_z(e^{i\vartheta(t)}, t) = 0; \tag{9}$$

si $T > 0$, *la fonction* $\varkappa(t) = \chi(e^{i\vartheta(t)}, t)$ *est croissante et, par conséquent, en vertu de la première et dernière des conditions* (7), *elle vérifie l'inégalité*

$$\chi(e^{i\vartheta(t)}, t) \geqslant \Omega(e^{i\tau}) \tag{10}$$

avec le signe d'égalité pour $t = 0$; *en outre on a constamment*

$$\varkappa'(t) = 2\chi''_{zz}(e^{i\vartheta(t)}, t) e^{2i\vartheta(t)} > 0; \tag{11}$$

les points (6) *sont tous distincts et de ce fait ils représentent toutes les racines de la dérivée* $\chi'_z(z, t)$ *et, comme on le voit, celles-ci sont simples; les fonctions* (5) *et* (6) *sont holomorphes par rapport à t.*

En même temps il existe une famille de fonctions de Löwner (29, *), *liée à* (5) *et* (6), *de la forme*

$$a(z, t) = \alpha_1(t) z + \alpha_2(t) z^2 + \ldots, \quad z \in K(0, 1), \tag{12}$$

définie dans l'intervalle précédent du paramètre t, telle que

2° *les relations suivantes ont lieu*

$$\Omega(a(z, t)) = \chi(z, t), \tag{13}$$

$$a(z, 0) = z; \tag{14}$$

la fonction (12) *est holomorphe par rapport à* t;

3° *les relations suivantes ont lieu*

$$a(z_k(t), t) = w_k, \tag{15}$$

$$a(e^{i\varphi_l(t)}, t) = e^{i\omega_l}, \tag{16}$$

$$a'_z(0, t) = \alpha_1(t) = e^{-t}; \tag{17}$$

4° *les fonctions algébriques spéciales* $a(z, t)$ *représentent le cercle* $K(0, 1)$ *sur des domaines spéciaux* $G_t = K(0, 1) \setminus H_t$, *où* H_t *est un arc spécial contenu dans* H, *ayant avec lui une origine commune*;

5° *pour la valeur finie* $t = T$ *le domaine* G_t *se confond avec* G *et ainsi, en vertu de* 4°, *la fonction* $a(z) = a(z, T)$ *nous fournit la représentation conforme de Riemann du cercle* $K(0, 1)$ *sur le domaine spécial* G, *transformant le point* 0 *en le point* 0 *et possédant en ce point une dérivée positive.*

Dans le paragraphe suivant nous allons établir l'énoncé précédent.

2. Démonstration du résultat fondamental. Considérons la classe des intervalles $[0, T_1]$ dans lesquels on peut former, d'une façon unique, les familles de fonctions continues (5,1), (6,1) et (12,1), remplissant les conditions 1°–4°. Nous vérifions directement que la classe considérée n'est pas vide, car elle contient l'intervalle $[0, 0]$, dans lequel les familles (5,1), (6,1) et (12,1) sont définies univoquement par les conditions (7,1) et (14,1). Désignons par $[0, T\}$ le plus grand de ces intervalles, c'est-à-dire la somme de tous les intervalles de la classe considérée.

Remarquons que l'intervalle $[0, T\}$ doit être fini. En effet, pour les paramètres de cet intervalle, en vertu des conditions 2° et 4°,

$$\Omega(K^*(0, 1) \cup H) \supset \Omega(K^*(0, 1) \cup H_t) = \chi(K^*(0, 1), t),$$

ce qui prouve que les fonctions (1,5) sont uniformément bornées sur $K^*(0, 1)$; de ce fait les coefficients $E_L(t)$ doivent également être uniformément bornés; d'autre part, vu (1,8), le coefficient $E_L(t)$ égale $D_L e^{Lt}$; ces deux faits sont possibles uniquement dans le cas, où l'intervalle analysé est fini.

Etant donné ce qui précède il suffit de prouver que les familles des fonctions qui remplissent les conditions 1°–4°, considérées dans $[0, T\}$, pourront être étendues d'une façon continue à l'intervalle fermé $[0, T]$, en respectant également les conditions 1°–4°; en outre sera encore remplie la condition 5°.

Nous établirons ce résultat en quelques étapes.

A. Extension à l'intervalle $[0, T+\eta)$ en respectant les conditions 1°–4°. Prenons une suite arbitraire de paramètres $\{t_f\}$ tendant vers T de façon

que $t_f \leqslant T$, et, en même temps, telle que les suites correspondantes de fonctions resp. de nombres

$$\chi(z, t_f), \tag{1}$$

$$z_k(t_f), \tag{2}$$

$$e^{i\varphi_l(t_f)}, \quad f = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$e^{i\vartheta(t_f)}, \tag{4}$$

$$a(z, t_f), \tag{5}$$

sont convergentes vers certaines limites

$$\chi(z) = \frac{E_L}{z^L} + \ldots + \bar{E}_L z^L, \tag{6}$$

$$z_k, \tag{7}$$

$$e^{i\varphi_l}, \tag{8}$$

$$e^{i\vartheta}, \tag{9}$$

$$a(z). \tag{10}$$

Cela est possible car, comme on l'a remarqué plus haut, les coefficients de la fonction (1) sont uniformément bornés et les suites des nombres resp. des fonctions (2)–(4) et (5) sont bornées par l'unité. De ce fait, les conditions 1°–4° étant remplies à gauche de T, on aura pour les limites (6)–(10) les relations suivantes

$$\begin{aligned} &E_L = e^{LT} D_L \neq 0, \\ &\chi'(z_k) = 0, \\ &\chi(z_k) = \Omega(w_k), \\ &\chi'(e^{i\varphi_l}) = 0, \\ &\chi(e^{i\varphi_l}) = \Omega(e^{i\omega_l}), \\ &\chi'(e^{i\vartheta}) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\chi(e^{i\vartheta}) \geqslant \Omega(e^{i\tau}), \tag{12}$$

avec le signe d'égalité seulement pour $T = 0$, et les relations

$$\begin{aligned} &\Omega(a(z)) = \chi(z), \\ &a(z_k) = w_k, \\ &a(e^{i\varphi_l}) = e^{i\omega_l}, \\ &a'_z(0) = e^{-T}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ainsi la fonction (6) et les nombres (7)–(9) s'accordent quant aux notations et aux conditions qu'ils remplissent avec la fonction (1,1,I) et les nombres (2,1,I)–(4,1,I). De plus, pour la frontière $\tilde{G}^*$ du domaine $\tilde{G}$, sur laquelle la fonction (10) représente $K(0, 1)$, la relation suivante a lieu

$$\tilde{G}^* = a(K^*(0, 1)) \subset K^*(0, 1) \cup H. \tag{14}$$

En effet, les relations $\Omega(a(z, t_f)) = \chi(z, t_f)$, qui sont remplies en vertu de (1,13), et la convergence des suites (1) et (5) resp. vers les limites (6) et (10), vu les lemmes correspondants [3] (lemmes 2 et 3), entraînent la convergence uniforme $a(z, t_f)$ vers $a(z)$ dans la fermeture $\overline{K(0, 1)}$ et, en particulier, sur la circonférence $K^*(0, 1)$. Rapproché des relations résultant de 4° pour les frontières $G_f^* = a(K^*(0, 1), t_f) \subset K^*(0, 1) \cup H$, $f = 1, 2, \ldots$, ceci donne immédiatement l'inclusion demandée. Enfin, les points (7), (8) et (9) sont tous distincts. En effet, il résulte des égalités centrales (11) et du fait que, par hypothèse, leurs seconds membres sont distincts, que les nombres (7) et (8) sont distincts. Il reste à prouver qu'ils sont différents du nombre (9). Or, si pour un k on avait $z_k = e^{i\vartheta}$, alors on devrait avoir

$$z_k(t_f) \to e^{i\vartheta}, \quad \frac{1}{z_k(t_f)} \to e^{i\vartheta}, \quad e^{i\vartheta(t_f)} \to e^{i\vartheta};$$

en outre, vu les relations (1,6), (1,8) et (1,9),

$$z_k(t_f) \in K(0, 1), \quad \frac{1}{z_k(t_f)} \in \tilde{K}(0, 1),$$

$$\chi_z'(z_k(t_f), t_f) = 0, \quad \chi_z'\left(\frac{1}{z_k(t_f)}, t_f\right) = 0, \quad \chi_z'(e^{i\vartheta(t_f)}, t_f) = 0,$$

la dérivée $\chi'(z)$ de la fonction limite (6) devrait avoir au point $e^{i\vartheta}$ une racine au moins triple, contrairement à la conclusion du théorème 2,2,II. Le raisonnement est tout analogue dans le cas où $e^{i\varphi_l} = e^{i\vartheta}$ pour un certain l. Enfin, pour la fonction limite (6) et pour le point (9) a lieu l'inégalité

$$\chi''(e^{i\vartheta}) e^{2i\vartheta} > 0. \tag{15}$$

En effet, vu (11,1), on a constamment $\chi_{zz}''(e^{i\vartheta(t_f)}, t_f) e^{2i\vartheta(t_f)} > 0$, ce qui, en passant à la limite, donne d'abord une relation analogue à (15) avec le signe $\geqslant$, d'où, $e^{i\vartheta}$ étant une racine simple de la dérivée de la fonction (6), nous déduisons ensuite, que le premier membre de (15) est différent de zéro, et nous obtenons en définitive (15).

Du lemme 1,1,I (sur l'interpolation) il résulte maintenant que dans un entourage suffisamment petit $(T-\eta, T+\eta)$ du point T il existe des fonctions, définies d'une façon unique,

$$\tilde{\chi}(z, t) = \frac{\tilde{E}_L(t)}{z^L} + \ldots + \tilde{E}_0(t) + \ldots + \tilde{\bar{E}}_L(t) z^L, \tag{16}$$

$$\tilde{z}_k(t), \qquad k = 1, \ldots, Q,$$

$$e^{i\tilde{\varphi}_l(t)}, \qquad l = 1, \ldots, R, \tag{17}$$

$$e^{i\tilde{\vartheta}}(t),$$

telles que

$\tilde{1}^\circ$ les relations suivantes ont lieu

$$\begin{aligned} &\tilde{\chi}(z, T) = \chi(z), \\ &\tilde{z}_k(T) = z_k, \\ &e^{i\tilde{\varphi}_l(T)} = e^{i\varphi_l}, \\ &e^{i\tilde{\vartheta}(T)} = e^{i\vartheta}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_L(t) = e^{Lt} D_L, \\ &\tilde{\chi}'_z(\tilde{z}_k(t), t) = 0, \\ &\tilde{\chi}(\tilde{z}_k(t), t) = \Omega(w_k), \\ &\tilde{\chi}'_z(e^{i\tilde{\varphi}_l(t)}, t) = 0, \\ &\tilde{\chi}(e^{i\tilde{\varphi}_l(t)}, t) = \Omega(e^{i\omega_l}), \\ &\tilde{\chi}'_z(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t) = 0; \end{aligned} \tag{19}$$

la fonction (16) et les points (17) sont holomorphes par rapport à t; la fonction $\tilde{\varkappa}(t) = \tilde{\chi}(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t)$ est croissante et, en vertu de la première et de la dernière des conditions (18), elle vérifie l'inégalité

$$\tilde{\chi}(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t) \geqslant \chi(e^{i\vartheta}) \tag{20}$$

pour $t \geqslant T$, avec le signe d'égalité seulement pour $t = T$, en outre on a constamment

$$\tilde{\varkappa}'(t) = 2\tilde{\chi}''_{zz}(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t) e^{2i\tilde{\vartheta}(t)} > 0. \tag{21}$$

Nous démontrerons ensuite que pour η suffisamment petit il existe dans l'intervalle $[0, T+\eta)$ une famille de fonctions algébriques spéciales

$$\tilde{a}(z, t) = \tilde{\alpha}_1(t) z + \ldots, \qquad z \in K(0, 1), \tag{22}$$

liée uniformément à (16) et (17), telle que

$\tilde{2}^\circ$ les relations suivantes ont lieu

$$\Omega(\tilde{a}(z, t)) = \tilde{\chi}(z, t), \tag{23}$$

$$\tilde{a}(z, T) = a(z); \tag{24}$$

la fonction (22) est holomorphe par rapport à t.

Pour cela démontrons d'abord l'existence de la fonction (22). En effet, dans le cas contraire il existerait une suite de paramètres

$$\tau_f, \quad f = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

convergente vers T, pour lesquels les fonctions correspondantes (22) n'existeraient pas. Dans ce cas posons pour simplifier

$$\begin{aligned} &\tilde{\chi}_f(z) = \tilde{\chi}(z, t_f) = \frac{\tilde{E}_{Lf}}{z^L} + \ldots + \tilde{\tilde{E}}_{Lf} z^L, \\ &\tilde{z}_{kf} = \tilde{z}_k(\tau_f) \in K(0, 1), \\ &e^{i\tilde{\varphi}_{lf}} = e^{i\tilde{\varphi}_l(\tau_f)}, \\ &e^{i\tilde{\vartheta}_f} = e^{i\tilde{\vartheta}(\tau_f)}. \end{aligned} \tag{26}$$

Il est évident que

$$\begin{aligned} &\tilde{\chi}_f(z) \to \chi(z), \\ &\tilde{z}_{kf} \to z_k, \\ &e^{i\tilde{\varphi}_{lf}} \to e^{i\varphi_l}, \\ &e^{i\tilde{\vartheta}_f} \to e^{i\vartheta}. \end{aligned} \tag{27}$$

Formons ensuite, vu (1,1), (26) et (19), dans certains entourages des points $w = 0$ et $z = 0$, les branches des radicaux suivants:

$$\Omega_L(w) = \sqrt[L]{\Omega(w)} = \frac{\sqrt[L]{D_L}}{w} + \ldots$$

et

$$\tilde{\chi}_{Lf}(z) = \sqrt[L]{\tilde{\chi}_f(z)} = \frac{\sqrt[L]{\tilde{E}_{Lf}}}{z} + \ldots,$$

de telle façon que le quotient des premiers coefficients $\sqrt[L]{D_L}$ et $\sqrt[L]{\tilde{E}_{Lf}}$ soit un nombre positif. Alors, comme il résulte des considérations précédentes, il existe pour tout f suffisamment grand, dans un certain entourage fixe du point $z = 0$ de rayon $\tilde{r}$, une fonction holomorphe

$$\tilde{a}_f(z) = \Omega_L^{-1}(\tilde{\chi}_{Lf}(z)) = \tilde{\alpha}_{1f} z + \ldots, \quad \tilde{\alpha}_{1f} = \frac{\sqrt[L]{D_L}}{\sqrt[L]{\tilde{E}_{Lf}}} = e^{-t_f}, \tag{28}$$

qui y remplit la condition

$$\Omega(\tilde{a}_f(z)) = \tilde{\chi}_f(z). \tag{29}$$

Soit r_f le rayon de convergence de la série du second membre de (28). Etant donné que la fonction (28) est holomorphe tout au moins dans l'entourage fixe considéré plus haut et que, vu la définition de la suite (25), elle ne peut

pas être holomorphe dans le cercle unité entier, on a

$$\tilde{r} \leqslant \tilde{r}_f < 1.$$

La série (28) remplit évidemment dans son cercle de convergence la condition (29); de plus, en vertu d'un résultat correspondant ([3], lemme 2) elle se prolonge d'une façon continue, en respectant (29), sur la circonférence de ce cercle. Ensuite, sur cette circonférence il doit exister un point $\tilde{y}_f$ où la fonction (28) n'est pas holomorphe. D'où il résulte que pour l'image

$$\tilde{x}_f = \tilde{a}_f(\tilde{y}_f) \tag{30}$$

on doit avoir

$$\Omega'(\tilde{x}_f) = 0, \tag{31}$$

car, dans le cas contraire, la fonction (28) serait, à cause de (29), holomorphe dans $\tilde{y}_f$. Extrayant au besoin des suites partielles, nous pouvons admettre l'existence des limites

$$\begin{aligned} &\lim_{f \to \infty} \tilde{r}_f = \tilde{r}_0 \geqslant \tilde{r}, \\ &\lim_{f \to \infty} \tilde{y}_f = \tilde{y}_0, \\ &\lim_{f \to \infty} \tilde{a}_f(z) = \tilde{a}_0(z), \end{aligned} \tag{32}$$

où le seconde membre de la dernière égalité de (32) est une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < \tilde{r}_0$, qui y satisfait, à cause de (27) et (29), à l'équation $\Omega(\tilde{a}_0(z)) = \chi(z)$; en vertu de ce qui précède et de la première relation (13), la fonction $\tilde{a}_0(z)$ se confond avec la fonction $a(z)$ dans le cercle mentionné. De plus, à cause de [3], lemme 2, $\tilde{a}_0(z)$ et $a(z)$ se prolongent sur le cercle fermé $|z| \leqslant \tilde{r}_0$ et on déduit ensuite de (30) et de [3], lemme 3, la convergence

$$\lim_{f \to \infty} \tilde{x}_f = \tilde{a}_0(\tilde{y}_0) = a(\tilde{y}_0) = \tilde{x}_0, \tag{33}$$

d'où, en vertu de (31), résulte l'égalité

$$\Omega'(\tilde{x}_0) = 0.$$

De ce fait l'une des eventualités suivantes doit se présenter:

$$\tilde{x}_0 = w_k \quad \text{et} \quad \tilde{y}_0 = z_k, \tag{34}$$

ou bien

$$\tilde{x}_0 = e^{i\omega_l} \quad \text{et} \quad |\tilde{y}_0| = 1, \tag{35}$$

ou enfin

$$\tilde{x}_0 = e^{i\tau} \quad \text{et} \quad |\tilde{y}_0| = 1, \tag{36}$$

où k et l désignent resp. certains indices pris parmi les nombres $1, \ldots, Q$ et $1, \ldots, R$. Nous disons que dans le premier cas on doit avoir

$$\tilde{x}_f = w_k, \tag{37}$$

pour f suffisamment grand. En effet, si $\tilde{x}_f \neq w_k$ pour un nombre infini de f, la fonction $\Omega'(w)$ aurait, à cause de (31), deux racines distinctes w_k et $\tilde{x}_f \neq w_k$, tendant, d'après (33) et (34), vers la même limite w_k; ainsi le point w_k devrait être une racine au moins double de cette dérivée, ce qui n'a pas lieu. Nous en déduisons ensuite que l'on a également

$$\tilde{y}_f = \tilde{z}_{kf} \tag{38}$$

pour f suffisamment grand. En effet, si $\tilde{y}_f \neq \tilde{z}_{kf}$ pour un nombre infini de f, alors la fonction $\tilde{\chi}_f(z) - \Omega(\tilde{x}_f) = \tilde{\chi}_f(z) - \Omega(w_k)$ aurait, vu (26) et (19), une racine double $\tilde{z}_{kf}$ et, en vertu de (29), (30) et (37), cette même fonction aurait également une racine $\tilde{y}_f$; étant donné que ces racines sont distinctes et tendent, en vertu de (27), (32), (33) et (34), vers une limite commune z_k, le point z_k devrait être une racine au moins triple de la fonction limite $\chi(z) - \Omega(w_k)$, c'est-à-dire au moins double de la dérivée $\chi'(z)$, ce qui n'a pas lieu. Donc on a bien (38). Mais, dans ce cas, vu que les nombres w_k et $\tilde{z}_{kf}$ sont, comme on le voit, des racines simples des dérivées $\Omega'(w)$ et $\tilde{\chi}'_f(z)$ et à cause de (29), (30), (37) et (38) la fonction (28) serait, conformément à l'information contenue dans (33, *), holomorphe au point $\tilde{y}_f$, contrairement à l'hypothèse. Ainsi donc, le cas considéré est impossible. Nous disons que le cas (35) l'est également. En effet, raisonnant comme plus haut, nous constatons d'abord qu'on doit avoir

$$\tilde{x}_f = e^{i\omega_l}$$

pour f suffisamment grand. Ensuite, considérant la fonction

$$\tilde{\chi}_f(z) - \Omega(\tilde{x}_f) = \tilde{\chi}_f(z) - \Omega(e^{i\omega_l}),$$

nous constatons, en vertu de (29) et (30), étant donné que le nombre à soustraire est un nombre réel, qu'elle a des racines distinctes $\tilde{y}_f$ et $1/\bar{\tilde{y}}_f$, tendant vers une limite commune $\tilde{y}_0$; de là, vu (27), nous déduisons que $\tilde{y}_0$ est une racine au moins double de la fonction limite $\chi(z) - \Omega(e^{i\omega_l})$, donc également une racine de la dérivée $\chi'(z)$, c'est-à-dire qu'on doit avoir $\chi(\tilde{y}_0) - \Omega(e^{i\omega_l}) = 0$ et $\chi'(\tilde{y}_0) = 0$. En même temps de (33), (13) et du théorème 1,2,II résulte que $\tilde{y}_0 = e^{i\varphi_l}$. Revenant maintenant aux fonctions $\tilde{\chi}_f(x) - \Omega(x_f) = \tilde{\chi}_f(z) - \Omega(e^{i\omega_l})$, nous déduisons de (27), (32) et (35) qu'elles ont trois racines distinctes $e^{i\tilde{\Phi}_{lf}}$, $\tilde{y}_f$ et $1/\bar{\tilde{y}}_f$, tendant vers la limite commune $e^{i\varphi_l}$. De ce fait le point $e^{i\varphi_l}$ devrait être une racine au moins triple de la fonction $\chi(z) - \Omega(e^{i\omega_l})$, donc – au moins double de la dérivée $\chi'(z)$, ce qui n'a pas lieu. Par conséquent ce cas est aussi impossible. Nous disons enfin que le cas (36) est également impossible. En effet, raisonnant comme plus-haut, nous obtenons

alors que

$$\tilde{x}_f = e^{i\tau} \tag{39}$$

pour f suffisamment grand. Démontrons que l'on aura

$$\tilde{y}_0 = e^{i\vartheta}. \tag{40}$$

En effet, raisonnant comme plus-haut, nous trouvons que $\tilde{y}_0$ est une racine double de la fonction $\chi(z)-\Omega(e^{i\tau})$, donc également une racine de la dérivée $\chi'(z)$. Donc si (40) n'avait pas lieu, on devrait avoir

$$\tilde{y}_0 = e^{i\varphi_l}$$

pour un certain l pris parmi les nombres $1, \ldots, R$; mais alors, vu (30), (33) et (13), nous aurions

$$\tilde{x}_f = \tilde{a}_f(\tilde{y}_f) \to a(\tilde{y}_0) = a(e^{i\varphi_l}) = e^{i\omega_l},$$

contrairement à (33) et (36); donc on doit avoir (40). Comme conséquence de (29) et (39) nous obtenons

$$\tilde{\chi}_f(\tilde{y}_f) = \Omega(e^{i\tau}), \tag{41}$$

et, comme le second membre de (41) est réel, il en est de même de l'expression $\tilde{\chi}_f(\tilde{y}_f)$; en même temps $\tilde{y}_f$ est dans l'intérieur de $K(0, 1)$ et, vu (40), arbitrairement proche de $e^{i\vartheta}$ pour f suffisamment grand. Démontrons que pour de tels f l'inégalité suivante

$$\tilde{\chi}_f(\tilde{y}_f) > \tilde{\chi}_f(e^{i\tilde{\vartheta}_f}) \tag{42}$$

a lieu. En effet, considérant les fonctions réelles $\tilde{\chi}_f(e^{ix})$ et $\chi(e^{ix})$, nous avons, à cause de (27), les convergences uniformes

$$\tilde{\chi}_f(e^{ix}) \to \chi(e^{ix}), \quad \frac{d}{dx}\tilde{\chi}_f(e^{ix}) \to \frac{d}{dx}\chi(e^{ix}), \quad \frac{d^2}{dx^2}\tilde{\chi}_f(e^{ix}) \to \frac{d^2}{dx^2}\chi(e^{ix}); \tag{43}$$

en même temps, en vertu de la dernière relation (11) et (15), nous avons

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}\chi(e^{ix})\right]_{x=\vartheta} = -\chi''(e^{i\vartheta})e^{2i\vartheta} - \chi'(e^{i\vartheta})e^{i\vartheta} < 0; \tag{44}$$

d'où, prenant ensuite un nombre arbitraire négatif q plus grand que le premier membre de (44), nous voyons qu'il existe un ε, arbitrairement petit, tel que pour f suffisamment grand on a

$$\frac{d^2}{dx^2}\tilde{\chi}_f(e^{ix}) < q \quad \text{pour} \quad x \in J, \tag{45}$$

où $J = (\tilde{\vartheta}_f - 2\arcsin(\varepsilon/2),\ \tilde{\vartheta}_f + 2\arcsin(\varepsilon/2))$ et, par conséquent, par une

intégration double, moyennant les relations

$$\left[\frac{d}{dx}\tilde{\chi}_f(e^{ix})\right]_{x=\tilde{\vartheta}_f} = 0,$$

qui résultent de (19), on trouve de même

$$\tilde{\chi}_f(e^{ix}) \leqslant \chi_f(e^{i\tilde{\vartheta}_f}) + \tfrac{1}{2}q(x-\tilde{\vartheta}_f)^2 \quad \text{pour} \quad x \in J. \tag{46}$$

De cette dernière relation résulte encore qu'il existe un δ positif, arbitrairement petit, tel que toute valeur de l'intervalle fermé $[\tilde{\chi}_f(e^{i\tilde{\vartheta}_f})-\delta, \tilde{\chi}_f(e^{i\tilde{\vartheta}_f})]$ est admise par la fonction $\tilde{\chi}_f(z)$ sur un arc de la circonférence unité $z = e^{ix}$, $x \in J$, au moins deux fois, y compris la multiplicité. De même, vu les convergences (32) et (40) et la première convergence (43), pour f suffisamment grand, on a $|\tilde{y}_f - e^{i\tilde{\vartheta}_f}| < \varepsilon$ et $|\tilde{\chi}_f(\tilde{y}_f) - \tilde{\chi}_f(e^{i\tilde{\vartheta}_f})| < \delta$. Si maintenant (42) n'avait pas lieu, le nombre $\zeta_f = \tilde{\chi}_f(\tilde{y}_f)$ appartiendrait à l'intervalle fermé mentionné. Mais, dans ce cas les fonctions $\chi_f(z)$ prendraient dans un entourage $|z - e^{i\tilde{\vartheta}_f}| < \varepsilon$ du point $e^{i\tilde{\vartheta}_f}$, arbitrairement petit, leurs valeurs ζ_f au moins trois fois, et cela deux fois sur l'arc correspondant de la circonférence unité: $z = e^{ix}$, $x \in (\tilde{\vartheta}_f - 2\arcsin(\varepsilon/2), \tilde{\vartheta}_f + 2\arcsin(\varepsilon/2))$ et une fois au point $\tilde{y}_f$ à l'intérieur du cercle unité; passant ensuite à la limite avec f, la fonction limite $\chi(z)$ prendrait alors dans un entourage arbitrairement petit du point limite $e^{i\vartheta}$ sa valeur $\zeta = \chi(e^{i\vartheta})$ au moins trois fois; cependant cela est contraire au fait qu'au point $e^{i\vartheta}$ la seconde dérivée $\chi''(z)$ est, vu (15), différente de zéro. Donc (42) a bien lieu. En même temps, conformément à (20) et (12), on a

$$\tilde{\chi}_f(e^{i\tilde{\vartheta}_f}) \geqslant \Omega(e^{it}). \tag{47}$$

Les relations (42), (47) et (41) sont contradictoires et de ce fait le cas considéré (36) est également impossible.

Ayant exclu tous les cas (34), (35) et (36) nous avons ainsi prouvé l'existence de la fonction (22) qui satisfait à l'équation (23).

L'univalence de la fonction (22) résulte de ce qui précède et du théorème 1,1,II.

Ensuite nous allons démontrer que la fonction (22) est holomorphe par rapport à t. En effet, cela résulte immédiatement du fait que cette fonction peut être représentée dans un certain entourage des arguments z_0, t_0 sous la forme

$$\tilde{a}(z, t) = \Omega_0^{-1}(\tilde{\chi}_0(z, t)),$$

ou bien

$$\tilde{a}(z, t) = \Omega_L^{-1}(\tilde{\chi}_L(z, t)),$$

analogue en essence et en notations à (33, $*$) ou à (28), et de l'analycité évidente de la fonction (16) et, par conséquent, de la fonction $\tilde{\chi}_0(z, t)$, ou de la fonction $\tilde{\chi}_L(z, t)$. De plus, l'analycité et, par suite, la continuité de la

fonction (22) par rapport aux arguments z, t entraînent, ce qu'on voit facilement, la convergence presque uniforme dans le cercle unité

$$\tilde{a}(z, t) \underset{t \to t_0}{\to} \tilde{a}(z, t_0), \qquad t_0 \in [T-\eta, T+\eta].$$

Enfin, de la première relation (18), de (23) et de la première relation (13) résulte (24).

3° Démontrons maintenant les relations

$$\tilde{a}(\tilde{z}_k(t), t) = w_k, \qquad k = 1, \ldots, Q,$$
$$\tilde{a}(e^{i\tilde{\varphi}_l(t)}, t) = e^{i\omega_l}, \qquad l = 1, \ldots, R,$$
$$\tilde{a}'_z(0, t) = \tilde{\varkappa}_1(t) = e^{-t}.$$

Dans ce but supposons, au contraire, qu'il existe un k parmi les nombres $1, \ldots, Q$, et une suite de paramètres du type (25) tels que

$$\tilde{a}(\tilde{z}_k(\tilde{\tau}_f), \tilde{\tau}_f) \neq w_k, \qquad f = 1, 2, \ldots \tag{49}$$

Alors, en désignant les premiers membres de (49) par $\tilde{\zeta}_f$, nous tirons de la relation (49) et de la continuité des fonctions (17), (22), de (18) et (24), ainsi que de (13)

$$\lim_{f \to \infty} \tilde{\zeta}_f = a(z_k) = w_k; \tag{50}$$

en même temps, d'après (23) et (19), on a

$$\Omega(\tilde{\zeta}_f) = \tilde{\chi}(\tilde{z}_k(\tilde{\tau}_f), \tilde{\tau}_f) = \Omega(w_k). \tag{51}$$

Cependant il résulterait de (51), (50) et (49) que la fonction $\Omega(w)$ prend la valeur $\Omega(w_k)$ en un nombre infini de points $\tilde{\zeta}_f$ accumulés au point w_k, ce qui est impossible. Donc les premières relations (48) ont lieu et nous constatons d'une façon analogue que les secondes relations de (48) ont également lieu. Les dernières relations de (48) résultent immédiatement des premières relations de (19), de (1,1), (23) et (22).

