

Hipoteza jod

Przez wieki nieskończoność funkcjonowała w matematyce jako wartość potencjalna. Nieskończoność aktualna nie była znana. Wraz z pojawieniem się nieskończoności aktualnych, a zwłaszcza mnogości tych nieskończoności, okazało się możliwym rozważenie nieskończenie małych wielkości generowanych przez te nieskończoności. Można wręcz zaryzykować stwierdzenie, że istnienie nieskończonej ilości różnych, nieskończenie małych wielkości jest prostą konsekwencją istnienia nieskończenie wielu, różnych liczb nieskończonych. W pracy została podjęta próba rozróżnienia nieskończonej ilości wartości potencjalnie zerowych, które dotychczas kryją się pod postacią jednej aktualnej wartości zera. Tradycyjnie, to jedno aktualne zero jest rozumiane jako odwrotność wszystkich liczb nieskończonych. Jednak każda liczba nieskończona jest różna od pozostałych, co oznacza, że odwrotności każdej z tych liczb winna odpowiadać inna, nieskończenie mała liczba. Idea niezerowych odwrotności liczb nieskończonych nie jest nowa. Pojawiła się wraz z teorią liczb nadrzeczywistych (ang. *hyperreal numbers*) będących ważnym, właściwym podzbiorem zbioru liczb surrealnych (ang. *surreal numbers*)¹. Tak więc wydaje się, że nieskończona klasa wartości nieskończonych powinna wymagać swego odpowiednika w postaci również nieskończonej klasy wartości odpowiadających ich odwrotnościom, czyli wartościom potencjalnie zerowym. Tak jak potencjalna nieskończoność została zastąpiona klasą aktualnych nieskończoności, tak aktualne zero powinno zostać zastąpione klasą potencjalnych zer, czyli klasą liczb infinitezymalnych – liczb zarazem większych od zera i mniejszych od dowolnej liczby rzeczywistej².

Celem tej pracy jest przedstawienie hipotezy zakładającej fraktalną strukturę osi liczbowej oraz wynikającą z tego założenia względność takich pojęć, jak „ciągłość” czy „gęstość”. Istnienie wielkości infinitezymalnych wydaje się

¹ Patrz Conway, Guy 1998; [1], [2]. Teoria liczb nadrzeczywistych poza wspomnianą niezerowością odwrotności liczb nieskończonych nie ma jednak związku z zaproponowaną w pracy hipotezą.

² Patrz [1].

być nie do pogodzenia z wiarą zarówno w bezwzględną ciągłość, jak i w bezwzględną gęstość zbioru liczb rzeczywistych.

Ponadto w pracy jest postawione otwarte pytanie dotyczące nieistnienia najmniejszej nieskończoności. Schodzenie w dół struktury fraktalu, jakim jest oś liczbowa, może przecież zostać odwrócone i w efekcie zastąpione przez wspinanie się wzwyż tej samej fraktalnej struktury³. Proces ten nieuchronnie generuje nieskończenie wiele nieskończoności mniejszych od $\aleph_0$. Naturalnie, pojmowanie osi liczbowej jako fraktalu nie pociąga za sobą konieczności uznania klasy nieskończoności mniejszych od $\aleph_0$. Wystarczy bowiem przyjąć, że oś liczbowa jest fraktalem z nieskończoną co prawda ilością poziomów, jednak wśród nich istnieje poziom pierwszy, odpowiadający właśnie liczbie $\aleph_0$.

1. Paradoks osi liczb rzeczywistych

Jedną z dających się sformułować postaci paradoksu osi liczb rzeczywistych jest następujące rozumowanie:

■ Paradoks osi liczbowej

„Ilość liczb wymiernych to $\aleph_0$, zaś niewymiernych c . Ponieważ $\aleph_0 < c$, więc liczb niewymiernych jest istotnie więcej niż liczb wymiernych. Jak jest więc możliwe, aby między dowolnymi dwiema liczbami niewymiernymi (zawsze) istniała liczba wymierna?”

Naturalnie, można stwierdzić, że w przypadku zbiorów nieskończonych tradycyjna intuicja zawodzi i w związku z tym istnieje wiele faktów, które mogą uchodzić za paradoksalne. Wydaje się jednak, że przytoczone wyżej rozumowanie pozostaje paradoksalnym nawet w kontekście wszystkich istotnych „nieintuicyjnych” faktów dotyczących zbiorów nieskończonych.

³ Fraktal jest zbiorem o szczególnie skomplikowanej budowie. Dowolnie mały jego fragment jest tak samo skomplikowany jak całość. Fraktal jest konstrukcją wykazującą tak zwane „nieskończone samopodobieństwo”. Oznacza to, że dowolnie mały jego kawałek, odpowiednio powiększony, przypomina do złudzenia cały zbiór lub jego znaczną część. Jednocześnie fraktale mają prosty opis i często są otrzymywane przez powtarzanie nieskończenie wiele razy tej samej operacji. Teoria fraktali powstała na początku XX w. jako skutek badań matematycznych nad definicją wymiaru i definicją krzywej. Najbardziej znanymi, a zarazem jednymi z najprostszych, fraktalami są: trójkąt Sierpińskiego, dywan Sierpińskiego i piramida Sierpińskiego; patrz: internetowa strona Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, <http://www.mini.pw.edu.pl>.

Mogłoby się na przykład wydawać, że paradoksalność wyżej przedstawionego rozumowania znika wraz z uświadomieniem sobie faktu gęstości zbioru liczb wymiernych:

„Dla dowolnych dwóch różnych liczb wymiernych a i b istnieje liczba c taka, że $a < c < b$ ”.

Cóż jednak z tego, skoro zbiór liczb niewymiernych również jest gęsty w tym samym znaczeniu słowa „gęsty”. Niewyobrażalna wręcz różnica w ilości liczb wymiernych i niewymiernych sugeruje, że zbiór liczb niewymiernych powinien być „znacznie bardziej gęsty” niż zbiór liczb wymiernych. Z drugiej jednak strony, obowiązuje twierdzenie głoszące, że między dowolnymi dwiema różnymi liczbami niewymiernymi zawsze istnieje liczba wymierna. Jak widać, uwzględnienie gęstości obu zbiorów nie rozwiązuje paradoksu osi liczbowej.

Propozycję rozwiązania tego paradoksu poprzedźmy analizą niezwykle prostego problemu. Rozważmy dwa zbiory: $A = \{k: k = 5n, \text{ dla } n \in \mathbb{N}\}$ oraz $B = \mathbb{N} \setminus A$, gdzie $\mathbb{N}$ jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Przy mniej precyzyjnym zapisie zbiory te mają postać: $A = \{0, 5, 10, 15, \dots\}$ oraz $B = \{1, 2, 3, 4, 6, \dots\}$. Łatwo zauważyć, że prawdziwe jest:

ZDANIE 1: *„Dla dowolnych dwóch różnych liczb a i b należących do zbioru A , jeśli $a < b$, to istnieje taka liczba c należąca do zbioru B , że $a < c < b$ ”.*

Nie jest natomiast prawdą:

ZDANIE 2: *„Dla dowolnych dwóch różnych liczb a i b należących do zbioru B , jeśli $a < b$, to istnieje taka liczba c należąca do zbioru A , że $a < c < b$ ”.*

Jednoczesna prawdziwość obu zdań wymagałaby tego, aby po każdej liczbie jednego zbioru istniała liczba drugiego zbioru. Brak tej naprzemienności sprawia, że któreś ze zdań 1, 2 musi być fałszywe. Zauważmy bowiem, że jeśli następną, ze względu na wielkość, po liczbie $a \in B$ jest liczba $b \in B$, to dla tych właśnie liczb a i b nie istnieje w zbiorze A liczba leżąca na osi liczbowej między nimi.

