

# **Determinanty zmian współzależności wybranych giełd papierów wartościowych**

Analiza relacji GPW w Warszawie  
z giełdami na świecie



WYDAWNICTWO  
UNIwersytetu  
Łódzkiego

**Ekonomia**

# **Determinanty zmian współzależności wybranych giełd papierów wartościowych**

Analiza relacji GPW w Warszawie  
z giełdami na świecie

Anna Czapkiewicz

Anna Czapkiewicz – Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica  
Wydział Zarządzania, Samodzielna Pracownia Zastosowań Matematyki w Ekonomii  
30-067 Kraków, ul. Gramatyka 10

RECENZENCI

*Piotr Fiszeder, Konrad Furmańczyk*

REDAKTOR INICJUJĄCY

*Monika Borowczyk*

REDAKTOR

*Andrzej Choczewski*

SKŁAD I ŁAMANIE

*Marek Karkula*

KOREKTA TECHNICZNA

*Leonora Gralka*

PROJEKT OKŁADKI

*Katarzyna Turkowska*

Zdjęcie wykorzystane na okładce: © Depositphotos.com/Rawpixel

Wydrukowano z gotowych materiałów dostarczonych do Wydawnictwa UŁ

© Copyright by Anna Czapkiewicz, Łódź 2018

© Copyright for this edition by Uniwersytet Łódzki, Łódź 2018

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego

Wydanie I. W.08630.18.0.M

Ark. druk. 14,0

ISBN 978-83-8142-356-4

e-ISBN 978-83-8142-357-1

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego

90-131 Łódź, ul. Lindleya 8

www.wydawnictwo.uni.lodz.pl

e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl

tel. (42) 665 58 63

# Spis treści

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Podziękowania</b> . . . . .                                     | <b>7</b>  |
| <b>Wstęp</b> . . . . .                                             | <b>9</b>  |
| <b>1. Podstawowe pojęcia dotyczące rynku finansowego</b> . . . . . | <b>19</b> |
| 1.1. Klasyfikacja rynku finansowego . . . . .                      | 19        |
| 1.2. Giełda papierów wartościowych . . . . .                       | 23        |

## Część I. Własności stosowanych narzędzi ekonometrycznych

|                                                                                          |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2. Wybrane modele jednowymiarowych szeregów czasowych</b> . . . . .                   | <b>29</b> |
| 2.1. Model GARCH . . . . .                                                               | 30        |
| 2.2. Rozkłady skośne . . . . .                                                           | 31        |
| 2.3. Rozszerzenia modelu GARCH . . . . .                                                 | 34        |
| 2.4. Weryfikacja modelu . . . . .                                                        | 36        |
| <b>3. Kopule w modelowaniu struktury powiązań pomiędzy szeregami czasowymi</b> . . . . . | <b>39</b> |
| 3.1. Pojęcie kopuli . . . . .                                                            | 39        |
| 3.2. Miary współzależności . . . . .                                                     | 42        |
| 3.3. Przegląd i charakterystyka wybranych kopul . . . . .                                | 45        |
| 3.4. Model Copula-GARCH i estymacja jego parametrów . . . . .                            | 52        |
| 3.5. Weryfikacja modelu Copula-GARCH . . . . .                                           | 54        |

|                                                                 |           |
|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4. Dynamiczne modele wielowymiarowe . . . . .</b>            | <b>57</b> |
| 4.1. Wielowymiarowe modele GARCH . . . . .                      | 57        |
| 4.2. Ukryty Model Markowa . . . . .                             | 62        |
| 4.3. Ukryty Model Markowa z mechanizmem TVPMS . . . . .         | 76        |
| 4.4. Efektywność estymatorów ML w Ukrytych Modelach Markowa . . | 80        |
| 4.5. Test porównania modeli . . . . .                           | 84        |
| 4.6. Modyfikacja klasycznego testu . . . . .                    | 87        |