Soit maintenant $\tilde{h}$, d'après (32, $*$), un arc arbitraire, partant de l'extrémité de H et en outre disjoint de H, le long duquel $\Omega(w)$ est encore réelle.

4° Démontrons que pour η suffisamment petit la fonction $\tilde{a}(z, t)$ représente le cercle $K(0, 1)$ sur le domaine $\tilde{G}_t = K(0, 1) \setminus \tilde{H}_t$, où $\tilde{H}_t$ est un arc contenu dans $H \cup \tilde{h}$, ayant avec lui l'origine commune. A cet effet nous remarquons d'abord que pour les η mentionnés on doit avoir pour les frontières $\tilde{G}_t^*$ des domaines mentionnés les relations

$$\tilde{G}_t^* \subset K^*(0, 1) \cup H \cup \tilde{h}. \tag{52}$$

En effet, en vertu de (23) et du théorème 1,1,II, nous avons évidemment

$$\tilde{G}_t^* = \tilde{a}(K^*(0, 1), t).$$

4 – Dissertationes Mathematicae CXCV

Supposons que, contrairement à l'assertion, il existe une suite de paramètres

$$\hat{t}_f, \quad f = 1, 2, \ldots,$$

plus grande que T et tendant vers T, telle que les frontières correspondantes $\tilde{G}^*_{\hat{t}_f}$ contiennent toujours les points

$$x_f = \tilde{a}(y_f, \hat{t}_f), \quad f = 1, 2, \ldots, \tag{53}$$

n'appartenant pas à $K^*(0, 1) \cup H \cup \tilde{h}$, situés dans $K(0, 1)$ et étant les images de certains points y_f de la circonférence $K^*(0, 1)$. En vertu de (29) et (53) et de la propriété des fonctions rationnelles spéciales on a

$$\operatorname{Im}\{\Omega(x_f)\} = \operatorname{Im}\{\tilde{\chi}_f(y_f, \hat{t}_f)\} = 0 \tag{54}$$

et, par conséquent,

$$\Omega(x_f) = \Omega(1/\bar{x}_f). \tag{55}$$

En même temps, $x_f \neq 1/\bar{x}_f$, car le point x_f n'appartient pas, d'après l'hypothèse, à $K^*(0, 1)$. Supposons, en extrayant au besoin une suite partielle, que sur la circonférence $K^*(0, 1)$ existe la limite

$$y_0 = \lim_{f \to \infty} y_f. \tag{56}$$

Alors, vu (53), (24), (56) et vu la continuité de la fonction (22), existe également la limite

$$x_0 = \lim_{f \to \infty} x_f = \lim_{f \to \infty} \tilde{a}(y_f, \hat{t}_f) = a(y_0). \tag{57}$$

De (14) et (57) résulte que le point x_0 appartient à la somme $K^*(0, 1) \cup H \cup \tilde{h}$. Mais il est facile de démontrer qu'il ne saurait appartenir à H. En effet, si cela avait lieu, nous aurions deux cas possibles:

$$x_0 = e^{i\tau}, \tag{58}$$

ou bien

$$x_0 \neq e^{i\tau}. \tag{59}$$

Dans le premier cas, d'après la définition de l'arc H, du fait que $e^{i\tau}$ est une racine simple de la dérivée $\Omega'(w)$ et de (32, $*$), nous déduisons que tous les points x suffisamment proches de x_0, remplissant la condition

$$\operatorname{Im}\{\Omega(x)\} = 0, \tag{60}$$

doivent être contenus dans la somme $H^*_- \cup H^*_+ \cup H \cup \tilde{H}$, où $\tilde{H}$ désignent l'arc symétrique de H par rapport à la circonférence unité et H^*_- et H^*_+ des arcs quelconques de cette circonférence, partant de x_0 dans le deux sens; ainsi, d'après (54) et (57), le point (53), situé à l'intérieur de $K(0, 1)$, devrait

appartenir pour f suffisamment grands à la some $K^*(0, 1) \cup H$, donc à $K^*(0, 1) \cup H \cup \tilde{h}$, contrairement à l'hypothèse. Dans le second cas, en vertu de (54), du fait que le point x_0 n'est pas une racine de la dérivée $\Omega'(w)$, car il n'y en a pas sur l'arc H excepté $e^{i\tau}$, et vu (32, $*$), tous les points en question x de (60) devraient être contenus dans la somme $H_-^0 \cup H_+^0$, où H_-^0 et H_+^0 désignent les parties de l'arc $H \cup \tilde{h}$, partant de x_0 dans les deux sens; de ce fait, comme ci-haut, à cause de (57), les points (53) devraient appartenir pour f suffisamment grands à $K^*(0, 1) \cup H \cup \tilde{h}$, contrairement à l'hypothèse. Donc, les deux cas sont impossibles. Par conséquent, le point x_0 doit appartenir à $K^*(0, 1)$, n'appartenant pas à H. Donc ce point, comme limite des suites de points x_f et $1/\bar{x}_f$ où $\Omega(w)$ prend les mêmes valeurs (55), doit être une racine de la dérivée $\Omega'(w)$ et cela, vu ce qui précède, différente de $e^{i\tau}$. Nous pouvons donc admettre que

$$x_0 = {}^{i\omega_l}, \tag{61}$$

où l est un certain indice pris parmi $1, \ldots, R$. D'après les relations démontrées (48), (23) et l'observation (33, $*$), nous voyons maintenant que pour f suffisamment grands la fonction $\tilde{a}(z, \hat{t}_f)$ est holomorphe au point $e^{i\tilde{\varphi}_l(\hat{t}_f)}$; en outre, vu (34, $*$), l'image d'un certain demi-entourage fixe intérieur de ce point couvre un demi-entourage analogue intérieur du point $e^{i\omega_l}$. Cela est impossible, car en vertu de l'hypothèse chaque demi-entourage ouvert de x_0 contient des points de la suite (53) qui n'appartiennent pas à l'image du cercle unité, donc à plus forte raison à l'image d'un certain demi-entourage intérieur du point $e^{i\tilde{\varphi}_l(\hat{t}_f)}$. Ainsi doivent avoir lieu les relations (52). Désignons maintenant par $\hat{w}^*(t)$ le dernier point, comptant à partir de $e^{i\tau}$ de l'arc $H \cup \tilde{h}$, qui appartient à la frontière (52). Alors tout une partie de cet arc, depuis l'origine $e^{i\tau}$ jusqu'à $\hat{w}^*(t)$, doit être contenue dans la frontière $\tilde{G}_t^*$ de (52). En effet, si sur $H \cup \tilde{h}$ il existait un point $\hat{w}$ précédant $\hat{w}^*(t)$ n'appartenant pas à $\tilde{G}_t^*$, ce point diviserait d'une façon évidente l'ensemble $\tilde{G}_t^*$ en deux ensembles fermés, ce qui n'est pas possible, car $\tilde{G}_t^*$ est connexe. Donc la partie mentionnée de l'arc $H \cup \tilde{h}$ doit être contenue dans $\tilde{G}_t^*$; désignant cette partie par $\tilde{H}_t$, nous obtenons immédiatement, vu (52), la propriété $\tilde{4}^\circ$.

Remarquons enfin que pour $T > 0$, η suffisamment petit et $t \in (T-\eta, T)$ les fonctions (16), (17), (22) coïncident respectivement avec (5,1), (6,1), (12,1). En effet, à cause de la remarque 1,I, p. 22, cela résulte immédiatement des conditions (8,1), (19), (13,1), (23), des conditions (18), de la continuité des fonctions (16) et (17) et de la condition que pour f suffisamment grands les fonctions (16) et (17) sont arbitrairement proches des limites (6)–(9).

D'après ce qui précède les fonctions (5,1), (6,1) et (12,1) se prolongent à l'intervalle $[0, T+\eta)$, en respectant évidemment, à cause de $\tilde{1}^\circ$–$\tilde{4}^\circ$, les conditions 1°–4° avec la notation $H_t = \tilde{H}_t$, $T \leqslant t < T+\eta$; donc, en particulier, elles se prolongent à l'intervalle $[0, T]$.

B. Réalisation de la condition 5°.

Supposons en premier lieu que 5° n'ait pas lieu, donc, conformément à (14), que $H_T \subset H$ et $H_T \neq H$. Alors, de la convergence $a(z, t) \to a(z, T)$ sur la circonférence $K^*(0, 1)$ pour $t \to T$ à droite, de même que dans la preuve des relations (13), il résulterait, comme plus haut, que $G_t^* = K^*(0, 1) \cup \cup H_t \subset H$ pour t situés dans un certain entourage droit du point T, suffisamment petit. Mais il est facile de constater que pour les fonctions (5.1), (6,1), (12,1) les conditions 1°–4° seraient alors remplies dans un intervalle ouvert plus grand que $[0, T)$, contrairement à la définition de ce dernier. Donc la condition annoncée doit avoir lieu.

En résumant ce qui précède les fonctions (5,1), (6,1) et (12,1) sont définies tout d'abord dans l'intervalle $[0, T)$ et ensuite, prolongées à l'intervalle $[0, T]$, elles réalisent toutes les conditions du théorème fondamental.

Les points 4° et 5° du théorème fondamental représentent le théorème de Riemann pour les domaines spéciaux du type $K(0, 1) \setminus H$, où H est un arc spécial correspondant à une fonction spéciale $\Omega(w)$. Le passage des domaines spéciaux aux domaines simplement connexes arbitraires s'effectue au moyen du théorème de Carathéodory sur le noyau en profitant successivement des convergences suivantes: tout de domaine de Löwner avec une seule coupure continue est la limite d'une suite de domaines spéciaux considérés plus haut (v. lemme 1,3,I); tout domaine simplement connexe, contenant 0 et contenu dans le cercle unité, limité par une ligne brisée fermée de Jordan de côtés parallèles aux axes de coordonées est la limite d'une suite de domaines de Löwner avec une seule coupure continue (v. [9], p. 106); tout domaine simplement connexe contenant 0 est la limite d'une suite de domaines qui sont formés par des transformation homothétiques de domaines simplement connexes, contenus dans le cercle unité, limités par des lignes brisées de côtés parallèles aux axes de coordonnées (v. [8], p. 107–108).

3. L'équation de Löwner pour les domaines spéciaux. Une conséquence immédiate du théorème fondamental de 1, III est le résultat suivant, qu'on peut considérer comme un cas particulier de celui de Löwner sur la paramétrisation des fonctions univalentes. Ce résultat a été obtenu par J. Janikowski dans [7].

THÉORÈME 1. *Soit $G = K(0, 1) \setminus H$ un domaine spécial qui correspond à une fonction rationnelle spéciale $\Omega(w)$. Nous supposons que toutes les racines de la dérivée $\Omega'(w)$ sont simples et situées en dehors de l'arc H à l'exception de son origine, qui est évidemment une racine de cette dérivée. Soit enfin*

$$a(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots, \quad z \in K(0, 1), \quad \alpha_1 > 0,$$

la fonction qui transforme d'une façon conforme $K(0, 1)$ en G. Alors il existe dans un intervalle $[0, T]$ une famille paramétrique de fonctions algébriques spéciales

$$a(z, t) = \alpha_1(t) z + \alpha_2(t) z^2 + \ldots, \quad \alpha_1(t) > 0,$$

et une fonction $k(t)$, $|k(t)| = 1$, *holomorphe par rapport à* t *et vérifiant les conditions*

$$a'_t(z, t) = -a'_z(z, t)\, z \frac{1+zk(t)}{1-zk(t)} \quad \textit{pour} \quad z \in K(0, 1),\ t \in [0, T], \tag{1}$$

$$a(z, 0) = z, \quad a(z, T) = a(z). \tag{2}$$

Démonstration. En vertu du théorème fondamental (v. 1,III) il existe dans un intervalle fini $[0, T]$, $T > 0$, une famille de fonctions rationnelles spéciales

$$\chi(z, t) = \frac{E_L(t)}{z^L} + \ldots + \overline{E_L(t)}\, z^L, \quad E_L(t) \neq 0, \tag{3}$$

une famille de points complexes

$$\begin{aligned} &z_k(t) \in K(0, 1), && k = 1, \ldots, Q, \\ &e^{i\varphi_l(t)}, \\ &e^{i\vartheta(t)} && l = 1, \ldots, R, \end{aligned} \tag{4}$$

et une famille de fonctions algébriques spéciales

$$a(z, t) = \alpha_1(t) z + \alpha_2(t) z^2 + \ldots, \tag{5}$$

telles que les relations (7,1)–(9,1) et (13,1)–(17,1) sont remplies. En outre les points (4) sont toutes les racines de la dérivée $\chi'_z(z, t)$ et elles sont simples; les fonctions (5) représentent le cercle $K(0, 1)$ sur des domaines spéciaux $G_t = K(0, 1) \backslash H_t$, où H_t est un arc spécial contenu dans H, ayant avec lui l'origine commune;

$$a(z, T) = a(z); \tag{6}$$

de plus, les fonctions (3), (4), (5) sont holomorphes par rapport à t de l'intervalle $[0, T]$. En dérivant maintenant l'identité (13,1) successivement par rapport à z et t, on obtient les relations

$$\Omega'\big(a(z, t)\big) a'_z(z, t) = \chi'_z(z, t), \tag{7}$$

$$\Omega'\big(a(z, t)\big) a'_t(z, t) = \chi'_t(z, t). \tag{8}$$

D'autre part, en dérivant la troisième et la cinquième identité (8,1) par rapport à t et en tenant compte de la quatrième, on a

$$\chi'_t\big(z_k(t), t\big) = 0, \quad k = 1, \ldots, Q, \tag{9}$$

$$\chi'_t(e^{i\varphi_l(t)}, t) = 0, \quad l = 1, \ldots, R. \tag{10}$$

On voit aisément que $\chi'_t(z, t)$ est une fonction rationnelle spéciale de degré $2L$, car, en vertu de la première identité (8,1),

$$E'_L(t) = Le^{Lt} D_L \neq 0. \tag{11}$$

De là et de (9), (10) résulte que les points $z_k(t)$, $1/\overline{z_k(t)}$, $e^{i\varphi_l(t)}$, $k = 1, \ldots, Q$, $l = 1, \ldots, R$, sont racines de la fonction $\chi_t'(z, t)$ et, comme $2L = 2Q+R+1$, il existe encore une racine de $\chi_t'(z, t)$ – désignons-la par $e^{i\vartheta_1(t)}$. En résumant ce qui précède, nous voyons que les fonctions rationnelles spéciales $iz\chi_z'(z, t)$ et $\chi_t'(z, t)$, de mêmes degrés $2L$, ont les mêmes racines à l'exception d'une; ces racines supplémentaires sont $e^{i\vartheta(t)}$ pour $iz\chi_z'(z, t)$ et $e^{i\vartheta_1(t)}$ pour $\chi_t'(z, t)$. En tenant compte de ce qui précède, on a l'identité

$$(z-e^{i\vartheta(t)})\chi_t'(z, t) = c(t)(z-e^{i\vartheta_1(t)})\chi_z'(z, t)iz. \tag{12}$$

En comparant les coefficients des plus grandes et des plus petites puissances de z des deux membres de (12), nous avons, à cause de la relation (11),

$$c(t) = i, \quad e^{i\vartheta_1(t)} = -e^{i\vartheta(t)}.$$

Posons

$$k(t) = e^{-i\vartheta(t)}. \tag{13}$$

En tenant compte de ce qui a été dit, nous pouvons mettre l'identité (12) sous la forme

$$\chi_t'(z, t) = -\chi_z'(z, t)z\frac{1+zk(t)}{1-zk(t)}. \tag{14}$$

Utilisant maintenant (7), (8) et (14), nous obtenons (1). Les relations (2) résultent de (6) et (14,1). L'analycité de $k(t)$ résulte de (13).

Bibliographie

[1] L. Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie II*, Berlin 1927.

[2] C. Carathéodory, *Conformal representation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1966.

[3] Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes algébriques bornées*, Dissertationes Math. 10 (1955), pp. 1–39

[4] – *Fonctions univalentes inverses. Polynômes univalents*, Bull. Soc. Sci. Lettres, Łódź, 9 (7) (1958), pp. 1–21.

[5] Z. Charzyński et J. Śladkowska, *Remarques sur l'approximation de l'arc simple par les arcs brisés, réguliers et arcs analytiques*, ibid. 17 (1) (1966), pp. 1–9.

[6] – – *Fonctions algébriques et variations analytiques des fonctions univalentes*, Dissertationes Math. 70 (1970), pp. 1–80.

[7] J. Janikowski, *Méthode algébrique et équation de Löwner*, Bull. Soc. Sci. Lettres, Łódź, 12 (16) (1961), pp. 1–9.

[8] B. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie I*, Springer Verlag, Berlin 1923.

[9] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann. 89 (1923), pp. 103–121.

[10] J. Mycielski and S. Paszkowski, *A generalization of Chebyshev polynomials*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (7) (1960), pp. 433–438.

[11] S. Saks and A. Zygmund, *Analytic functions*, Warszawa 1965.

[12] J. Śladkowska, *Sur l'approximation de courbes arbitraires par les lignes de niveau des fonctions rationnelles*, J. Anal. Math. 14 (1965), pp. 409–431.

A CONTRIBUTION TO KELLER'S JACOBIAN CONJECTURE

Zygmunt Charzyński, Jacek Chądzyński
and Przemysław Skibiński (Łódź)

Contents

page
Summary 36
Introduction 36
1. Auxiliary results 37
2. Polynomial mappings. Expansion of the Newton-Puiseux type. . 38
3. Study of constant coefficients 45
4. Critical coefficient 47
5. Structure of the homogeneous components of the highest degree in the coordinates of the mapping 50
References 51

Summary. In the paper there have been investigated polynomial mappings $(P,Q) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ in the aspect of the connection between the structure of the jacobian and the coordinates of the mapping. There have been obtained some informations on coefficients of an expansion of the Newton-Puiseux type of one of the coordinates with respect to the other one. Starting from these informations, a theorem is proved stating that if d denotes the degree of the jacobian of the mapping (P,Q), then each of the coordinates P and Q has at most $d + 2$ zeros at infinity. There have been obtained some equations connecting the homogeneous components of the polynomials P and Q.

Introduction

In the circle of the well-known Keller's jacobian conjecture (see [2], [3]) there are investigated polynomial mappings with a constant jacobian.

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

A Contribution to Keller's Jacobian Conjecture

In this paper there are considered more general polynomial mappings $(P,Q) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for which the jacobian may be a polynomial of an arbitrary degree. The influence of the jacobian on the structure of the mapping is studied here.

Starting from an expansion of the Newton-Puiseux type of one of the coordinates with respect to the other one, there are obtained some equations connecting the homogeneous components of both the coordinates P and Q (Theorem 2.1). Hence some informations about the form of the coefficients of the expansion are derived (Theorem 2.2).

Next, it is stated, through differentiation and use of the properties of the jacobian, that some of these coefficients are constants. Moreover, it is observed that some of the coefficients simply vanish (Theorems 2.3 and 3.1), particularly, those with the indices relatively prime with the degree of the correspondent coordinate (Corollary 3.2).

The critical coefficient from the border line between the constant and nonconstant coefficients is examined in detail (Theorem 4.1). Hence, as a consequence, the following result is obtained: if d denotes the degree of the jacobian of the mapping (P,Q), then either of the coordinates P and Q has at most $d + 2$ zeros at infinity; what is more, the zeros are identical in both the coordinates (Theorem 5.1). The particular case of the above result for mappings with a constant jacobian was obtained earlier in some other way (the remark following Theorem 5.1).

In a similar direction researches of mappings with the constant jacobian were carried out in [4] by A. Magnus who obtained the results crossing those of this paper.

1. Auxiliary results

Let a holomorphic mapping (U,V) of the variables (x,y) and t ranging over an open set in $\mathbb{C}^2$ and over an open set in $\mathbb{C}$, respectively, be given. Besides, let C be a given closed regular curve lying in the domain of variability of t. Let further M be a holomorphic function of the variable (ξ,η) ranging over an open set in $\mathbb{C}^2$, containing the image of the domain of definition of the mapping (U,V).

LEMMA 1.1. *Under the above assumptions, the following equality holds:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_C M(U,V)\frac{\partial U}{\partial t}\,dt = \int_C \frac{\partial M}{\partial V}\frac{D(V,U)}{D(x,t)}\,dt \qquad \text{where}$$

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

$$\frac{D(V,U)}{D(x,t)} = \frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t}\,\frac{\partial U}{\partial x}\,.$$

P r o o f. The difference between the left- and right-hand sides of (1.1) is equal to

$$\int_C \left(\frac{\partial M}{\partial U}\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial V}\,\frac{\partial V}{\partial t}\,\frac{\partial U}{\partial x} + M\,\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right) dt.$$

Now, taking into account the equality of the mixed partial derivatives, we can write the above integral in the form

$$\int_C \frac{\partial}{\partial t}\left(M\,\frac{\partial U}{\partial x} \right) dt.$$

Since the curve C is closed, the last integral vanishes. This completes the proof.

Let us notice that formula (1.1) is still valid if we replace in it the partial derivative with respect to x by the partial derivative with respect to y; the same thing takes place when we replace the derivative $\partial U/\partial t$ on the left-hand side by the derivative $\partial V/\partial t$ with the simultaneous replacement of the derivative $\partial M/\partial V$ by $-\partial M/\partial U$ on the right-hand side.

2. Polynomial mappings. Expansion of the Newton-Puiseux type

We shall show here some relations between the coordinates of polynomial mappings, connected with the form of the corresponding jacobian.

Let $(P,Q) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ be a polynomial mapping and $J : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ the jacobian of this mapping.

Let further

$$(2.1) \quad P(\xi,\eta) = P_m(\xi,\eta) + \ldots + P_1(\xi,\eta),$$

$$(2.2) \quad Q(\xi,\eta) = Q_n(\xi,\eta) + \ldots + Q_1(\xi,\eta),$$

$$(2.3) \quad J(\xi,\eta) = E_d(\xi,\eta) + \ldots + E_0(\xi,\eta),$$

where the right-hand sides are expansions in the sums of homogeneous polynomials of the successive degrees when the components of the highest degrees P_m, Q_n do not vanish identically.

Let us consider, for instance, the polynomial P. Let us further take a point (x_0,y_0) such that $P_m(x_0,y_0) \neq 0$ and a neighbourhood Ω

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

of this point so small that the lower bound of $|P_m|$ in Ω is positive and there exist in Ω a branch of the m-th root $P_m^{1/m}$ and corresponding branches of the powers $P_m^{h/m}$ where h are integers.

Let us form the functions

$$\tilde{P}(x,y,t) = P(xt,yt) = t^m P_m(x,y) + \ldots + tP_1(x,y), \tag{2.4}$$

$$\tilde{Q}(x,y,t) = Q(xt,yt) = t^n Q_n(x,y) + \ldots + tQ_1(x,y), \tag{2.5}$$

$$\tilde{J}(x,y,t) = J(xt,yt) = t^d E_d(x,y) + \ldots + E_0(x,y) \tag{2.6}$$

for arguments (x,y) ranging over Ω and for $t \in \mathbb{C}$ with a sufficiently great modulus. Then, as one can see, in the domain of variability of the arguments there exists a holomorphic branch of the m-th root of (2.4)

$$s = \tilde{p}(x,y,t) = tP_m^{1/m}(x,y)\left[1 + \frac{P_{m-1}(x,y)}{P_m(x,y)}\frac{1}{t} + \ldots + \frac{P_1(x,y)}{P_m(x,y)}\frac{1}{t^{m-1}}\right]^{\frac{1}{m}} \tag{2.7}$$

with the natural choice of the branch of the m-th root of the expression in square brackets.

Moreover, with arbitrary but fixed (x,y) and with variable t, we can determine the inverse function of (2.7)

$$t = \tilde{p}^{-1}(x,y,s) \tag{2.8}$$

defined and holomorphic in the corresponding domain of variability of the arguments, in particular, for (x,y) ranging over Ω and for s with a sufficiently great modulus. In this situation, we have the expansion

$$\tilde{Q}(x,y,p^{-1}(x,y,s)) = u_n(x,y)s^n + u_{n-1}(x,y)s^{n-1} + \ldots + u_0(x,y) + u_{-1}(x,y)s^{-1} + \ldots \tag{2.9}$$

for (x,y) ranging over Ω and s with a sufficiently great modulus, where

$$u_k(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{Q(x,y,p^{-1}(x,y,s))}{s^{k+1}}\,ds, \qquad k = n,n-1,\ldots \tag{2.10}$$

and D denotes an arbitrary Jordan curve surrounding the point ∞, lying in the domain of variability of s.

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

Taking account of (2.7), we obtain, by (2.9),

$$\tilde{Q}(x,y,t) = u_n(x,y)(\tilde{p}(x,y,t))^n + \ldots + u_0(x,y) + u_{-1}(x,y)(\tilde{p}(x,y,t))^{-1} + \ldots \tag{2.11}$$

for $(x,y) \in \Omega$ and t with a sufficiently great modulus.

THEOREM 2.1 (comp. also [4]). Between the homogeneous components of the coordinates of the mapping (P,Q) from (2.1), (2.2) and the coefficients u_k from (2.10) of the expansion of the Newton-Puiseux type (2.9) the following effective relations hold

$$\frac{Q_\ell(x,y)}{P_m^{\ell/m}(x,y)} = \sum_{k,\lambda_{m-1},\ldots,\lambda_1} u_k(x,y) \binom{k}{\lambda_{m-1}+\ldots+\lambda_1} \frac{(\lambda_{m-1}+\ldots+\lambda_1)!}{\lambda_{m-1}!\cdot\ldots\cdot\lambda_1!} \times \left(\frac{P_{m-1}(x,y)}{P_m^{(m-1)/m}(x,y)}\right)^{\lambda_{m-1}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{P_1(x,y)}{P_m^{1/m}(x,y)}\right)^{\lambda_1}, \tag{2.12}$$

$\ell = n, n-1, \ldots,$

where we assume $Q_\ell = 0$ for $\ell < 0$ and where the sum is taken over all integers satisfying the following conditions

$$\ell \leq k \leq n, \quad \lambda_{m-1} \geq 0, \ldots, \lambda_1 \geq 0; \quad \lambda_{m-1} + 2\lambda_{m-2} + \ldots + (m-1)\lambda_1 = k - \ell. \tag{2.13}$$

P r o o f. By virtue of (2.7), relation (2.11) can be written in the form

$$\tilde{Q}(x,y,t) = \sum_{k=-\infty}^{n} u_k(x,y) t^k P_m^{k/m}(x,y) \left[1 + \frac{P_{m-1}(x,y)}{P_m(x,y)} \frac{1}{t} + \ldots + \frac{P_0(x,y)}{P_m(x,y)} \frac{1}{t^{m-1}}\right]^{k/m} \tag{2.14}$$

Enlarging, if necessary, the modulus of t and using twice the Newton formula, we can at first write the right-hand side of (2.14) in the form

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

$$\sum_{k=-\infty}^{n} u_k(x,y)t^k P_m^{k/m}(x,y) \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\frac{k}{m}}{j}\left[\frac{P_{m-1}(x,y)}{P_m(x,y)}\frac{1}{t} + \ldots + \frac{P_1(x,y)}{P_m(x,y)}\frac{1}{t^{m-1}}\right]^j$$

and next, in the form

$$(2.15)\qquad \sum_{k=-\infty}^{n} u_k(x,y)t^k P_m^{k/m}(x,y) \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\frac{k}{m}}{j} \sum_{\lambda_{m-1},\ldots,\lambda_1} \frac{j!}{\lambda_{m-1}!\cdot\ldots\cdot\lambda_1!} \times$$

$$\times \left(\frac{P_{m-1}(x,y)}{P_m(x,y)}\frac{1}{t}\right)^{\lambda_{m-1}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{P_1(x,y)}{P_m(x,y)}\frac{1}{t^{m-1}}\right)^{\lambda_1}$$

where the last sum is taken over all integers fulfilling the following conditions

$$\lambda_{m-1} \geq 0,\ldots,\lambda_1 \geq 0; \quad \lambda_{m-1} + \ldots + \lambda_1 = j.$$

Further, we can rewrite this in the form

$$\sum_{k=-\infty}^{n} \sum_{\lambda_{m-1},\ldots,\lambda_1} u_k(x,y)t^{k-\lambda_{m-1}-2\lambda_{m-2}-\ldots-(m-1)\lambda_1} P_m^{k/m}(x,y) \times$$

$$\times \binom{\frac{k}{m}}{\lambda_{m-1}+\ldots+\lambda_1} \frac{(\lambda_{m-1}+\ldots+\lambda_1)!}{\lambda_{m-1}!\cdot\ldots\cdot\lambda_1!} \left(\frac{P_{m-1}(x,y)}{P_m(x,y)}\right)^{\lambda_{m-1}} \cdot\ldots\cdot \left(\frac{P_1(x,y)}{P_m(x,y)}\right)^{\lambda_1}$$

where the second sum is taken over all non-negative integers $\lambda_{m-1},\ldots,\lambda_1$. Finally, ordering with respect to ℓ, we can write the right--hand side of (2.14) in the form

$$\sum_{\ell=-\infty}^{n} t^{\ell} \sum_{k=\ell}^{n} \sum_{\lambda_{m-1},\ldots,\lambda_1} u_k(x,y)P_m^{k/m}(x,y) \binom{\frac{k}{m}}{\lambda_{m-1}+\ldots+\lambda_1} \frac{(\lambda_{m-1}+\ldots+\lambda_1)!}{\lambda_{m-1}!\cdot\ldots\cdot\lambda_1!} \times$$

$$\times \left(\frac{P_{m-1}(x,y)}{P_m(x,y)}\right)^{\lambda_{m-1}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{P_1(x,y)}{P_m(x,y)}\right)^{\lambda_1}$$

where the third sum is taken over all integers satisfying conditions (2.13).

