A C T A   U N I V E R S I T A T I S   L O D Z I E N S I S
FOLIA MATHEMATICA 4, 1991

Ryszarda Majchrzak, Bronisława Walczak

SUR CERTAINE PROPRIÉTÉ DE LA SOMME ALGÉBRIQUE DES ENSEMBLES DANS L'ESPACE LINÉAIRE-TOPOLOGIQUE

Ce travail est consacré à la condition suffisante de la fermeture de l'ensemble qui est la somme algébrique de deux sousensembles fermés dans l'espace linéaire-topologique.

1. INTRODUCTION

Soit X un espace linéaire-topologique, soient A, B des sousensembles de cet espace. On designe par A + B la somme algébrique des ensembles A et B, c'est à dire

$$A + B = \{a + b: a \in A \quad \text{et} \quad b \in B\}.$$

Il existe de simples exemples qui nous montrent que, généralement, l'ensemble A + B n'est pas fermé malgré que les ensembles A et B soient fermés.

Le problème de la fermeture de la somme algébrique a l'importance essentielle dans plusiers applications en mathématiques.

Deux conditions suffisantes pour la fermeture de la somme algébrique sont bien connues, notamment: 1) si des ensembles A et B sont fermés et puis l'un d'eux est compact alors A + B est fermé, 2) si A et B sont deux sousespaces fermés et l'un d'eux a la dimension finie alors A + B est le sousespace fermé.

On peut obtenir une condition suffisante plus générale en prennant une hypothèse supplémentaire sur l'espace X et sur les ensembles A et B.

Dans ce travail est introduite la définition de l´espace du type de Krein-Milman, il a été prouvé que la somme des ensembles fermés et satisfaisante certaine condition de la forme (1) est l´ensemble fermé.

Le problème analogique à ci dessus etait consideré dans le travail [5].

2. CONDITION DE LA COUVERTURE, CRITÈRES ESSENTIELS DE LA COUVERTURE

DÉFINITION 1. Soit X un espace linéaire-topologique, soient A et B des sousensembles de X. On dit que A et B satisfont à la condition de la couverture dans X si pour tout ensemble compact $Z \subset X$ il existe des ensembles compacts Z_1, $Z_2 \subset X$ tels que

$$(A + B) \cap Z \subset A \cap Z_1 + B \cap Z_2 \tag{1}$$

THÉORÈME 1. Soit X_o un sousespace fermé d´un espace linéaire-topologique X. Soient A et B des sousensembles de X_o. Pour que A et B satisfassent à la condition de la couverture dans X_o il faut et il suffit qu´ils satisfassent à la mème condition dans X.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons d´abord que les ensembles A et B satisfont à la condition (1) dans X_o. Alors pour tout ensemble compact $Z_o \subset X_o$ il existe les ensembles compacts Z_1, $Z_2 \subset X_o$ tels que

$$(A + B) \cap Z_o \subset A \cap Z_1 + B \cap Z_2 \tag{2}$$

Soit Z un ensemble compact dans X. Comme $A \subset X_o$ et $B \subset X_o$, alors $A + B \subset X_o$ et puis $(A + B) \cap Z = (A + B) \cap Z \cap X_o$.

Comme X_o est l´espace fermé, alors Z est l´ensemble compact dans X, et l´ensemble $Z_o = Z \cap X_o$ est compact. Il exist donc les ensembles Z_{10}, Z_{20} inclus dans X_o, compacts et tels que

$$(A + B) \cap Z_o \subset A \cap Z_{10} + B \cap Z_{20}.$$

Les ensembles Z_{10}, Z_{20} sont compacts aussi dans X, alors

$$(A + B) \cap Z_o = (A + B) \cap Z \subset A \cap Z_{10} + B \cap Z_{20}$$

ce que designe que les ensembles A, B satisfont à la condition de la couverture dans X.