## **Część II. Badanie empiryczne**

|                                                                                                   |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5. Weryfikacja struktury powiązań wybranych giełd papierów wartościowych . . . . .</b>         | <b>97</b>  |
| 5.1. Grupowanie indeksów giełdowych . . . . .                                                     | 98         |
| 5.2. Analiza zmian jednoczesnych oraz efektów zarażania na wybranych giełdach . . . . .           | 112        |
| 5.3. Analiza zmiany struktury powiązań GPW z innymi giełdami . . . .                              | 135        |
| <b>6. Determinanty zmian jednoczesnych na wybranych giełdach papierów wartościowych . . . . .</b> | <b>141</b> |
| 6.1. Zmienność implikowana . . . . .                                                              | 146        |
| 6.2. Stopa procentowa LIBOR oraz TED spread . . . . .                                             | 157        |
| 6.3. Rentowność 10-letnich obligacji . . . . .                                                    | 166        |
| 6.4. Ceny kontraktów terminowych na wybrane surowce . . . . .                                     | 174        |
| 6.5. Rola innych czynników makroekonomicznych w strukturze powiązań giełd . . . . .               | 182        |
| <b>Zakończenie . . . . .</b>                                                                      | <b>199</b> |
| <b>Bibliografia . . . . .</b>                                                                     | <b>209</b> |
| <b>Notka o Autorze . . . . .</b>                                                                  | <b>223</b> |

## Podziękowania

Bardzo dziękuję dr. hab. Antoniemu Dawidowiczowi z Instytutu Matematyki UJ za inspiracje naukowe i wsparcie na kolejnych etapach mojej pracy naukowej. Pragnę też wyrazić swoją wdzięczność prof. Janowi Sztaudyngerowi za życzliwość i uwagi merytoryczne udzielone w czasie spotkań seminaryjnych w Katedrze Ekonometrii Uniwersytetu Łódzkiego. Dziękuję również Recenzentom monografii za komentarze, które pozwoliły nadać ostateczny kształt tej monografii. Bardzo dziękuję prof. Henrykowi Gurgulowi, kierownikowi Samodzielnej Pracowni Zastosowań Matematyki w Ekonomii na Wydziale Zarządzania AGH za stworzenie warunków do efektywnej pracy. Dziękuję moim koleżankom i kolegom z Pracowni, a w szczególności mgr. Arturowi Machno i dr. Tomaszowi Wójtowiczowi za komentarze, burzliwe spory i twórcze dyskusje. Chciałabym również wyrazić wdzięczność mojemu mężowi Maćkowi, za ogromne wsparcie, dużą cierpliwość i wyrozumiałość. Dziękuję też prof. Przemysławowi Grzegorzewskiemu z PW za wszystkie uwagi krytyczne oraz dr. hab. Markowi Karkuli za pomoc w przygotowaniu ostatecznej formy książki.





# Wstęp

W krajach z gospodarką rynkową i rozwiniętą giełdą papierów wartościowych występują mechanizmy, które zapewniają obustronne związki koniunktury giełdowej z koniunkturą gospodarczą. Dobrze funkcjonujący rynek kapitałowy sprawia, że środki pieniężne trafiają do tych przedsiębiorstw, w których są one efektywnie alokowane. Wzrost cen papierów wartościowych przyczynia się do obniżenia kosztu pozyskania kapitału na giełdzie, a to z kolei wpływa na możliwość zwiększenia inwestycji spółek, a tym samym na poprawę koniunktury gospodarczej. Również wzrost wartości akcji przyczynia się do wyższej oceny zdolności kredytowej kredytobiorców, a zatem może stymulować nasilenie się inwestycji, co po dłuższym czasie może korzystnie wpłynąć na tempo wzrostu gospodarczego. Natomiast pogorszenie się sytuacji na giełdzie wpływa negatywnie na koniunkturę gospodarczą z powodu zwiększenia się kosztów pozyskania kapitału, co z kolei pociąga za sobą zmniejszenie inwestycji (Fundowicz i Wyżnikiewicz 2006).