Bardzo dobrze znane są następujące twierdzenia dotyczące liczb wymiernych i niewymiernych:

TWIERDZENIE 1. *Między dowolnymi dwiema różnymi liczbami niewymiernymi istnieje liczba wymierna (istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych).*

TWIERDZENIE 2. *Między dowolnymi dwiema różnymi liczbami wymiernymi istnieje liczba niewymierna (istnieje nieskończenie wiele liczb niewymiernych).*

TWIERDZENIE 3. *W dowolnie małym otoczeniu liczby niewymiernej istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych.*

TWIERDZENIE 4. *W dowolnie małym otoczeniu liczby wymiernej istnieje nieskończenie wiele liczb niewymiernych.*

Doskonale wiemy, że zbiór wszystkich liczb wymiernych Q stanowi dyskretny podzbiór zbioru wszystkich liczb rzeczywistych, zaś liczebność zbioru liczb rzeczywistych R , a więc i niewymiernych NQ – to tak zwane *continuum c*. Aby więc prawdą były twierdzenia 1 i 2, powinna mieć miejsce swoista naprzemiennność liczb wymiernych i niewymiernych na osi liczbowej. Porównując liczebność obu zbiorów, musimy jednak taką naprzemiennność wykluczyć. Co więcej, skoro moc zbioru NQ jest c , zaś moc zbioru Q , to $\aleph_0$, muszą istnieć takie dwie liczby wymierne między, którymi powinien znajdować się cały (ciągły) przedział liczb niewymiernych. Przeczy to jednak prawdziwości twierdzeń 1 i 3.

Istnieje więc sprzeczność między twierdzeniem 1 a wiedzą dotyczącą liczebności zbiorów Q i NQ .

Wykorzystując przedstawiony wyżej przykład, warto spróbować odpowiedzieć na pytanie:

Pod jakim warunkiem mamy zagwarantowaną jednoczesną prawdziwość zdań 1 i 2, mimo niezmienionej postaci zbiorów A i B ?

Przyjmijmy, że z jakichś powodów nie jesteśmy w stanie operować odległościami mniejszymi niż 5. Wówczas, w zbiorze B jesteśmy w stanie odróżnić liczbę 1 dopiero od liczby 6. Odległość liczby 1 od liczb 2, 3, 4, 5 jest dla nas praktycznie równa zero. Tym samym, nie ma dla nas sensu operowanie takim wyrażeniem, jak na przykład: „między liczbą 1 a liczbą 4”. Jeśli więc używamy wyrażenia „między liczbą a , a liczbą b ”, to mamy na myśli liczby odległe od siebie o co najmniej 5. W takiej sytuacji zmianie uległo wyrażenie stwierdzające różność dwóch liczb. Od liczby 1 różna nie jest ani liczba 2, ani 3, ani 4, ani 5. Od liczby 1 różne są dopiero wszystkie liczby większe od liczby 5, a zatem 6, 7, 8, itd. Widać, że przy takim rozumieniu wyrażen „między” oraz „różny” prawdziwe są oba zdania – tak 1, jak i 2. Zdanie 1 z oczywistych powodów pozostaje prawdą. Teraz jednak prawdziwe jest również:

ZDANIE 2. *„Dla dowolnych dwóch różnych liczb a i b należących do zbioru B , jeśli $a < b$, to istnieje taka liczba c należąca do zbioru A , że $a < c < b$ ”.*

Przykład analizowanych wyżej dwóch zbiorów A i B pokazuje, że jednoczesna prawdziwość dwóch twierdzeń głoszących wzajemnie, że między

dwoma dowolnymi różnymi liczbami jednego zbioru, zawsze istnieje liczba drugiego zbioru, może być niemożliwa do zaakceptowania nawet w przypadku, gdy oba zbiory są tej samej mocy. Fakt ten jest oczywisty i może być bez najmniejszego trudu zilustrowany na wiele różnych sposobów, np. A – zbiór liczb naturalnych parzystych, B – zbiór liczb naturalnych nieparzystych bez liczby 7; A – zbiór liczb pierwszych, B – zbiór liczb naturalnych nie-pierwszych; A – zbiór liczb wymiernych, w których zapisie uproszczonych postaci ułamkowych nie występuje liczba 3 (np. $5/19$, $27/11$), $B = (Q - A) - [1/555, 1/554]$ (np. $1/23$, $3/77$).

Skoro więc naprzemiennosc dwóch zbiorów jest czymś więcej niż równoliczność tych zbiorów, czy faktycznie możliwa jest do pomyślenia naprzemiennosc dwóch zbiorów, z których jeden jest w istotny sposób liczniejszy od drugiego, nawet przy założeniu ich gęstości? Ponadto pojawia się obawa, czy z założenia gęstości zbioru nie zwykliśmy wyciągać zbyt daleko idących wniosków? Czy fakt gęstości zbioru nie dostarcza usprawiedliwienia, które ułatwia akceptację zbyt wielu twierdzeń. Może gęstość zbioru znaczy mniej, niż przypuszczamy?

2. Paradoks liczb nieskończonych

Przyjęcie istnienia klasy różnych liczb nieskończonych bez jednoczesnego założenia istnienia odpowiadającej jej klasy liczb nieskończenie małych nieuchronnie prowadzi do trudności, którą można wyrazić następująco:

■ Paradoks alefów

„Odwrotności dowolnych dwóch różnych liczb są liczbami różnymi. Wartości nieskończone $\aleph_0$, c , 2^c , ... są różnymi liczbami. Mimo to, wszystkie te liczby mają wspólną odwrotność: zero”.

Przyjmijmy zatem istnienie odpowiadającej klasie wszystkich liczb nieskończonych generowanych przez operację potęgowania klasę jod, wielkości niewyobrażalnie małych:

$$\gamma_0 = 1/\aleph_0, \gamma_1 = 1/c, \gamma_2 = 1/(2 \uparrow c), \gamma_3 = 1/(2 \uparrow (2 \uparrow c)), \gamma_4 = 1/(2 \uparrow (2 \uparrow (2 \uparrow c))), \dots^4$$

Wybór hebrajskiej litery γ (jod) nie jest przypadkowy i nawiązuje do dokonanego kiedyś przez Georga Cantora wyboru innej hebrajskiej litery $\aleph$

⁴ $a \uparrow b = ab$.

(alef) na określenie wartości nieskończonej. Ponieważ rozważania nasze dotyczą niezwykle małych wartości, wśród różnych liter hebrajskiego alfabetu najlepszym kandydatem wydaje się być właśnie joda, która w europejskiej kulturze, od wieków jest symbolem czegoś bardzo małego.

Naturalnie, skoro:

$$\aleph_0 < c < 2\uparrow c < 2\uparrow(2\uparrow c) < 2\uparrow(2\uparrow(2\uparrow c)) < 2\uparrow(2\uparrow(2\uparrow(2\uparrow c))) < \dots,$$

więc

$$\uparrow_0 > \uparrow_1 > \uparrow_2 > \uparrow_3 > \uparrow_4 > \uparrow_5 > \dots > 0.$$

Zauważmy, że każda z jod, poczynwszy od pierwszej jody zero, spełnia definicję wielkości infinitezymalnych: jest jednocześnie liczbą dodatnią (większą od zera) i zarazem mniejszą od dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej⁵. Istotnie, skoro dla dowolnej liczby rzeczywistej r , $r < \aleph_0$, więc $1/r > \uparrow_0$ (z dowolności liczby rzeczywistej r wynika, dowolność liczby rzeczywistej $1/r$).