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

Simultaneously, the left-hand side of (2.14) can be written according to (2.5), in the form

$$\sum_{\ell=1}^{n} t^{\ell}\, Q_{\ell}(x,y).$$

Comparing the coefficients at t on both sides, we obtain

$$(2.16)\quad Q_{\ell}(x,y) = \sum_{k,\lambda_{m-1},\dots,\lambda_1} u_k(x,y)\, P_m^{k/m}(x,y) \binom{k}{\lambda_{m-1}+\dots+\lambda_1} \times$$
$$\times \frac{(\lambda_{m-1}+\dots+\lambda_1)!}{\lambda_{m-1}!\cdot\dots\cdot\lambda_1!} \left(\frac{P_{m-1}(x,y)}{P_m(x,y)}\right)^{\lambda_{m-1}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{P_1(x,y)}{P_m(x,y)}\right)^{\lambda_1}$$

From (2.16) we immediately arrive at (2.12).

Now, let us consider the factorization into prime factors of the homogeneous component of the highest degree P_m of (2.1)

$$(2.17)\quad P_m(x,y) = \prod_{j=1}^{r} (\varkappa_j x - \omega_j y)^{\gamma_j}$$

where γ_j are positive integers.

THEOREM 2.2. For every k, either the coefficient u_k vanishes identically or the following equality holds

$$(2.18)\quad u_k(x,y) P_m^{k/m}(x,y) = \frac{A_k(x,y)}{B_k(x,y)}$$

where A_k and B_k are relatively prime homogeneous polynomials of two variables non-vanishing identically. Moreover, the denominator B_k does not contain other prime factors than those from (2.17), i.e.

$$(2.19)\quad B_k(x,y) = b_k \prod_{j=1}^{r} (\varkappa_j x - \omega_j y)^{\beta_j^{(k)}}$$

where $b_k \neq 0$, $\beta_j^{(k)} \geq 0$.

What is more, the difference of degrees of A_k and B_k is equal to k.

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

P r o o f. Putting in (2.12) $\ell = n$, we obtain

$$(2.20)\quad Q_n(x,y) = u_n(x,y)P_m^{n/m}(x,y).$$

Hence, it is easily seen that, for $k = n$, it suffices to put $A_n(x,y) = Q_n(x,y)$ and $B_n(x,y) = 1$.

Assume that (2.18) holds for $\ell + 1 \leq k \leq n$. Because of (2.16), we have

$$(2.21)\quad Q_\ell(x,y) = u_\ell(x,y)P_m^{\ell/m}(x,y) + \sum_{k=\ell+1}^{n} \sum_{\lambda_{m-1},\ldots,\lambda_1} u_k(x,y)P_m^{k/m}(x,y) \times$$

$$\times \binom{\frac{k}{m}}{\lambda_{m-1},\ldots,\lambda_1} \frac{(\lambda_{m-1}+\ldots+\lambda_1)!}{\lambda_{m-1}!\cdot\ldots\cdot\lambda_1!} \left(\frac{P_{m-1}(x,y)}{P_m(x,y)}\right)^{\lambda_{m-1}} \cdot\ldots\cdot \left(\frac{P_1(x,y)}{P_m(x,y)}\right)^{\lambda_1}.$$

We notice that the expressions $(P_{m-j}/P_m)^{\lambda_{m-1}}$, $j = 1,\ldots,m-1$, either vanish identically or are some quotients of homogeneous polynomials non-vanishing identically with the difference of degrees equal to $-j\lambda_{m-j}$; simultaneously, according to the assumption, the expressions $u_k(x,y)P_m^{k/m}(x,y)$, analogously, either vanish identically or are some quotients of homogeneous polynomials non-vanishing identically with the difference of degrees equal to k. Therefore, after rejecting the summands vanishing identically on the right-hand side of (2.21), under the summation sign there possibly remain, because of (2.13), expressions being some quotients of homogeneous polynomials non-vanishing identically with the difference of degrees equal to $k + (\ell-k) = \ell$. So, the above-mentioned sum is either equal identically to zero or is a quotient of homogeneous polynomials non-vanishing identically with the difference of degrees equal to ℓ. Hence, according to (2.21), we obtain that the expression $u_\ell(x,y)P_m^{\ell/m}(x,y)$ either vanishes identically or, after some reductions, is a quotient of relatively prime homogeneous polynomials non-vanishing identically with the difference of degrees equal to ℓ. At the same time, the polynomial from the denominator does not contain any other factors than these of (2.17). This follows immediately from the inductional assumption and from the shape of the terms under the summation sign on the right-hand side of (2.21) and the form of the term on the left-hand side of (2.21). Thus (2.18)

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

holds for $k = \ell$ and, as a consequence, for $\ell \leq k \leq n$.

Induction ends the proof.

In the sequel, we shall assume that the degree d of the jacobian J of the mapping (P,Q) satisfies the inequality $d \leq m + n - 3$.

THEOREM 2.3. If $-(m-3) + d \leq k \leq n$, then the coefficients $u_n(x,y)$ from (2.10) are constant for $(x,y) \in \Omega$; moreover, $u_n(x,y) \neq 0$.

P r o o f. From (2.9), by substitution (2.7) and a suitable choice of the curve D, we obtain

$$u_k(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \tilde{Q}(x,y,t)(\tilde{p}(x,y,t))^{-k-1} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{p}(x,y,t)dt, \quad k=n,n-1,\ldots, \tag{2.22}$$

where C denotes an arbitrary circle with centre at the origin, lying in the domain of variability of t.

Now, making use of Lemma 1.1, we shall evaluate the partial derivative $(\partial/\partial x)u_k(x,y)$. Namely, putting in (1.1)

$$U(x,y,t) = \tilde{p}(x,y,t), \quad V(x,y,t) = \tilde{Q}(x,y,t), \quad M(U,V) = U^{-k-1} V$$

and taking into account that, by (2.4), (2.5) and (2.6),

$$\frac{D(V,U)}{D(x,t)} = - \frac{Y}{m} t(\tilde{p}(x,y,t))^{1-m} \tilde{J}(x,y,t),$$

we obtain, by virtue of (2.22),

$$\frac{\partial u_k(x,y)}{\partial x} = - \frac{1}{2\pi i} \frac{Y}{m} \int_C t(\tilde{p}(x,y,t))^{-k-m} \tilde{J}(x,y,t)dt. \tag{2.23}$$

On the ground of (2.5) and (2.6), the right-hand side of (2.23) can be rewritten in the form

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{Y}{m} \int_C t^{-k-m+1} P_m^{(-k-m)/m}(x,y) \left[1 + \frac{P_{m-1}(x,y)}{P_m(x,y)} \frac{1}{t} + \ldots + \right. \tag{2.24}$$

$$\left. + \frac{P_1(x,y)}{P_m(x,y)} \frac{1}{t^{m-1}}\right]^{\frac{-k-m}{m}} \left[E_d(x,y)t^d + \ldots + E_o(x,y)\right]dt.$$

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

Since, for k fulfilling the assumptions of the theorem, we have in the integrand only the terms with negative powers of t smaller than -1, therefore the integral must vanish for these k. Thus

$$\frac{\partial u_k(x,y)}{\partial x} = 0, \qquad -(m-3)+d \leq k \leq n. \tag{2.25}$$

In a similar way we show that

$$\frac{\partial u_k(x,y)}{\partial y} = 0, \qquad -(m-3)+d \leq k \leq n. \tag{2.26}$$

From (2.25) and (2.26) it follows that u_k is constant.

The last part of our assertion results directly from (2.20) and from the assumption that Q_n does not vanish identically.

Let us now notice that if we confine ourselves in Theorem 2.1 to ℓ satisfying the inequality $\ell \geq -(m-3)+d$, we may treat the coefficients u_k as constants in the effective relations, according to Theorem 2.2.

Let us further notice that by confining ourselves additionally to negative ℓ, we obtain the effective relations for homogeneous components of the polynomial P only.

3. Study of the constant coefficient

We shall give here some theorems on the vanishing of some constant coefficients from (2.10) for $-(m-3)+d \leq k \leq n$. For this purpose, we shall consider factorization (2.17). Let δ denote the greatest common factor of $\gamma_1,\ldots,\gamma_r$ and let $\gamma_j = \sigma_j\delta$, $j = 1,\ldots,r$; then $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ are relatively prime numbers. By virtue of the condition $\gamma_1 + \ldots + \gamma_r = m$, we obtain

$$m = \delta(\sigma_1 + \ldots + \sigma_r). \tag{3.1}$$

THEOREM 3.1. If k is not divisible by $\sigma_1 + \ldots + \sigma_r$, then $u_k = 0$.

P r o o f. From Theorems 2.2 and 2.3 it follows that either u_k vanishes identically or

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

$$(3.2)\qquad (u_k(x,y))^m(P_m(x,y))^k(B_k(x,y))^m = (A_k(x,y))^m$$

where A_k and B_k do not vanish identically and are relatively prime, while u_k is a constant different from zero. Suppose that equality (3.2) holds. Then B_k^m is a divisor of A_k^m, but this is possible only in the case when B_k is a constant. At the same time, the degree of A_k is equal to k. From the assumptions of the theorem it follows that $k \neq 0$. So, admitting that the factorization of A_k has the form

$$(3.3)\qquad A_k(x,y) = a_k \prod_{i=1}^{s^{(k)}} (\nu_i^{(k)}x - \tau_i^{(k)}y)^{\alpha_i^{(k)}}, \quad \alpha_i^{(k)} > 0, \quad a_k \neq 0, \quad i=1,\ldots,s^{(k)},$$

we can write (3.2), taking into account (2.17) and (2.19), in the form

$$(3.4)\qquad (u_k(x,y))^m b_k^m \prod_{j=1}^{r} (\varkappa_j x - \omega_j y)^{k\gamma_j} = a_k^m \prod_{i=1}^{s^{(k)}} (\nu_i^{(k)}x - \tau_i^{(k)}y)^{\alpha_i^{(k)}m}.$$

From the uniqueness of the factorization we conclude that the terms on both sides of (3.4) have the same prime factors with the same power exponents.

This, because of (3.1), gives after dividing by δ:

$$k\sigma_j = \alpha_j^{(k)}(\sigma_1 + \ldots + \sigma_r), \quad j = 1,\ldots,r.$$

Hence it follows that each power of a prime number dividing the sum $\sigma_1 + \ldots + \sigma_r$ is also a diviser of k, since, in the opposite case, this power of the prime number would be the divisor of all numbers σ_j, $j = 1,\ldots,r$. and they would not be relatively prime. Thus $\sigma_1 + \ldots \sigma_r$ is the divisor of k, but this contradicts the assumption of the theorem. So our supposition was wrong. This implies that u_k vanishes identically.

COROLLARY 3.1. *If* $\sigma_1 + \ldots + \sigma_r > 1$, *then, for* k *relatively prime with* m, *there is* $u_k = 0$.

Indeed, from (3.1) and the definition of σ_j, $j = 1,\ldots,r$, it follows that $\sigma_1 + \ldots + \sigma_r$ is a divisor of m. Thus, using the assumptions, we conclude that k is not divisible by $\sigma_1 + \ldots + \sigma_r$.

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

This, according to Theorem 3.2, gives our corollary.

From the above we easily obtain

COROLLARY 3.2. If in factorization (2.17) there are at least two factors, i.e. $r \geq 2$, then, for k relatively prime with m, there is $u_k = 0$.

This, by the inequality $u_n \neq 0$ (Comp. Theorem 2.3), immediately gives

COROLLARY 3.3. If in factorization (2.17) there are at least two factors, i.e. $r \geq 2$, then the degrees m and n of coordinates (2.1) and (2.2) cannot be relatively prime.

COROLLARY 3.4. If in factorization (2.17) there are at least two factors, i.e. $r \geq 2$, and the degree m of coordinate (2.1) is a prime number, then the degree n of coordinate (2.2) must be divisible by m.

4. Critical coefficient

Here we shall study the first coefficient from (2.9), not being a constant, namely $u_{-(m-2)+d}$, which will be called the critical coefficient and denoted by u^*.

Beginning from this section, we assume in the sequel that the homogeneous component of the highest degree E_d of the jacobian J (comp. (2.3)) does not vanish identically.

At first, let us notice that

$$(4.1') \qquad \frac{\partial u^*(x,y)}{\partial x} = -\frac{y}{m} \frac{E_d(x,y)}{P_m^{(2+d)/m}(x,y)} ,$$

$$(4.1'') \qquad \frac{\partial u^*(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{m} \frac{E_d(x,y)}{P_m^{(2+d)/m}(x,y)} .$$

Indeed, because of (2.23) and (2.7), we have

$$(4.2) \qquad \frac{\partial u^*(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{y}{m} \int_C t^{-1-d} P_m^{(-2-d)/m}(x,y) \times$$

$$\times \left[1 + \frac{P_{m-1}(x,y)}{P_m(x,y)} \frac{1}{t} + \ldots + \frac{P_1(x,y)}{P_m(x,y)} \frac{1}{t^{m-1}}\right]^{(-2-d)/m} \times$$

$$\times\ t^d \left[E_d(x,y) + E_{d-1}(x,y) \frac{1}{t} + \ldots + E_0(x,y) \frac{1}{t^d}\right] dt,$$

which immediately gives (4.1'). Similarly we obtain (4.1'').

Next, let us notice that, according to (4.1') and (4.1''), $u^*(x,y)$ does not vanish identically since $E_d(x,y)$ does not vanish identically.

With reference to (2.19), let us put

$$(4.3) \qquad A^*(x,y) = A_{-(m-2)+d}(x,y), \qquad B^*(x,y) = B_{-(m-2)+d}(x,y),$$

and, by referring further to (3.3) and (2.17), let

$$(4.4) \qquad A^*(x,y) = a^* \prod_{i=1}^{s^*} (\nu_i x - \tau_i y)^{\alpha_i^*},$$

$$B^*(x,y) = b^* \prod_{j=1}^{r} (\varkappa_j x - \omega_j y)^{\beta_j^*}$$

denote factorizations (3.3) and (2.19), respectively.

According to (2.18), we have

$$(4.5) \qquad u^*(x,y)\, P_m^{(2+d)/m}(x,y) = \frac{A^*(x,y)}{B^*(x,y)}.$$

THEOREM 4.1. *In equality (4.5) the term on the right-hand side is a polynomial of degree* $d + 2$. *Moreover, this polynomial is divisible by the product* $\prod_{j=1}^{r} (\varkappa_j x - \omega_j y)$ *of all prime factors from factorization (2.17) of the homogeneous component* P_m.

P r o o f. Differentiating both sides of (4.5) with respect to x and taking account of (4.1'), we get

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

$$(4.6)\quad \frac{\partial(A^*(x,y))/\partial x}{A^*(x,y)} - \frac{\partial(B^*(x,y))/\partial x}{B^*(x,y)} = -\frac{y}{m}\frac{E_d(x,y)B^*(x,y)}{A^*(x,y)} + \frac{2+d}{m}\frac{\partial(P_m(x,y))/\partial x}{P_m(x,y)} .$$

Taking (4.4) into account, we easily check that the member on the left-hand side of (4.6) is equal to

$$(4.7)\quad \sum_{i=1}^{s^*}\frac{\alpha_i^*\nu_i^*}{\nu_i^*x - \tau_i^*y} - \sum_{j=1}^{r}\frac{\beta_j^*\varkappa_j}{\varkappa_j x - \omega_j y} .$$

At the same time, according to (2.17), there is

$$(4.8)\quad \frac{\partial(P_m(x,y))/\partial x}{P_m(x,y)} = \sum_{j=1}^{r}\frac{\gamma_j\varkappa_j}{\varkappa_j x - \omega_j y} .$$

Substituting (4.7) and (4.8) in (4.6), after an easy transposition of the suitable terms, we obtain

$$(4.9')\quad \frac{yE_d(x,y)}{m}\,\frac{b^*\prod_{j=}^{r}(\varkappa_j x - \omega_j y)^{\beta_j^*}}{a^*\prod_{i=1}^{s^*}(\nu_i^*x - \tau_i^*y)^{\alpha_i^*}} + \sum_{i=1}^{s^*}\frac{\alpha_i^*\nu_i^*}{\nu_i^*x - \tau_i^*y} = \sum_{j=1}^{r}\frac{\varkappa_j\left(\frac{2+d}{m}\gamma_j + \beta_j^*\right)}{\varkappa_j x - \omega_j y} .$$

Analogously, differentiating both sides of (4.5) with respect to y and taking account of (4.1''), we get

$$(4.9'')\quad \frac{xE_d(x,y)}{m}\,\frac{b^*\prod_{j=1}^{r}(\varkappa_j x - \omega_j y)^{\beta_j^*}}{a^*\prod_{i=1}^{s^*}(\nu_i^*x - \tau_i^*y)^{\alpha_i^*}} + \sum_{i=1}^{s^*}\frac{\alpha_i^*\tau_i^*}{\nu_i^*x - \tau_i^*y} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \frac{\omega_j \left(\frac{2+d}{m}\gamma_j + \beta_j^*\right)}{\varkappa_j x - \omega_j y} .$$

At the same time, one can readily see that equalities (4.9′) and (4.9′′) holding in the neighbourhood Ω of the point (x_o, y_o) can be extended to the whole space $\mathbb{C}^2$, excluding the set of zeros of the polynomial P_m. Consider an arbitrary factor $(\varkappa_j x - \omega_j y)$ and the point $(\omega_j, \varkappa_j)$ being a zero of this factor. Let us investigate either equality (4.9′) or (4.9′′) according to whether $\varkappa_j$ or ω_j is different from zero. We see that the right-hand side of the equality is there unbounded; this implies that also the left-hand side of this equality is unbounded. But this is only possible when one of the prime factors from the first of relations (4.4) coincides with the factor $\varkappa_j x - \omega_j y$. Because of the arbitrariness of the latter, we see that among the prime factors from the first of relations (4.4) there must be all those, from (2.17), in other words, the polynomial $A^*(x,y)$ must be divisible by the product $\Pi_{j=1}^{r} (\varkappa_j x - \omega_j y)$. From this we further conclude that the function B^* reduces to a constant since, in the opposite case, the polynomials A^* and B^* would have a common factor, which contradicts the assertion of Theorem 2.2. Hence, according to Theorem 2.2, the degree of the polynomial A^* is equal to $d + 2$. Collecting all these informations, we obtain the assertion of our theorem.

Finally, let us notice that the results analogous to those from sections 2,3 and 4 can be obtained by changing the roles of the coordinates P and Q in the expansion of the Newton-Puiseux type.

5. Structure of the homogeneous components of the highest degree in the coordinates of the mapping

We shall give here a relation between the degree d of jacobian (2.3) and the terms P_m and Q_n from (2.1) and (2.2).

THEOREM 5.1. In the factorizations of the components of the highest degree P_m and Q_n of coordinates (2.1) and (2.2) the number of different factors in either factorization is at most $d + 2$. Moreover, in both factorizations there are the same factors whose power exponents

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

are proportional to m and n.

P r o o f. From Theorem 4.1 it follows that in factorization (2.17) of P_m there are at most $d + 2$ prime factors. Changing the roles of the coordinates, we obtain the analogous result for Q_n. This gives the first part of the assertion of the theorem.

From equality (2.20) we now have

$$(Q_n(x,y))^m = (u_n(x,y))^m \, (P_m(x,y))^n,$$

which, because of the fact that the coefficient $u_n(x,y)$ is constant and different from zero, immediately gives the second part of the assertion of the theorem.

Let us notice that the theorem stated above can be written in the form: if the polynomial mapping (P,Q) has the jacobian of degree d, then the coordinates P and Q have at most $d + 2$ zeros at infinity. Moreover, both coordinates have the same zeros with orders proportional to the degrees of the corresponding coordinates.

In the particular case $d = 0$, from Theorem 5.1 we immediately obtain the earlier result for mappings with the constant jacobian which was derived in some other way (comp. [1], p.139).

R e f e r e n c e s

[1] S.S. ABHYANKAR, Expansion techniques in algebraic geometry, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1977.

[2] H. BASS, E.H. CONNEL, and D.WRIGHT, The jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse, Bull. of Amer.Mat.Soc. Vol.7, No 2, (1982), pp.287-330.

[3] O.H. KELLER, Ganze Cremona-Transformationen, Monats.Math.Physik 47 (1939), pp.299-306.

[4] A. MAGNUS, Volume-preserving transformations in several complex variables, Proc. Amer. Math. Soc. Vol.5 (1954), pp.256-266.

Institute of Mathematics
Łódź University
Banacha 22,
PL-90-238 Łódź, Poland

in: Seminar on Deformations. Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer, Berlin 1985, 36–51.

PL ISSN 0459-6854

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ

1987 Vol. XXXVII, 3

Recherches sur les déformations No. 43

Zygmunt Charzyński and Ludwika Kaczmarek

BOUNDS OF UNIVALENT FUNCTIONS IN TERMS OF ITERATED EXTREMA

Summary

Let T denote the family of functions

(i) $z = G(w) = w + B_2 w^2 + \dots$

which are inverse of the classical functions

(ii) $w = F(z) = z + A_2 z^2 + \dots, \quad |z| < 1,$

belonging to the family S.

Because of the simple relations between the coefficients from (i) and (ii) the researches in T and S are, in a wide class of cases, equivalent (comp. [8]).

For harmonic functionals on T, of the form

$$H_G = \operatorname{Re} E(B_2, \dots, B_N)$$

where E is a holomorphic function in a sufficiently large domain, we derive a new, effective and elementary formula for the absolute maximum:

$$\max_{G \in T} H_G = \sup_{\zeta_1, \dots, \zeta_m} \operatorname{Re} E(D_2\rho, \dots, D_N\rho^{N-1}),$$

where

$$D_s = (-1)^{s-1} \tau_{s-1}(1/\zeta_1, \dots, 1/\zeta_m)/s, \quad s = 2, \dots,$$

$$\rho = \min_{1 \leqslant k \leqslant m} |\zeta_k + \Sigma_{s=2}^{m+1} D_s \zeta_k^s|;$$

$\zeta_1,\ldots,\zeta_m$ are arbitrary non zero complex parameters,
τ_j, $j = 1,\ldots,$ are successive fundamental symmetric functions.

The derivation is based on the method of univalent polynomials (comp. [2]).

Introduction

For the study of bounds of functionals in the families of functions, it is natural and purposeful to reduce the needed bound to an extremum, sometimes iterated, of a relatively simple function of number parameters.

In this paper we give such a reduction for the class T of functions inverse of the functions belonging to the well-known class S (comp. Summary).

In the basic formula there appear, consecutively, operations of a minimum and, next, supremum of simple analytic expressions.

The particular case of the discussed reduction was given in [3].

Our procedure differs from those based on inner variation as well as on Loewner representation. We use the properties of univalent polynomials introduced and studied in [2], in particular, important is the possibility of applying the maximum principle (comp. [2]).

The derivation of basic formulae (19) runs in four steps. The first one contains the reduction of the bound of the functional in the full family T to that in the dense family of univalent polynomials (7). In the second, an important one, a further reduction to a narrower family of canonical polynomials (10) is given; this step is a delicate spot of the paper. There are applied in it conditions (4) which form, together with conditions (4.19) from [2], the equations of residues or in another form - the equations of moments (comp. [1], p. 25 and [2], p. 17). In the third step the canonical polynomials are replaced by some more general ones: pseudo-canonical polynomials with easy parametrization, which gives basic formula (14). In the fourth one the above mentioned parametrization in an effective form (15) is given, which leads to the final form (19) of the basic formula.

1. Univalent polynomials, canonical polynomials, and pseudo-canonical polynomials. Relations for suprema

Given an arbitrary normalized polynomial P of the form

$$P(w) = w + C_2 w^2 + \ldots + C_{m+1} w^{m+1}, \quad C_{m+1} \neq 0, \tag{1}$$

let

$$w_k, \quad k = 1,\ldots,m; \tag{2}$$

denote zeros of the derivative of this polynomial, not necessarily distinct.

The greatest domain containing 0 and such that $|P| < 1$ will be called associated with P and denoted by μ_P. The polynomial P, injective in μ_P, will be called univalent. P will stanf for the family of such polynomials.

It is known that the polynomial P is univalent if and only if all zeros (2) of the derivative P' lie outside the associated domain μ_P (comp. [2], pp. 8-10). Since on the boundary of μ_P there is $|P| = 1$, therefore, for the univalence of the polynomial P, it is sufficient that the relations

$$|P(w_k)| \geq 1, \quad k = 1,\ldots,m, \tag{3}$$

hold for zeros (2) of its derivative.

The polynomial P, having all zeros of its derivative lying on the boundary of μ_P, will be called canonical. According to the above, it is univalent and

$$|P(w_k)| = 1, \quad k = 1,\ldots,m. \tag{4}$$

R will denote the family of such polynomials.

The polynomial P, for which conditions (3) with at least equality sign are fulfilled, will be called pseudo-canonical; as we can see, it is also univalent. The particular case of such polynomials is the family of canonical polynomials. L will stand for the family of the polynomials described above.

Finally, by P_M we shall denote the family of the polynomials from P whose degrees do not exceed M.

For the families introduced earlier and lately, the following obvious relations hold:

$$T \supset P \supset L \supset R, \quad P = \bigcup_M P_M. \tag{5}$$

Consider on the family T a harmonic functional depending on the coefficients

$$H_G = \operatorname{Re} E(B_2,\ldots,B_N), \tag{6}$$

where E is a function of $N-1$ variables, holomorphic in a sufficiently large domain. For functional (6), in view of the continuity and the fact that the family P is dense in T, we have

$$\sup_{G\in T} H_G = \sup_{G\in P} H_G \tag{7}$$

(comp. [2], pp. 10-11), and, according to (5),

$$\sup_{G\in P} H_G \geq \sup_{G\in L} H_G \geq \sup_{G\in R} H_G, \tag{8'}$$

$$\sup_{G\in P} H_G = \sup_{M} \sup_{G\in P_M} H_G. \tag{8''}$$

Besides, since, for every M, the extrema of harmonic functionals in the family P_M are realized by canonical polynomials, we have

$$\sup_{G\in P_M} H_G = \sup_{G\in P_M\cap R} H_G \leq \sup_{G\in R} H_G$$

(comp. [2], pp. 20-21), whence

$$\sup_{M} \sup_{G\in P_M} H_G \leq \sup_{G\in R} H_G. \tag{9}$$

When putting (9), (8'') and (8') together, we obtain

$$\sup_{G\in P} H_G = \sup_{G\in R} H_G, \tag{10}$$

which, because of (7) and again of (8'), gives

$$\sup_{G\in T} H_G = \sup_{G\in L} H_G. \tag{11}$$

2. Basic formulae

Let Q denote the full family of normalized polynomials, not necessarily univalent, of the form

$$Q(\zeta) = \zeta + D_2\zeta^2 + \ldots + D_{m+1}\zeta^{m+1}, \quad D_{m+1} \neq 0. \tag{12}$$

The following facts take place:

THEOREM 1. Polynomials of the family L can be represented by the structural formula

$$P(w) = Q(\rho w)/\rho, \tag{13}$$

where ρ stands for the minimum of the absolute values of Q at zeros of the derivative Q', and Q ranges over the family $\mathcal{Q}$.

Proof. This follows immediately from the fact that polynomial (13) formed by means of (12) takes, as one can easily check, at zeros of its derivative the values with the modulus not smaller than 1 and at least once equal to 1, therefore belongs to the family L. If polynomial (12) is pseudo-canonical itself, then $\rho = 1$ and transformation (13) leads to the same polynomial (12). This shows that formula (13) comprises all pseudo-canonical polynomials.

In the sequel, for the given polynomial Q, its counterpart polynomial by means of (13) will be denoted by P_Q.

With this notation, from Theorem 1 and relation (11) we immediately obtain the basic result.

THEOREM 2. The supremum of harmonic functional (6) in the family T is expressed by the formula

$$\sup_{G\in T} H_G = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} H_{P_Q}. \tag{14}$$

3. Parametrization

The passing to number parameters is realized by means of the following facts:

THEOREM 3. Polynomials of the family $\mathcal{Q}$ can be represented in the structural form

$$Q(\zeta) = \int_0^{\zeta}(1 - t/\zeta_1)\ldots(1 - t/\zeta_m)dt, \tag{15}$$

where the parameters

$$\zeta_k, \quad k = 1,\ldots,m \tag{16}$$

range over all finite sequences of non-zeros complex numbers.

Proof. This follows immediately from relation between the derivative of the polynomial and the sequence of its corresponding zeros-parameters

$$Q'(\zeta) = (1 - \zeta/\zeta_1)\ldots(1 - \zeta/\zeta_m),$$

which, together with the normalization, gives formula (15).