W literaturze finansowej jest wiele prac poświęconych roli wskaźników zarówno finansowych jak i makroekonomicznych w kształtowaniu się cen akcji na giełdzie papierów wartościowych. Wpływ informacji na ceny papierów wartościowych był badany przez Gurgula (2006). Rapach i in. (2005), wykorzystując dane z kilku giełd rozwiniętych, wykazali, że również stopy procentowe mają znaczenie dla zmiany wartości indeksów giełdowych. Henry (2009), badając związek między stopą zwrotu z inwestycji na giełdzie brytyjskiej a krótkoterminowymi stopami procentowymi, także zauważył, że wydarzenia na rynku pieniężnym wpływają na zachowanie się kursów akcji. Chen (2009) pokazał, że dla prognozy złej koniunktury na giełdzie USA istotna jest informacja o wartościach zmiennych makroekonomicznych, takich jak: stopa procentowa, stopa inflacji, zasoby pieniężne,

łączna produkcja, stopa bezrobocia i dług federalny. Nasseh i Strauss (2000) wykazali istnienie zależności długoterminowych pomiędzy cenami akcji a zmiennymi makroekonomicznymi w sześciu dużych krajach europejskich. Doszli do wniosku, że dla cen akcji mają znaczenie takie czynniki, jak: produkcja, oczekiwania biznesowe, stopy procentowe i inflacja. Dla danych z USA istnienie zależności długoterminowych pomiędzy cenami akcji, produkcją przemysłową, realnymi kursami walutowymi, stopami procentowymi i inflacją w USA zauważył Kim (2003). Relacja między wskaźnikami makroekonomicznymi a indeksami giełdowymi była również badana w wybranych krajach Europy Środkowej i Wschodniej, między innymi przez Hanousek i in. (2009), Barbic i Condic-Jurkic (2011).

W Polsce także były prowadzone takie analizy. Do czynników kształtujących ceny kursów papierów wartościowych notowanych na GPW w Warszawie Milo (2000) zaliczył: wzrost gospodarczy, inflację, deficyt budżetowy, wskaźnik bezrobocia i poziom dochodów społeczeństwa. Analizę długookresowej zależności pomiędzy indeksem giełdowym i wzrostem gospodarczym przedstawiła Rubaszek (2004). Związek pomiędzy zmianami cen akcji i następującymi po nich zmianami produkcji lub wartości PKB rozważał Łon (2006) w swojej monografii. Relację pomiędzy cenami akcji a koniunkturą gospodarczą w warunkach polskich badał Brzeszczyński i in. (2009). Fiszeder i Rowiński (2012) analizowali zależność długookresową pomiędzy cenami akcji a wskaźnikami makroekonomicznymi, takimi jak: wartość PKB, poziom inflacji, podaż pieniądza oraz wartość indeksu surowcowego. Czapkiewicz i Stachowicz (2016) zbadały relację długookresową pomiędzy indeksem giełdowym WIG, kursem EUR/PLN, wskaźnikiem inflacji CPI oraz eksportu.

Na zachowanie się giełd na świecie duży wpływ ma globalizacja, której efektem są silne powiązania pomiędzy różnymi gałęziami gospodarki, w tym także rynkami kapitałowymi. Do negatywnych jej aspektów należy przede wszystkim to, że kryzysy gospodarcze i finansowe przestały mieć lokalny charakter (Borcuch 2009). Globalizacja rynków, ze względu na przenoszenie się negatywnych nastrojów (które w tym wypadku rozumiemy jako gwałtowne i trwające przez dłuższy czas załamanie się kursów akcji) może być czynnikiem utrudniającym nie tylko dywersyfikację ryzyka<sup>1</sup>, ale również ocenę rzeczywistego stanu rynku kapitałowego w danym kraju. Zatem analiza kondycji samej giełdy nie może być prowadzona bez zbadania jej relacji z wiodącymi giełdami na świecie.

---

<sup>1</sup> Korzyści z międzynarodowej dywersyfikacji portfela podkreślił już Grubel (1968).

Między innymi problemy dotyczące współzależności giełd, klasyfikacji rynków finansowych, zmian jednoczesnych na giełdach (*comovement*) czy zarażanie giełd (*contagion*) jest szczególnie chętnie podejmowany w badaniach empirycznych w ostatnich dwudziestu latach. Samą „współzależność” giełd można rozumieć dwojako. Jeden nurt badań obejmuje bowiem analizę współzależności giełd wyrażaną poprzez korelację, kowariancję lub inną strukturę wzajemnych powiązań krótkookresowych wyznaczaną na podstawie stóp zwrotu głównych indeksów giełdowych. Ten wątek będzie kontynuowany w monografii. Natomiast drugi nurt badań zakłada istnienie czynnika, który oddziałuje na dane giełdy, powodując na nich wspólny trend cen akcji. Do tego nurtu należą wszelkie badania dotyczące zależności długookresowych (*long-term dependence*)<sup>2</sup>.