Wszystkie jody są liczbami różnymi od zera, jednak na tyle małymi, że ich różność od zera jest niewyraźna za pomocą liczb wymiernych. Nie może przecież istnieć ułamek p/q taki, że p i q są liczbami całkowitymi (należącymi do zbioru $\mathbb{C}$), q jest liczbą niezerową oraz $p/q = \uparrow_k$ dla jakiegokolwiek $k \in \mathbb{N}$. Tak więc, z punktu widzenia liczb wymiernych, $\uparrow_0$ praktycznie jest zerem, należałoby jednak rzec zerem potencjalnym. Podobnie każda z pozostałych jod jest jedynie zerem potencjalnym, nie zaś aktualnym.

Założenie różności od zera odwrotności wspomnianych liczb nieskończonych ma swoje istotne konsekwencje. Przyjmując bowiem niezerowość jody zero, należy uznać, że – dla przykładu – granicą ciągu $\{1/n\}_n$ nie jest zero, lecz właśnie $\uparrow_0$. Każda podstawiona w miejsce zmiennej n niezerowa liczba naturalna jest przecież mniejsza od $\aleph_0$. Oznacza to, że bez względu na liczbę n , $1/n$ zawsze przyjmuje wartość większą od $\uparrow_0$. Dlatego też,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = \uparrow_0 > 0.$$

Nie dysponując jodami uważamy, że granicą tego ciągu jest zero, chociaż tak naprawdę granicą tą jest $1/\aleph_0$. Jeśli $1/\aleph_0$ byłoby zerem, to tym bardziej zerem byłyby odwrotności wszystkich pozostałych liczb nieskończonych: $1/c$, $1/(2\uparrow c)$, ...

Inną konsekwencją hipotezy jod jest konieczność przyjęcia, iż wartość ułamka okresowego $0,(9)$ nie jest równa 1 . Naturalnie, argumentu za podobnym rozróżnieniem obu liczb nie dostarcza fakt, iż obie liczby różnią się zapisem, i to w sposób dość istotny: $0,99999\dots$ oraz $1,00000\dots$. Należy bowiem zauważyć, że liczba $0,(9)$ jest granicą ciągu $\{1 - 1/10^n\}$, który zgodnie

⁵ Liczba $x \neq 0$ jest infinitezymalna (ang. *infinitesimal*) wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna skończona suma $|x| + \dots + |x|$ ma wartość mniejszą od 1, patrz Conway, Guy 1998.

z hipotezą jod nie jest zbieżny do liczby 1, lecz do $1 - 1/\aleph_0$, czyli do liczby $1 - \gamma_0$. Zatem:

$$0,(9) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/10^n) = 1 - \gamma_0 < 1.$$

Przypomnijmy, że już od uczniów szkół podstawowych wymagana jest umiejętność zamiany ułamków okresowych na zwykłe – zamiana ułamków zwykłych na okresowe jest banalna. Tak więc, uczeń kończący szkołę podstawową winien wiedzieć, że na przykład:

$$\begin{array}{lll} 0,(1) = 1/9 & 0,(01) = 1/99 & 0,(001) = 1/999 \\ 0,(2) = 2/9 & 0,(30) = 30/99 = 10/33 & 0,(030) = 30/999 = 10/333 \\ 0,(6) = 6/9 = 2/3 & 0,(55) = 55/99 & 0,(055) = 55/999 \\ 0,(7) = 7/9 & 0,(81) = 81/99 = 9/11 & 0,(810) = 810/999 = 90/111 \end{array}$$

Problemem jest jednak każdy ułamek posiadający w okresie liczbę 9. Stosując powyższy algorytm można łatwo obliczyć, że:

$$0,(9) = 9/9 = 1.$$

O ile jednak każdy z ułamków okresowych, których okresem nie jest liczba 9 daje się otrzymać jako wynik podzielenia licznika przez mianownik odpowiedniego ułamka zwykłego, np. dzieląc 1 przez 9 otrzymamy $0,111111\dots$, o tyle nie sposób w analogiczny sposób otrzymać liczbę $0,999999\dots$. Trudność ta dotyczy każdego ułamka posiadającego w okresie liczbę 9, np. $5,(9)$; $14,5694(9)$; $0,000(9)$; $1,89898(9)$.

Tak więc, odrzucenie założenia, iż odwrotność alefa zero jest wartością niezerową, jest równoważne przyjęciu, że $0,(9) = 1$. Co więcej, już samo działanie na liczbach wymiernych jest *de facto* odrzuceniem niezerowości odwrotności alefa zero – w świecie liczb wymiernych odwrotność alefa zero jest po prostu zerem.

3. Następnik liczby wymiernej

Hipoteza jod ma jednak znacznie bardziej zaskakujące konsekwencje. Rozważane w poprzednim paragrafie dwa ciągi są, zgodnie z teorią jod, zbieżne odpowiednio do liczb γ_0 oraz $1 - \gamma_0$. Spróbujmy więc znaleźć odpowiedzi na dwa następujące pytania:

Czy istnieje liczba wymierna większa niż 0 i mniejsza niż γ_0 ?

Czy istnieje liczba wymierna większa niż $1 - \gamma_0$ i mniejsza niż 1?

Naturalnie, odpowiedzią na każde z tych pytań, zgodną z zaproponowaną tu hipotezą, jest NIE. W pierwszym przypadku nie jest możliwe dodanie do zera takiej liczby wymiernej, aby w konsekwencji otrzymać liczbę większą od 0 i mniejszą niż γ_0 . W drugim przypadku nie istnieje napis w postaci rozwinięcia dziesiętnego reprezentujący liczbę większą od $0,(9)$ i mniejszą niż 1.

Zatem, w świetle powyższych rozważań, można przyjąć, że w świecie liczb wymiernych poszerzonym o niezerową jodę zero, γ_0 jest następnikiem liczby 0, zaś 1 jest następnikiem liczby $0,(9)$. Co więcej, dla dowolnej liczby wymiernej a , jej nie do końca „wymiernym” następnikiem jest $a + \gamma_0$. Należy bowiem podkreślić, że ponieważ liczba γ_0 nie jest wyrażalna za pomocą ułamka p/q , gdzie $p \in C$, $q \in C - \{0\}$, więc liczba $a + \gamma_0$ jest „wymiernym” następnikiem liczby a niewyrażalnym w świecie liczb wymiernych – liczba γ_0 wyraża największą odległość, w promieniu której nie ma innej liczby wymiernej⁶.

Rozważmy zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych Q^+ . Oczywiście, zastąpienie w naszych rozważaniach zbioru Q zbiorem Q^+ nie ma innego znaczenia jak tylko wygodę i prostotę zapisu. Ponieważ liczebność zbioru Q^+ to $\aleph_0$ możemy więc ustawić wszystkie elementy tego zbioru w ciąg:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

Naturalnie, istnieje nieskończenie wiele permutacji ciągu $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$. Czy wśród nich jest dokładnie jedna

$$q_1, q_2, q_3, \dots$$

spełniająca następujący warunek:

$$\forall x, y \text{ (jeśli } (x, y \in \{q_1, q_2, q_3, \dots\} \text{ i } x \neq y), \text{ to } (x = q_i < q_j = y \text{ wtw } i < j))?$$

Skoro są wszystkie możliwe permutacje, to może powinna być i ta jedna szczególna. Jeśli tak, to ciąg $\{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ jest zbiorem wszystkich dodatnich liczb wymiernych ustawionych w kolejności wzrastania. Naturalnie $q_1 = 0$. Ponadto, ciąg ten ma niezwykłą własność:

„między dowolnymi dwiema kolejnymi liczbami wymiernymi ciągu $\{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ nie ma innych liczb wymiernych”.