For an arbitrary sequence of parameters (16), let us form the corresponding polynomial (15). Writing it down in the form (12), we have, as it can readily be seen,

$$(17) \qquad D_s = (-1)^{s-1}\, \tau_{s-1}(1/\zeta_1,\ldots,1/\zeta_m)/s, \quad s = 2,\ldots,$$

where τ_j, $j = 1,\ldots,$ are successive fundamental symetric functions; at the same time, the corresponding number ρ from (13) is given by the formula

$$(18) \qquad \rho = \min_{1\le k\le m} |\zeta_k + \Sigma_{s=2}^{m+1} D_s\, \zeta_k^{\,s}|.$$

In this situation, in virtue of (14), we obtain the following final result:

THEOREM 4. The supremum of harmonic functional (6) in the family T is expressed by the formula

$$(19) \qquad \sup_{G\in T} H_G = \sup_{\zeta_1,\ldots,\zeta_m} \operatorname{Re} E(D_2\rho,\ldots,D_N\,\rho^{N-1}),$$

where $\zeta_1,\ldots,\zeta_m$ range over all finite sequences of non-zero complex numbers.

Taking into account the compactness of the family T, the supremum on the left-hand side of (19) can be replaced by the maximum (comp. [8], I, p. 2).

References

[1] Z. Charzyński: Sur les fonctions univalentes algebriques bornées, Rozprawy Mat. X (1955), 1-41.

[2] ——: Fonctions univalentes inverses. Polynômes univalentes, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 9, 7 (1958), 1-21.

[3] ——: Seminar on extremal problems in analytic functions, Ann. Polon. Math. 20 (1968), p. 311.

[4] —— and A. Kozłowski: Geometry of polynomials (I, II, III), Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 5, 6, 7 (1978), 1-9, 1-10, 1-14.

[5] —— and ——: Interpolation of the Chebyshev type on zeros of the derivative of a polynomial (I, II, III), Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 8, 9, 10 (1978), 1-11, 1-12, 1-9.

[6] —— and J. Ławrynowicz: On the coefficients of univalent polynomials, Coll. Math. XVI (1967), 27-33.

[7] —— and J. Śladkowska: Fonctions algebriques et variations analytiques des fonctions univalentes, Rozprawy Mat. L XX (1970), 1-77.

[8] R. Gocał: Structure des polynômes univalentes (I, II), Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 8, 9 (1980), 1-7, 1-10.

[9] J. Ławrynowicz: On the coefficient problem for univalent polynomials, Proc. Camb. Phil. Soc. 64 (1968), 87-98.

Institute of Mathematics
University of Łódź
Banacha 22
PL-90-237 Łódź, Poland

Presented by Zygmunt Charzyński at the Session of the Mathematical-Physical Commission of the Łódź Society of Sciences and Arts on March 7, 1985

OGRANICZENIA FUNKCJI JEDNOKROTNYCH W TERMINACH EKSTREMÓW ITEROWANYCH

Streszczenie

Niech T oznacza rodzinę funkcji

(i) $$z = G(w) = w + B_2 w^2 + \dots$$

odwrotnych do klasycznych

(ii) $$w = F(z) = z + A_2 z^2 + \dots, \quad |z| < 1,$$

rodziny S.

Ze względu na proste związki między współczynnikami (i) i (ii) badania w T i S są w szerokim zakresie przypadków równoważne (por. [8]).

Dla funkcjonałów harmonicznych na T postaci

$$H_G = \operatorname{Re} E(B_2, \dots, B_N),$$

gdzie E jest funkcją holomorficzną w dostatecznie dużym obszarze, uzyskuje się nowy, efektywny i elementarny wzór na maksimum absolutne

$$\max_{G \in T} H_G = \sup_{\zeta_1, \dots, \zeta_m} \operatorname{Re} E(D_2 \rho, \dots, D_N \rho^{N-1}),$$

gdzie

$$D_s = (-1)^{s-1} \tau_{s-1}(1/\zeta_1, \dots, 1/\zeta_m)/s, \quad s = 2, \dots,$$

Cena zł 60.–

$$\rho = \min_{1 \leq k \leq m} |\zeta_k + \Sigma_{s=2}^{m+1} D_s \zeta_k^s|;$$

$\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ są dowolnymi parametrami zespolonymi różnymi od zera, τ_j, $j = 1, \ldots,$ są kolejnymi funkcjami symetrycznymi podstawowymi.

Wyprowadzenie oparte jest na metodzie wielomianów jednokrotnych (por. [2]).

ZPPŁ zam. 204/87 H-9 n. 330+22+30

PL ISSN 0459-6854

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ

1987 Vol. XXXVII,8

Recherches sur les déformations No. 48

Zygmunt Charzyński and Przemysław Skibiński

A CRITERION FOR EXPLICIT DEPENDENCE OF POLYNOMIALS

Summary

In this note we give a short and elementary proof of the following criterion for the explicit algebraic dependence of polynomials: if P and Q are polynomials in x,y, such that the derivatives P_x and P_y are relatively prime and the jacobian $P_xQ_y - P_yQ_x$ vanishes identically, then there exists a polynomial Φ such that $Q = \Phi(P)$.

A criterion for explicit dependence

The algebraic dependence of two polynomials P and Q of variables x,y consists in the existence of a non-zero polynomial ψ of two variables, such that there is identically

$$\psi(P,Q) = 0.$$

This dependence is equivalent to the identical vanishing of the jacobian $P_xQ_y - P_yQ_x$ ([1], p.134).

In this note we are concerned with the finding of sufficient conditions for the explicit algebraic dependence between the polynomials P and Q, i.e. the second one is a polynomial with re-

spect to the first one, which means that there is identically

$$Q = \Phi(P)$$

where Φ is a polynomial of one variable.

In this direction we derive the following result:

THEOREM. *If P and Q are polynomials in x,y, such that the derivatives P_x and P_y are relatively prime and the jacobian $P_xQ_y - P_yQ_x$ vanishes identically, then Q is explicitly dependent on P.*

P r o o f. P being fixed, we apply the induction with respect to the degree of the polynomial Q.

1^o. For polynomials Q of degree 0, i.e. for polynomials reduced to some constant, the assertion of the theorem is obvious.

2^o. Supposing that the theorem holds for polynomials of degree not greater than a certain k, taking an arbitrary polynomial Q_1 of degree $k+1$ such that $P_xQ_{1y} - P_yQ_{1x} = 0$ identically and using the fact that P_x and P_y are relatively prime, we have $Q_{1x} = QP_x$, $Q_{1x} = QP_y$ where Q is a polynomial. Since P_x and P_y are relatively prime, they cannot vanish simultaneously; at the same time, the degrees of the derivatives do not exceed k, therefore the degree of Q does not exceed k. Differentiating the last equalities with respect to y and x, respectively, and next, subtracting and taking account of the equality of the mixed partial derivatives, we obtain that the jacobian $P_xQ_y - P_yQ_x$ vanishes identically. Hence, and by the inductional supposition, it follows that $Q = \Phi(P)$ where Φ is a polynomial. Substituting this into the preceding equalities, we obtain $Q_1 = \Phi(P)P_x$, $Q_{1y} = \Phi(P)P$. This easily implies that

$$Q_1 = \Phi_1(P)$$

where Φ_1 is a primitive polynomial for Φ.

Induction ends the proof.

References

[1] O. Perron: Algebra, Bd I, Walter de Gruyter & Co, Berlin W 10 und Leipzig, 1932.

Institute of Mathematics
University of Łódź

Presented by Zygmunt Charzyński at the Session of the Mathematical-Physical Commission of the Łódź Society of Sciences and Arts on April 25, 1985

PEWNE KRYTERIUM ZALEŻNOŚCI WYRAŹNEJ WIELOMIANÓW

Streszczenie

W pracy dowodzi się elementarnie następującego twierdzenia: jeżeli P i Q są wielomianami zmiennych x,y takimi, że pochodne P_x i P_y są względnie pierwsze i jakobian $P_xQ_y - P_yQ_x$ znika tożsamościowo, to istnieje wielomian Φ jednej zmiennej taki, że

$$Q = \Phi(P).$$

A CONTRIBUTION TO KELLER'S JACOBIAN CONJECTURE II

Zygmunt Charzyński, Jacek Chądzyński and Przemysław Skibiński
Institute of Mathematics, Łódź University
ul. S. Banacha 22
90-238 Łódź
Poland

SUMMARY. In this paper we give two necessary and sufficient conditions for a complex polynomial Q in two variables x,y to exist, such that $P_xQ_y - P_yQ_x = 1$ holds for the given analogous polynomial P.

INTRODUCTION.

In the circle of the famous Keller's Jacobian conjecture (cf. [5] and [2]), polynomial mappings with the constant non-zero Jacobian are considered.

In this paper we investigate polynomial mappings $H: \mathbb{C}^2 \ni (x,y) \to (P(x,y),Q(x,y)) \in \mathbb{C}^2$ fulfilling the condition

$$P_xQ_y - P_yQ_x = 1 \tag{1}$$

in the aspect of some properties of the coordinates of the mapping H. The constancy of the Jacobian implies that the coordinates P,Q cannot be arbitrary - there are various necessary conditions for them (cf. e.g. [1], p.138, [3], p.50, [6], p.262). In connection with this, there arises a natural problem of a full characterization of the coordinates in the form of some necessary and sufficient conditions.

Here such a characterization is given. We formulate some necessary and sufficient conditions which must be satisfied by the given polynomial P in order that another polynomial Q exist such that their Jacobian is equal to 1 (Theorems 1 and 2). The announced characterization is preceded by an inductive definition of a sequence of some pairs of polynomials appearing in these theorems (Observation 3).

1. TERMS AND AUXILIARY FACTS

(a) In the sequel, by $\mathbb{C}[x,y]$ we shall denote the ring of polynomials in two variables x,y over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers. The analogous notation is introduced for one and three variables. If $A \in \mathbb{C}[x,y]$, then by $\deg A$ we shall denote the degree of the polynomial A and by

J. Ławrynowicz (ed.), Deformations of Mathematical Structures, 133–140.
© 1989 by Kluwer Academic Publishers.

in: Deformations of Mathematical Structures. (Łódź-Lublin 1985/1987), 133–140, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1989.

$\deg_x A$ - the degree of the polynomial A with respect to x, with the agreement that the polynomial identically equal to zero has the degree $-\infty$.

(b) A polynomial mapping $H = (P,Q) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ fulfilling identically condition (1) is called Keller's mapping and P,Q - Keller's coordinates of the mapping H. In the light of the above, for a polynomial P to be a Keller's coordinate, it is necessary and sufficient that there exist some polynomials Q such that (1) holds.

Moreover, if I_o is such a polynomial, then any other polynomial Q fulfilling (1) has the form

$$Q = I_o + \Phi(P) \tag{1'}$$

where $\Phi \in \mathbb{C}[x]$.

Indeed, in this situation we have

$$P_x(Q - I_o)_y = P_y(Q - I_o)_x = 0,$$

i.e. the polynomials $Q - I_o$ and P are algebraically dependent, and since, in view of (1), P_x and P_y are relatively prime in $\mathbb{C}[x,y]$, therefore this is the explicit dependence $Q - I_o = \Phi(P)$ (cf. [4]).

Thus, the family of polynomials Q fulfilling (1) depends, by (1'), on arbitrary parameters involved in Φ.

Using, if necessary, the composition with a suitable linear automorphism of $\mathbb{C}^2$, we can confine ourselves to Keller's mappings such that $\deg_x P_x = \deg P - 1$ and $\deg_x P_y = \deg P - 1$.

(c) Let $M \in \mathbb{C}[x,y]$, $N \in \mathbb{C}[x,y]$. By the division with remainder we mean the representation $M = DN + E$ where $D,E \in \mathbb{C}[x,y]$ and $\deg_x E < \deg_x N$. At the same time, D and E are called the quotient and the remainder of this division, respectively.

Below, we shall give some auxiliary facts.

Let $P \in \mathbb{C}[x,y]$, $m = \deg P$. Throughout this section, we shall assume that $m > 1$ and that the following conditions hold:

(i) $\deg_x P_x = m - 1$, $\deg_x P_y = m - 1$,

(ii) the partial derivatives P_x, P_y have no zeros in common in $\mathbb{C}^2$.

OBSERVATION 1. Let $U,V,W \in \mathbb{C}[x,y]$, $\deg_x W \leq 2m - 3$ and

$$P_x V - P_y U = W. \tag{2}$$

Then the quotients of the divisions of U by P_x and of V by P_y are equal.

To justify the above observation, it suffices to compare the degrees with respect to x on both sides of (2) and take account of the assumption and condition (i).

in: Deformations of Mathematical Structures. (Łódź-Lublin 1985/1987), 133–140, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1989.

OBSERVATION 2. For the given polynomial P and for an arbitrary polynomial $W \in \mathbb{C}[x,y]$ such that $\deg_x W \leq 2m - 3$, there exists exactly one pair of polynomials $A,B \in \mathbb{C}[x,y]$ such that the following linear representation holds:

$$P_x B - P_y A = W, \quad \deg_x A \leq m - 2, \quad \deg_x B \leq m - 2. \tag{3}$$

Indeed, in the case $W = 1$, according to theorems 9.2 and 9.6 from [7] (pp.23 and 25), there exists exactly one pair of polynomials $\tilde{A},\tilde{B} \in \mathbb{C}[x,y]$ such that

$$P_x \tilde{B} - P_y \tilde{A} = 1, \quad \deg_x \tilde{A} \leq m - 2, \quad \deg_x \tilde{B} \leq m - 2. \tag{4}$$

If W is an arbitrary polynomial, then from (4) we get

$$P_x(\tilde{B}W) - P_y(\tilde{A}W) = W. \tag{5}$$

Next, we use the division of the expressions in brackets by P_y and P_x, respectively:

$$\tilde{A}W = IP_x + A, \quad \tilde{B}W = JP_y + B. \tag{6}$$

Hence, by Observation 1, we have $I = J$. Putting (6) into (5), we obtain (3).

This representation is unique. In the opposite case, we easily obtain the contradiction with unique representation (4).

Directly from this observation we obtain

OBSERVATION 3. For the given polynomial P, there exists exactly one sequence of pairs of polynomials

$$(A_k,B_k), \quad \deg_x A_k \leq m - 2, \quad \deg_x B_k \leq m - 2, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{7}$$

defined inductively by the conditions

$$P_x B_1 - P_y A_1 = 1, \tag{8_1}$$

$$P_x B_{k+1} - P_y A_{k+1} = B_{kx} - A_{ky}, \quad k = 1,2,\ldots . \tag{8_{k+1}}$$

We say that sequence (7) breaks off if there exists an index s such that

$$B_{sx} - A_{sy} = 0. \tag{9}$$

This easily implies

OBSERVATION 4. If sequence (7) breaks off, then there exists a minimal index r such that $B_{rx} - A_{ry} = 0$, $(A_r,B_r) \neq (0,0)$, $(A_k,B_k) =$

in: Deformations of Mathematical Structures. 595
(Łódź-Lublin 1985/1987), 133–140, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1989.

$= (0,0)$ for $k > r$.

At last, we easily check the following

OBSERVATION 5. The system of equations $I_x = F$, $I_y = G$, where $F,G \in \mathbb{C}[x,y]$ and $G_x - F_y = 0$, has a solution $I \in \mathbb{C}[x,y]$ (unique up to a constant).

2. CHARACTERIZATION OF THE COORDINATES

In this section, $P \in \mathbb{C}[x,y]$ will denote an arbitrary polynomial of degree $m > 1$, satisfying the condition

(i) $\deg_x P_x = m - 1$, $\deg_x P_y = m - 1$ (cf. sec. 1 (b)).

THEOREM 1. The polynomial P is a Keller coordinate if and only if the following conditions are satisfied:

(ii) the partial derivatives P_x, P_y have no zeros in common in $\mathbb{C}^2$ (this gives the existence of sequence (7) described in Observation 3),

(iii) sequence (7) breaks off.

P r o o f. First, let us assume that P is a Keller coordinate. Then there exists a polynomial $Q \in \mathbb{C}[x,y]$ such that

$$P_x Q_y - P_y Q_x = 1. \tag{10}$$

Hence we immediately see that condition (ii) holds.

Now, we define by induction two sequences of divisions of polynomials in the sense of section 1 (c):

$$Q_x = I_1 P_x + A_1, \qquad Q_y = J_1 P_y + B_1, \tag{11_1}$$

$$I_{kx} = I_{k+1} P_x + A_{k+1}, \qquad J_{ky} = J_{k+1} P_y + B_{k+1}, \qquad k = 1,2,\ldots . \tag{11_{k+1}}$$

Let us first notice that $I_k = J_k$ for $k = 1,2,\ldots$. Indeed, the equality $I_1 = J_1$ follows from (10), (11_1) and Observation 1. If $I_1 = J_1$ for $1 = 1,\ldots,k$, then

$$I_{k-1\,x} = I_k P_x + A_k, \qquad \deg_x A_k \leq m - 2,$$

$$I_{k-1\,y} = I_k P_y + B_k, \qquad \deg_x B_k \leq m - 2.$$

in: Deformations of Mathematical Structures. (Łódź-Lublin 1985/1987), 133–140, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1989.

Hence, differentiating and taking account of the equality of mixed partial derivatives, we obtain

$$P_x I_{ky} - P_y I_{kx} = B_{kx} - A_{ky}, \tag{12}$$

whence, by (11_{k+1}) and Observation 1, we get $I_{k+1} = J_{k+1}$.

Let us next notice that the pairs

$$(A_k, B_k), \quad k = 1,2,..., \tag{13}$$

from (11_1), (11_{k+1}) fulfil the conditions of Observation 3. Indeed, putting (11_1) into (10) and using the equality $I_1 = J_1$, we obtain

$$P_x B_1 - P_y A_1 = 1, \quad \deg_x A_1 \leq m - 2, \quad \deg_x B_1 \leq m - 2,$$

which, according to Observation 2, means that (A_1, B_1) is the first pair from Observation 3. Assume that the pair (A_k, B_k) from (11_{k+1}) is identical with the corresponding pair from sequence (7). By (11_{k+1}) and the equality $I_k = J_k$, we have

$$I_{kx} = I_{k+1} P_x + A_{k+1}, \quad I_{ky} = I_{k+1} P_y + B_{k+1}, \tag{14}$$

$$\deg_x A_{k+1} \leq m - 2, \quad \deg_x B_{k+1} \leq m - 2.$$

Putting (14) into (12), we obtain

$$P_x B_{k+1} - P_y A_{k+1} = B_{kx} - A_{ky},$$

which, according to Observation 2, gives that (A_{k+1}, B_{k+1}) is the $(k+1)$-st term of sequence (7) from Observation 3.

In the light of this, it suffices to show that sequence (13) breaks off. Indeed, since $m - 1 > 0$ and the sequence $(\deg_x I_k)$, $k = 1,2,...,$ is decreasing up to an index s such that $\deg_x I_s = -\infty$, therefore

$$I_{s-1\ x} = 0 \cdot P_x + A_s, \quad I_{s-1\ y} = 0 \cdot P_y + B_s. \tag{15}$$

From (15), by the equality of mixed partial derivatives, we obtain

$$B_{sx} - A_{sy} = 0,$$

and so, sequence (13) breaks off. Thus conditions (ii) and (iii) are satisfied, as described.

Now, let us assume that these conditions are satisfied.

We begin, using the decreasing induction, with showing that there

in: Deformations of Mathematical Structures. 597
(Łódź-Lublin 1985/1987), 133–140, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1989.

exist some polynomials $I_o,\ldots,I_{s-1}$ belonging to $\mathbb{C}[x,y]$ such that

$$P_x I_{oy} - P_y I_{ox} = 1, \tag{16_o}$$

$$P_x I_{1y} - P_y I_{1x} = B_{1x} - A_{1y}, \quad 1 = 1,\ldots,s-1, \quad \text{if } s > 1. \tag{16_1}$$

According to the assumption, equality (9) holds. Thus, in virtue of Observation 5, there exists a polynomial $I_{s-1} \in \mathbb{C}[x,y]$ such that

$$I_{s-1\,x} = A_s, \quad I_{s-1\,y} = B_s. \tag{17_{s-1}}$$

Putting (17_{s-1}) into (8_s), we obtain (16_{s-1}). Let now $I_k \in \mathbb{C}[x,y]$ fulfil (16_k). Then $(I_k P_x + A_k)_y = (I_k P_y + B_k)_x$. Consequently, in virtue of Observation 5, there exists a polynomial $I_{k-1} \in \mathbb{C}[x,y]$ such that

$$I_{k-1\,x} = I_k P_x + A_k, \quad I_{k-1\,y} = I_k P_y + B_k. \tag{17_{k-1}}$$

Putting (17_{k-1}) into (8_k), we obtain (16_{k-1}).

By this procedure, we have obtained the existence of a polynomial I_o satisfying (16_o). So P is a Keller coordinate, as desired (cf. sec. 1 (b)).

This ends the proof of the theorem.

Let us notice that the first essential fact in the characterization considered is condition (ii) which permits the construction of sequence (7).

Let us notice that the second essential fact in the given characterization is condition (iii). It means that in sequence (7) there must appear a term (A_s,B_s) such that A_s and B_s are coefficients of a total differential.

Let us notice that the coefficients of the polynomials A_1,B_1 from formula (8_1) in Observation 3 can be expressed effectively polynomially by the coefficients of the polynomial P (cf. [7], p.25). Consequently, the same occurs to the further polynomials $(A_2,B_2),\ldots,$ in particular, to the last pair (A_s,B_s). In this situation, condition (ii), that is, (8_1), and condition (iii) of the breaking off of sequence (7), i.e. (9), can be written as a system of the finite number of effective polynomial equations connecting the coefficients of the polynomial P.

By these equations, in view of (16_o), (16_1), the coefficients of the corresponding polynomials $I_{s-1},I_{s-2},\ldots,$ in particular, the coefficients of the last one - I_o, can be expressed effectively polynomially by the coefficients of the polynomial P. In other words, the con-

in: Deformations of Mathematical Structures. (Łódź-Lublin 1985/1987), 133–140, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1989.

dition of the constancy of the Jacobian, connecting the coefficients of both the coordinates of the mapping, can be replaced by a system of algebraic equations connecting the coefficients of one coordinate only; the coefficients of the other coordinate can already be expressed polynomially by the coefficients of the first one.

Summing up, the coefficients of one coordinate of the Keller mapping under consideration run over effectively determined algebraic sets, whereas the coefficients of the other coordinate run over the images of the above-mentioned algebraic sets under an effective polynomial mapping depending also on arbitrary parameters (cf. sec. 1 (b)).

THEOREM 2. The polynomial P is a Keller coordinate if and only if the following condition is satisfied:

(iv) there exist polynomials $S,T \in \mathbb{C}[x,y,\lambda]$ such that

$$P_xT - P_yS = 1 + \lambda(T_x - S_y), \quad \deg_x S \leq m-2, \quad \deg_x T \leq m-2. \tag{18}$$

P r o o f. At first, we shall show the necessity of the condition. Let P be a Keller coordinate. According to Theorem 1, sequence (7) from Observation 3 breaks off. Let r be the number indicated in Observation 4. Let us define the desired polynomials in variables x,y,λ as follows

$$S = \sum_{k=1}^{r} A_k\lambda^k, \qquad T = \sum_{k=1}^{r} B_k\lambda^k. \tag{19}$$

Hence, for $r > 1$, by the definition of (A_1,B_1), we have

$$P_xT - P_yS = 1 + \sum_{k=1}^{r-1} (P_xB_{k+1} - P_yA_{k+1})\lambda^{k+1}. \tag{20}$$

On the other hand, in view of Observation 4, we obtain

$$\lambda(T_x - S_y) = \sum_{k=1}^{r} (B_{kx} - A_{ky})\lambda^{k+1} = \sum_{k=1}^{r-1} (B_{kx} - A_{ky})\lambda^{k+1}. \tag{21}$$

From (20), (21) and (8_{k+1}) we obtain (18). For $r = 1$, the left-hand side of (21) vanishes, therefore (19) and (8_1) immediately give (18). Thus, condition (iv) is fulfilled.

Now, we shall show the sufficiency of the condition. Let (iv) be fulfilled. Let us represent the polynomials S,T in the form

$$S = \sum_{k=1}^{s} A_k\lambda^k, \qquad T = \sum_{k=1}^{s} B_k\lambda^k \tag{22}$$

where $s = \max(\deg_\lambda S, \deg_\lambda T)$ and $A_k,B_k \in \mathbb{C}[x,y]$, $k = 1,2,\ldots,s$, denote some polynomials which, for the sake of simplicity and because of

in: Deformations of Mathematical Structures. (Łódź-Lublin 1985/1987), 133–140, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1989.

what follows, are denoted by the same symbols as in (7). Putting (22) into (18) and comparing the coeeficients at the corresponding powers of the variable λ, we state that the following conditions are satisfied:

$$P_x B_1 - P_y A_1 = 1, \qquad \deg_x A_1 \leq m-2, \qquad \deg_x B_1 \leq m-2, \tag{23_1}$$

$$P_x B_{k+1} - P_y A_{k+1} = B_{kx} - A_{ky}, \tag{23_{k+1}}$$

$$\deg_x A_k \leq m-2, \qquad \deg_x B_k \leq m-2, \qquad k = 1,\ldots,s-1,$$

and

$$B_{sx} - A_{sy} = 0. \tag{24}$$

From (23_1), (23_{k+1}) and Observation 3 it follows that the polynomials A_k, B_k, $k = 1,\ldots,s$, from (23_1) and (23_{k+1}) are identical with the corresponding polynomials from sequence (7). Furthermore, sequence (7), in view of (24), breaks off. So, according to Theorem 1, P is a Keller coordinate.

This ends the proof of the theorem.

REFERENCES

[1] S.S. Abhyankar, *Expansion technique in algebraic geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1977.

[2] H. Bass, E.H. Connel and D. Wright, 'The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse', *Bull. of Amer. Math. Soc.* 7, No. 2, (1982), pp.287-330.

[3] Z. Charzyński, J. Chądzyński and P. Skibiński, 'A contribution to Keller's Jacobian conjecture', Seminar on Deformations, Proceedings, Łódź-Warsaw 1982/84, *Lecture Notes in Math.* 1165, pp.36-51, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1985.

[4] Z. Charzyński and P. Skibiński, 'A criterion for explicit dependence of polynomials', *Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź* (to appear).

[5] O.H. Keller, 'Ganze Cremona-Transformationen', *Monats. Math. Physik* 47 (1939), pp.299-306.

[6] A. Magnus, 'Volume-preserving transformations in several complex variables', *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1954), pp.256-266.

[7] R.J. Walker, *Algebraic curves*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1978.

in: Deformations of Mathematical Structures. (Łódź-Lublin 1985/1987), 133–140, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1989.

PL ISSN 0459-6854

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ
1989 Vol. XXXIX, 4

Researches sur les déformations No. 58

Zygmunt Charzyński, Jacek Chądzyński
and Przemysław Skibiński

A CONTRIBUTION TO KELLER'S JACOBIAN CONJECTURE. III

Summary

In this paper, Whitney's operators $W_R : \mathbb{C}[x, y] \ni M \mapsto M_x R_y - M_y R_x \in \mathbb{C}[x, y]$ are investigated ($R \in \mathbb{C}[x, y]$ is a fixed polynomial) in connection with the Jacobian conjecture. It is proved that the Jacobian conjecture for a polynomial mapping $(P, Q) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ with the Jacobian equal to 1 is equivalent to the fact that, for almost all pairs (k, l), the following conditions hold:

$$(W_Q^k \circ W_P^l)(\Pi_x) = 0 \quad \text{and} \quad (W_Q^k \circ W_P^l)(\Pi_y) = 0.$$

Here W_R^j denotes the j-th iteration of the operator W_R and Π_x, $\Pi_y \in \mathbb{C}[x, y]$ - the natural projections onto the axes.

Introduction

This is a successive paper in the cycle of studies in the circle of Keller's Jacobian conjecture (cf. [2],[3]). We consider the connections between Whitney's operators (defined in section 1) and mappings with a constant Jacobian, in particular, Keller's mappings, i.e. polynomial mappings with the constant Jacobian equal to 1.

We characterize the commutativity of the composition of operators $W_P \circ W_Q = W_Q \circ W_P$ by the constancy of the Jacobian (theorem 1).

Whitney's operators connected with Keller's mappings are identified with partial derivatives of the composition of the argument with the locally inverse mapping (theorem 2).

We give a condition equivalent to Keller's Jacobian conjecture (cf. [1],[4]) in terms of the "breaking off" of some double sequences of iterations of Whitney's operators (theorem 3).

1. Whitney's operator

Let $R \in \mathbb{C}[x, y]$ be a polynomial fixed for a moment. Consider the linear operator

$$W_R : \mathbb{C}[x, y] \ni M \mapsto M_x R_y - M_y R_x \in \mathbb{C}[x, y]. \tag{1.1}$$

We shall call it Whitney's operator generated by the polynomial R (cf. [6]).

The composition of these operators will be denoted by "$\circ$". The iterations of the operator W_R will be written as the powers W_R^j, $j = 0, 1, \ldots,$ with the agreement that W_R^0 is the identity.

2. Commutativity of the composition of operators

Let $(P,Q) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ be an arbitrary polynomial mapping and let W_P, W_Q denote Whitney's operators of its coordinates.