Supposons maintenant que les ensembles A et $B \subset X_o$ satisfont à la condition (1) dans X. Pour tout ensemble compact $Z_o \subset X$ on a

$$(A + B) \cap Z_o = (A + B) \cap Z_o \cap X_o,$$

Z_o est un ensemble compact aussi dans X.

Par hypothèse il existe des ensembles Z_1 et $Z_2 \subset X$, compacts, tels que

$$(A + B) \cap Z_o \subset A \cap Z_1 + B \cap Z_2.$$

Comme $A \cap X_o = A$, $B \cap X_o = B$ on a

$$(A + B) \cap Z_o \subset A \cap X_o \cap Z_1 + B \cap X_o \cap Z_2.$$

Les ensembles $X_o \cap Z_{10}$, $X_o \cap Z_{20}$ sont compacts dans X_o.

THÉORÈME 2. Soient A et B des ensembles d'un espace linéaire -topologique X, soit l'un d'eux l'ensemble compact. Les ensembles A et B satisfont à la condition (1) de la couverture.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $Z_o \subset X$ un ensemble compact. Supposons que A est l'ensemble compact.

Posons $Z_1 = A$, $Z_2 = Z_o + (-A)$, ou $(-A) = \{-a\colon a \in A\}$ est l'ensemble des éléments oposés aux éléments de l'ensemble A. Nous allons montrer que l'inclusion

$$(A + B) \cap Z_o \subset A \cap Z_1 + B \cap Z_2$$

est vraie.

Soit $p \in (A + B) \cap Z_o$, alors $p = p_1 + p_2$ où $p_1 \in A$, $p_2 \in B$, $p_1 + p_2 \in Z_o$. Comme $p_2 = p_1 + p_2 + (-p_1) = p + (-p)$, on a $p_2 \in Z_2$, alors $p \in A \cap Z_1 + B \cap Z_2$.

L'ensemble Z_1 est compact par l'hypothèse, l'ensemble Z_2 est compact parce qu'il est l'image de l'ensemble compact par l'application continue.

THÉORÈME 3. Soit X un espace linéaire-topologique, soient L_1 et L_2 des sousespaces de X tels que la dimension de L_1 est finie, L_2 est fermé dans X et puis $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Si $A \subset L_1$, $B \subset L_2$, alors les ensembles A et B satisfont à la condition de la couverture.

D é m o n s t r a t i o n. Posons $X_o = L_1 \oplus L_2$. De l'hypothèse on déduit que X_o est un sousespace fermé. En vertu du théorème 1 il suffit a verifier la condition (2) dans X_o. Soit Z_o un ensemble compact dans X_o. En mettant $Z_1 = pr_1 Z_o$, $Z_2 = pr_2 Z_o$ on obtient les ensembles compacts dans X_o, pour lesquels l'inclusion

$$(A + B) \cap Z_o \subset A \cap Z_1 + B \cap Z_2$$

est vraie.

En effet, soit $p \in (A + B) \cap Z_o$, c'est à dire $p = p_1 + p_2$, où $p_1 \in A \subset L_1$, $p_2 \in B \subset L_2$ et $p_1 + p_2 \subset Z_o$. Comme $p_1 = pr_1 p \in Z^1$, $p_2 = pr_2 p \in Z_2$, alors $p \in A \cap Z_1 + B \cap Z_2$. En particulier, soient X_1, X_2 deux espaces linéaire-topologiques, supposons que la dimension de X_2 est finie. Soint $X = X_1 \times X_2$. Posons $L_1 = \{(x_1, x_2) \in X\colon x_2 = P(x_1)\}$, où P designe un opérateur continu de X_1 dans X_2, $L_2 = \{(0, x_2)\colon x_2 \in X_2\}$. En vertu du théorème 3 on déduit la conséquence 1.

CONSÉQUENCE 1. Quels que soient des ensembles A et B tels que $A \subset L_1$, $B \subset L_2$, ils satisfont à la condition de la couverture dans l'espace $X_1 \times X_2$.