⁶ Słowo „wymierny” w wyrażeniu „wymierny” następnik”, ma sygnalizować względność pojęcia następnika. Jeśli bowiem uwzględnimy kolejne jody, mniejsze od γ_0 , to natychmiast okaże się, że istnieje nieskończenie wiele liczb w otoczeniu dowolnej liczby wymiernej o promieniu równym jod zero.

Istotnie, skoro ciąg $\{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ zawiera wszystkie dodatnie liczby wymierne, a q_{n+1} jest większe niż q_n , to nie istnieje taka liczba wymierna q , że

$$q_n < q < q_{n+1}.$$

Dla każdej liczby wymiernej q_n ($n \in \{1, 2, 3, \dots\}$), liczba q_{n+1} jest więc jej następnikiem. Ponadto, dla dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{albo } q_{n+1} - q_n = '0, \quad \text{albo } q_{n+1} - q_n > '0.$$

Jeśli przyjmimy, że $q_{n+1} - q_n = '0$, to jod zero okaże się liczbą wymierną niewyrażalną w postaci ułamka p/q , różnych od zera liczb naturalnych p, q . Dla prostoty dalszej analizy przyjmijmy tę właśnie równość⁷.

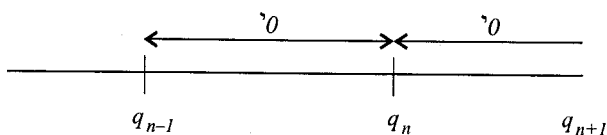
4. Fraktal osi liczbowej, czyli względność ciągłości

Analizowany w pierwszym paragrafie przykład ilustrował sytuację polegającą na tym, że uwzględnianie jedynie takich odległości, które są większe od pewnej danej wartości, sprawia, iż możliwe do udowodnienia staje się, fałszywe skądinąd, twierdzenie mówiące, że między dwiema dowolnie wybranymi liczbami zbioru bardziej licznego zawsze istnieje liczba (a nawet nieskończenie wiele liczb) zbioru istotnie mniej licznego. Jeśli uwzględnimy hipotezę jod, ten paradoksalny fakt nie daje się już udowodnić, przynajmniej w tak mocnej wersji.

Założyliśmy, że najmniejsza, w sensie wyrażalności za pomocą liczb wymiernych oraz jody zero, odległość między liczbami wymiernymi wynosi $'0$. Tę odległość nazwiemy *Q-pod-mierzalną*; każdą odległość wyrażalną w liczbach wymiernych lub nieskończonych nazwiemy odległością *Q-mierzalną*; każdą zaś odległość mniejszą od *Q-pod-mierzalnej* będziemy nazwać *Q-niemierzalną*.

Z perspektywy wielkości wyrażonej przez jodę zero, oś liczbową jest zbiorem przedziałów liczb niewymiernych, na krańcach których znajdują się (pojedyncze) liczby wymierne, oddalone od siebie o odległości *Q-pod-mierzalne* wyrażające długości tych przedziałów. Innymi słowy, oś liczbową jest dyskretnym zbiorem liczb wymiernych oddzielonych od siebie przedziałami liczb niewymiernych:

⁷ Dalsze rozważania są również możliwe przy założeniu, że $q_{n+1} - q_n > '0$. Co więcej, z punktu widzenia poruszanych dalej kwestii, różnice wynikające z przyjęcia tego lub drugiego z dwóch możliwych założeń nie są istotne.



Przy takim podejściu, nie jest prawdą, zdanie:

„Między dowolnymi dwiema różnymi liczbami niewymiernymi istnieje liczba wymierna (istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych)”;

prawdziwe jest natomiast:

TWIERDZENIE.

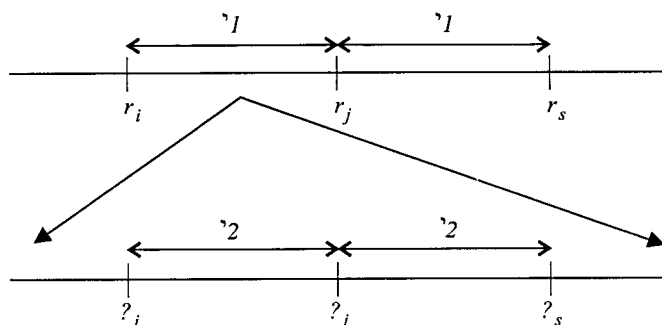
- a) *Między dowolnymi dwiema liczbami niewymiernymi takimi, że odległość między nimi jest Q -mierzalna istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych.*
- b) *Istnieją takie dwie różne liczby niewymierne oddalone od siebie o odległość Q -nie-mierzalną, między którymi nie ma liczby wymiernej.*

Poszukując odległości wyrażonej przez γ_1 , rozważmy teraz przedział otwarty, którego krańcami są dowolne dwie kolejne liczby wymierne: q_n i q_{n+1} . Do tego zbioru należą wszystkie liczby niewymierne większe od q_n i mniejsze od q_{n+1} , i nie należy żadna liczba wymierna. Rozumując analogicznie do przypadku liczb wymiernych, dochodzimy do wniosku, że odwrotności continuum c winna odpowiadać wartość potencjalnie zerowa z punktu widzenia liczb rzeczywistych, których jest właśnie c . Aktualnie wartość ta jest oczywiście różna od zera:

$$\gamma_1 = 1/c > 0.$$

Jest to więc wielkość będąca odległością między kolejnymi dwiema liczbami niewymiernymi, którą konsekwentnie nazwiemy *NQ-pod-mierzalną*. Oczywiście operowanie wielkościami większymi od *NQ-pod-mierzalnych* sprawia, że nie dostrzegamy jakichkolwiek odległości między kolejnymi liczbami niewymiernymi, mówiąc ściślej: nie jesteśmy w stanie nawet o tych odległościach pomyśleć. Nie tylko z punktu widzenia wielkości Q -mierzalnych, ale również z perspektywy wielkości Q -pod-mierzalnych, γ_1 jest zerem. Jeśli jednak uwzględnimy ten kolejny rodzaj wielkości potencjalnie zerowych, stwierdzimy, że między dowolnymi dwiema kolejnymi liczbami niewymiernymi jest cały przedział liczb nie będących liczbami rzeczywistymi, a których ilość jest równa $2^{\uparrow}c$.

Mamy więc kolejne szczeble w drodze do zera aktualnego:



Oczywiście pojęcie ciągu wiąże się ściśle ze zbiorami o mocy $\aleph_0$. Jeśli jest więc mowa o kolejności liczb niewymiernych $r_i, r_j, r_s, \dots$, nie jest to kolejność rozumiana w sensie iteracji liczbami naturalnymi. Tym bardziej pojęcie ciągu ulega zmianie na każdym różnym od wymiernego poziomie.

Moc znanych nam zbiorów liczbowych, którymi zwykliśmy operować, nie jest większa niż c . Liczby rzeczywiste stanowią największy świat liczb, jakimi operujemy. Nie oznacza to jednak, że nie istnieje daleko potężniejszy świat liczb pod-rzeczywistych. Zaproponowana tutaj hipoteza jod zakłada, iż na oś liczbową możemy spojrzeć jak na zbiór nie tylko liczb naturalnych, wymiernych i rzeczywistych, ale jak na zbiór zawierający w sobie kolejne nienazwane liczby ze zbiorów o mocy $2^{\uparrow c}$, $2^{\uparrow(2^{\uparrow c})}$, $2^{\uparrow(2^{\uparrow(2^{\uparrow c})})}$, $2^{\uparrow(2^{\uparrow(2^{\uparrow(2^{\uparrow c})})})}$,... Aby jednak dostrzec kolejne nieznane nam liczby, należy „włożyć odpowiednie okulary”. Okulary te sprawiają, iż zaczniemy dostrzegać odpowiednio małe, a ściślej mówiąc, nieskończenie małe, infinytezymalne wartości, wartości niewyrażalne za pomocą liczb wymiernych⁸. Analiza matematyczna od dawna operuje wartościami nieskończenie małymi. Z punktu widzenia naszego podejścia, wartości te nie zasługują jednak na swoją nazwę. Są to bowiem wartości bardzo małe, ale jednak wyrażalne przy pomocy liczb wymiernych, a więc nie nieskończenie małe. Tylko wówczas, gdy operujemy tak dużymi wielkościami jak te, które są wyrażalne liczbami wymiernymi, możemy udowodnić twierdzenia 1 oraz 3. Otoczenie liczby niewymiernej jest wówczas na tyle wielkie, że mieści w sobie nieskończoną ilość liczb wymiernych.