Klasyfikacji rynków giełdowych dokonuje się ze względu na wybraną ich cechę, a jedną z możliwości przeprowadzenia takiej klasyfikacji jest analiza skupień (*cluster analysis*). W analizie zmian jednoczesnych na giełdach, zakłada się, że rynki reagują natychmiast na zdarzenia kryzysowe. Natomiast zarażanie giełd według Forbesa i Rigobona (2002) jest to „znaczący wzrost korelacji pomiędzy giełdami po szoku w jednym kraju (lub grupie krajów)”.

Po światowym kryzysie finansowym teoretycy i praktycy zaczęli zwracać większą uwagę na szukanie czynników determinujących nie tylko zachowanie pojedynczych giełd, ale również zmiany struktury wzajemnych powiązań pomiędzy tymi giełdami. Wiedza o istnieniu relacji pomiędzy giełdą papierów wartościowych a gospodarką sugeruje, by obszar szukania czynników, które mogą determinować zmiany poziomu współzależności giełd obejmował nie tylko sfery związane bezpośrednio z finansami, ale również z gospodarką. Na przykład Von Furstenberg i Jeon (1989) analizowali znaczenie stóp procentowych, kursów wymiany walut oraz ceny ropy i złota dla wartości współczynnika korelacji pomiędzy dziennymi stopami zwrotu indeksów giełdowych USA, Japonii, Wielkiej Brytanii i Niemiec w latach 1986–1988.

King, Sentana i Wadhwani (1994), wykorzystując indeksy szesnastu światowych giełd, doszli do wniosku, że tylko niewielka część zmienności kowariancji pomiędzy nimi może być wyjaśniona poprzez obserwowalne zmienne

---

<sup>2</sup> Temat zależności długookresowych pomiędzy rozwijającymi się giełdami z Europy Środkowej a rozwiniętymi rynkami Europy i Stanów Zjednoczonych w swoich pracach poruszali między innymi Voronkova (2004), Syriopoulos (2007), Witowska i in. (2012). Wpływ rozwiniętych rynków europejskich na wschodzące rynki CEE pokazali Cerny i Koblas (2005).

ekonomiczne. Zmiany w korelacjach między rynkami są raczej spowodowane zmianami nieobserwowalnych zmiennych. Badając wybrane rynki rozwinięte, Longin Solnik (1995), na podstawie miesięcznych nadwyżkowych stóp zwrotu, obejmujących okres od 1960 do 1990 roku, stwierdzili, że korelacja między rynkami wzrasta wraz ze wzrostem warunkowej zmienności. Informacje o przyszłej zmienności mogą zawierać takie zmienne ekonomiczne jak stopa dywidendy i stopy procentowe. Karolyi i Stulz (1996) badali wpływ ogłoszeń zmiennych makroekonomicznych na zmiany korelacji pomiędzy stopami zwrotu japońskich i amerykańskich spółek. Didier i in. (2010) badali czynniki wpływające na korelację pomiędzy indeksami giełdowymi USA i 83 innych krajów w czasie kryzysu 2007–2008 i stwierdzili, że w tym okresie ważne były tylko czynniki związane bezpośrednio z finansami, podczas gdy wybrane wskaźniki makroekonomiczne nie miały znaczenia w kontekście tego kryzysu.