THEOREM 1. *In order that the relation*

$$W_P \circ W_Q = W_Q \circ W_P \tag{2.1}$$

hold, it is necessary and sufficient that the mapping (P,Q) *have a constant Jacobian.*

Proof. Assume that the Jacobian $P_x Q_y - P_y Q_x$ is constant. Let us take an arbitrary polynomial $M \in \mathbb{C}[x, y]$. Then we easily check that

$$\begin{aligned} W_P(W_Q(M)) = {} & (-P_x Q_{yy} + P_y Q_{xy}) M_x + (P_x Q_{xy} - P_y Q_{xx}) M_y \\ & + P_y Q_y M_{xx} + P_x Q_x M_{yy} - (P_x Q_y + P_y Q_x) M_{xy} \end{aligned} \tag{2.2}$$

and

$$W_Q(W_P(M)) = (-Q_x P_{yy} + Q_y P_{xy}) M_x + (Q_x P_{xy} - Q_y P_{xx}) M_y$$

(2.3)

$$+ P_y Q_y M_{xx} + P_x Q_x M_{yy} - (P_x Q_y + P_y Q_x) M_{xy}.$$

Differentiating the Jacobian $P_x Q_y - P_y Q_x$ with respect to y and using the assumption, we obtain

$$P_{xy} Q_y + P_x Q_{yy} - P_{yy} Q_x - P_y Q_{xy} = 0,$$

which gives the equality of the coefficients at M_x in (2.2) and (2.3). On the other hand, differentiating the Jacobian $P_x Q_y - P_y Q_x$ with respect to x and using the assumption, we get

$$P_{xx} Q_y + P_x Q_{xy} - P_{xy} Q_x - P_y Q_{xx} = 0,$$

which gives the equality of the coefficients at M_y in (2.2) and (2.3). Hence $W_P(W_Q(M)) = W_Q(W_P(M))$ for an arbitrary $M \in \mathbb{C}[x, y]$.

Now, assume that (2.1) holds. Then, putting in (2.1) $M(x, y) = y$, we obtain

$$P_x Q_{xy} - P_y Q_{xx} = Q_x P_{xy} - Q_y P_{xx},$$

which gives that the derivative of the Jacobian $P_x Q_y - P_y Q_x$ with respect to x is equal to zero. Similarly, putting in (2.1) $M(x, y) = x$, we obtain

$$-P_x Q_{yy} + P_y Q_{xy} = -Q_x P_{yy} + Q_y P_{xy},$$

which gives that the derivative of the Jacobian $P_x Q_y - P_y Q_x$ with respect to y is equal to zero. Hence we get the constancy of the Jacobian.

This ends the proof.

3. Identification of operator and differentiation

Let now $(P,Q) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ be Keller's mapping, i.e. the polynomial mapping with the constant Jacobian equal to 1. Then this mapping, restricted to a sufficiently small neighbourhood ω of an arbitrarily

chosen point, is invertible there. Consequently, in the image σ of this neighbourhood there exists a holomorphic mapping (U, V) which is the inverse of (P, Q) in the set ω.

To an arbitrary polynomial $M \in \mathbb{C}[x, y]$ let us assign a holomorphic function $N : \sigma \to \mathbb{C}$ defined by the formula

$$N(z, w) = M(U(z, w), V(z, w)). \tag{3.1}$$

THEOREM 2. With the above notations and assumptions, the following relations hold:

$$\begin{aligned} W_P(M)(x, y) &= -N_w(z, w), \\ W_Q(M)(x, y) &= N_z(z, w), \end{aligned} \tag{3.2}$$

where $(x,y) \in \omega$, $z = P(x,y)$, $w = Q(x,y)$.

Proof. By the above assumptions and notations, we get

$$U(P(x,y), Q(x,y)) = x \quad \text{for} \quad (x,y) \in \omega \tag{3.3}$$

$$V(P(x,y), Q(x,y)) = y \quad \text{for} \quad (x,y) \in \omega \tag{3.4}$$

$$(U_z V_w - U_w V_z)(z, w) = 1 \quad \text{for} \quad (z,w) \in \sigma . \tag{3.5}$$

Differentiating (3.3) and (3.4) with respect to x, we obtain the system

$$\begin{aligned} U_z(P(x,y), Q(x,y))\, P_x(x,y) + U_w(P(x,y), Q(x,y))\, Q_x(x,y) &= 1, \\ V_z(P(x,y), Q(x,y))\, P_x(x,y) + V_w(P(x,y), Q(x,y))\, Q_x(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Hence, by (3.5), we obtain

$$\begin{aligned} P_x(x, y) &= V_w(P(x, y), Q(x, y)), \\ Q_x(x, y) &= -V_z(P(x, y), Q(x, y)) \quad \text{for} \quad (x,y) \in \omega. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Differentiating now (3.3) and (3.4) with respect to y, we obtain the system

$$U_z(P(x, y), Q(x, y))\, P_y(x, y) + U_w(P(x, y), Q(x, y))\, Q_y(x, y) = 0,$$

$$V_z(P(x,y),Q(x,y))\ P_y(x,y) + V_w(P(x,y),Q(x,y))\ Q_y(x,y) = 1.$$

Hence, by (3.5), we get

$$\begin{aligned} &P_y(x,y) = -U_w(P(x,y),Q(x,y)),\\ &Q_y(x,y) = U_z(P(x,y),Q(x,y)) \qquad \text{for } (x,y)\in\omega. \end{aligned} \tag{3.7}$$

On the other hand,

$$W_P(M)(x,y) = (M_x P_y - M_y P_x)(x,y).$$

Hence, by (3.6),(3.7) and (3.1), we obtain

$$W_P(M)(x,y) = -N_w(P(x,y),Q(x,y)) \quad \text{for } (x,y)\in\omega.$$

Analogously,

$$W_Q(M)(x,y) = (M_x Q_y - M_y Q_x)(x,y).$$

Hence, by (3.6), (3.7) and (3.1), we obtain

$$W_Q(M)(x,y) = N_z(P(x,y),Q(x,y)) \quad \text{for } (x,y)\in\omega.$$

This ends the proof.

Immediately from the previous theorem, by simple induction, we get

COROLLARY 1. With the same notations and assumptions as in theorem 2, the following relations hold:

$$(W_Q^k \circ W_P^l)(M(x,y)) = (-1)^l(\partial^{k+l} N/\partial z^k \partial w^l)(z,w),\ k,l = 0,1,\ldots, \tag{3.8}$$

where $(x,y)\in\omega, z = P(x,y), \quad w = Q(x,y)$.

By the commutativity (see theorem 1) and the associativity of the composition, one can arbitrarily compose and associate in groups Whitney' operators on the left-hand sides of (3.8). Besides, for

(x, y), we can take in (3.8) the point which was arbitrarily chosen at the beginning of our considerations. In this situation, the left-hand sides of (3.8) depend on the choice of the point (x, y) only, they do not depend on the choice of the neighbourhood ω and the corresponding inverse mapping because any two such mappings are identical in a neighbourhood of the image of the chosen point.

4. Condition of injectivity

THEOREM 3. In order that Keller's mapping $(P, Q) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ be injective, it is necessary and sufficient that the double sequences

$$(4.1) \qquad (W_Q^k \circ W_P^l)(\Pi_x), \quad (W_Q^k \circ W_P^l)(\Pi_y), \quad k, l = 0, 1, \ldots,$$

"break off", i.e. they should contain at most a finite number of terms different from zero. Here Π_x, $\Pi_y \in \mathbb{C}[x, y]$ are natural projections onto the axes, defined by the formulae $\Pi_x(x, y) = x$, $\Pi_y(x, y) = y$.

Proof. Let us assume that the mapping (P, Q) is injective. Then there exists its global inverse $(\tilde{U}, \tilde{V})$ which is a polynomial mapping (cf. [7] and [5]). Moreover, since (P, Q) is Keller's mapping, one can apply the notations and definitions from section 3. In this situation, there is of course, $(U, V) = (\tilde{U}, \tilde{V}) | \sigma$. Putting now in (3.1) $M = \Pi_x$ and $M = \Pi_y$, which implies $N = U$ and $N = V$, from (3.8) we obtain

$$\begin{aligned} ((W_Q^k \circ W_P^l)(\Pi_x))(x, y) &= ((-1)^l \partial^{k+l} U / \partial z^k \partial w^l)(z, w), \\ ((W_Q^k \circ W_P^l)(\Pi_y))(x, y) &= ((-1)^l \partial^{k+l} V / \partial z^k \partial w^l)(z, w), \end{aligned} \tag{4.2}$$

for $(x, y) \in \omega$, $z = P(x, y)$, $w = Q(x, y)$. Since (U, V) is a restriction of the polynomial mapping $(\tilde{U}, \tilde{V})$, therefore, for k or l sufficiently large, the partial derivatives on the right-hand sides of (4.2) vanish on σ identically and, consequently, the left-hand sides of (4.2) vanish on ω. Thus, sequences (4.2) "break off" on ω and, in consequence, by the theorem on identity, this fact takes place on $\mathbb{C}^2$.

Now, let us assume that sequences (4.1) "break off". Since

(P, Q) is Keller's mapping, one can again apply the notations and definitions from section 3. Then relations (4.2) hold. According to the assumption, the left-hand sides, thus the right-hand sides, of (4.2) vanish for sufficiently large k or l on ω. Hence we easily see that the partial derivatives on the right-hand sides vanish on σ. So, it is easily seen that there exists a polynomial mapping $(\tilde{U}, \tilde{V})$ such that $(\tilde{U}, \tilde{V}) \circ \sigma = (U, V)$. Then, since in the neighbourhood ω relations (3.3) and (3.4) hold, by the theorem on identity we have

$$\tilde{U}(P(x, y), Q(x, y)) = x, \qquad \tilde{V}(P(x, y), Q(x, y)) = y$$

for arbitrary $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Hence it follows directly that the mapping (P, Q) is injective.

This ends the proof.

Bibliography

[1] Bass, H., Connel, E. H., Wright, D.: The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse, Bull. Amer. Mat. Soc. 7 (1982), 287-330.

[2] Charzyński, Z., Chądzyński, J., Skibiński, P.: A contribution to Keller's Jacobian conjecture, Lecture Notes in Math. vol. 1165, pp. 36-51, Berlin--Heidelberg-New York-Tokyo: Springer 1985.

[3] ———: A contribution to Keller's Jacobian conjecture II, Proceedings of IX Conference on Analytic Functions, Lublin 1986, Reidel (in press).

[4] Keller, O. H.: Ganze Cremona-Transformationen, Monatshefte für Mathematik 47 (1939), 299-306.

[5] Łojasiewicz, S.: Remarque sur les biholomorphismes polynomiales, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 27 , (1979), 671.

[6] Whitney, H.: Elementary structure of real algebraic varieties, Ann. of Math. 66 (1957), 545-556.

[7] Winiarski, T.: Inverse of polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^n$, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 27 (1979), 673-674 .

Institute of Mathematics
University of Łódź
ul. S. Banacha 22
90-238 Łódź, POLAND

Presented by Zygmunt Charzyński and Jacek Chądzyński at the Session of the Mathematical-Physical Commission of the Łódź Society of Sciences and Arts on November 26, 1987

Cena zł 100,-

PRZYCZYNEK DO HIPOTEZY JAKOBIANOWEJ KELLERA III

Streszczenie

Rozważa się tu operatory Whitneya $W_R : \mathbb{C}[x, y] \ni M \mapsto M_x R_y - M_y R_x \in \mathbb{C}[x, y]$, gdzie $R \in \mathbb{C}[x, y]$ jest ustalonym wielomianem, w aspekcie hipotezy jakobianowej. Dowodzi się, że hipoteza Kellera dla odwzorowania wielomianowego $(P, Q): \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o jakobianie równym 1 jest równoważna z faktem, że dla prawie wszystkich par (k, l) zachodzą warunki

$$(W_Q^k \circ W_P^l)(\Pi_x) = 0 \qquad \text{i} \qquad (W_Q^k \circ W_P^l)(\Pi_y) = 0$$

tutaj W_R^j oznacza j-tą iterację operatora W_R, a Π_x, $\Pi_y \in \mathbb{C}[x, y]$ - naturalne rzutowania na osie.

ZPPŁ zam.81/89 n.350+30 D-9

PL ISSN 0459-6854

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ

1989 Vol. XXXIX, 11

Recherches sur les déformations No. 64

Zygmunt Charzyński, Jacek Chądzyński and Przemysław Skibiński

A CONTRIBUTION TO KELLER'S JACOBIAN CONJECTURE. IV

Summary

Let $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ be a dominating polynomial mapping and $\varkappa$ - a positive number. In the paper we investigate the following condition

$$\varkappa \int_{\mathbb{C}^n} \varphi = \int_{\mathbb{C}^n} \varphi \circ F \quad \text{for each function } \varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ integrable on } \mathbb{C}^n.$$

We show that this condition is a sufficient one for the constancy of the Jacobian of the mapping F. Moreover, by the assumption that the Jacobian of the mapping F is equal to 1 and $\varkappa = 1$, this is a necessary and sufficient condition for the injectivity of the mapping F.

Introduction

The article is a successive one in the series of papers [2],[3], [4] devoted to Keller's Jacobian conjecture. Here we use the theorem on the change of variables in an integral. We obtain an integral equality being a criterion for a dominating mapping to have a constant Jacobian (theorem 1). Next, we give an analogous integral equality being a necessary and sufficient condition for Keller's mapping (i.e. a polynomial mapping with the Jacobian equal to 1) to be an injective

mapping (theorem 2).

Integral conditions

In the sequel, $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ will denote a dominating mapping of degree ν and Ω - a non-empty Zariski open set in $\mathbb{C}^n$ such that any point $y \in \Omega$ is a regular value of F and $\#F^{-1}(y) = \nu$ (comp. [6], lemma 3.7 and proposition 3.17). By J we shall denote the Jacobian operator. By measure and integral on $\mathbb{C}^n$ (or on a subset of $\mathbb{C}^n$) we mean the Lebesgue measure and the integral on $\mathbb{R}^{2n}$ (or on a subset of $\mathbb{R}^{2n}$) with the usual identification of $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{R}^{2n}$.

THEOREM 1. If there exists a positive number $\varkappa$ such that, for each function $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ integrable on $\mathbb{C}^n$, the following equality holds:

$$(1) \qquad \varkappa \int_{\mathbb{C}^n} \varphi = \int_{\mathbb{C}^n} \varphi \circ F;$$

then the Jacobian $J(F)$ is constant.

Proof. Let $y_o \in \Omega$ and $F^{-1}(y_o) = \{x_{o1},\dots,x_{o\nu}\}$. Then $J(F)(x_{os}) \neq 0$ for $s = 1,\dots,\nu$.

Let $\omega \subset \Omega$ denote an open ball with centre at y_o and so small that the counter-image $F^{-1}(\omega)$ is the sum of disjoint neighbourhoods δ_s, $s = 1,\dots,\nu$, of the points x_{os}, such that restrictions $F_s = F|\delta_s$, $F_s : \delta_s \to \omega$ are biholomorphisms. Let us put $G_s = F_s^{-1}$, $J_s = J(F_s)$, $\psi_s = 1/|J_s \circ G_s|^2$, $s = 1,\dots,\nu$. Obviously, J_s is the restriction of $J(F)$ to δ_s.

Let us take an arbitrary point $y \in \omega$ and a closed ball $\tilde{\omega}$ with centre at this point and radius r so small that $\tilde{\omega} \subset \omega$. Then the counter-image $F^{-1}(\tilde{\omega})$ is the sum of disjoint sets $\tilde{\delta}_s = G_s(\tilde{\omega})$, $s = 1,\dots,\nu$. In this situation, according to the theorem on the change of variables in an integral and the relation between the Jacobian in real and complex domains (comp. [1], ch. II, th. 8), we have

$$(2) \qquad \int_{\tilde{\omega}} \psi_s = \int_{\tilde{\delta}_s} (\psi_s \circ F_s)\,|J_s|^2.$$

It is easy to see that $\psi \circ F_s = 1/|J_s|^2$. Hence and from (2) we get

$$\int_{\tilde{\omega}} \psi_s = \int_{\delta_s} 1. \tag{3}$$

Next, taking the function φ equal to 1 on $\tilde{\omega}$ and 0 outside $\tilde{\omega}$, we obtain from (1):

$$\varkappa \int_{\tilde{\omega}} 1 = \sum_{s=1}^{\nu} \int_{\tilde{\delta}_s} 1.$$

Hence, by virtue of (3) and by the definition of ψ_s, we get at last

$$\varkappa \int_{\tilde{\omega}} 1 = \int_{\tilde{\omega}} \sum_{s=1}^{\nu} \frac{1}{|J_s \circ G_s|^2}.$$

Now, dividing both sides by the measure of $\tilde{\omega}$ and passing to the limit with $r \to 0$, in view of the continuity of the integrand, we get

$$\varkappa = \sum_{s=1}^{\nu} \frac{1}{|(J_s \circ G_s)(y)|^2}.$$

From this and the arbitrariness of y we obtain that the right-hand side is constant on ω. This implies that the summands are constant on ω (comp. [7], ch. V, lemma 1) and, in consequence, the compositions $J_s \circ G_s$ are constant on ω, too. Since $G_s(\omega) = \delta_s$, therefore J_s is constant on δ_s. Hence, from the definition of J_s and the identity theorem we finally obtain the assertion of the theorem.

LEMMA. Let $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ be an integrable function on $\mathbb{C}^n$. Then

$$\nu \int_{\mathbb{C}^n} \varphi = \int_{\mathbb{C}^n} (\varphi \circ F)|J(F)|^2.$$

Proof. Let us first notice that the set Ω introduced at the beginning of this section is obviously open also in the classical topology; therefore the function φ is integrable on Ω. Thus applying the theorem on the change of variables (comp. [8], ch. IV, § 10, corollary 2 from th. 102 bis) and taking into account the relation between the Jacobian in real and complex domains, we obtain

$$\int_{F^{-1}(\Omega)} (\varphi \circ F)|J(F)|^2 = \nu \int_{\Omega} \varphi.$$

Since $F^{-1}(\Omega)$ and Ω are open sets in the Zariski topology in $\mathbb{C}^n$, the sets $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$ and $\mathbb{C}^n \setminus F^{-1}(\Omega)$ are sets of measure zero (comp. [5], ch. I, sec. A, corollary 10). So, we have

$$\int_{F^{-1}(\Omega)} (\varphi \circ F)|J(F)|^2 = \int_{\mathbb{C}^n} (\varphi \circ F)|J(F)|^2$$

and

$$\int_{\Omega} \varphi = \int_{\mathbb{C}^n} \varphi,$$

which gives the assertion of the lemma.

Let now F be a Keller mapping, i.e. $J(F) = 1$ everywhere.

THEOREM 2. The mapping F is injective if and only if, for each function $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ integrable on $\mathbb{C}^n$, the following equality holds:

$$\int_{\mathbb{C}^n} \varphi = \int_{\mathbb{C}^n} \varphi \circ F. \tag{4}$$

Proof. Obviously, F is a dominating mapping. By ν and Ω we shall denote the positive integer and the Zariski open set from the beginning of this section.

Necessity. From the fact that F is an injective and dominating mapping it follows that its degree is equal to 1. Moreover, $J(F) = 1$. Hence and from our lemma we get equality (4).

Sufficiency. Now, let us assume that condition (4) holds. Since F is a dominating mapping, therefore, by virtue of the lemma, we have

$$\int_{\mathbb{C}^n} \varphi \circ F = \nu \int_{\mathbb{C}^n} \varphi.$$

Hence and from (4) we get

$$\int_{\mathbb{C}^n} \varphi = \nu \int_{\mathbb{C}^n} \varphi.$$

Consequently, choosing the function φ so that its integral should not vanish, we obtain $\nu = 1$. Hence it follows that F is an injective mapping on $F^{-1}(\Omega)$. Moreover, it is injective on the whole space $\mathbb{C}^n$. Indeed, in the opposite case, there would exist $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^n$, $x_1 \neq x_2$, such that $F(x_1) = F(x_2) = y$. Then $y \notin \Omega$. Since F is an open mapping, there exists a neighbourhood ω of the point y, such that $\omega \subset \mathbb{C}^n \setminus \Omega$, which contradicts the fact that the set $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$ is nowhere dense (comp. [5], ch. I, sec. C, p. 19).

Bibliography

[1] Bochner, S., Martin, W.T.: Several Complex Variables, Princeton University Press, Princeton 1948

[2] Charzyński, Z., Chądzyński, J., Skibiński, P.: A contribution to Keller's Jacobian conjecture. Lecture Notes in Math. 1165, pp. 36-51, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer 1985

[3] ———: A contribution to Keller's Jacobian conjecture II, Proceedings of IX Conference on Analytic Functions, Lublin 1986, Reidel (in press)

[4] ———: A contribution to Keller's Jacobian conjecture III, Bull.Soc.Sci. Lettres Łódź, Sec. III (in press)

[5] Gunning, R.C., Rossi, H: Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New York 1965

[6] Mumford, D.: Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976

[7] Narasimhan, R.: Several Complex Variables, The University of Chicago Press, Chicago and London 1971

[8] Schwartz, L.: Cours d'Analyse I, Hermann, Paris 1967

Institute of Mathematics
University of Łódź
ul. S. Banacha 22
90-238 Łódź, POLAND

Presented by Zygmunt Charzyński and Jacek Chądzyński at the Session of the Mathematical-Physical Commission of the Łódź Society of Sciences and Arts on July 6, 1988.

PRZYCZYNEK DO HIPOTEZY JAKOBIANOWEJ KELLERA. IV

S t r e s z c z e n i e

W pracy rozważamy dla dowolnej funkcji φ całkowalnej na $\mathbb{C}^n$ równość całkową postaci

$$\varkappa \int_{\mathbb{C}^n} \varphi = \int_{\mathbb{C}^n} \varphi \circ F,$$

gdzie $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ jest danym odwzorowaniem dominującym i $\varkappa$ - stałą dodatnią. Pokazujemy, że równość ta jest warunkiem wystarczającym dla stałości jakobianu ododwzorowania F. Co więcej, przy założeniu, że jakobian odwzorowania F jest równy 1 i $\varkappa = 1$, jest ona warunkiem koniecznym i dostatecznym różnowartościowości odwzorowania F.

ZPPŁ zam. 35/90 n. 350+10

PL ISSN 0459-6854

BULLETIN
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ
1990 Vol. XL. 11
Recherches sur les déformations No. 81
pp. 5-13

Dedicated to Professor Tadeusz Tietz on his 70th birthday

Zygmunt Charzyński and Przemysław Skibiński

EQUATION OF THE SET OF CRITICAL POINTS OF A POLYNOMIAL MAPPING IN TWO VARIABLES

Summary

In the paper, for a polynomial mapping in two variables, a characterization of the set of critical points, i.e. the image of zeros of the Jacobian, and the equation describing this set are given.

Introduction

In the investigations of some polynomial mappings, two sets appear naturally in some situations: the first one - of singular points (i.e. zeros of the Jacobian) and the second one - of critical points (i.e. the images of these zeros).

Here, under some assumptions, we obtain the equation of the set of critical points for normal mappings with monic coordinates. It can be effectively determined by means of the resultants of the coordinates, their discriminants and the greatest common divisor of the latter (see theorem).

1. Terms, notations, auxiliary information

A polynomial $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ of degree k in two variables x,y is said to be monic with respect to x if it contains the summand ax^k, $a \neq 0$ (cf. [8], p. 25). Analogously we define the monicity with respect to y.

A polynomial mapping $(A,B) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ is said to be normal if the homogeneous parts of the greatest degrees of its coordinates have the trivial common zeros only.

Let $(G,H) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ be an arbitrary polynomial mapping with the coordinates of degrees m,n, respectively, and simultaneously of positive degrees with respect to each variable.

Let J denote the Jacobian of the mapping (G,H). The zeros of the Jacobian J are said to be singular points of the mapping.

The images of the singular points under the given mapping are said to be critical points of the mapping.

For the variables x,y,z,w let us form the resultant $R(x,z,w)$ of the polynomials $G(x,y) - z$ and $H(x,y) - w$ by the elimination of y; obviously, it is a polynomial in x,z,w.

If the coordinates of the mapping are monic with respect to y and the mapping is normal, then the degree of the resultant with respect to x is equal to mn. Moreover, the coefficient at x^{mn} is a non-zero constant.

Indeed, from the normality assumption it easily follows that, for the arguments tending to infinity, the values of the mapping tend to infinity too, and, in consequence, if the values of the mapping tend to a finite limit, then the arguments should be bounded. Therefore the mapping is proper (cf. [5], p. 536). Further, from [2], p. 82 we readily deduce that, for an arbitrary

point (z,w) lying in $\mathbb{C}^2$, there exist only a finite number of common zeros (x,y), lying in $\mathbb{C}^2$, of polynomials $G(x,y) - z$ and $H(x,y) - w$ - the counter image of the point (z,w) under the proper mapping (G,H). In addition, there are no common zeros of $G(x,y) - z$ and $H(x,y) - w$ at infinity (cf. [7], p. 44), which follows immediately from the assumption of the normality of (G,H). Thus, according to Bezout's theorem (cf. [7], p. 111), the number of common zeros $G(x,y) - z$ and $H(x,y) - w$, their multiplicities been taken into account (cf. [7], p. 54), is equal to mn. Next, the assumption on the monicity of the coordinates G,H with respect to y implies the analogous monicity of the polynomials $G(x,y) - z$ and $H(x,y) - w$. Hence, we easily deduce, that for z,w fixed for a moment, these polynomials have no zeros at infinity on the y-axis (cf. [7], p. 44). In this situation, according to [7], p. 111, for an arbitrary abscissa $x = a$, the multiplicity of a as the root of the equation $R(x,z,w) = 0$ is equal to the number of common zeros (with their multiplicities) of the differences $G(x,y) - z$ and $H(x,y) - w$, lying on the line $x = a$. Summing, on one hand, the multiplicities of these roots and, on the other hand, the numbers of the common zeros for all abscissae a, we obtain that the number of roots of the resultant is equal to the number of all common zeros of the above-mentioned differences. Since the last number, according to the preceding remark, equals mn, the resultant $R(x,z,w)$ has mn roots, too. Hence, the degree of the resultant equals mn. So, the coefficient at x^{mn} is different from zero. Since it is a polynomial in z,w, we obtain the announced constancy of the coefficient.

If the degree of the resultant $R(x,z,w)$ with respect to x is greater than 1, then, as is readily seen, there exists a discriminant $\rho(z,w)$ of the resultant (cf. [3], p. 213). Of course, it is a polynomial in z,w.

Under analogous assumptions, for the variables x,y,z,w, we can form the analogous resultant $S(y,z,w)$ of the polynomials $G(x,y) - z$ and $H(x,y) - w$ by the elimination of x, having the analogous properties. If the degree of the resultant $S(y,z,w)$ with respect to y is greater than 1, then, as is readily seen, there exists a discriminant $\sigma(z,w)$ of the resultant. Of course, it is a polynomial in z,w.

In this situation, if at least one of these discriminants does not vanish identically, one can determine the greatest common divisor of the discriminants $\rho(z,w)$ and $\sigma(z,w)$ (cf. [3], p. 189); we shall call it the characteristic divisor corresponding to the mapping.

Two points of the space $\mathbb{C}^2$, having the same first (second) coordinate, are said to be normal with respect to this coordinate.

The point (z,w) is said to be exceptional for the mapping (G,H) if there exist four points: two distinct points normal with respect to the first coordinate and two distinct ones normal with respect to the second coordinate such that (z,w) is a simultaneous image under the mapping of these four points.

2. Characterization of the set of critical points

Let $(G,H) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ be, as before, a polynomial mapping with the coordinates of degrees $m \geq 1$ and $n \geq 1$, respectively.

Let us adopt for the mapping all the definitions and notations given above.

THEOREM. Let us assume that the mapping (G,H) satisfies the following conditions: 1^o each coordinate of the mapping is monic with respect to each variable, 2^o the mapping is normal, 3^o $mn \geq 2$, 4^o the set of exceptional points for the mapping is finite.

Then:

(*) the resultants and the discriminants, described above, exist,

(**) the characteristic divisor is determined and the set of critical points of the mapping is identical with the set of zeros of the divisor.

P r o o f. Ad (*). Assumptions 1^o and 2^o imply, as we showed in the previous section, the existence of the resultants $R(x,z,w)$ and $S(y,z,w)$ of degree mn. Moreover, the coefficients at x^{mn} in the first resultant and at y^{mn} in the second one are non-zero constants. Thus, from assumption 3^o we deduce that the degrees of these resultants are greater than 1 and, in consequence, the discriminants $\rho(z,w)$ and $\sigma(z,w)$ exist.

Ad (**). Let us consider the case when at least one of these discriminants does not vanish identically.

Then the characteristic divisor is determined. In this situation let us notice that from 2^{o} it easily follows that the Jacobian J does not vanish identically. Next, we observe that the sets of singular and critical points have no isolated points. Indeed, for the former set this readily follows from the Weierstrass Preparation Theorem (cf. [4], p. 167). Next, let us take an arbitrary critical point (z,w) being the image of a singular point (x,y). Suppose that (z,w) is an isolated point of the set of critical points. so, there exists a neighbourhood V of this point, containing no other critical points. From the continuity of the mapping it follows that there exists a neighbourhood U of the point (x,y) such that its image is contained in V. Since, in view of the fact shown above, the point (x,y) is not an isolated point of the set of singular points, in the neighbourhood U there exist infinitely many distinct singular points such that their images are critical points lying in V. Due to the choice of V, all these critical points coincide in (z,w). Thus, the point (z,w) would have the counter image consisting of infinitely many points, contrary to the fact stated in the preceding section.

From the above it follows, in particular, that there are infinitely many both singular and critical points.

Now, we shall show that the set of critical points is included in the set of zeros of the characteristic divisor.