Aby wejść w świat kolejnych coraz to potężniejszych zbiorów liczb pod-rzeczywistych, należy operować wielkościami nie dającymi się wyrazić za pomocą liczb wymiernych, czyli wielkościami mniejszymi niż Q-pod-

⁸ Wielkość nieskończenie mała w analizie matematycznej to dowolnie mała wielkość wymierna. W tym sensie wielkość infinytezymalna to nie to samo co wielkość nieskończenie mała. „Wielkość nieskończenie mała” jest więc pojęciem względnym, zależnym od tego, na jakim poziomie fraktalu się znajdujemy. Lepiej jest więc operować pojęciem „wielkości infinytezymalnej”.

-mieralne. Z punktu widzenia świata wielkości Q-mierzalnych, czyli tych dających się wyrazić liczbami wymiernymi lub nieskończonymi, wszystkie wielkości mniejsze, czyli co najwyżej Q-pod-mierzalne, są postrzegane jako zera, choć nimi nie są.

Można pokusić się o stwierdzenie natury ogólniejszej: z punktu widzenia świata liczb tworzących zbiór o mocy $m = 2^{\aleph(\dots(2^{\aleph c}))}$, świat liczb tworzących zbiór $2^{\aleph m}$ wydaje się być zbiorem ciągłym, a więc zbiorem między liczbami którego nie ma niezerowych odległości. Odległości te pojawiają się, jeśli tylko zejdziemy w głąb osi liczbowej na kolejny niższy stopień, poprzez zwiększenie zbioru niezerowych wielkości o nową, kolejną jodę.

Zgodnie z przedstawioną koncepcją, oś liczbową jest więc fraktalem, czyli strukturą nieskończenie samopodobną. Wielostopniowość tej struktury ma tę cechę, iż na każdym poziomie wygląda ona tak samo. Gdy patrzymy na nią z perspektywy wielkości Q-wymiernych, widzimy, że jest ona ciągłym zbiorem liczb niewymiernych „od czasu do czasu poprzerzywanym” izolowanymi (pojedynczymi) liczbami wymiernymi. Okazuje się jednak, że patrząc na oś liczbową z perspektywy niezerowych odległości między kolejnymi liczbami niewymiernymi, widzimy, że jest ona ciągłym zbiorem jakichś liczb pod-rzeczywistych poprzerzywanym izolowanymi (pojedynczymi) liczbami niewymiernymi. Oznacza to, że obraz osi liczbowej jest z obu perspektyw identyczny. W kolejnych krokach schodzenia w świat coraz to mniejszych wielkości oś liczbową staje się ciągłym zbiorem liczb pod $^{n+1}$ -rzeczywistych poprzerzywanym pojedynczymi liczbami pod n -rzeczywistymi. Tak więc, na każdym poziomie oś liczbową wygląda tak samo.

Fraktalna struktura osi liczbowej wyklucza bezwzględną ciągłość któregośkolwiek ze zbiorów liczbowych. O ciągłości można mówić jedynie w kontekście określonego poziomu fraktalu. Każdy zbiór liczb mocy $2^{\aleph m} = 2^{\aleph(2^{\aleph(\dots(2^{\aleph \aleph_0)}))}$ jest ciągły jedynie na tym poziomie, który jest najwyższym spośród wszystkich tych poziomów, dla których $1/m$ jest wielkością odróżnialną od zera.

5. Czy fraktal osi liczbowej ma poziom pierwszy?

Z perspektywy teorii jod, oś liczbową jest fraktalem. Nie jest jednak przesądzone, czy fraktal ten ma poziom pierwszy, czy też nie. Można więc przyjąć zarówno to założenie, które zakłada, iż poziom liczb wymiernych jest pierwszym i zarazem najwyższym poziomem fraktalu osi liczbowej, jak i założenie, zgodnie z którym, fraktal osi liczbowej nie ma poziomu pierwszego – każdy poziom jest jednocześnie „nad” nieskończoną liczbą jednych i „pod” nieskończoną liczbą innych poziomów.

Odrzucając założenie, że fraktal ma poziom pierwszy, przyjmujemy istnienie takiego poziomu, na którym zbiór liczb wymiernych jest zbiorem ciągłym poprzerzywanym izolowanymi liczbami nad-wymiernymi. Z perspektywy tego poziomu liczby niewymierne są niedostrzegalne. Pogląd odrzucający istnienie poziomu pierwszego fraktalu osi liczbowej jest o tyle uzasadniony, iż nie istnieje taki skończony zbiór, którego np. zbiór potęgowy byłby równoliczny ze zbiorem liczb wymiernych: zbiór potęgowy jakiegokolwiek zbioru skończonego nie ma mocy nieskończonej, choćby tej najmniejszej ze znanych. Co więcej, nie ma operacji, która wykonana na zbiorach skończonych dawałaby zbiór nieskończony. Innymi słowy, istnieje przepaść między światem wartości skończonych a światem wartości nieskończonych. Tymczasem przejście na wyższy poziom fraktalu jest równoznaczne z wejściem w świat jakichś liczb nad-wymiernych tworzących zbiór nieskończony o mocy mniejszej niż $\aleph_0$. Tę nową moc zbiorów nieskończonych oznaczmy $\aleph_{-1}$. Wprost z przyjętych założeń wynika, że:

$$\aleph_0 = 2^{\aleph_{-1}}.$$

Oznacza to, że liczb nad-wymiernych jest nieskończenie wiele, ale istotnie mniej niż liczb wymiernych. Stosunek ilości liczb nad-wymiernych do ilości liczb wymiernych ma się tak jak stosunek liczb wymiernych do liczb niewymiernych, czyli również tak jak liczb podⁿ-rzeczywistych do liczb podⁿ⁺¹-rzeczywistych. Proces odwrotny do potęgowania zbiorów możemy więc kontynuować dalej, uzyskując w efekcie ciąg malejących wartości nieskończonych:

$$\dots < \aleph_{-5} < \aleph_{-4} < \aleph_{-3} < \aleph_{-2} < \aleph_{-1} < \aleph_0$$

takich, że dla $n \in \mathbb{N}$,

$$\aleph_{-n} = 2^{\aleph_{-n-1}}.$$

Naturalnie i te nieskończoności winny mieć swoje, wzajemnie różne od siebie odwrotności:

$$\dots, \imath_{-3} = 1/\aleph_{-3}, \imath_{-2} = 1/\aleph_{-2}, \imath_{-1} = 1/\aleph_{-1}.$$

Jednak z perspektywy liczb wymiernych trudno byłoby liczby te zaliczyć do wielkości infinitezymalnych. Jaką więc wielkością z punktu widzenia świata liczb wymiernych jest $\imath_{-1}$ joda minus jeden? Czy jest ona wartością skończoną, czy może już nieskończoną? Czy jody nie przechodzą w wielkości nieskończone, a wielkości nieskończone w jody? Być może to, że pewne liczby zaliczamy do liczb nieskończonych, inne zaś do jodów, wynika wyłącznie z naszej perspektywy liczb wymiernych?