Mobarek i in. (2016), badając rynki rozwinięte (Australia, Kanada, Francja, Niemcy, Hongkong, Włochy, Japonia, Szwecja, Wielka Brytania i Stany Zjednoczone) oraz rynki wschodzące (Argentyna, Brazylia, Chile, Chiny, Indie, Indonezja, Korea, Malezja, Rosja i Południowa Afryka) w okresach kryzysu i poza nimi, zauważyli, że w czasie kryzysu stopa wzrostu PKB, inflacja i stopy procentowe są istotne dla korelacji rynku rozwijającego się z rynkiem rozwiniętym. Nie wykryli natomiast czynników transmisji kryzysu między rynkami rozwiniętymi. Wpływ amerykańskich doniesień o makroekonomicznych danych na relację pomiędzy stopami zwrotu, zmiennością i obrotem na trzech europejskich rynkach akcji (we Frankfurcie, w Wiedniu i w Warszawie) były badane w pracy Gurgula, Lacha i Wójtowicza (2016). Gomes i Taamouti (2016) skonstruowali czynniki, które reprezentują wybrane wskaźniki makroekonomiczne, na podstawie informacji z Google Trends związanych z działalnością gospodarczą. Następnie zbadali ich wpływ na powiązania pomiędzy giełdami Stanów Zjednoczonych, Francji, Niemiec, Włoch i Hiszpanii. Okazało się, że nowo skonstruowane zmienne wpływają istotnie na kowariancję pomiędzy stopami zwrotu indeksów analizowanych giełd. Czapkiewicz i in. (2018) zbadali wpływ zmiennych makroekonomicznych, takich jak stopa bezrobocia, indeks CPI, indeks produkcji przemysłowej oraz rentowność 10-letnich obligacji, na współzależność giełd z krajów grupy G6.

Zagadnienia omawiane w monografii koncentrować się będą wokół trzech wątków tematycznych. Jeden wątek obejmuje badania mające na celu grupowanie giełd na świecie pod względem ich podobieństwa w powiązaniach z innymi

giełdami. Celem jest wskazanie miejsca GPW w Warszawie na tle innych giełd papierów wartościowych. Drugi wątek obejmuje cykl badań dotyczących analizy potencjalnych determinantów zmian poziomów współzależności wybranych giełd, kładąc również nacisk na GPW w Warszawie. Zagadnienie dotyczące roli wskaźników finansowych oraz makroekonomicznych w dynamice struktury powiązań warszawskiej GPW z innymi giełdami na świecie jest rzadko poruszane w literaturze. Zatem celem tej monografii jest między innymi, próba częściowego wypełnienia tej luki. Natomiast trzeci wątek badań koncentruje się na teoretycznych własnościach zastosowanych narzędzi statystycznych.

Na podstawie dwóch pakietów danych dziennych stóp zwrotu głównych indeksów giełdowych na świecie: pochodzących z okresu 2006–2016<sup>3</sup> oraz z okresu 1997–2016, postawiono dwie główne hipotezy badawcze oraz dwie hipotezy pomocnicze. Główne hipotezy to:

1. W okresie kryzysu giełdy są znacznie mocniej ze sobą powiązane niż w okresach przed i pokryzysowych. Jednak spośród giełd na świecie można wyodrębnić takie grupy giełd, w obrębie których relacje jej elementów z innymi giełdami są niezależne od zmieniającej się sytuacji ekonomicznej. Wpływ globalnej koniunktury ekonomicznej na GPW w Warszawie jest najbardziej podobny do analogicznego wpływu na giełdy Grupy Wyszehradzkiej.
2. Czynniki, które mają istotne znaczenie dla wyjaśnienia zmian poziomów współzależności giełd nie są uniwersalne. Dla rozwiniętych rynków Europy Zachodniej i USA większe znaczenie mają ogólnoswiatowe wskaźniki finansowe, natomiast dla relacji GPW w Warszawie<sup>4</sup> z rynkami rozwiniętymi Europy Zachodniej – lokalne wskaźniki finansowe i makroekonomiczne.
  - a. Notowania indeksu VIX (oraz VSTOXX) mają głównie znaczenie dla poziomu współzależności rynków rozwiniętych. Wraz ze wzrostem tego indeksu występuje wzrost poziomu współzależności.
  - b. Notowania stóp procentowych LIBOR oraz TED spread mają znaczenie dla poziomu współzależności rynków rozwiniętych. Obniżka stóp procentowych LIBOR oraz wzrost wartości TED spread skutkuje wzrostem tego poziomu.

<sup>3</sup> W monografii będzie wyjaśnione, dlaczego taki okres był analizowany.

<sup>4</sup> Giełda w Warszawie była długo uznawana jako rozwijająca się. W roku 2017 agencja FTSE Russell sklasyfikowała Polskę jako rynek rozwinięty.