Indeed, let us take an arbitrary critical point (z^{o},w^{o}). So, we have

$$(1) \qquad z^{o} = G(x^{o},y^{o}), \qquad w^{o} = H(x^{o},y^{o}),$$

where (x^{o},y^{o}) is a singular point. Simultaneously, we have

$$(2) \qquad R(x^{o},z^{o},w^{o}) = 0.$$

Since (x^{o},y^{o}) is a singular point, i.e. $J(x^{o},y^{o}) = 0$, it is the common zero of the differences $G(x,y) - z^{o}$, $H(x,y) - w^{o}$ of multiplicity at least two (cf. [7], p. 114 and 54). Hence, arguing in the same manner as in the previous section, we obtain that x^{o} is also a root of the corresponding resultant of multiplicity at least two (cf. [7], p. 111). Thus

(3) $R_x(x^o,z^o,w^o) = 0.$

From (2) and (3) and the remark on the non-vanishing of the coefficient at x^{mn} in the polynomial $R(x,z,w)$ as well as from assumption 3^o we get

$$\rho(z^o,w^o) = 0.$$

Following the analogous pattern for the resultant $S(y,z,w)$ we obtain

$$\sigma(z^o,w^o) = 0.$$

So, the critical points are common zeros of the discriminants $\rho(z,w)$ and $\sigma(z,w)$. Since, as we have noticed earlier, there are infinitely many critical points, the polynomials $\rho(z,w)$ and $\sigma(z,w)$ have a non-trivial common divisor (cf. [7], p. 59). Next, dividing the polynomials by the characteristic divisor, we deduce, using [3], p. 191 and [7], p. 111, that there exist at most a finite number of common zeros of $\rho(z,w)$ and $\sigma(z,w)$ not being zeros of this divisor. This means that all common zeros of the discriminants are, except at most a finite number, zeros of the divisor. In particular, the same is valid for critical points. Therefore, by the fact mentioned earlier that the set of critical points does not contain isolated points and by the continuity of the divisor, it follows that the divisor vanishes on the whole set of critical points.

This ends the proof of the announced inclusion.

Next, we shall show that the set of zeros of the characteristic divisor is included in the set of critical points.

Indeed, let us take an arbitrary zero (z^o,w^o) of the characteristic divisor, not being the exceptional point for the mapping. So, in particular,

(4) $\rho(z^o,w^o) = 0$

and

(5) $\sigma(z^o,w^o) = 0.$

Then, by (4), there exists a point $\tilde{x}$ such that

(6) $\quad R(\tilde{x},z^o,w^o) = 0, \quad R_x(\tilde{x},z^o,w^o) = 0$

and, by (5), there exists a point $\tilde{y}$ such that

(7) $\quad S(\tilde{y},z^o,w^o) = 0, \quad S_y(\tilde{y},z^o,w^o) = 0$

(cf. [3], pp. 212 and 206).

By (6), according to [7], p. 111: either (i) there exist two distinct arguments $\tilde{y}_1$ and $\tilde{y}_2$ such that $G(\tilde{x},\tilde{y}_1) - z^o = 0$, $H(\tilde{x},\tilde{y}_1) - w^o = 0$ and $G(\tilde{x},\tilde{y}_2) - z^o = 0$, $H(\tilde{x},\tilde{y}_2) - w^o = 0$ or (ii) there exists an argument $\tilde{y}$ such that $(\tilde{x},\tilde{y})$ is a common zero of $G(x,y) - z^o$ and $H(x,y) - w^o$ of multiplicity at least two, which easily implies that $J(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$ (cf. [7], pp. 114 and 53, 54). At the same time, from (7) analogously: either (j) there exist two distinct arguments $\tilde{x}_1$ and $\tilde{x}_2$ such that $G(\tilde{x}_1,\tilde{y}) = z^o$, $H(\tilde{x}_1,\tilde{y}) = w^o$ and $G(\tilde{x}_2,\tilde{y}) = z^o$, $H(\tilde{x}_2,\tilde{y}) = w^o$ or (jj) there exists an argument $\tilde{x}$ such that $(\tilde{x},\tilde{y})$ is a common zero of $G(x,y) - z^o$ and $H(x,y) - w^o$ of multiplicity at least two, which implies that $J(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$. The subcase (i) and (j) cannot hold because it simply means that (z^o,w^o) is an exceptional point, contrary to the assumption. So, there remain three subcases (i) and (jj) or (ii) and (j) or (ii) and (jj). Thus (ii) or (jj) always holds. From this it follows that (z^o,w^o) is either the image of the singular point $(\tilde{x},\tilde{y})$ or the image of the singular point $(\tilde{x},\tilde{y})$. In consequence, (z^o,w^o) is a critical point. Now, let us take an arbitrary zero (z^*,w^*) of the characteristic divisor. From the Weierstrass Preparation Theorem (cf. [4], p. 167) it follows that the set of these zeros has no isolated points. Therefore, from assumption 4^o we deduce that there exists a sequence of zeros (z_n,w_n), $n = 1,2,\ldots$ of this divisor, different from (z^*,w^*), not being exceptional points, tending to (z^*,w^*). According to the fact shown above, there exists a sequence of singular points (x_n,y_n) such that $G(x_n,y_n) = z_n$, $H(x_n,y_n) = w_n$. Moreover, as we observed in the previous section, the sequence of arguments (x_n,y_n) is

bounded. Choosing, if needed, a subsequence, we obtain that the sequence (x_n,y_n) tends to a singular point (x^*,y^*) and, by the continuity, there are $G(x^*,y^*) = z^*$, $H(x^*,y^*) = w^*$. Thus, (z^*,w^*) is a critical point. This ends the proof of the announced inclusion.

Puting together the inclusions obtained we get the announced identity in the case under the consideration.

Let us consider the case when both the discriminants $\rho(z,w)$ and $\sigma(z,w)$ vanish identically. Then, taking an arbitrary point $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ not being the exceptional one and arguing in the same manner as in the second part of the proof given above, we conclude that (z,w) is a critical point of the mapping. Thus, all points $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ with the exception of a finite number of them are critical ones. In consequence, the set of critical points has an infinite measure.

On the other hand, let identify the space $\mathbb{C}^2$ with the space $\mathbb{R}^4$ and the mapping (G,H) in $\mathbb{C}^2$ with the corresponding real mapping in $\mathbb{R}^4$. Then, due to the relation between the Jacobians of these mappings (cf. [1], Chap. II, th. 8), the sets of zeros of these Jacobians are identical and the same is valid for the sets of critical points.

Consequently, according to Sard´s theorem (cf. [6], p. 47, Lemma 3.2) the set of critical points of these mappings has measure zero which contradicts the previous statement.

This ends the proof.

Bibliograhy

[1] Bochner, S., Martin, W.T.,: Several Complex Variables, Princeton, 1948.
[2] Hervé, M.: Several Complex Variables. Local Theory, Oxford University Press, 1963.
[3] Perron, O.: Algebra I, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1932.
[4] Saks, S., Zygmund, A.: Analytic Functions, PWN, Warszawa 1952.
[5] Schwartz, L.: Cours d´Analyse I, Hermann, Paris 1967.
[6] Sternberg, S.: Lectures on Differential Geometry, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.Y. 1964.

[7] Walker, R.J.: Algebraic Curves, Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1978.

[8] Zariski, O., Samuel, P.: Commutative Algebra I, Springer Verlag, New York--Berlin-Heidelberg-Tokyo 1986.

Institue of Mathematics
University of Łódź
ul. S. Banacha 22
90-238 Łódź, POLAND

Presented by Zygmunt Charzyński at the Session of the Mathematical-Physical Commission of Łódź Society of Sciences and Arts on May 9, 1990

RÓWNANIE ZBIORU PUNKTÓW KRYTYCZNYCH ODWZOROWANIA WIELOMIANOWEGO DWU ZMIENNYCH

S t r e s z c z e n i e

W pracy dla odwzorowania wielomianowego dwu zmiennych podano charakterystykę zbioru punktów krytycznych, tj. obrazu zer Jakobianu, oraz równanie opisujące ten zbiór.

PSEUDOORTHOGONALITY OF POWERS OF THE COORDINATES OF A HOLOMORPHIC MAPPING IN TWO VARIABLES WITH THE CONSTANT JACOBIAN

Zygmunt Charzyński and Przemysław Skibiński

Summary. In the paper the equivalence of the constancy of Jacobian of holomorphic mapping in two variables with the pseudoorthogonality of powers of its coordinates is showed. There is also obtained a characterization of holomorphic mapping with the constant Jacobian by one coordinate and the restriction of the other coordinate of the mapping to one of the axes.

Introduction. This note is devoted to holomorphic mappings with the constant Jacobian. In section 1 there is given an auxiliary information. In section 2 it is showed that the constancy of the Jacobian is equivalent to the integral pseudoorthogonality of powers of the coordinates of the mapping (theorem 1). Also the formulae for the coefficients of the inverse mapping are derived (theorem 2). In section 3 more general expressions than those representing the mentioned coefficients are investigated (lemmas 1, 2 and theorem 3). In section 4 a simplification of the formula from the previous section is obtained, namely, some integrals of functions of two variables are reduced to some integrals of functions of one variable, in particular, those representing the coefficients of the inverse mapping (theorem 4). These facts are applicated in the next section. Here a characterization of the mappings under consideration by one of its coordinates and by the values of the second one on one of the axes is obtained (theorem 5).

1. Terms, notations and auxiliary information. 1. Let $0 < \alpha < 1$ be a number fixed for the sequel and $r > 0$ a number which will be later precised. Let further

$$(1.1) \qquad E_r = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : 0 < |x| < r, \quad 0 < |y| < r, \quad \alpha < |\frac{x}{y}| < \frac{1}{\alpha}\}.$$

The set (1.1), as one can easily see, is a Reinhardt domain (comp. [2], p. 299).

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

Let be given the pair of plain circles

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} C &: x(s) = \xi e^{is}, \quad 0 \le s \le 2\pi, \quad \xi > 0, \\ D &: y(t) = \eta e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad \eta > 0. \end{aligned}$$

This pair, treated as a mapping in two variables s,t, and its range is called the bicircle with the radii ξ,η. We shall assume that $(\xi,\eta) \in E_r$ i.e. the bicircle (1.2) is lying in E_r.

2. Let (P,Q) be a holomorphic mapping in a neighbourhood of the point $(0,0)$ in the variables x,y with the coordinates of the form

$$(1.3)\qquad P(x,y) = x + P_2(x,y) + \ldots, \qquad Q(x,y) = y + Q_2(x,y) + \ldots$$

where P_j and Q_j denote homogeneous polynomials of the degree j.

It is easily seen that from form (1.3) of the mapping (P,Q) it follows that the Jacobian of this mapping at the point $(0,0)$ is equal to 1. Thus, in a neighbourhood of the point $(0,0)$ of the variables x,y, the mapping is invertible. Denote by (U,V) the holomorphic inverse mapping. Then in a neighbourhood of the point $(0,0)$ of the variables z,w the coordinates of this mapping expand in the series

$$(1.4)\qquad U(z,w) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} z^k w^l, \qquad V(z,w) = \sum_{k,l=0}^{\infty} d_{kl} z^k w^l.$$

Simultaneously, in a certain neighbourhood of the point $(0,0)$ in the variables x,y, the values of $(P(x,y),Q(x,y))$ are contained in the lately mentioned neighbourhood of the variables z,w.

Of course, in this situation, there is

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} x &= \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} (P(x,y))^k (Q(x,y))^l, \\ y &= \sum_{k,l=0}^{\infty} d_{kl} (P(x,y))^k (Q(x,y))^l. \end{aligned}$$

Now, let us notice that for r sufficiently small the set (1.1) is contained in the neighbourhood of the defintion of (P,Q).

Similarly, for sufficiently small r the following inequalities hold

$$(1.6)\qquad \left| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{P_j(x,y)}{x} \right| < 1, \qquad \left| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{Q_j(x,y)}{y} \right| < 1;$$

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

at the same time we have

$$\frac{1}{P(x,y)} = \frac{1}{x(1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{P_j(x,y)}{x})} = \frac{1}{x} \sum_{g=0}^{\infty} (- \sum_{j=2}^{\infty} \frac{P_j(x,y)}{x})^g$$

(1.7)

$$\frac{1}{Q(x,y)} = \frac{1}{y(1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{Q_j(x,y)}{y})} = \frac{1}{y} \sum_{g=0}^{\infty} (- \sum_{j=2}^{\infty} \frac{Q_j(x,y)}{y})^g$$

and, in consequence, the functions $1/P(x,y)$ and $1/Q(x,y)$ are holomorphic in E_r and expand there in Laurent series centred at $(0,0)$ (comp. [2], p. 301). Moreover, it is easily seen from (1.7) that in the first of the series in (1.7) the variable y appears in non-negative powers only and in the second series in (1.7) the variable x appears in non-negative powers only; in both series there appear the terms of degree not smaller than -1 only.

3. Simultaneously in (1.1) there exist some single-valued branches of logarithms

$$\log \frac{P(x,y)}{x} = \sum_{g=1}^{\infty} \frac{(-1)^{g-1}}{g} (\sum_{j=2}^{\infty} \frac{P_j(x,y)}{x})^g,$$

(1.8)

$$\log \frac{Q(x,y)}{y} = \sum_{g=1}^{\infty} \frac{(-1)^{g-1}}{g} (\sum_{j=2}^{\infty} \frac{Q_j(x,y)}{y})^g.$$

Similarly, as above, the branches (1.8) expand in Laurent series; in the first one the variable y appears in non-negative powers only and in the second one the variable x appears in non-negative powers only; in both series there appear the terms of degree not smaller than 1 only.

We easily check that the functions

$$(\log \xi + is) + \log \frac{P(\xi e^{is}, \eta e^{it})}{\xi e^{it}},$$

$$(\log \eta + it) + \log \frac{Q(\xi e^{is}, \eta e^{it})}{\eta e^{it}},$$

(1.9)

$$0 \leq s \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

are some branches of the logarithm $P(x,y)$ and $Q(x,y)$ "along" bicircle (1.2). We shall denote them by $\log P(x,y)$ and $\log Q(x,y)$.

We see that if one of the variables x and y is fixed, then $\log P(x,y)$ is a branch of the logarithm of the function $P(x,y)$ along the circle C or D and its increment along this circle is equal to $2\pi i$ or 0. Analogously for the branch of logarithm of the function $Q(x,y)$.

4. By W_T we shall denote the linear Whitney operator (comp. [1]) assigning to any holomorphic function S in a neighbourhood of the point $(0,0)$ the expression $S_xT_y - S_yT_x$. Here T is a holomorphic function in this neighbourhood, fixed for a moment. The iterations of Whitney's operator we shall denote as powers. In particular, for the operator W_Q where Q is the coordinate of the considered mapping (P,Q) we shall apply the following notations

$$W_Q^j(S) = S_j, \qquad j = 0,1,\ldots, \quad S_o = S. \tag{1.10}$$

In the sequel as r we choose an arbitrary fixed number so small that in the set E_r relation (1.6) and representations (1.5), (1.7), (1.8) and the corresponding Laurent expansions hold as well as the set E_r is contained in all neighbourhoods of the variables x,y mentioned in the points 2, 3 and 4.

2. Pseudoorthogonality. Let us adopt the constructions, notations and agreements introduced in the previous section.

THEOREM 1. For the functions (1.3) the following Jacobian condition

$$P_xQ_y - P_yQ_x = 1 \tag{2.1}$$

holds if and only if for every integers k and l the following pseudoorthogonality relations hold

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_C\Big(\int_D \frac{1}{(P(x,y))^{k+1}(Q(x,y))^{l+1}}\,dy\Big)dx = \begin{cases} 0 & \text{for } (k,l)\neq(0,0), \\ 1 & \text{for } (k,l)=(0,0). \end{cases} \tag{2.2}$$

P r o o f. First, let us notice that the following equalities hold

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_C\Big(\int_D \frac{P_x(x,y)Q_y(x,y) - P_y(x,y)Q_x(x,y)}{(P(x,y))^{k+1}(Q(x,y))^{l+1}}\,dy\Big)dx \tag{2.3}$$

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } (k,l) \neq (0,0), \\ 1 & \text{for } (k,l) = (0,0). \end{cases}$$

Indeed, assume that $(k,l) \neq (0,0)$. Consider the case $k \neq 0$. Passing in the first of the integrals in (2.3) to common integrals with respect to the parameters s and t by the substitutions (1.2) and applying the integration by parts we have

$$(2.4) \qquad \int_D \Big(\int_C \frac{P_x(x,y)}{(P(x,y))^{k+1}} \frac{Q_y(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}} dx \Big) dy$$

$$= \frac{1}{k} \int_D \Big(\int_C \frac{1}{(P(x,y))^{k}} \Big(\frac{Q_{yx}(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}} - \frac{(l+1)Q_x(x,y)Q_y(x,y)}{(Q(x,y))^{l+2}} \Big) dx \Big) dy$$

and

$$(2.5) \qquad \int_C \Big(\int_D \frac{P_y(x,y)}{(P(x,y))^{k+1}} \frac{Q_x(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}} dy \Big) dx$$

$$= \frac{1}{k} \int_C \Big(\int_D \frac{1}{(P(x,y))^{k}} \Big(\frac{Q_{xy}(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}} - \frac{(l+1)Q_x(x,y)Q_y(x,y)}{(Q(x,y))^{l+2}} \Big) dy \Big) dx.$$

Subtracting (2.4) and (2.5) and changing the order of the integration in (2.4) we obtain the first equality of (2.3).

In the case $l \neq 0$, we proceed analogously.

Assume that $(k,l) = (0,0)$. Applying again the integration by parts and taking into account the remark concerning the existence of a branch of logarithm (comp. section 1.3), we have

$$(2.6) \qquad \int_D \Big(\int_C \frac{P_x(x,y)}{P(x,y)} \frac{Q_y(x,y)}{Q(x,y)} dx \Big) dy = \int_D \Big(\log P(\xi e^{i2\pi}, y) - \log P(\xi e^{i0}, y) \Big) \frac{Q_y(\xi,y)}{Q(\xi,y)} dy$$

$$- \int_D \Big(\int_C \log P(x,y) \frac{Q_{yx}(x,y)Q(x,y) - Q_y(x,y)Q_x(x,y)}{(Q(x,y))^2} dx \Big) dy,$$

$$(2.7) \qquad \int_C \Big(\int_D \frac{P_y(x,y)}{P(x,y)} \frac{Q_x(x,y)}{Q(x,y)} dy \Big) dx = \int_C \Big(\log P(x,\eta e^{i2\pi}) - \log P(x,\eta e^{i0}) \Big) \frac{Q_x(x,\eta)}{Q(x,\eta)} dx$$

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

$$- \int_C \Big(\int_D \log P(x,y) \, \frac{Q_{xy}(x,y)Q(x,y) - Q_x(x,y)Q_y(x,y)}{(Q(x,y))^2} \, dy \Big) dx.$$

At the same time we have

$$(2.8) \qquad \int_D \frac{Q_y(\xi,y)}{Q(\xi,y)} \, dy = \log Q(\xi,\eta e^{i2\pi}) - \log Q(\xi,\eta e^{i0}).$$

Subtracting (2.6) and (2.7), changing the order of integration in (2.6) and taking into account (2.8) as well as remarks concerning the increment of the logarithm of the function P or Q (comp. section 1.3), we obtain the second equality from (2.3).

The necessity of relation (2.2) is immediately obtained, substituting, according to (2.1), the numerator of the integrand in (2.3) by 1.

The sufficiency follows from the following observations.

First, let us notice that according to the choice of r (comp. section 1.4) in E_r the representations (1.5) hold. Consequently, the Jacobian of the mapping can also be represented in the form of the following series

$$(2.9) \qquad P_x(x,y)Q_y(x,y) - P_y(x,y)Q_x(x,y) = \sum_{h,j=0}^{\infty} e_{hj} (P(x,y))^h (Q(x,y))^j.$$

Next, by the assumption that the bicircle (1.2) is contained in E_r and by (2.9) we get

$$(2.10) \qquad \int_C \Big(\int_D \frac{P_x(x,y)Q_y(x,y) - P_y(x,y)Q_x(x,y)}{(P(x,y))^{k+1}(Q(x,y))^{l+1}} \, dy \Big) dx$$

$$= \sum_{h,j=0}^{\infty} e_{hj} \int_C \Big(\int_D \frac{1}{(P(x,y))^{k+1-h}(Q(x,y))^{l+1-j}} \, dy \Big) dx.$$

Since, according to (2.2), the integrals on the right-hand side of (2.10) vanish for all $(h,j) \neq (k,l)$, then by (2.10) and (2.3) we have

$$e_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{for } (k,l) \neq (0,0), \\ 1 & \text{for } (k,l) = (0,0). \end{cases}$$

The above and (2.9) give (2.1).

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

THEOREM 2. For the mapping (P,Q) fulfilling condition (2.1), the coefficients c_{kl}, d_{kl} (comp. (1.4)) of the inverse mapping (U,V) are given by the formulae

$$c_{kl} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C \left(\int_D \frac{x}{(P(x,y))^{k+1}(Q(x,y))^{l+1}} dy \right) dx,$$

(2.11)

$$d_{kl} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C \left(\int_D \frac{y}{(P(x,y))^{k+1}(Q(x,y))^{l+1}} dy \right) dx.$$

P r o o f. From the definition of (U,V) (comp. section (1.2) and from (1.5) we obtain

$$x = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl}(P(x,y))^k (Q(x,y))^l,$$

$$y = \sum_{k,l=0}^{\infty} d_{kl}(P(x,y))^k (Q(x,y))^l,$$

whence, following the analogous pattern as in the proof of the preceding theorem and by this theorem, we obtain (2.11).

3. Generalization and reduction of degree. Let us adopt the constructions, notations and agreements introduced in section 1.

Here we shall assume that the functions (1.3) fulfil condition (2.1).

LEMMA 1. Let k be a positive integer, l - an integer, M - a holomorphic function in a neighbourhood of the point (0,0) containing E_r. Then

$$(3.1) \quad \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C \left(\int_D \frac{M(x,y)}{(P(x,y))^{k+1}(Q(x,y))^{l+1}} dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{1}{k!} \int_C \left(\int_D \frac{1}{P(x,y)} \frac{M_k(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}} dy \right) dx.$$

P r o o f. Applying the integration by parts we have

$$(3.2) \quad \int_D \left(\int_C \frac{P_x(x,y)}{(P(x,y))^{k+1}} \frac{Q_y(x,y)M(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}} dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{k} \int_D \left(\int_C \frac{1}{(P(x,y))^k} \left(\frac{Q_{yx}(x,y)M(x,y) + Q_y(x,y)M_x(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}} \right.\right.$$

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

$$- \frac{(l+1)Q_y(x,y)Q_x(x,y)M(x,y)}{(Q(x,y))^{l+2}})dx)dy,$$

$$(3.3) \qquad \int_C \left(\int_D \frac{P_y(x,y)}{(P(x,y))^{k+1}} \frac{Q_x(x,y)M(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}} dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{k} \int_D \left(\int_C \frac{1}{(P(x,y))^k} \left(\frac{Q_{xy}(x,y)M(x,y) + Q_x(x,y)M_y(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(l+1)Q_x(x,y)Q_y(x,y)M(x,y)}{(Q(x,y))^{l+2}} \right) dx \right) dy.$$

Now, let us denote by $I_{kl}(M)$ the integral on the left-hand side of (3.1). Subtracting (3.2) and (3.3) and taking account of (2.1) and (1.10), we get

$$I_{kl}(M_o) = \frac{-1}{k} \int_C \left(\int_D \frac{1}{(P(x,y))^k} \frac{M_1(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}} dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{k} I_{k-1\ 1}(M_1).$$

Hence, by induction, we obtain (3.1).

LEMMA 2. Let l be an integer, N - a holomorphic function in a neighbourhood of the point $(0,0)$ containing E_r. Then for every positive integer ν the following equality holds

$$(3.4) \qquad \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C \left(\int_D \frac{1}{P(x,y)} \frac{N(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}} dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{\nu} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!} \int_D (P(\xi,y))^{h-1}$$

$$\times \frac{Q_y(\xi,y)N_{h-1}(\xi,y)}{(Q(\xi,y))^{l+1}} dy + \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{(-1)^{\nu}}{(\nu-1)!} \int_C \left(\int_D (P(x,y))^{\nu-1} \right.$$

$$\left. \times [\log P(x,y) - (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu-1})] \frac{N_\nu(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}} dy \right) dx$$

where we assume that $0! = 1$ and for $\nu = 1$ the expression in the square brackets on the right-hand side of (3.4) reduces to the first summand (for N_ν compare also sec. 1.4 (1.10)).

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192,
Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

P r o o f. We shall do it by induction

1° Integrating by parts and taking into account the remarks concerning the branch of logarithm (comp. section 1.3), we obtain

$$(3.5)\qquad \int_D \Big(\int_C \frac{P_x(x,y)}{P(x,y)}\,\frac{Q_y(x,y)N(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}}\,dx\Big)dy$$

$$= \int_D (\log P(\xi e^{i2\pi},y) - \log P(\xi e^{i0},y))\,\frac{Q_y(\xi,y)N(\xi,y)}{(Q(\xi,y))^{l+1}}\,dy$$

$$- \int_D \Big(\int_C (\log P(x,y))\Big(\frac{Q_{yx}(x,y)N(x,y) + Q_y(x,y)N_x(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}}$$

$$- \frac{(l+1)Q_y(x,y)Q_x(x,y)N(x,y)}{(Q(x,y))^{l+2}}\,dx\Big)dy,$$

$$(3.6)\qquad \int_C \Big(\int_D \frac{P_y(x,y)}{P(x,y)}\,\frac{Q_x(x,y)N(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}}\,dx\Big)dy$$

$$= \int_C (\log P(x,\eta e^{i2\pi}) - \log P(x,\eta e^{i0}))\,\frac{Q_x(x,\eta)N(x,\eta)}{(Q(x,\eta))^{l+1}}\,dx$$

$$- \int_C \Big(\int_D (\log P(x,y))\Big(\frac{Q_{xy}(x,y)N(x,y) + Q_x(x,y)N_y(x,y)}{(Q(x,y))^{l+2}}$$

$$- \frac{(l+1)Q_x(x,y)Q_y(x,y)N(x,y)}{(Q(x,y))^{l+2}}\,dy\Big)dx.$$

Subtracting (3.5) and (3.6) and taking into account (2.1) and the remarks concerning the increment of the branch of the logarithm of P (comp. section 1.3) as well as (1.10), we get

$$(3.7)\qquad \int_C \Big(\int_D \frac{1}{P(x,y)}\,\frac{N(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}}\,dy\Big)dx = 2\pi i \int_D \frac{Q_y(\xi,y)N(\xi,y)}{(Q(\xi,y))^{l+1}}\,dy$$

$$- \int_C \Big(\int_D \log P(x,y)\,\frac{N_1(x,y)}{(Q(x,y))^{l+2}}\,dy\Big)dx,$$

which gives (3.4) for $\nu = 1$.

2° Assume that (3.4) hold for ν. Applying the integration by parts to the second integral on the right-hand side of (3.4), we obtain

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

$$(3.8)\quad \int_D \Big(\int_C (P(x,y))^{\nu-1} [\log P(x,y) - (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{\nu-1})] P_x(x,y) \times \frac{Q_y(x,y) N_\nu(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}}\, dy \Big) dx = \int_D [\tfrac{1}{\nu}(P(\xi e^{i2\pi},y))^\nu \log P(\xi e^{i2\pi},y) - \tfrac{1}{\nu^2}(P(\xi e^{i2\pi},y))^\nu - (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{\nu-1})\tfrac{1}{\nu}(P(\xi e^{i2\pi},y))^\nu - \tfrac{1}{\nu}(P(\xi e^{i0},y)^\nu \log P(\xi e^{i0},y) + \tfrac{1}{\nu^2}(P(\xi e^{i0},y))^\nu + (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{\nu-1})\tfrac{1}{\nu}(P(\xi e^{i0},y))^\nu] \times \frac{Q_y(\xi,y) N_\nu(\xi,y)}{(Q(\xi,y))^{l+1}}\, dy - \int_D \Big(\int_C [\tfrac{1}{\nu}(P(x,y))^\nu \log P(x,y) - \tfrac{1}{\nu^2}(P(x,y))^\nu - (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{\nu-1})\tfrac{1}{\nu}(P(x,y))^\nu] \times \Big(\frac{Q_{yx}(x,y) N_\nu(x,y) + Q_y(x,y) N_{\nu x}(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}} - \frac{(l+1) Q_y(x,y) Q_x(x,y) N_\nu(x,y)}{(Q(x,y))^{l+2}} \Big) dx \Big) dy,$$

$$(3.9)\quad \int_C \Big(\int_D (P(x,y))^{\nu-1} [\log P(x,y) - (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{\nu-1}] \times P_y(x,y) \frac{Q_x(x,y) N_\nu(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}}\, dy \Big) dx = \int_C [\tfrac{1}{\nu}(P(x,\eta e^{i2\pi}))^\nu \log P(x,\eta e^{i2\pi}) - \tfrac{1}{\nu^2}(P(x,\eta e^{i2\pi}))^\nu - (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{\nu-1})\tfrac{1}{\nu}(P(x,\eta e^{i2\pi}))^\nu - \tfrac{1}{\nu}(P(x,\eta e^{i0}))^\nu \log P(x,\nu e^{i0})) + \tfrac{1}{\nu^2}(P(x,\eta e^{i0}))^\nu + (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{\nu-1})\tfrac{1}{\nu}(P(x,\eta e^{i0}))^\nu] \frac{Q_y(x,\eta) N_\nu(x,\eta)}{(Q(x,\eta))^{l+1}}\, dx - \int_D \Big(\int_C [\tfrac{1}{\nu}(P(x,y))^\nu \log P(x,y) - \tfrac{1}{\nu^2}(P(x,y))^\nu - (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{\nu-1})\tfrac{1}{\nu}(P(x,y))^\nu]$$

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192,
Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

$$\times \left(\frac{Q_{xy}(x,y)N_\nu(x,y) + Q_x(x,y)N_{\nu y}(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}}\right.$$

$$\left. - \frac{(l+1)Q_x(x,y)Q_y(x,y)N_\nu(x,y)}{(Q(x,y))^{l+2}}\right)dx)dy.$$

Subtracting (3.8) and (3.9), taking into account (2.1) and remarks on the increment of a branch of logarithm (comp. section 1.3) as well as (1.10), we obtain

$$(3.10)\quad \int_C \left(\int_D (P(x,y))^{\nu-1}\left[\log P(x,y) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu-1}\right)\right]\right.$$

$$\left. \times \frac{N_\nu(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}}\,dy\right)dx = \frac{2\pi i}{\nu}\int_D (P(\xi,y))^\nu \frac{Q_y(\xi,y)N_\nu(\xi,y)}{(Q(\xi,y))^{l+1}}\,dy$$

$$- \int_C \left(\int_D \frac{1}{\nu}(P(x,y))^\nu \left(\log P(x,y) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu}\right)\right)\right.$$

$$\left. \times \frac{N_{\nu+1}(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}}\,dy\right)dx.$$

Putting (3.10) into (3.4) we obtain (3.4) for $\nu + 1$.