Nieskończoność nieraz już pokazała, iż intuicje z nią związane są mylące i znacznie upraszczające to, co się za jej pojęciem kryje. Czyż jest więc wykluczone, aby w zbiorze liczb nieskończonych nie tylko nie było wielkości największej, ale aby nie było również wielkości najmniejszej

$$\dots < \aleph_{-5} < \aleph_{-4} < \aleph_{-3} < \aleph_{-2} < \aleph_{-1} < \aleph_0 < c < 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_0}(2^{\aleph_0}) < 2^{\aleph_0}(2^{\aleph_0}(2^{\aleph_0})) < \dots?$$

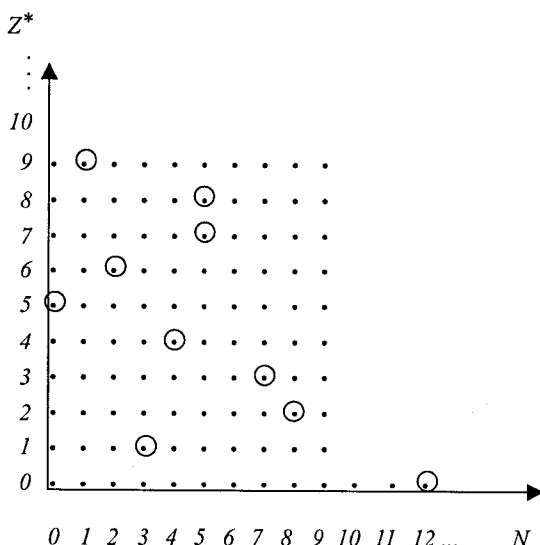
6. Konstrukcja liczb pod-rzeczywistych

Konstrukcja dodatnich liczb pod-rzeczywistych zostanie poprzedzona konstrukcją dodatnich liczb rzeczywistych w postaci ułamków dziesiętnych. Niech Z^* będzie zbiorem indeksów. Załóżmy, że $Z^* = N$. Niech ponadto każdemu niezerowemu elementowi $k \in Z^*$ odpowiada dziesięcioelementowy zbiór $Z_k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Liczbie $k = 0 \in Z^*$ odpowiada zbiór wszystkich liczb naturalnych: $Z_0 = N$.

Dodatnią liczbą pod-rzeczywistą w systemie dziesiętkowym daną w postaci ułamka dziesiętnego jest nieskończony „ciąg” liczb naturalnych, taki, że każdy jego k -ty element należy do zbioru Z_k . Pierwszy element z indeksem zero oddzielmy od drugiego elementu posiadającego indeks dwa przecinkiem. Przykładem tak otrzymanej liczby jest

$$12,3874092551\dots$$

gdzie: $k_0 = 12$; $k_1 = 3$; $k_2 = 8$; $k_3 = 7$; $k_4 = 4$; $k_5 = 0$; $k_6 = 2$; $k_7 = 5$; $k_8 = 5$; $k_9 = 1$; ...



Oczywistym faktem jest to, że w wyżej przedstawiony sposób można zbudować dowolną dodatnią liczbę rzeczywistą w systemie dziesiętkowym daną w postaci ułamka dziesiętnego. Ich ilość wyraża się wzorem:

$$\aleph_0 \cdot (10^{\aleph_0}) = c.$$

Możliwa jest również konstrukcja liczb w systemie innym niż dziesiętkowy. Jeśli, dla przykładu: $Z_k = \{0, 1\}$, dla $k \geq 1$ oraz $Z_0 = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \dots\}$, to liczby konstruowane w sposób analogiczny do wyżej przedstawionego są liczbami rzeczywistymi w systemie dwójkowym danymi w postaci ułamka dziesiętnego. Zbiór wszystkich takich liczb stanowi mnogość równoliczną ze zbiorem liczb rzeczywistych w systemie dziesiętkowym:

$$\aleph_0 \cdot (2^{\aleph_0}) = c.$$

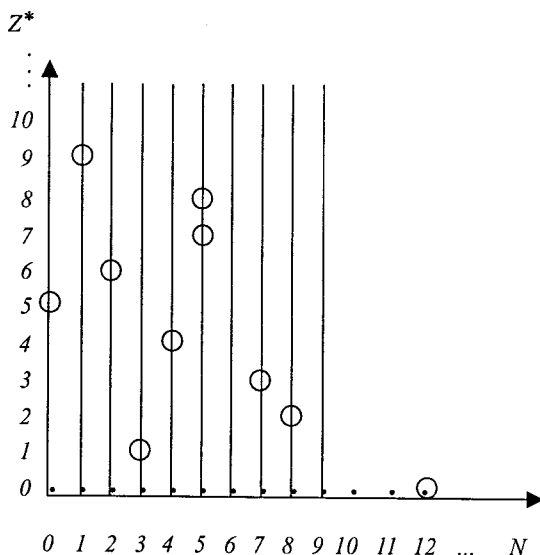
Zaproponowana konstrukcja daje się z niewielkimi zmianami powtórzyć tak, aby w jej efekcie powstawały liczby pod-rzeczywiste w danym systemie i w postaci ułamka dziesiętnego. Ograniczmy się do systemu dziesiętkowego.

Dostosowując do tego zadania wcześniejszą konstrukcję, wystarczy przyjąć, że zbiór indeksów Z^* jest zbiorem wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych R^+ . Pozostałe elementy konstrukcji są niezmienione. Niech więc każdemu niezerowemu elementowi $r \in Z^*$ odpowiada dziesięcioelementowy zbiór $Z_r = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Liczbie $r = 0 \in Z^*$ odpowiada zbiór wszystkich liczb naturalnych: $Z_0 = N$.

Dodatnią liczbą pod-rzeczywistą w systemie dziesiętkowym daną w postaci ułamka dziesiętnego jest nieskończony „ciąg” liczb naturalnych taki, że każdy jego r -ty element należy do zbioru Z_k^9 . Pierwszy element z indeksem zero oddzielmy od pozostałych elementów tego „ciągu” przecinkiem. Przykładem tak otrzymanej liczby jest

$$12,(a_0,a_1)3(a_1,a_2)8(a_2,a_3)7(a_3,a_4)4(a_4,a_5)0(a_5,a_6)9(a_6,a_7)2(a_7,a_8)5\dots$$

⁹ Naturalnie, pojęcie „ciągu” występujące w opisie konstrukcji liczby pod-rzeczywistej jest niestandardowe. Kolejność ustalana przez tego typu „ciąg” jest wyznaczona przez relację większości określoną na liczbach rzeczywistych.