- c. Ceny surowców mają znaczenie dla wyjaśnienia zmian poziomów współzależności rynków rozwiniętych. Wzrost ceny surowca skutkuje wyższym poziomem tej współzależności.
- d. Rentowność 10-letnich obligacji rynków rozwiniętych ma znaczenie dla poziomu współzależności rynku rozwiniętego z GPW w Warszawie. Wzrost rentowności obligacji kraju z rozwiniętą gospodarką obniża poziom tej współzależności.
- e. Wielkości makroekonomiczne, takie jak inflacja, stopa bezrobocia czy indeks produkcji przemysłowej mają znaczenie dla relacji GPW w Warszawie z rozwiniętymi giełdami Europy Zachodniej. Wzrost stopy bezrobocia w Polsce ma odbicie we wzroście poziomu współzależności tych giełd.

Pozostałe hipotezy badawcze to:

1. Dla relacji GPW w Warszawie z rozwiniętymi giełdami Europy wyższy poziom współzależności dwóch giełd pokrywa się z okresem dużej zmienności stóp zwrotu ich indeksów giełdowych.
2. Zmiana struktury powiązań GPW w Warszawie z innymi giełdami jest nie tylko związana z okresami hossy i bessy, ale może być również wywołana przez inne czynniki.

Grupowanie rynków finansowych zostanie przeprowadzone dla 36 indeksów giełdowych pochodzących z giełd amerykańskich, europejskich oraz azjatyckich, bazując na ich dziennych notowaniach z okresu 2006–2016. Szczegółowej analizie poddane zostaną cztery podokresy: (i) przed światowym kryzysem finansowym: styczeń 2006 – lipiec 2007, (ii) okres kryzysu: lipiec 2007 – marzec 2009, (iii) okres wychodzenia z kryzysu: marzec 2009 – grudzień 2011, (iv) lata 2012–2016. Jako narzędzie do grupowania giełd zastosowana będzie analiza skupień.

W pozostałych badaniach, oprócz giełdy polskiej (GPW w Warszawie), pod uwagę zostanie wzięta giełda amerykańska (Nowojorska Giełda Papierów Wartościowych) oraz rozwinięte giełdy Europy Zachodniej, takie jak giełda niemiecka (Frankfurcka Giełda Papierów Wartościowych), giełda francuska (Giełda Papierów Wartościowych w Paryżu) czy giełda brytyjska (Londyńska Giełda Papierów Wartościowych). W niektórych przypadkach przedstawione zostaną również wyniki analiz dla giełdy rosyjskiej (Giełda Papierów Wartościowych w Moskwie), która należy do grupy rynków rozwijających się i która stosunkowo rzadko jest

przedmiotem badań oraz dla giełdy szwedzkiej (Sztokholmska Giełda Papierów Wartościowych), która jest jedną z giełd formacji OMX<sup>5</sup>.

Oprócz badań, które zostaną przeprowadzone w celu weryfikacji hipotez badawczych, będą również przedyskutowane zmiany jednoczesne na GPW w Warszawie i innych giełdach oraz zostanie zbadany efekt zarażania. Zdecydowana większość prezentowanych w tej monografii wyników jest oryginalna i nigdzie nie była publikowana.

W celu opisania dynamicznych struktur powiązań pomiędzy giełdami<sup>6</sup> opracowano metody bazujące na wielowymiarowych modelach typu GARCH lub na teorii kopuli (*copula*). W Polsce wielowymiarowe modele typu ARCH i GARCH wykorzystywali w swoich badaniach między innymi Osiewalski i Pipień (2002, 2004), Doman i Doman (2009), Piontek i Papla (2005), Papla (2007), Czapkiewicz i Machno (2013).

Wykorzystanie kopuli w praktyce zapoczątkował Embrechts i in. (1999, 2001). Model, w którym jednowymiarowe szeregi czasowe opisywane są za pomocą modeli typu GARCH lub jego modyfikacji, natomiast wielowymiarową strukturę powiązań uzyskuje się poprzez zastosowanie kopuli, najczęściej jest nazywany krótko modelem „Copula-GARCH”. Dynamikę struktur powiązań pomiędzy giełdami można uzyskać stosując dla parametrów modelu Copula-GARCH mechanizm sterowania według ukrytego łańcucha Markowa. W praktyce podejście to wykorzystali w swoich badaniach między innymi Jondeau i Rockinger (2006), Chollate i in. (2009), Bartram i in. (2007), Kenourgios i in. (2011), Silva Filho i in. (2012) i inni. W Polsce tematyką kopuli zajmował się między innymi Jaworski i in. (2010). W praktycznych zastosowaniach model Copula-GARCH wykorzystywał między innymi Wanat i in. (2015), Mokrzycka i Pajor (2016). Przełącznikowe modele Copula-GARCH były tematem monografii Domana (2011) oraz Doman i Doman (2014). Temat ten był również poruszany w pracach autorki (Czapkiewicz i Majdosz 2014, Czapkiewicz i Jamer 2015).

