Wydział Matematyki i Informatyki
U n i w e r s y t e t Ł ó d z k i

Anna Kimaczyńska

Streszczenie rozprawy doktorskiej "Operatory różniczkowe w wiązce tensorów symetrycznych na rozmaitości Riemanna"

Łódź, Czerwiec 2016

Przedmiotem rozważań rozprawy doktorskiej są pewne naturalne operatory różniczkowe w wiązce tensorów symetrycznych na rozmaitości Riemanna M wymiaru n. W szczególności badane są dwa operatory: gradient oraz dywergencja, których definicje są analogiczne do definicji gradientu i dywergencji w wiązce form skośnie-symetrycznych według H. M. Rummlera [HR]. Główną rolę w konstrukcji Rummlera odgrywa operator j określony na wiązce form skośnie-symetrycznych stopnia k, działający w wiązkę form stopnia $k-1$ o wartościach w wiązce stycznej. Analogicznie do operatora j określamy operator $\mathfrak{a}$, który również zależy od struktury riemannowskiej. Definiujemy dwa rodzaje śladu tr i $\tilde{\mathrm{tr}}$. Pierwszy jest podstawieniem, drugi zaś jest kontrakcją z metryką Riemanna. Oprócz tych trzech operatorów rzędu zerowego rozważamy operator różniczki symetrycznej $\mathrm{d^s}$, który jest operatorem różniczkowym rzędu pierwszego stanowiącym symetryczną część pochodnej kowariantnej Levi - Civity ∇ i w odróżnieniu od przypadku skośnie-symetrycznego zależącym od struktury riemannowskiej.

Definiujemy gradient następująco:

$$\mathrm{grad} = \mathfrak{a}\,\mathrm{d^s} - \mathrm{d^s}\,\mathfrak{a}.$$

Jest to operator różniczkowy rzędu pierwszego działający z wiązki tensorów symetrycznych stopnia k w wiązkę tensorów symetrycznych stopnia k o wartościach w wiązce TM. W przypadku, gdy $k=0$ powyższa definicja pokrywa się z definicją gradientu funkcji. Okazuje się, że gradient, podobnie jak $\mathrm{d^s}$, ma własność różniczkowania:

Dla $\varphi \in C^\infty(S^k)$ oraz $\psi \in C^\infty(S^l)$ mamy:

$$\mathrm{grad}\,(\varphi \odot \psi) = \mathrm{grad}\,\varphi \odot \psi + \varphi \odot \mathrm{grad}\,\psi.$$

Definiujemy dywergencję następująco:

$$\mathrm{div} = \mathrm{tr}\,\mathrm{d^s} - \mathrm{d^s}\,\mathrm{tr}\,.$$

Jest to operator różniczkowy rzędu pierwszego działający z wiązki tensorów symetrycznych stopnia k o wartościach w TM w wiązkę tensorów symetrycznych stopnia k. Jest on formalnie sprzężony do operatora $-\mathrm{grad}$ względem globalnego (całkowego) iloczynu skalarnego. Spełnia on analogiczną do gradientu własność:

Dla $\varphi \in C^\infty(S^k)$ oraz $\psi \in C^\infty(S^l \otimes T)$ mamy

$$\mathrm{div}\,(\varphi \odot \psi) = \varphi \odot \mathrm{div}\,\psi + \mathrm{grad}\,\varphi \odot \psi.$$

Złożenie gradientu i dywergencji jest operatorem różniczkowym rzędu drugiego, który - z dokładnością do znaku - jest klasycznym operatorem Bochner'a - Laplace'a:

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad} = \nabla^* \nabla.$$

Rozważamy również inny operator różniczkowy rzędu drugiego w wiązce tensorów symetrycznych:

$$\Delta^{\mathrm{s}} = \mathrm{d}^{\mathrm{s}\,*}\,\mathrm{d}^{\mathrm{s}} - \mathrm{d}^{\mathrm{s}}\,\mathrm{d}^{\mathrm{s}\,*}.$$

Operator ten jako pierwszy badał J. H. Samphson w kontekście teorii Chern'a w [S]. Ostatnio operator ten był rozważany przez Balcerzaka i Pierzchalskiego w [BaP] w kategorii algebroidów Liego. Ponadto Stepanov i Mikeš badali w [SM] tzw. *Yano rough Laplacian* - operator podobny do Δ^s, w przypadku 1-tensorów pod kątem jego własności spektralnych. Warto zauważyć, że ostatnio również Heil, Moroianu and Semmelmann w [HMS] badali pewne eliptyczne operatory w wiązce tensorów symetrycznych w kontekście tensorów Killinga i konforemnych tensorów Kilinga.

