

Jarosław Cel

SUR L'IMPOSSIBILITÉ EN NOMBRES ENTIERS
DES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES
DE LA FORME (x^3, y^4, z^3) ET (x^4, y^3, z^4)
DONT LES TERMES SONT RELATIVEMENT
PREMIERS

On établit dans ce travail l'impossibilité des solutions non-triviales des équations diophantiennes

$$x^3 + z^3 = 2y^4 \quad \text{et} \quad x^4 + z^4 = 2y^3$$

en nombres entiers premiers entre eux.

L'existence des progressions arithmétiques de la forme (x^3, y^4, z^3) et (x^4, y^3, z^4) amène immédiatement à deux équations suivantes

$$x^3 + z^3 = 2y^4 \tag{1}$$

et

$$x^4 + z^4 = 2y^3 \tag{2}$$

dont l'étude en ensemble des nombres entiers est l'objet de ce travail. Nous commencerons par étudier l'équation (1), pour laquelle le raisonnement est complètement élémentaire.

ÉQUATION 1

Il est facile de voir qu'elle admet des solutions triviales $(x, y, z) : (0, 0, 0) (1, 0, -1) (-1, 0, 1) (1, \pm 1, 1)$ et n'en admet pas d'autre, où $xyz = 0$ ou $|y| = 1$ et $(x, z) = 1$. Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 1. L'équation (1) n'a aucune solution en nombres entiers x, y, z premiers entre eux, pour lesquels $xyz \neq 0$ et $|y| \neq 1$.

Démonstration. Nous utiliserons ici le lemme suivant, dont la démonstration élémentaire de A. Schinzel se trouve dans la monographie [3] comme l'exercice 27 p. 68-70.

Lemme. Si p est un nombre premier $\equiv 3 \pmod{8}$, l'équation

$$x^4 - p^2 y^4 = z^2$$

n'est pas possible en nombres naturels x, y, z .

Professeur A. Schinzel m'a communiqué dans une lettre privée que déjà T. Nagell a démontré dans le travail [1] le théorème plus général, suivant lequel l'équation diophantienne $x^4 - By^4 = z^2$ est impossible pour $B = p^n$ [p -premier $\equiv 3 \pmod{8}$, n -quelconque; $p \equiv 13 \pmod{16}$, $n = 1$; $p \equiv 5 \pmod{16}$, $n = 3$].

Considérons maintenant les trois nombres entiers x, y, z ($|y| \neq 1$) tous différents de 0 et premiers entre eux deux à deux, pour lesquels notre équation est vérifiée. Il faut alors que les nombres x, z soient impairs, donc $2u = x + z$ et $2v = x - z$ pour certains entiers u, v sans facteur commun et de parités différentes. D'ici $x = u + v$, $z = u - v$ et en vertu de (1) $u(u^2 + 3v^2) = y^4$. À partir des conditions pour la solution originelle (x, y, z) , il résulte immédiatement $uv \neq 0$, on peut donc admettre les nombres u, v naturels. Si y est divisible par 3, u est nécessairement divisible par 3 et la dernière équation entraîne aussitôt $u = 3^3 a^4$ et $u^2 + 3v^2 = 3b^4$, où $y = 3ab$, $(a, b) = 1$ et les nombres a, b sont naturels. Mais alors $b^4 - 3(3a^2)^4 = v^2$ ce qui contredit le théorème de T. Nagell. Ainsi donc y n'est pas divisible par 3 et par suite u non plus, c'est-à-dire $u = c^4$, $u^2 + 3v^2 = d^4$, $y = cd$, où les nombres naturels c, d sont premiers entre eux, $(3, c) = 1$. Ce système montre que $c^8 + 3v^2 = d^4$, d'où il faut que v soit pair (de plus que $4/v$), donc c, d tous les deux impairs. Les facteurs $\frac{d^2 + c^4}{2}$, $\frac{d + c^2}{2}$, $\frac{d - c^2}{2}$ sont premiers entre eux deux à deux et leur produit reste égal à $6(\frac{v}{4})^2$. On a ici