The induction ends the proof.

THEOREM 3. Let k be a non-negative integer, l - an integer, ν - a positive integer, M - a holomorphic function in a neighbourhood of the point $(0,0)$ containing E_r. Then

$$(3.11)\quad \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_C \left(\int_D \frac{M(x,y)}{(P(x,y))^{k+1}(Q(x,y))^{l+1}}\,dy\right)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{k!}\sum_{h=1}^{\nu}\frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!}\int_D (P(\xi,y))^{h-1}$$

$$\times \frac{Q_y(\xi,y)M_{k+h-1}(\xi,y)}{(Q(\xi,y))^{l+1}}\,dy$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)^2}\,\frac{(-1)^\nu}{k!}\int_C \left(\int_D \frac{1}{(\nu-1)!}(P(x,y))^{\nu-1}\right.$$

$$\left. \times \left(\log P(x,y) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu-1}\right)\right)\frac{M_{k+\nu}(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}}\,dy\right)dx.$$

---

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

P r o o f. Putting in (3.4) $N = M$, we obtain (3.11) for $k = 0$, and putting in (3.4) $N = M_k$, by (3.1), we obtain (3.11) for $k = 1, 2, \ldots$.

4. Reduction to single integrals. Let us adopt the constructions, notations and agreements introduced in section 1.

THEOREM 4. Let k be a non-negative integer, l - an integer, ν - a positive integer such that $\nu > l$, M - a holomorphic function in a neighbourhood of the point $(0,0)$ containing E_r. Then

$$(4.1)\qquad \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_o}\Big(\int_{D_o}\frac{M(x,y)}{(P(x,y))^{k+1}(Q(x,y))^{l+1}}\,dy\Big)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{k!}\sum_{h=1}^{\nu}\frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!}\int_{D_o}(P(0,y))^{h-1}\times\frac{Q_y(0,y)M_{k+h-1}(0,y)}{(Q(0,y))^{l+1}}\,dy$$

where (C_o,D_o) is an arbitrary bicircle of the type (1.2) with the radii ξ_o,η_o, lying in E_r.

P r o o f. Let us consider besides the circles appearing in (4.1) also the circles appearing in (3.11).

We shall base our reasoning on the four mentioned below observations:

(i) The term on the left-hand side of (4.1) is identical with the term on the left-hand side of (3.11). Indeed, according to the facts given in section 1.2 the integrand is the sum of a Laurent series in x,y. In this situation the considered integrals are reduced to the integrals of terms containing x and y in the powers -1 and their values are, as one can see, equal. This gives the announcement.

(ii) The term on the right-hand side of (4.1) is identical with the term

$$(4.1')\qquad \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{k!}\sum_{h=1}^{\nu}\frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!}\int_{D}(P(0,y))^{h-1}\times\frac{Q_y(0,y)M_{k+h-1}(0,y)}{(Q(0,y))^{l+1}}\,dy$$

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192,
Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

arising from (4.1) by substitution of the circle D_o by the circle D. Indeed, it follows immediately from the fact that with r sufficiently small the rational integrand in (4.1) and (4.1) does not have any poles in the closed ring bounded by the circles D_o and D.

(iii) The difference between the first term on the right-hand side of (3.11) and term (4.1´) tends to zero as ξ,η tend to 0,0. Indeed, let us represent the investigated difference in the form

$$(4.2)\qquad \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{k!}\int_D \sum_{h=1}^{\nu}\frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!}\,[(P(\xi,y))^{h-1}\times\frac{Q_y(\xi,y)M_{k+h-1}(\xi,y)}{(Q(\xi,y))^{l+1}}-(P(0,y))^{h-1}\times\frac{Q_y(0,y)M_{k+h-1}(0,y)}{(Q(0,y))^{l+1}}]dy.$$

According to the facts given in section 1.2 we easily see that the expressions in the square brackets in (4.2) are the sums of some Laurent series in ξ,y with the terms divisible by ξ so, containing the positive powers of ξ. In this situation the considered integral reduces to the sum of integrals of the terms of the series which have the degree -1 with respect to y, i.e. to the sum of a power series with respect to ξ with the positive powers of ξ. Of course, this sum tends to 0 as ξ tends to 0. This gives the announcement.

(iv) The second term on the right-hand side of (3.11) tends to 0 as ξ,η tend to 0,0. Indeed, according to the facts given in section 1.2 and 1.3 we see that the integrand can be represented in the form

$$(4.3)\qquad \frac{1}{(\nu-1)!}[(P(x,y))^{\nu-1}\,\frac{M_{k+\nu}(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}}\,(\log\frac{P(x,y)}{x}-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu-1}))]+\frac{1}{(\nu-1)!}\,[(P(x,y))^{\nu-1}\,\frac{M_{k+\nu}(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}}]\{\log\xi+is\}.$$

One can readily see that by the assumption $\nu > 1$ the expressions in the square brackets in (4.3) are the sums of some Laurent series in x,y with the terms of degree not smaller than -1. In this situation the integral of the first summand from (4.3) reduces, of course, to

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

zero. On the other hand, the integral of the second summand from (4.3) with respect to y reduces to the sum of a power series with respect to x multiplied by the factor in the brace. Hence it follows immediately that the considered integral is of the type $0(\xi \log \xi)$ and tends to 0 as ξ,η tend to $0,0$. This gives the announcement.

Passing to the demonstration of the assertion of the theorem, we see that according to observations (i), (ii), equality (3.11) can be represented in the form

$$
\begin{aligned}
(4.4)\quad & \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_o} \Big(\int_{D_o} \frac{M(x,y)}{(P(x,y))^{k+1}(Q(x,y))^{l+1}}\, dy\Big)dx \\
& = \frac{1}{2\pi i} \quad \frac{1}{k!} \quad \sum_{h=1}^{\nu} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!} \int_{D_o} (P(0,y))^{h-1} \\
& \times \frac{Q_y(0,y)M_{k+h-1}(0,y)}{(Q(0,y))^{l+1}}\, dy + \frac{1}{2\pi i} \quad \frac{1}{k!} \quad \Big[\sum_{h=1}^{\nu} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!} \\
& \times \int_{D} (P(\xi,y))^{h-1} \frac{Q_y(\xi,y)M_{k+h-1}(\xi,y)}{(Q(\xi,y))^{l+1}}\, dy \\
& - \sum_{h=1}^{\nu} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!} \int_{D} (P(0,y))^{h-1} \frac{Q_y(0,y)M_{k+h-1}(0,y)}{(Q(0,y))^{l+1}}\, dy\Big] \\
& + \frac{1}{(2\pi i)^2} \quad \frac{(-1)^{\nu}}{k!} \quad \int_{C}\Big(\int_{D} \frac{1}{(\nu-1)!} (P(x,y))^{\nu-1} \\
& \times \Big(\log P(x,y) - \Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\nu-1}\Big)\Big) \frac{M_{k+\nu}(x,y)}{(Q(x,y))^{l+1}}\, dy\Big)dx.
\end{aligned}
$$

Passing to the limit on both sides of (4.4) with ξ,η tending to $0,0$ we obtain, according to observations (iii) and (iv), the required equality (4.1).

5. Characterization of a mapping by values of a coordinate on axis. Let us adopt constructions, notations and agreements introduced in section 1.

THEOREM 5. The mapping of form (1.3) with the Jacobian equal to 1 is uniquely characterized by the second coordinate Q and the first one P restricted to the axis of ordinates.

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

P r o o f. Let us notice that with the specification $M(x,y) = x$ or $M(x,y) = y$ the left-hand side of (4.1), according to theorem 2, represents the coefficient c_{kl} or d_{kl} of the inverse mapping of (P,Q).

On the other hand, the right-hand side of (4.1) depends on the values of the first coordinate P on the axis of ordinates and, by the definition of M_{k+h-1} (comp. (1.10)) - depends on the second coordinate Q.

Thus, the inverse mapping of (P,Q) is uniquely characterized by the coordinate Q and by the coordinate P restricted to the axis of ordinates. This gives immediately the assertion of the theorem.

The theorems 1 and 2 can be generalized for the mappings of several variables. It will be published in Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź, Serie: Recherches sur les déformations (the address of the editor: Narutowicza 56, 90-136 Łódź, Poland).

Bibliography

[1] Charzyński Z., Chądzyński J., Skibiński P., A contribution to Keller´s Jacobian conjecture III, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź, **39** (58) (1989), 1-8.

[2] Шабат Б.В. Бьедение в комплексный анализ, Москва 1969.

Institute of Mathematics
University of Łódź
ul. S. Banacha 22
90-238 Łódź, Poland

in: Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 178–192, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992.

PL ISSN 0459-6854

BULLETIN

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ

1992 Vol. XLII, 24

Recherches sur les déformations Vol. XIV, 134

pp. 39 - 49

Zygmunt Charzyński and Przemysław Skibiński

PSEUDOORTHOGONALITY OF POWERS OF THE COORDINATES OF A HOLOMORPHIC MAPPING IN SEVERAL VARIABLES WITH THE CONSTANT JACOBIAN

Summary

In the paper, the equivalence of the constancy of the Jacobian of a holomorphic mapping with the pseudoorthogonality of powers of its coordinates is shown.

Introduction

This paper gives a generalization to the case of several variables of some results from [1] obtained for two variables. In section 1 we give some auxiliary information. In section 2 we show that the constancy of the Jacobian is equivalent to an integral pseudoorthogonality of powers of the coordinates for holomorphic mappings in several variables (theorem 1). Also, the formulae for the coefficients of the inverse mapping are derived (theorem 2). The crucial step in these investigations is the fact that the corresponding integrals remain constant under the homotopic change of the integrands (basic lemma).

1. Terms, notations and auxiliary information

Let $0 < \alpha < 1$ be a number fixed for the sequel and $r > 0$ a number which will be defined later. Let further

$$(1.1) \qquad E_r = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n : 0 < |x_j| < r,\ \alpha < \left|\frac{x_j}{x_k}\right| < \frac{1}{\alpha},\ j,k = 1,\dots,n\}.$$

Let n plane circles

$$C_j = \xi_j e^{it_j}, \quad 0 \le t_j \le 2\pi, \quad \xi_j > 0, \quad j = 1,\dots,n, \tag{1.2}$$

be given. We shall assume that $(\xi_1,\dots,\xi_n) \in E_r$, i.e. the Cartesian product of circles (1.2) is lying in E_r.

Let $(P_1,\dots,P_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ be a holomorphic mapping in a neighbourhood of the point $(0,\dots,0) \in \mathbb{C}^n$ in the variables $x_1,\dots,x_n$ with the coordinates of the form

$$P_j(x_1,\dots,x_n) = x_j + P_{j2}(x_1,\dots,x_n) + \dots, \quad j = 1,\dots,n, \tag{1.3}$$

where P_{jk}, $k = 2,3,\dots$, denote homogeneous polynomials of degree k.

By J we denote the Jacobian of $(P_1,\dots,P_n)$.

Let us consider the homotopy $(P_1(x_1,\dots,x_n,s),\dots,P_n(x_1,\dots,x_n,s))$ defined by the formulae

$$P_j(x_1,\dots,x_n,s) = \begin{cases} \frac{1}{s} P_j(x_1 s,\dots,x_n s) & \text{for } s \in (0,1] \\ x_j & \text{for } s = 0,\ j = 1,\dots,n \end{cases} \tag{1.4}$$

which, for $s = 0$, is the identity mapping and, for $s = 1$, it is the mapping $(P_1,\dots,P_n)$ under consideration.

Denote by J the Jacobian of the mapping $(P_1,\dots,P_n)$ with respect to the variables $x_1,\dots,x_n$ and by D_{kj} - the minors of its elements. Then, by (1.3), we have

$$J(x_1,\dots,x_n,0) = 1, \tag{1.5}$$

$$J(x_1,\dots,x_n,1) = J(x_1,\dots,x_n). \tag{1.6}$$

It is easily seen that (1.3) implies $J(0,\dots,0) = 1$. Thus, in a neighbourhood of the point $(0,\dots,0) \in \mathbb{C}^n$ in the variables $x_1,\dots,x_n$, the mapping $(P_1,\dots,P_n)$ is invertible. Denote by $(V_1,\dots,V_n)$ the holomorphic inverse mapping. Then, in a neighbourhood of the point $(0,\dots,0) \in \mathbb{C}^n$ in the variables $z_1,\dots,z_n$, the coordinates of this mapping expand in the series

$$(1.7)\qquad V_j(z_1,\dots,z_n)=\sum_{l_1,\dots,l_n=0}^{\infty} C^{(j)}_{l_1\dots l_n} z_1^{l_1}\cdot\dots\cdot z_n^{l_n},$$

$$j=1,\dots,n.$$

Simultaneously, in a certain neighbourhood of the point $(0,\dots,0)\in\mathbb{C}^n$ in the variables $x_1,\dots,x_n$, the values $(P_1(x_1,\dots,x_n),\dots,P_n(x_1,\dots,x_n))$ are contained in the above-mentioned neighbourhood of the variables $z_1,\dots,z_n$. In this situation, we have

$$(1.8)\qquad x_j=\sum_{l_1,\dots,l_n=0}^{\infty} C^{(j)}_{l_1\dots l_n}(P_1(x_1,\dots,x_n))^{l_1}\cdot\dots$$

$$\cdot(P_n(x_1,\dots,x_n))^{l_n},\quad j=1,\dots,n.$$

Now, let us notice that, for a sufficiently small r, set (1.1) is contained in the neighbourhood where the mapping $(P_1,\dots,P_n)$ was defined and, simultaneously, by (1.3), the following inequalities hold:

$$(1.9)\qquad \Big|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{P_{jk}(x_1,\dots,x_n)}{x_j}\Big|<1,\quad j=1,\dots,n,\ (x_1,\dots,x_n)\in E_r.$$

Since, for $s\in(0,1]$, there is $(x_1s,\dots,x_ns)\in E_r$, therefore, by (1.9), we also have

$$(1.10)\qquad \Big|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{P_{jk}(x_1s,\dots,x_ns)}{x_js}\Big|<1,\quad (x_1,\dots,x_n)\in E_r.$$

In this situation

$$(1.11)\qquad \frac{1}{P_j(x_1,\dots,x_n,s)}=\frac{1}{x_j\Big(1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{P_{jk}(x_1s,\dots,x_ns)}{x_js}\Big)}$$

$$=\frac{1}{x_j}\sum_{g=0}^{\infty}\Big(-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{P_{jk}(x_1s,\dots,x_ns)}{x_js}\Big)^g$$

and, in consequence, the functions $1/P_j(x_1,\dots,x_n,s)$ are holomor-

phic in E_r.

In the sequel, as r we choose an arbitrary fixed number so small that the set E_r is contained in all neighbourhoods in the variables $x_1,\dots,x_n$ mentioned in this section.

For a given continuous function $F(x_1,\dots,x_n)$ on $C_1 \times \dots \times C_n$ (comp. (1.2)), by the integral

$$\int_{C_n} \dots \int_{C_1} F(x_1,\dots,x_n)\,dx_1 \dots dx_n \tag{1.12}$$

we shall understand the common integral

$$\int_0^{2\pi}(\dots(\int_0^{2\pi} F(\xi_1 e^{it_1},\dots,\xi_n e^{it_n})\, i^n \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n e^{i(t_1+\dots+t_n)}\,dt_1)\dots)dt_n. \tag{1.13}$$

2. Pseudoorthogonality

Let us adopt the constructions, notations and agreements introduced in the previous section.

BASIC LEMMA (A. Kozłowski). For arbitrary non-negative integers $k_1,\dots,k_n$, the integral

$$\int_{C_n} \dots \int_{C_1} \frac{J(x_1,\dots,x_n,s)}{(P_1(x_1,\dots,x_n,s)^{k_1+1} \cdot \dots \cdot P_n(x_1,\dots,x_n,s))^{k_n+1}}\,dx_1\dots dx_n \tag{2.1}$$

is constant, independent of the parameter s (comp. [3], part III, theorem 3).

Proof. (Following Kozłowski). We begin with some auxiliary formulae. Let us put

$$T(\eta_1,\dots,\eta_n) = \frac{1}{\eta_1^{k_1+1} \cdot \dots \cdot \eta_n^{k_n+1}}, \tag{2.2}$$

$$U(x_1,\dots,x_n,s) = T(P_1(x_1,\dots,x_n,s),\dots,P_n(x_1,\dots,x_n,s)).$$

It is easy to see that the functions UJ and $\partial(UJ)/\partial s$ are continuous in $E_r \times [0,1]$.

In this set the following formula also holds:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_j} (-1)^{k+j} D_{kj} \frac{\partial P_k}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial s} J. \tag{2.3}$$

Indeed, by (2.2), we have

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_j} (-1)^{k+j} D_{kj} \frac{\partial P_k}{\partial s} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \eta_l} \frac{\partial P_k}{\partial s} (-1)^{k+j} D_{kj} \frac{\partial P_l}{\partial x_j} . \end{aligned} \tag{2.4}$$

It is not difficult to notice that the sums

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} D_{kj} \frac{\partial P_l}{\partial x_j} , \qquad l = 1,\ldots,n,$$

are equal to zero for $l \neq k$ and are different from zero and equal to J for $l = k$.

Consequently, the left-hand side of (2.4) is equal to $(\partial U/\partial s)J$, which gives (2.3).

Now, let us denote integral (2.1) by $\gamma(s)$. We shall show that the derivative $\gamma'(s)$ is equal to zero. By the continuity of UJ and $\partial(UJ)/\partial s$ in the set $E_r \times [0,1]$, we have

$$\begin{aligned} \gamma'(s) = &\int_{C_n} \ldots \int_{C_1} \left(\frac{\partial U}{\partial s} J\right)(x_1,\ldots,x_n, s)\, dx_1 \ldots dx_n \\ &+ \int_{C_n} \ldots \int_{C_1} \left(U \frac{\partial J}{\partial s}\right)(x_1,\ldots,x_n, s)\, dx_1 \ldots dx_n . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Let us notice that, according to the previous notations (comp. sec. 1) and to the formula for the derivative of a determinant we get

$$\frac{\partial J}{\partial s} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} D_{kj} \frac{\partial^2 P_k}{\partial x_j \partial s} .$$

In this situation we have

$$\int_{C_n} \dots \int_{C_1} \left(U \frac{\partial J}{\partial s}\right)(x_1,\dots,x_n,s)\,dx_1 \dots dx_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{C_n} \dots \int_{C_1} (-1)^{k+j} D_{kj} \left(U \frac{\partial^2 P_k}{\partial x_j\, \partial s}\right)(x_1,\dots,x_n,s)\,dx_1 \dots dx_n. \tag{2.6}$$

Next, passing to common integrals (comp. (1.12), (1.13)) and using Fubini's theorem (comp. [5], p. 77), we can write the integral appearing on the right-hand side of (2.6) in the form

$$\int_{C_n} \dots \int_{C_{j+1}} \left(\int_{C_j} \left(\int_{C_{j-1}} \dots \int_{C_1} ((-1)^{k+j} D_{kj} U \frac{\partial^2 P_k}{\partial x_j\, \partial s})(x_1,..,x_n,s)\,dx_1..dx_{j-1}\right)dx_j\right)dx_{j+1}..dx_n, \tag{2.7}$$

with the suitable modifications for $j = 1$ and $j = n$.
Simultaneously, applying integration by parts, we obtain

$$\int_{C_j} \left(\int_{C_{j-1}} \dots \int_{C_1} ((-1)^{k+j} D_{kj} U \frac{\partial^2 P_k}{\partial x_j\, \partial s})(x_1,\dots,x_n,s)\,dx_1 \dots dx_{j-1}\right)dx_j \tag{2.8}$$

$$= \int_{C_{j-1}} \dots \int_{C_1} ((-1)^{k+j} D_{kj} U \frac{\partial P_k}{\partial s})(x_1,\dots,x_n,s)\,dx_1 \dots dx_{j-1}) \Big|_{\xi_j e^{i0}}^{\xi_j e^{i2\pi}}$$

$$- \int_{C_j} \left(\int_{C_{j-1}} \dots \int_{C_1} ((-1)^{k+j} \frac{\partial U}{\partial x_j} D_{kj} \frac{\partial P_k}{\partial s}\right)(x_1,\dots,x_n,s)\,dx_1 \dots dx_{j-1})dx_j$$

$$- \int_{C_j} \left(\int_{C_{j-1}} \dots \int_{C_1} ((-1)^{k+j} U \frac{\partial D_{kj}}{\partial x_j} \frac{\partial P_k}{\partial s}\right)(x_1,\dots,x_n,s)\,dx_1 \dots dx_{j-1})dx_j.$$

The first term on the right-hand side of expression (2.8) is, of course, equal to zero. Thus, according to (2.3), (2.7) and (2.8), the sum on the right-hand side of (2.6) is equal to

$$(2.9)\quad -\int_{C_n}\cdots\int_{C_1}\left(\frac{\partial U}{\partial s}J\right)(x_1,\ldots,x_n,s)\,dx_1\ldots dx_n$$

$$-\int_{C_n}\cdots\int_{C_1}\left(U\cdot\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}\frac{\partial D_{kj}}{\partial x_j}\frac{\partial P_k}{\partial s}\right)(x_1,\ldots,x_n,s)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Now, diffrentiating the minors from (2.9), we have

$$(2.10)\quad \frac{\partial D_{kj}}{\partial x_j}=\sum_{h=1}^{j-1}\begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial P_1}{\partial x_{h-1}}\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_j\partial x_h}\frac{\partial P_1}{\partial x_{h+1}}\cdots\frac{\partial P_1}{\partial x_{j-1}}\frac{\partial P_1}{\partial x_{j+1}}\cdots\frac{\partial P_1}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial P_{k-1}}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial P_{k-1}}{\partial x_{h-1}}\frac{\partial^2 P_{k-1}}{\partial x_j\partial x_h}\frac{\partial P_{k-1}}{\partial x_{h+1}}\cdots\frac{\partial P_{k-1}}{\partial x_{j-1}}\frac{\partial P_{k-1}}{\partial x_{j+1}}\cdots\frac{\partial P_{k-1}}{\partial x_n}\\ \frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_{h-1}}\frac{\partial^2 P_{k+1}}{\partial x_j\partial x_h}\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_{h+1}}\cdots\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_{j-1}}\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_{j+1}}\cdots\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial P_n}{\partial x_{h-1}}\frac{\partial^2 P_n}{\partial x_j\partial x_h}\frac{\partial P_n}{\partial x_{h+1}}\cdots\frac{\partial P_n}{\partial x_{j-1}}\frac{\partial P_n}{\partial x_{j+1}}\cdots\frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$+\sum_{h=j+1}^{n}\begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial P_1}{\partial x_{j-1}}\frac{\partial P_j}{\partial x_{j+1}}\cdots\frac{\partial P_1}{\partial x_{h-1}}\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_j\partial x_h}\frac{\partial P_1}{\partial x_{h+1}}\cdots\frac{\partial P_1}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial P_{k-1}}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial P_{k-1}}{\partial x_{j-1}}\frac{\partial P_{k-1}}{\partial x_{j+1}}\cdots\frac{\partial P_{k-1}}{\partial x_{h-1}}\frac{\partial^2 P_{k-1}}{\partial x_j\partial x_h}\frac{\partial P_{k-1}}{\partial x_{h+1}}\cdots\frac{\partial P_{k-1}}{\partial x_n}\\ \frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_{j-1}}\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_{j+1}}\cdots\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_{h-1}}\frac{\partial^2 P_{k+1}}{\partial x_j\partial x_h}\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_{h+1}}\cdots\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial P_n}{\partial x_{j-1}}\frac{\partial P_n}{\partial x_{j+1}}\cdots\frac{\partial P_n}{\partial x_{h-1}}\frac{\partial^2 P_n}{\partial x_j\partial x_h}\frac{\partial P_n}{\partial x_{h+1}}\cdots\frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

with suitable modifications for $h = 1$, $h = j - 1$, $h = j + 1$, $h = n$.

Now, returning to (2.9) let us put

$$A_{hj} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial P_1}{\partial x_{h-1}} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_j \partial x_h} \frac{\partial P_1}{\partial x_{h+1}} \cdots \frac{\partial P_1}{\partial x_{j-1}} \frac{\partial P_1}{\partial s} \frac{\partial P_1}{\partial x_{j+1}} \cdots \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial P_n}{\partial x_{h-1}} \frac{\partial^2 P_n}{\partial x_j \partial x_h} \frac{\partial P_n}{\partial x_{h+1}} \cdots \frac{\partial P_n}{\partial x_{j-1}} \frac{\partial P_n}{\partial s} \frac{\partial P_n}{\partial x_{j+1}} \cdots \frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

for $1 < j \leq n$, $h < j$, with suitable modifications for $h = 1$ or $h = j - 1$, and

$$A_{hj} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial P_1}{\partial x_{j-1}} \frac{\partial P_1}{\partial s} \frac{\partial P_1}{\partial x_{j+1}} \cdots \frac{\partial P_1}{\partial x_{h-1}} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_j \partial x_h} \frac{\partial P_1}{\partial x_{h+1}} \cdots \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial P_n}{\partial x_{j-1}} \frac{\partial P_n}{\partial s} \frac{\partial P_n}{\partial x_{j+1}} \cdots \frac{\partial P_n}{\partial x_{h-1}} \frac{\partial^2 P_n}{\partial x_j \partial x_h} \frac{\partial P_n}{\partial x_{h+1}} \cdots \frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

for $1 \leq j < n$, $h > j$, with suitable modifications for $h = j + 1$ and $h = n$; from the theorem on mixed partial derivatives it easily follows that

$$A_{jh} = -A_{hj}, \tag{2.11}$$

because the corresponding determinants differ in the order of two columns only. In this situation, due to the Laplace representation, the second integrand in expression (2.9) can be written as follows:

$$\sum_{j=2}^{n} \sum_{h=1}^{j-1} A_{hj} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{h=j+1}^{n} A_{hj}. \tag{2.12}$$

At the same time, the second sum in (2.12), after changing the order of summation and denomination of the indices, can be represented in the form

$$\sum_{j=2}^{n} \sum_{h=1}^{j-1} A_{jh}.$$

Hence, due to (2.11), it follows that the second integral in (2.9) is equal to zero. This, according to (2.5), gives $\gamma'(s) = 0$, which completes the proof.

THEOREM 1. For functions (1.3), the following Jacobian condition

$$J(x_1,\dots,x_n) = 1$$

holds if and only if, for arbitrary non-negative integers $k_1,\dots,k_n$, the following pseudoorthogonality relations hold:

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_n}\dots\int_{C_1}\frac{1}{(P_1(x_1,\dots,x_n))^{k_1+1}\cdot\dots\cdot(P_n(x_1,\dots,x_n))^{k_n+1}}dx_1\dots dx_n$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } (k_1,\dots,k_n) \neq (0,\dots,0) \\ 1 & \text{for } (k_1,\dots,k_n) = (0,\dots,0). \end{cases}$$

Proof. First, let us notice that the following equalities hold:

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_n}\dots\int_{C_1}\frac{J(x_1,\dots,x_n)}{(P_1(x_1,\dots,x_n))^{k_1+1}\cdot\dots\cdot(P_n(x_1,\dots,x_n))^{k_n+1}}dx_1\dots dx_n$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } (k_1,\dots,k_n) \neq (0,\dots,0) \\ 1 & \text{for } (k_1,\dots,k_n) = (0,\dots 0). \end{cases}$$

Indeed, according to (1.4) and (1.6), the left-hand side of (2.15) is equal to the product of $1/(2\pi i)^n$ and the value of integral (2.1) for $s = 1$. Next, according to basic lemma, the last value is equal to the value of integral (2.1) for $s = 0$, which, by (1.5), as one can easily check, is equal to the right-hand side of (2.15).

In this situation, the necessity of relation (2.14) is immediately obtained by replacing, according to (2.13), the numerator of the integrand in (2.15) by 1.

The sufficiency follows from the following observations.

First, let us notice that, according to the choice of r (comp. sec. 1), in E_r relations (1.8) hold. Consequently, the Jacobian J can be represented in the form of the following series:

$$(2.16)\quad J(x_1,\dots,x_n) = \sum_{h_1\dots h_n=0}^{\infty} e_{h_1\dots h_n} (P_1(x_1,\dots,x_n))^{h_1} \cdot \dots \cdot (P_n(x_1,\dots,x_n))^{h_n}.$$

According to the assumption that $C_1 \times \dots \times C_n \subset E_r$ (comp. sec. 1) and by (2.16), we get

$$(2.17)\quad \int_{C_n} \dots \int_{C_1} \frac{J(x_1,\dots,x_n)}{(P_1(x_1,\dots,x_n))^{k_1+1} \cdot \dots \cdot (P_n(x_1,\dots,x_n))^{k_n+1}} dx_1\dots dx_n$$
$$= \sum_{h_1,\dots,h_n=0}^{\infty} e_{h_1\dots h_n} \int_{C_n} \dots \int_{C_1} \frac{dx_1\dots dx_n}{(P_1(x_1,\dots,x_n))^{k_1+1-h_1} \dots (P_n(x_1,\dots,x_n))^{k_n+1-h_n}}.$$

Now, we notice that, by (2.13), the integrals on the right-hand side of (2.17) vanish for all $(h_1,\dots,h_n) \neq (k_1,\dots,k_n)$. Thus, by (2.17) and (2.15), we obtain

$$e_{k_1\dots k_n} = \begin{cases} 0 & \text{for } (k_1,\dots,k_n) \neq (0,\dots,0) \\ 1 & \text{for } (k_1,\dots,k_n) = (0,\dots,0). \end{cases}$$

The above and (2.16) give (2.13).