Tak jak w przypadku liczby rzeczywistej, na pozycji $r=0$ mamy liczbę $a_0 = 12$, na pozycji $r=1$ liczbę $a_1 = 3$, na pozycji $r=2$ liczbę $a_2 = 8$, na pozycji $r=3$ liczbę $a_3 = 7$, itd. Tym, co różni liczbę pod-rzeczywistą od liczby rzeczywistej, jest występowanie nieskończenie wielu liczb a_r zbioru $N_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ na pozycjach r . Oczywiście pozycje te są wyrażone liczbami spoza zbioru liczb naturalnych N . Liczby występujące na nowych pozycjach znajdujących się między dwiema pozycjami odpowiadającymi kolejnym liczbom naturalnym tworzą więc przedziały (a_i, a_{i+1}) , dla $i \in N$. W przypadku pod-rzeczywistej liczby podanej jako przykład $a_0 = 12$, $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 7$, $a_4 = 4$, $a_5 = 0$, $a_6 = 9$, $a_7 = 2$, $a_8 = 5 \dots$ Zatem, postać dowolnej liczby pod-rzeczywistej jest następująca:

$$a_0(a_0, a_1)a_1(a_1, a_2)a_2(a_2, a_3)a_3(a_3, a_4)a_4(a_4, a_5)a_5(a_5, a_6)a_6(a_6, a_7)a_7(a_7, a_8)a_8 \dots$$

gdzie $a_0 \in N$; $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 \dots \in N_{10}$ oraz każde r , będące indeksem liczby z przedziału (a_i, a_{i+1}) dla $i \in N$ (a więc $i < r < i+1$), jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Łatwo zauważyć, że ilość wszystkich liczb pod-rzeczywistych w systemie dziesiętkowym wyraża się wzorem:

$$\aleph_0 \cdot (10^{\wedge} c) = \aleph_0 (2^{\wedge} c) = 2^{\wedge} c.$$

Każdy przedział (a_i, a_{i+1}) taki, że każda liczba a_r z przedziału (a_i, a_{i+1}) jest równa zero, oznaczmy symbolem $(=0)$. Jeśli natomiast pewna liczba a_r z przedziału (a_i, a_{i+1}) jest różna od zera, to $(a_i, a_{i+1}) = (\neq 0)$. Gdy dla każdego $i \in N$, $(a_i, a_{i+1}) = (=0)$, wówczas liczba pod-rzeczywista:

$$a_0, (a_0, a_1) a_1 (a_1, a_2) a_2 (a_2, a_3) a_3 (a_3, a_4) a_4 (a_4, a_5) a_5 (a_5, a_6) a_6 (a_6, a_7) a_7 (a_7, a_8) a_8 \dots$$

jest liczbą rzeczywistą:

$$\begin{aligned} a_0, (=0) a_1 (=0) a_2 (=0) a_3 (=0) a_4 (=0) a_5 (=0) a_6 (=0) a_7 (=0) a_8 \dots = \\ = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \dots \end{aligned}$$

Podobnie, dowolna liczba naturalna n ma w świecie liczb pod-rzeczywistych postać:

$$n = n, (=0) 0 (=0) 0 (=0) 0 (=0) 0 (=0) 0 (=0) 0 (=0) 0 (=0) 0 \dots$$

Fraktalna struktura osi liczbowej oznacza, że wszystkie liczby pod-rzeczywiste mają na tej osi swoje miejsce. Porządek liczb pod-rzeczywistych jest generowany przez porządek liczb rzeczywistych:

Założmy, że

$$p-r_1 = a_0, (a_0, a_1) a_1 (a_1, a_2) a_2 (a_2, a_3) a_3 (a_3, a_4) a_4 (a_4, a_5) a_5 (a_5, a_6) a_6 (a_6, a_7) a_7 (a_7, a_8) a_8 \dots$$

$$p-r_2 = a_0, (a_0, a_1) a_1 (a_1, a_2) a_2 (a_2, a_3) a_3 (a_3, a_4) a_4 (a_4, a_5) a_5 (a_5, a_6) a_6 (a_6, a_7) a_7 (a_7, a_8) a_8 \dots$$

są dwiema liczbami pod-rzeczywistymi. Niech ponadto dla $i \in \{1, 2\}$, $r_i \in R^+$ ($s_i \in R^+$) oznacza liczbę naturalną przypisaną r -tej (s -tej) pozycji w liczbie $p-r_i$. Jeśli dla dowolnej $r \leq s$, $r_1 = r_2$, to z dwóch pod-rzeczywistych liczb $p-r_1$ i $p-r_2$ większa jest ta, która ma większą liczbę naturalną przypisaną pozycji s .

O niezwyklej mocy zbioru wszystkich liczb pod-rzeczywistych może świadczyć następujący przykład. Rozważmy dwie liczby wymierne $1,1$ oraz $1,2$. Naturalnie,

$$1,1 = 1, (=0) 1 (=0) 0 (=0) 0 (=0) 0 \dots$$

$$1,2 = 1, (=0) 2 (=0) 0 (=0) 0 (=0) 0 \dots$$

Wśród liczb większych od $1,1$ i mniejszych niż $1,2$ są następujące klasy liczb:

$$1, (=0) 1 (=0) a_2 (=0) a_3 (=0) a_4 (=0) a_5 \dots$$

$$1, (=0) 1 (=0) a_2 (=0) a_3 (=0) a_4 (=0) a_5 \dots$$

$$1, (=0) 1 (=0) a_2 (=0) a_3 (=0) a_4 (=0) a_5 \dots$$

$$1, (=0) 1 (=0) a_2 (=0) a_3 (=0) a_4 (=0) a_5 \dots$$

...

$$1, (=0) 1 (=0) a_2 (=0) a_3 (=0) a_4 (=0) a_5 \dots$$

$$1, (=0) 1 (=0) a_2 (=0) a_3 (=0) a_4 (=0) a_5 \dots$$

$$1, (=0) 1 (=0) a_2 (=0) a_3 (=0) a_4 (=0) a_5 \dots$$

$$1, (=0) 1 (=0) a_2 (=0) a_3 (=0) a_4 (=0) a_5 \dots$$

...

$$\begin{aligned}
&1, (=0)1(\neq 0)a_2(\neq 0)a_3(\neq 0)a_4(=0)a_5... \\
&1, (=0)1(=0)a_2(\neq 0)a_3(\neq 0)a_4(\neq 0)a_5... \\
&1, (=0)1(=0)a_2(=0)a_3(\neq 0)a_4(\neq 0)a_5... \\
&1, (=0)1(=0)a_2(=0)a_3(=0)a_4(\neq 0)a_5... \\
&\dots \\
&1, (=0)1(\neq 0)a_2(\neq 0)a_3(\neq 0)a_4(\neq 0)a_5... \\
&1, (=0)1(=0)a_2(\neq 0)a_3(\neq 0)a_4(\neq 0)a_5... \\
&1, (=0)1(=0)a_2(=0)a_3(\neq 0)a_4(\neq 0)a_5... \\
&1, (=0)1(=0)a_2(=0)a_3(=0)a_4(\neq 0)a_5... \\
&\dots
\end{aligned}$$

dla $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in N$. Naturalnie, każde wystąpienie symbolu $(\neq 0)$ wyraża $2^{\uparrow c}$ przypadków pod-rzeczywistych liczb.

Wykonywanie działań na wielu liczbach pod-rzeczywistych jest tak samo niemożliwe, jak wykonywanie tych działań na wielu liczbach niewymiernych. Precyzyjne i pełne określenie działań arytmetycznych jest, w praktyce, ograniczone do zbioru liczb wymiernych. Spośród wszystkich liczb niewymiernych dostępne dla działań są bowiem tylko te liczby, które posiadają nazwy. Jedynie nadanie specjalnych nazw niektórym liczbom niewymiernym np. „ $\sqrt{2}$ ”, „ $\sqrt{3}$ ”, „ π ”, „ e ”, umożliwia wykonywanie na tych liczbach działań tak, jak gdyby były one liczbami wymiernymi. Brak nazw dla wielu liczb niewymiernych sprawia, że działania na nich są niewykonalne, bo już samo wyrażenie wartości tej liczby jest niemożliwe. Poszerzenie zbioru liczb wymiernych o pewien, niekoniecznie skończony chociaż przeliczalny, zbiór podstawowych liczb niewymiernych, takich jak wyżej wspomniane, ma robić wrażenie, że działania na dowolnych liczbach rzeczywistych są wykonalne. Tymczasem, dysponując liczbą e , mamy jedynie $e/2$, $3e/4$, itd. Traktujemy tym samym „ e ” jak nowy element dodany do zbioru liczb całkowitych, który można stosować w konstrukcji nazw liczb wymiernych, tak jak to się czyni z innymi symbolami liczb całkowitych, a więc na przykład z symbolem „ 2 ”¹⁰.