Interesujące jest, że $\operatorname{div}\operatorname{grad}$ i Δ^{s} różnią się, tak jak w przypadku skośnie-symetrycznym, o operator rzędu zerowego (tensor), zależny od krzywizny, tj. formuła a Weitzenböcka zachodzi również w wiązce tensorów symetrycznych:

$$\Delta^{\mathrm{s}} = -\operatorname{div}\operatorname{grad} - \mathfrak{R}.$$

Operatory $\operatorname{div}\operatorname{grad}$ oraz Δ^{s} są operatorami silnie eliptycznymi drugiego rzędu, zatem naturalne wydaje się badanie ich zachowania na brzegu. W szczególności interesujące jest skonstruowanie układu naturalnych warunków brzegowych w sensie Bransona - Pierzchalskiego (manuscript 2004). Reguła konstruowania takiego układu została opisana dla gradientów Steina - Weissa w [KP]. Stosując tą regułę określamy geometrycznie naturalny układ warunków brzegowych dla operatora $\operatorname{div}\operatorname{grad}$. W wiązce S^k tensorów symetrycznych stopnia k istnieje 2^{k+1} takich warunków. Wszystkie one zostały zbadane szczegółowo. W szczególności udowodniono, że każdy z nich jest samosprzężony oraz eliptyczny w sensie Gilkey - Smitha (cf. [PBG], [?]).

Jako wniosek otrzymano, że przy każdym z tych warunków brzegowych operator $\operatorname{div}\operatorname{grad}$ ma dyskretne spektrum. Co więcej, istnieje zupełny w L^2 układ gładkich cięć S^k spełniających ten warunek brzegowy. Dokładniej, możemy to sformułować następująco:

Dla każdego z rozważanych 2^{k+1} warunków brzegowych istnieje ciąg (Φ_n), $n = 1, \ldots$ gładkich cięć wiązki S^k na M, że

a) (Φ_n) jest zupełnym, ortonormalnym układem wektorów własnych w L^2

$$div\, grad\, \Phi_n = \lambda_n \Phi_n,$$

b) formy Φ_n spełniają warunek brzegowy, tj. $\Phi_n \in \Lambda^p_{\mathcal{B}}$,

c) wartości własne λ_n są rzeczywiste oraz

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Literatura

[BaP] B. Balcerzak, A. Pierzchalski, *Generalized gradients on Lie algebroids*, Ann. Global Anal. Geom. 44 (3) (2013), 319–337

[HF] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer – Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1969

[PBG] P. B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation and the Atiyah - Singer index theorem*, Publish or Perish, Wilmington, Delaware, 1984

[GS] P. B. Gilkey, L. Smith, *The Eta Invariant for a Class of Elliptic Boundary Value Problems*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 85-132

[GKM] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - NewYork, 1968

[HMS] K. Heil, A. Moroianu, U. Semmelmann, *Killing and conformal Killing tensors*, (preprint) arXive: 1512.03734v3

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry II*, Interscience Publishers, New York - London, 1969

[KP] W. Kozłowski, A. Pierzchalski, *Natural boundary value problems for weighted form Laplacians*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) Vol.VII (2008), 343-367

[N] R. Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds*, North-Holland, Amsterdam - New York - Oxford, 1968

[ØP] B. Ørsted, A. Pierzchalski, *The Ahlfors Laplacian on a Riemannian manifold with boundary*, Michigan Math. J. 43 (1996), 99-122

[R] H.M. Reimann, *A rotation invariant differential equation for vector fields*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 9 (1982), 160-174

[HR] H. M. Rummler, *Differential forms, Weitzenböck formulae and foliations*, Publicacions Matematiques 33 (1989), 543-554

[S] J. H. Sampson, *On a theorem of Chern*, AMS 177 (1973), 141–153

[SM] S. E. Stepanov, J. Mikeš, *The spectral theory of the Yano rough Laplacian with some of its applications*, Ann Glob Anal Geom 48 (2015), 37–46

[W] H. Weyl, *The classical groups*, Princeton University Press, 1946

[Y] Y. Yu, *The index theorem and the heat equation method*, Word Scientific, Singapore - New Jersey - London - Hong Kong, 2000

[Z] D. P. Zelobenko, *Compact Lie groups and their representations*, Translations of Mathematical Monographs 40, American Mathematical Society, 1973