THÉORÈME 4. Soient X_1 et X_2 deux sousespaces linéaires-topologiques. Des ensembles $A \subset X_1$, $B \subset X_2$ satisfont à la condition de la couverture dans l'espace $X_1 \times X_2$.

D é m o n s t r a t i o n. En effet, pour chaque ensemble compact $Z \subset X_1 \times X_2$ posons $Z_1 = pr_1 Z$, $Z_2 = pr_2 Z$. On obtient l'inclusion $(A + B) \cap Z \subset A \cap Z_1 + B \cap Z_2$. Comme les fonctions pr_1, pr_2 (les projections) sont continues, les ensembles Z_1, Z_2 sont compacts.

3. ESPACES DU TYPE DE KREIN-MILMAN CONDITION SUFFISANTE DE LA FERMETURE DE LA SOMME ALGÉBRIQUE DES ENSEMBLES

DÉFINITION 2. Soit X un espace linéaire-topologique. L'espace X est dit du type Krein-Milman si chaque ensemble $A \subset X$ est fermé si et seulement si les ensembles de la forme $A \cap Z$ sont fermés pour tout ensemble Z compact dans X.

Il est facile de remarquer que chaque espace métrique possède la propriété de la définition 2. On peut vérifier que chaque espace de Banach avec la topologie faible satisfait à la condition de la définition 2.

THÉORÈME 5. Soit X un espace du type de Krein-Milman, soient A et $B \subset X$ des ensembles fermés. Si A et B satisfont à la condition de la couverture, alors la somme algébrique $A + B$ est l'ensemble fermé.

Démonstration. De l'hypothèse et de la définition 1 on déduit: pour tout ensemble Z compact dans X il existe des ensembles Z_1 et $Z_2 \subset X$ compacts tels que

$$(A + B) \cap Z \subset A \cap Z_1 + B \cap Z_2 \subset A + B,$$

d'où

$$(A + B) \cap Z \subset (A \cap Z_1 + B \cap Z_2) \cap Z \subset (A + B) \cap Z.$$

Cet inclusion nous donne l'egalité

$$(A \cap Z_1 + B \cap Z_2) \cap Z = (A + B) \cap Z.$$

Les ensembles $A \cap Z_1$ et $B \cap Z_2$ sont compacts. L'opération + est continue, d'où on résulte que l'ensemble $A \cap Z_1 + B \cap Z_2$, est compact.

Alors nous avons prouvé que l'ensemble $(A + B) \cap Z$ est compact, alors $(A + B) \cap Z$ est fermé pour tout Z compact. D'après la définition 2 la somme $A + B$ est fermée.

REMARQUE. Il est facile de regarder que les conditions suffisantes citées dans l'introduction résultent des théorèmes 2, 3, 5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dunford N., Schwartz J. T., Linear operator, Part I, New York 1958.

[2] Girsanov I.V., Lectures on mathematical theory of extremum problems, New York 1972.

[3] Joffe A. D., Tikhomirov V. M., Theory of extremal problems, Amsterdam-New York-Oxford 1979.

[4] Neustadt L. W., An abstract variational theory with applications

to broad class of optimization problems, I, II, STAM J. Control, 4 (1966) 505-527; 5 (1967), 90-137.

[5] W a l c z a k S., On some proprieties of cones in normed space and their applications to investigating extremal problems, J. Optim. Th. Applic., 42/4 (1984).

Institut de Mathématiques
Université de Łódź

Ryszarda Majchrzak, Bronisława Walczak

O PEWNEJ WŁASNOŚCI SUMY ALGEBRAICZNEJ
ZBIORÓW W PRZESTRZENI LINIOWO-TOPOLOGICZNEJ

W prezentowanym artykule podany jest warunek dostateczny na to, by suma algebraiczna domkniętych podzbiorów przestrzeni liniowo-topologicznej była zbiorem domkniętym.