$$6, \left(\frac{d^2 + c^4}{2}\right) = 1$$

pour certains naturels e, f, g (e -impair), dont aucuns deux n'ont de facteur commun soit $d^2 + c^4 = 2e^2$, $d + \epsilon c^2 = 12f^2$, $d - \epsilon c^2 = 2g^2$ soit $d^2 + c^4 = 2e^2$, $d + \epsilon c^2 = 6f^2$, $d - \epsilon c^2 = 4g^2$ où $\epsilon = \pm 1$. La première possibilité entraîne $d = g^2 + 6f^2$, $c^2 = 6f^2 - g^2$

ce qui donne $g^4 + 36f^4 = e^2$. La théorie du triangle pythagoricien permet d'écrire les égalités $6f^2 = 2mn$, $g^2 = m^2 - n^2$ avec m, n naturels et premiers entre eux. Mais cela conduit directement à l'équation, dont l'impossibilité est exprimée par notre lemme. Dans le deuxième cas, on obtient $d = 2g^2 + 3f^2$ et $ec^2 = 3f^2 - 2g^2$, d'où $4g^4 + 9f^4 = e^2$ et à nouveau $2g^2 = 2kl$, $3f^2 = k^2 - l^2$ pour k, l naturels et premiers entre eux. Donc $k = k_1^2$, $l = l_1^2$, $(k_1, l_1) = 1, 2 | k_1 l_1$. Il en résulte que $3f^2 = (k_1^2 + l_1^2) \cdot (k_1^2 - l_1^2)$ c. -à -d. $k_1^2 + l_1^2 = r^2$, $k_1^2 - l_1^2 = 3s^2$ et sans peine $(2k_1 l_1)^2 = r^4 - 9s^4$ contrairement au lemme, ce qui achève toute la démonstration.

ÉQUATION 2

Cette équation est vérifiée par les nombres (x, y, z) : $(0, 0, 0)$ $(+1, 1, +1)$ et il n'y a pas d'autres solutions, où $xyz = 0$ ou $y = 1$ et $(x, z) = 1$. Le théorème suivant est vrai.

Théorème 2. L'équation (2) n'est pas possible en nombres entiers x, y, z premiers entre eux, pour lesquels $xyz \neq 0$ et $y \neq 1$.

Démonstration. Si l'équation $x^4 + z^4 = 2y^3$ est soluble en nombres entiers x, y, z ($y \neq 1$) non nuls et premiers entre eux, on peut admettre que tous ces nombres sont naturels. Pour assurer la condition $y \neq 1$, il faut que $x \neq z$. L'équation principale est équivalente à la suivante

$$\left(\frac{x^2 + z^2}{2} + i \frac{x^2 - z^2}{2}\right) \left(\frac{x^2 + z^2}{2} - i \frac{x^2 - z^2}{2}\right) = y^3.$$

Mais $\left(\frac{x^2 + z^2}{2}, \frac{x^2 - z^2}{2}\right) = 1$ puisque $(x, z) = 1$ et x, y, z impairs. Les parenthèses de la dernière équation sont premières entre elles dans le corps de Gauss. En effet, si $h \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ était un nombre indécomposable différent de l'unité, divisant chacune d'elles, h diviserait les nombres $x^2 + z^2$ et $x^2 - z^2$, donc aussi $2x^2, 2z^2$, d'où, en vertu de $(x, z) = 1$, il serait $h | 2 = i(1 - i)^2$ c'est-à-dire $h = \eta(1 - i)$, où η est une unité de ce corps. Mais alors $\eta^2 \cdot 2 = ih^2 | y^3$ - impossible pour y impair. Ainsi donc

$$\frac{x^2 + z^2}{2} + i \frac{x^2 - z^2}{2} = E(a + bi)^3 \quad \text{et} \quad \frac{x^2 + z^2}{2} - i \frac{x^2 - z^2}{2} = \bar{E}(a - bi)^3$$