THEOREM 2. *For mapping (1.3) fulfilling condition (2.13), the coefficients $C^{(j)}_{k_1\dots k_n}$ of the inverse mapping $(V_1,\dots,V_n)$ are given by the formulae*

$$(2.18)\quad C^{(j)}_{k_1\dots k_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_n} \dots \int_{C_1} \frac{x_j}{(P_1(x_1,\dots,x_n))^{k_1+1} \cdot \dots \cdot (P_n(x_1,\dots,x_n))^{k_n+1}} dx_1\dots dx_n,$$

(comp. (1.7)).

Proof. From the definition of $(V_1,\ldots,V_n)$ and from (1.8) we obtain

$$x_j = \sum_{l_1,\ldots,l_n=0}^{\infty} C_{l_1\ldots l_n}^{(j)} (P_1(x_1,\ldots,x_n))^{l_1} \cdot \ldots \cdot (P_n(x_1,\ldots,x_n))^{l_n}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

whence, following the analogous pattern as in the proof of the preceding theorem and by this theorem and (2.13), we obtain (2.18).

Bibliography

[1] Charzyński Z., Skibiński P.: The orthogonality of powers of the coordinates of a holomorphic mapping in two variables with the constant Jacobian. Proc. of the Meeting on Real Algebraic Geometry, La Tourballe 1991 (to appear).
[2] Kowalewski G.: Einführung in die Determinatentheorie, Leipzig 1909.
[3] Kozłowski A.: Some properties of multiple-valued functions and mappings of several variables I-III, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź, 30; Nos. 5, 6, 7 (1980).
[4] Saks S., Zygmund A.: Analytic Functions, Warszawa 1965.
[5] Saks S.: Theory of the Integral, Monografie Matematyczne, Warszawa 1937.

Chair of Analytic Functions
and Differential Equations
University of Łódź

Presented by Zygmunt Charzyński at the Session of the Mathematical-Physical Commission of the Łódź Society of Sciences and Arts on June 16, 1992

PSEUDOORTOGONALNOŚĆ POTĘG WSPÓŁRZĘDNYCH ODWZOROWANIA HOLOMORFICZNEGO WIELU ZMIENNYCH O STAŁYM JAKOBIANIE

S t r e s z c z e n i e

W pracy dowodzi się równoważność stałości jakobianu odwzorowania holomorficznego z pseudoortogonalnością potęg jego współrzędnych.

PL ISSN 0459-6854

BULLETIN

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE LÓDŹ

1993 Vol. XLIII, 5

Recherches sur les déformations Vol. XV, 5

pp.43-51

Zygmunt Charzyński and Przemysław Skibiński

EQUATION OF THE SET OF CRITICAL POINTS OF A POLYNOMIAL MAPPING IN TWO VARIABLES II

Summary

An extension of the previous part of this paper (comp. [1]) to the whole class of normal mappings, monic with respect to each variable, with the product of the degrees of the coordinates not smaller than 2, on the way of approximation and limit process, is given here.

Introduction

In part one of this paper (comp. [1]) there was given a procedure allowing one to determine for a given polynomial mapping $(G, H) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, the set of its critical points, i.e. the image of the set of zeros of its Jacobian.

This was made for the normal mappings with the coordinates monic with respect to each variable, with the product of degrees of the coordinates not smaller than 2 and with a finite number of exceptional points (comp. [1], sec. 1).

Here, the first three conditions are natural and determine the standard type mappings, but the assumption on the finite number of exceptional points seems to be not essential and requires a more precise analysis.

In this direction, in this paper there are indicated:

a possibility of the approximation of all mappings of standard type by mappings of ordinary type - with a finite number of exceptional points (th. 2);

an extension of the procedure mentioned earlier to all mappings of standard type by the limit process (th. 3).

1. Terms, notations, remarks

1. We adopt the terms and notations from part one (comp.[1], sec. 1).

2. The homogeneous part of the greatest degree of a given polynomial will be called the leading form of the polynomial.

3. The polynomial mapping $(G, H) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ having at most a finite number of exceptional points (comp. [1], sec. 1) will be called an ordinary mapping, and the mapping having infinite number of exceptional points - a rare mapping.

The normal polynomial mapping $(G, H) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ with monic coordinates with respect to each variable and with the product of degrees of the coordinates mn not smaller than 2 will be called a standard one of degrees m, n.

4. The polynomials (mappings) of one and several variables will be interpreted as points of a suitable complex space of coefficients of the polynomials (coordinates of the the mappings) with the euclidean norm.

The division of a polynomial (coordinates of the mapping) by the norm of the polynomial (mapping) will be called the normalization of the polynomial (mapping).

5. By a given polynomial F of the variables u, v of degree e, the fraction $[F(u, v_2) - F(u, v_1)]/(v_2 - v_1)$ will be treated as a polynomial in three variables u, v_1, v_2; in this convention, the value of this fraction for $v_1 = v_2 = v_0$ is equal to the derivative $F_v(u, v_0)$. In particular, if F is a monomial, then, as one can easily see, the corresponding fraction is the monomial of degree $e - 1$ or zero, accordingly to the fact whether it depends on v or not. Hence it easily follows that the degree of the fraction is always not greater than $e - 1$, and, for the monic polynomial, equal to $e - 1$. Simultaneously, if F is a form, then the fraction is also a form of degree $e - 1$.

The analogous statement is obtained by the change of variables.

It is easily seen that the coefficients of the fraction under consideration are expressed polynomially by the coefficients of the polynomial F.

6. The convergence of sets will be understood in the topology of local uniform convergence given in [3], sec. 1. More precisely, if Γ, Γ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, are closed sets in $\mathbb{C}^2$, then we say that Γ_ν tends to Γ with $\nu \to \infty$, if for each $(z, w) \in \Gamma$, there exists a sequence $(z_\nu, w_\nu) \in \Gamma_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, such that $(z_\nu, w_\nu) \to (z, w)$ and, for each compact subset $K \subset \mathbb{C}^2 \backslash \Gamma$, $\Gamma_\nu \cap K \neq \emptyset$ for an at most finite number of indices.

2. Approximation

Let $(G, H) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ be a polynomial mapping with the coordinates of positive degrees m, n, monic with respect to each of the variables.

Let further

$$G = \mathcal{G} + g, \qquad H = \mathcal{H} + h, \tag{1}$$

where the first summands denote the leading forms of the polynomials G and H.

Lemma 1. *The mapping (G, H) is ordinary (comp. sec. 1.3) if and only if the system of six homogeneous equations*

$$\begin{aligned} &\frac{\mathcal{G}(x, y_2) - \mathcal{G}(x, y_1)}{y_2 - y_1} = 0, && \frac{\mathcal{H}(x, y_2) - \mathcal{H}(x, y_1)}{y_2 - y_1} = 0, \\ &\frac{\mathcal{G}(x_2, y) - \mathcal{G}(x_1, y)}{x_2 - x_1} = 0, && \frac{\mathcal{H}(x_2, y) - \mathcal{H}(x_1, y)}{x_2 - x_1} = 0, \\ &\mathcal{G}(x, y_1) - \mathcal{G}(x_1, y) = 0, && \mathcal{H}(x, y_1) - \mathcal{H}(x_1, y) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

with six unknowns x, y_1, y_2, x_1, x_2, y does not possess non-trivial solutions.

Proof. We notice that from the monicity and from sec. 1.5 it easily follows that the left-hand sides of (2) are leading forms of the corresponding expressions $[G(x, y_2) - G(x, y_1)]/(y_2 - y_1)$, $[H(x, y_2) - H(x, y_1)]/(y_2 - y_1)$, $[G(x_2, y) - G(x_1, y)]/(x_2 - x_1)$ $[H(x_2, y) - H(x_1, y)]/(x_2 - x_1)$, $G(x, y_1) - G(x_1, y)$, $H(x, y_1) - H(x_1, y)$.

Further, the following facts hold:

(i) According to the definition, the point (z, w) is exceptional for the mapping (G, H) if there exist some numbers x, y_1, y_2, x_1, x_2, y such that the following conditions are fulfilled:

$$\begin{aligned} &G(x,y_1)-z=0, \quad G(x,y_2)-z=0, \quad H(x,y_1)-w=0, \quad H(x,y_2)-w=0,\\ &G(x_1,y)-z=0, \quad G(x_2,y)-z=0, \quad H(x_1,y)-w=0, \quad H(x_2,y)-w=0 \end{aligned} \tag{3}$$

and

$$x_1 \neq x_2, \qquad y_1 \neq y_2. \tag{4}$$

In the light of the above, for the mapping (G, H) to be ordinary, it suffices that the system of relations (3), (4) linking together eight unknowns x, y_1, y_2, x_1, x_2, y, z, w possesses at most a finite number of solutions.

(ii) For the system of relations (3), (4), to possess at most a finite number of solutions, it suffices that the system of eight equations with eight unknowns of the form

$$\begin{aligned} &\frac{\mathcal{G}(x,y_2)-\mathcal{G}(x,y_1)}{y_2-y_1}+\frac{g(x,y_2)-g(x,y_1)}{y_2-y_1}=0,\\ &\frac{\mathcal{H}(x,y_2)-\mathcal{H}(x,y_1)}{y_2-y_1}+\frac{h(x,y_2)-h(x,y_1)}{y_2-y_1}=0,\\ &\frac{\mathcal{G}(x_2,y)-\mathcal{G}(x_1,y)}{x_2-x_1}+\frac{g(x_2,y)-g(x_1,y)}{x_2-x_1}=0,\\ &\frac{\mathcal{H}(x_2,y)-\mathcal{H}(x_1,y)}{x_2-x_1}+\frac{h(x_2,y)-h(x_1,y)}{x_2-x_1}=0,\\ &\mathcal{G}(x,y_1)-\mathcal{G}(x_1,y)+g(x,y_1)-g(x_1,y)=0\\ &\mathcal{H}(x,y_1)-\mathcal{H}(x_1,y)+h(x,y_1)-h(x_1,y)=0\\ &\mathcal{G}(x,y_1)+g(x,y_1)-z=0\\ &\mathcal{H}(x,y_1)+h(x,y_1)-w=0 \end{aligned} \tag{5}$$

has at most a finite number of solutions.

Indeed, according to notation (1), this immediately follows from the equivalence of relations (5), (4) with relations (3), (4), easily seen.

(iii) For the system of eight equations (5), to possess at most a finite number of solutions, it suffices that the system of the first six equations from (5) with six unknowns x, y_1, y_2, x_1, x_2, y possesses at most a finite number of solutions. Indeed, it follows at once from the fact that, in virtue of the last two of relations (5), the unknowns z, w are expressed in a unique manner by the six relations mentioned above.

(iv) For the system of the first six equations (5), to have at most a finite number of solutions, it suffices that the system (2) does not possess non-trivial solutions.

In this situation, in the case $m > 1$ and $n > 1$, the above-mentioned leading forms have the positive degree (comp. sec. 1.5), and from the fact that system (2) does not possess non-trivial solutions it follows that it possesses the trivial ones only. Therefore, the discussed system of the left-hand sides of (5) is a normal mapping and, consequently, possesses at most a finite number of solutions (comp. [1], sec. 1).

In the case $m = 1$ or $n = 1$, the corresponding leading forms have the degree zero, thus, according to the assumption on the monicity of polynomials G and H, they are constants different from zero. Then, as one can see, the described system of six equations from (5) does not possess any solutions at all, so - at most a finite number of them.

The observations and implications given successively in (iv)–(i) immediately imply the assertion of the lemma.

Lemma 2. *For given positive integers m, n, there exist ordinary mappings $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ with the coordinates of degrees m, n.*

Proof. We shall show that, by a suitable choice of the system of numbers a, b, c, d, the mapping

$$\mathcal{G}(x,y) = (ax+by)^m, \qquad \mathcal{H}(x,y) = (cx+dy)^n \tag{6}$$

is ordinary.

To this aim, according to lemma 1, it suffices to show that, by a suitable choice of the above-mentioned numbers, the system of six homogeneous equations

$$\begin{aligned}
&(I) && \frac{(ax+by_2)^m - (ax+by_1)^m}{y_2 - y_1} = 0,\\
&(II) && \frac{(cx+dy_2)^n - (cx+dy_1)^n}{y_2 - y_1} = 0,\\
&(III) && \frac{(ax_2+by)^m - (ax_1+by)^m}{x_2 - x_1} = 0,\\
&(IV) && \frac{(cx_2+dy)^n - (cx_1+dy)^n}{x_2 - x_1} = 0,\\
&(V) && (ax+by_1)^m - (ax_1+by)^m = 0,\\
&(VI) && (cx+dy_1)^n - (cx_1+dy)^n = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

with six unknowns x, y_1, y_2, x_1, x_2, y does not possess non-trivial solutions.

System (7), as one can easily see, is equivalent to the system of linear equations.

$$\begin{aligned}
&(I) && ax+by_2 = \varepsilon(ax+by_1),\\
&(II) && cx+dy_2 = \delta(cx+dy_1),\\
&(III) && ax_2+by = \gamma(ax_1+by),\\
&(IV) && cx_2+dy = \beta(cx_1+dy),\\
&(V) && ax+by_1 = \kappa(ax_1+by),\\
&(VI) && cx+dy_1 = \chi(cx_1+dy),
\end{aligned} \tag{8}$$

where ε, γ, κ and δ, β, χ are some m-th and n-th roots of unity, respectively.

Let us form the determinant

$$\Delta(a,b,c,d,\varepsilon,\delta,\gamma,\beta,\kappa,\chi) = \begin{vmatrix}
(1-\varepsilon)a & -\varepsilon b & b & 0 & 0 & 0\\
(1-\delta)c & -\delta d & d & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -\gamma a & a & (1-\gamma)b\\
0 & 0 & 0 & -\beta c & c & (1-\beta)d\\
a & b & 0 & -\kappa a & 0 & -\kappa b\\
c & d & 0 & -\chi c & 0 & -\chi d
\end{vmatrix} \tag{9}$$

evidently implied by (8), treating, for the time being, its ten arguments as independent variables.

Determinant (9) is a polynomial. Ordering it with respect to the variables a, b, c, d and substituting, on the right-hand side, the value zero for b and c, we easily calculate that (9) contains, among other terms the summand

$$(1-\varepsilon)(1-\beta)\kappa a^3 d^3.$$

Consequently, for arbitrary ε, δ different from 1 and κ -different from 0, determinant (9) treated as a polynomial of the variables a, b, c, d does not vanish identically.

Let now

$$(10) \qquad (\varepsilon_j, \gamma_j, \delta_j, \beta_j, \kappa_j, \chi_j), \qquad j = 1, 2 \ldots, (m-1)(n-1)m^2n^2,$$

denote all six-element sequences with elements equal to the m-th or n-th roots of unity and such that ε_j, β_j are different from 1. We assume here that the set of sequences (10) is empty for $m = 1$ or $n = 1$. Let us consider, for $m \neq 1$ and $n \neq 1$, the corresponding polynomials

$$(11) \qquad \Delta(a, b, c, d, \varepsilon_j, \gamma_j, \delta_j, \beta_j, \kappa_j, \chi_j)$$

of the variables a, b, c, d. In the light of the above, none of these polynomials does not vanish identically. In consequence, the set of zeros of such a polynomial is closed and nowhere dense in the space of the variables a, b, c, d (comp. [2], p. 41).

The same is, of course, valid for the set of zeros of $ad - bc$ and the single variables a, b, c, d. From this it immediately follows that the set of systems a, b, c, d for which all polynomials (11) are different from zero and the following conditions hold

$$(12) \qquad ad - bc \neq 0, \qquad a \neq 0, \qquad b \neq 0, \qquad c \neq 0, \qquad d \neq 0,$$

is non-empty and open.

Let us choose, as was announced at the beginning, an arbitrary system of numbers from this open set.

Next, let us take an arbitrary solution of system (7). In this situation, relations (8) are fulfilled. We distinguish the cases:

(j) $y_1 \neq y_2$ and $x_1 \neq x_2$. Then there are $\varepsilon \neq 1$ and $\beta \neq 1$; in the opposite case, according to (8 I), (8 III) and (12) we would have $y_1 = y_2$ or $x_1 = x_2$. In this situation, the system $(\varepsilon, \gamma, \delta, \beta, \kappa, \chi)$ appearing in (8) is one of the elements of sequence (10) and, in consequence, by the choice of a, b, c, d, we have $\Delta(a, b, c, d, \varepsilon, \gamma, \delta, \beta, \kappa, \chi) \neq 0$. Therefore system (8), thus (7), possesses in this case the trivial solution only.

(jj) $y_1 = y_2 = y_0$ or $x_1 = x_2 = x_0$. Then if the first term of the alternative holds, the left-hand sides of (7 I) and (7 II), according to section 1.5, are equal to

$$(13) \qquad mb(ax + by_0)^{m-1}, \qquad nd(cx + dy_0)^{n-1}$$

with the additional convention that $(ax + by_0)^0 = 1$ and $(cx + dy_0)^0 = 1$. Hence, for $m = 1$ or $n = 1$, from (7 I) or (7 II), respectively, and also because of the choice of

a, b, c, d we easily conclude that the system does not possess any solutions at all, so - a finite number of them. On the other hand, for $m > 1$ and $n > 1$, according to (7 I) and (7 II) as well as conditions (12), the expressions in brackets in (13) are equal to zero. This, by (12), immediately gives that the values x, y_0 are equal to zero. Hence and from (7 V), (7 VI) and (12) we obtain that x_0 and y are equal to zero.Consequently, system (8), thus (7), possesses again the trivial solutions only.

We proceed analogously when the second term of the alternative holds. This ends the proof.

By the interpretation of mappings as points of a suitable multi-dimensional complex plane introduced in section 1.4, the following property of standard mappings (comp. sec. 1.3) takes place.

Theorem 1. *The set of standard mappings of degrees m, n is open and everywhere dense in the space of all polynomial mappings in two variables with the coordinates of degrees not greater than m, n, respectively, $mn \geq 2$.*

Proof. We shall show that, in the space considered, the set of non-standard mappings is closed and nowhere dense.

Indeed, the mapping (G, H) is not, in a suitable space, a standard one if it is not normal, or at least one of the coordinates is not monic with respect to at least one variable, or the product of the degrees of the coordinates G, H is smaller than 2.

If the mapping (G, H) is not normal, then its leading forms possess some non-trivial common zeros. Therefore the resultant of the above-mentioned leading forms vanish (comp. [4], vol. II, p. 20). The resultant is a polynomial in coefficients of the leading forms, so a fortiori, a polynomial in coefficients of the coordinates G and H. Moreover, as one can easily see, this resultant does not vanish identically. In consequence, the set of mappings whose leading forms possess some non-trivial common zeros is the set of zeros of the resultant, thus a principal analytic set, therefore a closed nowhere dense set (comp. [2], p. 41).

If one of the coordinates of the mapping is not monic with respect to at least one of the variables, then the corresponding coefficient of this coordinate vanishes. Thus the set of mappings whose at least one coordinate is not monic with respect to at least one variable is a hypersurface, thus a closed nowhere dense set (comp. [2], p. 41).

If the product of the degrees of the coordinates of the mapping is smaller than 2, which means that the degrees are equal to 1, then some coefficients of these coordinates vanish. Consequently, the set of mappings such that the product of the degrees of their coordinates is smaller than 2 is again a hypersurface, thus a closed nowhere dense set.

In the light of the above, the set of mappings not being some standard ones is the sum of three sets described above, thus a closed nowhere dense set.

This means that its complement - the set of standard mappings of degrees m, n - is open and everywhere dense in the space under consideration.

This ends the proof.

Theorem 2. *For every standard mapping (G_0, H_0) of degrees m, n, there exists an ordinary standard mapping (G, H) of degrees m, n, arbitrarily close to it.*

Proof. It suffices to show that the set of rare mappings (comp. sec. 1.2) is contained in a principal analytic set, thus in a nowhere dense set (comp. [2], p. 41) in the

open set of standard mappings of degrees m, n.

Let us notice that, according to lemma 1, if the mapping (G, H) is rare, then system (2) possesses a non-trivial solution.

Further, the system of six forms appearing on the left-hand sides of (2) possesses a non-trivial zero if the corresponding resultant of these forms vanishes (comp. [4], vol. II, p. 20). This resultant is a polynomial in coefficients of the above-mentioned six forms. The arithmetical way of constructing these forms from the coordinates of our mapping implies that the resultant is a polynomial in coefficients of the coordinates G, H.

So, in the adopted interpretation, if the mapping (G, H) is rare, then it is a zero of the resultant. Consequently, the set of rare mappings is contained in the set of zeros of the resultant mentioned above.

This resultant does not vanish identically since, according to lemma 2, there exist mappings such that the corresponding system (2) does not possess non-trivial solution. Thus, for these mappings, the resultant is different from zero (comp. [4], vol. II, p. 20). Therefore the set of zeros of this resultant is a principal analytic set in the open set of standard mappings of degrees m, n.

This ends the proof.

3. Limit process

Let $(G, H) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ be a normal polynomial mapping in the variables x, y with the coordinates of positive degrees m, n and $(G_s, H_s) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $s = 1, 2, \ldots$, - sequence of polynomial mappings with the coordinates of degrees not greater than m, n converging to (G, H).

Lemma 3. *If a sequence (x_s, y_s) tends to infinity, then the sequence of the images $(z_s, w_s) = (G_s(x_s, y_s), H_s(x_s, y_s))$ tends to infinity, too.*

Proof. First, we easily notice that, for sufficiently great s, the polynomials G_s, H_s have the degrees equal to m, n.

Let further

$$G = \mathcal{G} + \mathcal{G}_{m-1} + \cdots + \mathcal{G}_0, \qquad G_s = \mathcal{G}_s + \mathcal{G}_{sm-1} + \cdots + \mathcal{G}_{s0}, \qquad s = 1, 2, \ldots,$$

$$H = \mathcal{H} + \mathcal{H}_{n-1} + \cdots + \mathcal{H}_0, \qquad H_s = \mathcal{H}_s + \mathcal{H}_{sn-1} + \cdots + \mathcal{H}_{s0}, \qquad s = 1, 2, \ldots,$$

where the right-hand sides are decompositions into homogeneous summands.

In this situation, putting $x_s = \rho_s \xi_s$, $y_s = \rho_s \eta_s$, where $\rho_s = (|x_s|^2 + |y_s|^2)^{1/2}$, we have $|\xi_s|^2 + |\eta_s|^2 = 1$ and

$$\begin{aligned} z_s &= \rho_s^m [\mathcal{G}_s(\xi_s, \eta_s) + \frac{1}{\rho_s} \mathcal{G}_{sm-1}(\xi_s, \eta_s) + \cdots + \frac{1}{\rho_s^{m-1}} \mathcal{G}_{s0}(\xi_s, \eta_s)], \\ w_s &= \rho_s^m [\mathcal{H}_s(\xi_s, \eta_s) + \frac{1}{\rho_s} \mathcal{H}_{sn-1}(\xi_s, \eta_s) + \cdots + \frac{1}{\rho_s^{n-1}} \mathcal{H}_{s0}(\xi_s, \eta_s)]. \end{aligned} \tag{1}$$

Simultaneously, choosing if needed, some subsequences we can assume that the values ξ_s, η_s tend to some limits ξ, η, with that

$$|\xi|^2 + |\eta|^2 = 1. \tag{2}$$

Now, passing in (1) to the limit as $s \to \infty$, from the assumption $(x_s, y_s) \to \infty$, i.e. $\rho_s \to \infty$, we obtain that the expressions in square brackets on the right-hand sides of (1) tend to $\mathcal{G}(\xi, \eta), \mathcal{H}(\xi, \eta)$, respectively. Next, from the assumption on the normality of the mapping (G, H) and from relation (2) it follows that at least one of the values $\mathcal{G}(\xi, \eta), \mathcal{H}(\xi, \eta))$, e.g. the first one, is different from zero. In this situation, $\rho_s^m \mathcal{G}(x_s, y_s) \to \infty$, that is $z_s \to \infty$.

This gives the assertion.

Now, let $(G, H) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ be a normal polynomial mapping with the coordinates of positive degrees m, n. We also assume that the coordinates are monic with respect to each variable.

Further, let $(G_s, H_s) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $s = 1, 2, \ldots$, be a sequence of normal ordinary polynomial mappings with the coordinates of degrees not greater than m, n, $mn \geq 2$. We also assume that the coordinates are monic with respect to to each variable.

Let Γ and Γ_s denote the sets of critical points of the mappings (G, H) and (G_s, H_s), respectively, and δ_s - the normalized characteristic divisors of the mappings (G_s, H_s) (comp. sec. 1.4).

In this situation, we have the following result.

Theorem 3. *(i) If the mappings (G_s, H_s) tend uniformly on each compact subset of $\mathbb{C}^2$ to the limit (G, H), then the set Γ_s tend to the limit Γ (comp. sec. 1.6).*

(ii) If the divisors δ_s tend uniformly on each compact subset of $\mathbb{C}^2$ to a limit δ, then the set of zeros of this limit is identical with the set Γ.

Proof. Denote by J_s and J the Jacobians of the mappings (G_s, H_s), $s = 1, 2, \ldots$, and (G, H), respectively.

First, we see that the convergence of the mappings (G_s, H_s) implies, of course, the convergence of the corresponding Jacobians J_s to J.

Next, the last convergence implies that of the sets of zeros of the Jacobians. Indeed, since the mapping (G, H) is normal, then, as one can readily see, the Jacobian J does not vanish identically. Hence the set of its zeros is a principal one of dimension 1. This, according to [3], Corollary 4, p. 392, implies the announced convergence.

Passing to the main reasoning we carry it out in the following steps.

ad (i). Let us take an arbitrary point $(z, w) \in \Gamma$. We shall show that there exists a sequence of points $(z_s, w_s) \in \Gamma_s$, $s = 1, 2, \ldots$, convergent to (z, w). In fact, according to the definition, the point (z, w) is the image under the mapping (G, H) of a zero (x, y) of the Jacobian J. Due to the noticed convergence, there exist a sequence of zeros (x_s, y_s) of the Jacobian J_s, convergent to (x, y) (comp. [3], Lemma 1, p. 387). From the convergence of the mappings it follows that the sequence (z_s, w_s) of the images under (G_s, H_s) of zeros (x_s, y_s) is convergent to the image under (G, H) of the zero (x, y), thus to (z, w).

Next, let us take an arbitrary point $(z, w) \notin \Gamma$. We shall show that there exists a neighbourhood U of this point, such that Γ_s has common points with U for at most a finite number of indices s. Indeed, in the opposite case, in each neighbourhood of (z, w), there would lie critical points of the sets Γ_s with arbitrarily great indices. Therefore, as one can easily see, there would exist a sequence of points (z_{s_k}, w_{s_k}), $k = 1, 2, \ldots$, belonging to Γ_{s_k}, converging to (z, w). Further, by the definition, the points (z_{s_k}, w_{s_k}) would be the images under the mappings (G_{s_k}, H_{s_k}) of some zeros (x_{s_k}, y_{s_k}) of the Jacobians J_{s_k}. Moreover, the evident boundedness of the

sequence of critical points would cause, according to lemma 3, the boundedness of the sequence of zeros. Therefore, from the sequence (x_{s_k}, y_{s_k}) we could choose a subsequence convergent to a zero (x, y) of the Jacobian J. In this situation, passing to the limit, we would obtain $(z, w) = (G(x, y), H(x, y))$, thus $(z, w) \in \Gamma$ contrary to the assumption.

According to the facts we have shown, the first part of the assertion holds (comp. [3], Lemma 1, p. 387).

ad (ii). Since the mappings (G_s, H_s), $s = 1, 2, \ldots$, are ordinary, then the sets of zeros of the divisors δ_s are identical with the sets Γ_s (comp. [1], Theorem). Due to the normalization, the limit δ of the divisors does not vanish identically and, consequently, as can easily be seen, the set of its zeros is principal with the constant dimension not greater than 1. Therefore the sets of zeros δ_s tend to the set of zeros δ (comp. [3], Corollary 4, p. 392). Simultaneously, the sets of zeros δ_s are identical with the sets Γ_s which, according to (i), converge to Γ.

Summing up the above facts, we obtain the assertion.

References

[1] Z. Charzyński, P. Skibiński, *Equation of the set of critical points of a polynomial mapping in two variables*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź 40 (11), Ser. Recherches sur les deformations **81** (1990).

[2] M. Hervé, *Several Complex Variables. Local Theory*, Oxford University Press, 1963.

[3] P. Tworzewski, T. Winiarski, *Continuity of intersection of analytic sets*, Ann. Polon. Math. **42** (1983), 387–393.

[4] B.L. van der Waerden, *Algebra I, II*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.

University of Łódź, Chair of Analytic Functions
and Differential Equations
ul. Banacha 22,
90–238 Łódź, Poland

Presented by Zygmunt Charzyński at the Session of the Mathematical-Physical Commission of the Łódź Society of Sciences and Arts on June 14, 1993

RÓWNANIE ZBIORU PUNKTÓW KRYTYCZNYCH ODWZOROWANIA WIELOMIANOWEGO DWU ZMIENNYCH II

S t r e s z c z e n i e

Praca stanowi rozszerzenie wyników części pierwszej [1] na całą klasę odwzorowań normalnych monicznych względem każdej ze zmiennych i o iloczynie stopni nie mniejszym niż 2 poprzez aproksymację i proces graniczny.

The volume is published on the occasion of the 70th anniversary of the establishment in 1945 the University of Łódź. Professor Zygmunt Charzyński was employed in the University since 1952 until 1995.



WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62

ISBN 978-83-7969-434-1