¹⁰ O charakterze tego poszerzenia świadczy chociażby to, że jest ono przeprowadzane na wzór konstrukcji liczb urojonych $a_i + b$, dla $a, b \in R$ oraz $i = \sqrt{-1}$, z tą różnicą, że działania w przypadku obu ciał liczbowych są różnie określone. Nie jest przecież trudnym zadaniem sprawdzić, że zbiór liczb $\{a\sqrt{2} + b : a, b \in Q\}$ z dobrze znanymi działaniami jest ciałem liczbowym, podobnie jak ciałem liczbowym jest zbiór liczb urojonych. Symbol „ $\sqrt{2}$ ” nie jest zastępowalny żadnym innym symbolem liczby wymiernej tak samo jak symbol „ i ”. W podobnym zresztą sensie nie jest zastępowalny symbol dowolnej liczby naturalnej, np. „ 2 ”. Dostępny dla nas zbiór liczb rzeczywistych przypomina więc zbiór określony następująco:

$$\{p/q : p, q \in N \cup \{1', 2', 3', \dots\} \text{ i } q \neq 0\},$$

Ta trudność dotycząca zbioru liczb rzeczywistych „przenosi” się na zbiór liczb pod-rzeczywistych. Kwestią otwartą pozostaje znalezienie działania, które analogicznie do wyprowadzającego poza zbiór liczb wymiernych pierwiastkowania, wyprowadzałoby poza zbiór liczb rzeczywistych. Jasnym jest jednak, iż wobec praktycznej niewykonywalności na liczbach rzeczywistych nawet tak prostego działania jak dodawanie, znalezienie działania wyprowadzającego poza zbiór liczb rzeczywistych wydaje się być celem szczególnie trudno osiągalnym.

7. Podsumowanie

Hipoteza jod bazuje na obowiązującym już w niektórych teoriach matematycznych założeniu niezerowości odwrotności liczb nieskończonych. Przyjęcie tej hipotezy oznacza założenie istnienia nieskończenie wielu wartości nieskończenie małych. Pojęcie „wielkości nieskończenie małej” jest jednak rozumiane w inny sposób, niż ma to miejsce w tradycyjnej analizie matematycznej. Wielkości nieskończenie małe reprezentowane w przedstawionej tu hipotezie przez jody są wielkościami większymi od zera i mniejszymi od dowolnej dodatniej liczby wymiernej, a więc mniejszymi również od dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej. Są więc wielkościami niewyrażalnymi w postaci ułamka p/q , gdzie p i q są liczbami całkowitymi, zaś q jest dodatkowo liczbą różną od zera. Istnieje jednak możliwość innego wyrażenia za pomocą liczb wymiernych największej spośród jod, jako granicy ciągu:

$$j_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n).$$

Nie istnieje jednak jakakolwiek możliwość wyrażenia pozostałych jod za pomocą liczb wymiernych.

Wszystkie jody będące odwrotnościami generowanych przez operację potęgowania wartości nieskończonych tworzą ciąg nieskończony liczb infitezymalnych zbieżny do zera. Naturalnie, liczba zero nie może być elementem tego ciągu, gdyż w przeciwnym razie oznaczałoby to założenie, iż w ciągu liczb nieskończonych

$$\aleph_0 \text{ } c, 2^{\uparrow}c, 2^{\uparrow}(2^{\uparrow}c), 2^{\uparrow}(2^{\uparrow}(2^{\uparrow}c)), 2^{\uparrow}(2^{\uparrow}(2^{\uparrow}(2^{\uparrow}c))), \dots$$

gdzie $\{1', 2', 3', \dots\}$ jest przeliczalnym zbiorem nowych symboli zarezerwowanych dla pewnych niewymiernych wielkości. To rozszerzenie ciała liczb wymiernych o pewną przeliczalną ilość liczb rzeczywistych sprawia, że określenie działań na liczbach rzeczywistych jest ograniczone jedynie do przeliczalnego podzbioru zbioru R . Można więc przyjąć, że wszystkie znane w ciele liczb wymiernych działania są określone jedynie na przeliczalnym podzbiórze zbioru R . Oznacza to, że nawet tak proste działanie jak dodawanie nie jest na zbiorze R określone.

istnieje liczba największa. Wiadomo jednak, że założenie istnienia zbioru wszystkich zbiorów, jak również założenie istnienia zbioru o największej mocy, prowadzi do sprzeczności, co oznacza, że ukryty w liczbach Bóg Georga Cantora jest nieosiągalny również na gruncie matematyki. Wielkości nieskończone dążą do Tej Jednej Nieskończoności, lecz jej nie osiągają

$$\aleph_0 < c < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{(2^{\aleph_0})}} < 2^{2^{(2^{(2^{\aleph_0})})}} < \dots < \infty,$$

W pewnym sensie nieosiągalność Tej Jednej Nieskończoności wpływa na charakter zera. Naturalnie, jest ono wynikiem odejmowania dowolnej liczby a od siebie samej, jednak jedynym ciągiem zbieżnym do zera jest ciąg jod. Każdy konstruowalny za pomocą liczb wymiernych i bez użycia operacji odejmowania ciąg zbiega do wielkości różnej od zera. Fakt, iż jody są odwrotnościami liczb nieskończonych, oznacza, że wartości nieskończone są odwrotnościami jod. Tymczasem, odwrotność zera $1/0$ jest wartością nieokreśloną, tak jak nieokreśloną jest Nieskończoność ∞ . Jest to kolejny argument za istnieniem wielkości infidezymalnych. Skoro nieskończoności postaci:

$$2^{\aleph_0}(\dots(2^{\aleph_0}\aleph_0))$$

są definiowalne, a więc tym samym są określone, ich odwrotności również winny być określone, których z kolei odwrotności także powinny być wielkościami określonymi. Jeśli więc odwrotnością definiowalnej liczby nieskończonej $2^{\aleph_0}(\dots(2^{\aleph_0}\aleph_0))$ ma być zero, to odwrotność zera, będąc wielkością nieokreśloną, nie powinno być równe $2^{\aleph_0}(\dots(2^{\aleph_0}\aleph_0))$. Ponadto – jak już zostało to wcześniej zauważone – jedna liczba, w tym wypadku zero, nie powinna być odwrotnością wielu różnych liczb.

Zgodnie z hipotezą jod, z punktu widzenia świata liczb wymiernych, wszystkie jody są wartościami zerowymi. Są to jednak zera potencjalne, nie zaś aktualne. Dotychczasowy zakres nazwy „zero” został podzielony na zakresy nazw „joda zero”, „joda jeden”, „joda dwa”, ... oraz „zero w węższym rozumieniu”. Zero w węższym rozumieniu jest więc zerem aktualnym, odpowiadającym odwrotności jednej jedynej i niewyrażalnej, największej Nieskończoności ograniczającej ciąg wszystkich znanych nam nieskończoności, o ile ograniczenie to w ogóle istnieje. Istnienie zaś tego Ograniczenia wydaje się pozostawiać kwestią wiary.

LITERATURA:

Aczel A. D., 2002, *Tajemnica Alefów, matematyka, kabala i poszukiwania nieskończoności (The Mystery of the Aleph)*, Dom Wyd. Rebis, Poznań.

Conway J. H., Guy R. K., 1998, *Księga liczb*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa.

[1] <http://www.campusprogram.com/reference/en/wikipedia/i/in/infinitesimal.html>

[2] http://www.campusprogram.com/reference/en/wikipedia/s/su/surreal_number.html