où $E\bar{E} = 1$, c'est-à-dire $E = \pm 1$ ou $\pm i$. Les nombres a, b sont entiers rationnels sans facteur commun et de plus $ab \neq 0$. En effet, le cas contraire entraînerait $x = z$, d'où, en vertu de $(x, z) = 1$, $x = y = z = 1$ - la solution triviale. On voit aisément que sans diminuer la généralité du raisonnement nous pouvons admettre $E = 1$ ce qui entraîne facilement

$$x^2 = (a - b)(a^2 + 4ab + b^2) \quad \text{et} \quad z^2 = (a + b)(a^2 - 4ab + b^2)$$

x, z étant tous les deux impairs, l'un des nombres a, b est pair tandis que l'autre impair. $(a, b) = 1$ donc

$$d_- = (a - b, a^2 + 4ab + b^2) | 3 \quad \text{et} \quad d_+ = (a + b, a^2 - 4ab + b^2) | 3$$

Supposons d'abord exactement un des nombres d_-, d_+ égal à 3. Toutefois cela conduirait aussitôt à l'égalité $8ab = 3\epsilon u^2 + \eta v^2$ impossible pour u, v entiers impairs et pour $\epsilon, \eta = \pm 1$. Il ne reste donc qu'une possibilité $d_- = d_+ = 1$ impliquant l'équation

$$\pm f^2 = (a^2 + 4ab + b^2)(a^2 - 4ab + b^2) = a^4 - 14a^2b^2 + b^4.$$

Pour $+$ on est ainsi amené à l'équation $f^2 = a^4 - 14a^2b^2 + b^4$ avec a, b entiers non nuls ce qui est impossible (voir par exemple [3] exc. 4, p. 125 ou [2], p. 114-115). D'autre part le signe $-$ ne peut pas avoir lieu, car alors $3|(a, b) = 1$.

La contradiction obtenue ici assure l'impossibilité des solutions non-triviales de l'équation originelle.

Remarquons ici encore que l'équation $x^2 + z^4 = 2y^3$ est soluble en nombres naturels premiers entre eux, par exemple $13^2 + 3^4 = 2 \cdot 5^3$ ou $351^2 + 11^4 = 2 \cdot 41^3$ (cf. [3] p. 146, où ces solutions sont citées d'après [4]). Remarquons enfin que T. Nagell a établi l'impossibilité de l'équation $x^4 + z^4 = y^3$ en nombres entiers non nuls et premiers entre eux (voir [1] p. 4). En vertu de la deuxième proposition, que nous venons de démontrer, il est possible d'énoncer le théorème suivant.

Théorème. L'équation $x^4 + z^4 = 2^n y^3$ avec un exposant entier non-négatif n est possible en nombres naturels x, y, z où $(x, z) = 1$ si et seulement si $n = 1$ et alors $x = y = z = 1$.

RÉFÉRENCES

- [1] T. N a g e l l, *Résultats nouveaux de l'analyse indéterminée*, Norsk Matematisk Forenings Skrifter, S. I, 8.
- [2] H. C. P o c k l i n g t o n, *Some Diophantine Impossibilities*, Proc. of the Cambridge Philos. Soc. 17 (1912), p. 108-121.
- [3] W. S i e r p i ń s k i, *Teoria liczb*, cz. II, Warszawa 1959.
- [4] V. T h é b a u l t, *Carré, cube et bicarre en progression arithmétique* Mathesis 62 (1953), p. 336-337.

Université de Łódź

Jarosław Cel

O NIEMOŻLIWOŚCI ISTNIENIA ZŁOŻONYCH Z LICZB CAŁKOWITYCH
CIĄGÓW ARYTMETYCZNYCH POSTACI (x^3, y^4, z^3) I (x^4, y^3, z^4) ,
KTÓRYCH WYRAZY SĄ WZGLĘDNIE PIERWSZE

W pracy udowodniono następujące twierdzenie: równania $x^3 + z^3 = 2y^4$ i $x^4 + z^4 = 2y^3$ nie posiadają rozwiązań nietrywialnych w liczbach całkowitych względnie pierwszych x, y, z .