Aby zweryfikować wpływ wybranych czynników na zmiany korelacji pomiędzy stopami zwrotów wybranych indeksów giełdowych, modelem, który był najczęściej używany w tego typu analizach był model DCC-MIDAS, który został

<sup>5</sup> W całej monografii nazwy giełd będą stosowane wymiennie, tj. zamiast pełnej nazwy giełdy będzie podany kraj, z którego dana giełda pochodzi.

<sup>6</sup> Dla ustalenia uwagi: **strukturę powiązań pomiędzy giełdami** będziemy rozumieć jako wielowymiarowy rozkład szeregów czasowych utworzonych ze stóp zwrotu indeksów giełdowych.

opracowany przez Colacito i in. (2011). Znaczenie czynników oraz ich wpływ na zmiany rozpatrywanej struktury powiązań pomiędzy giełdami można analizować również wykorzystując przełącznikowy model Copula-GARCH, w którym mechanizm przełączania według ukrytego łańcucha Markowa bazuje na historycznych notowaniach rozpatrywanego czynnika. Sam ukryty model Markowa o takiej strukturze (TVPMS) został pierwotnie zaproponowany przez Filardo (1994), a następnie udoskonalony przez Kima i in. (2008). Model ten stosunkowo rzadko był stosowany w tego typu analizach<sup>7</sup>. Również własności statystyczne tego modelu są jeszcze mało udokumentowane w literaturze ekonometrycznej. Zatem kolejnym celem badań autorki jest weryfikacja wybranych własności statystycznych tego modelu oraz jego zastosowanie w weryfikacji postawionych hipotez badawczych.

W niniejszej monografii głównym narzędziem wykorzystywanym do opisu struktury powiązań pomiędzy giełdami będzie przełącznikowy model Copula-GARCH, w którym przełączenie jest sterowane według ukrytego łańcucha Markowa. W celu weryfikacji wpływu wybranych czynników na zmiany rozpatrywanej struktury powiązań między giełdami zostanie użyty przełącznikowy model Copula-GARCH z mechanizmem TVPMS.

Przedstawione zostaną wyniki, które koncentrują się wokół trzeciego wątku badań. Jego tematyka dotyczy teoretycznych własności zastosowanych narzędzi statystycznych modeli ekonometrycznych i testów. Do głównych osiągnięć w tej materii będzie należeć:

1. Opracowanie algorytmu EM (*expectation-maximization algorithm*) służącym do estymacji parametrów przełącznikowego modelu Copula-GARCH z mechanizmem TVPMS tj. zmienną w czasie macierzą przejścia zależną od obserwowalnych czynników.
2. Uporządkowanie warunków regularności gwarantujące asymptotyczną normalność estymatora MNW (oraz EM) oraz pożądane własności statystyk w teście Vuonga.

W pracy zostaną szczegółowo opisane dwa algorytmy EM, które bazują na podejściu przedstawionym w pracach Hamiltona (1990, 1994). Autorski algorytm EM dla modelu z mechanizmem TVPMS, zostanie omówiony w podrozdziale 4.3.

<sup>7</sup> Przełącznikowy model Copula-GARCH z mechanizmem TVPMS zastosował Boudt i in. (2012) do zbadania wpływu indeksów VIX oraz wskaźnika *Ted spread* na zmiany poziomu współzależności między tygodniowymi stopami zwrotu w bankach holdingowych z siedzibą w Stanach Zjednoczonych. Również Czapkiewicz i in. (2018) wykorzystali ten model w swoich analizach.



Natomiast w podrozdziale 4.4 zwrócona zostanie szczególna uwaga na asymptotyczne własności uzyskanych estymatorów. Klasycznie zakłada się bowiem, że zmienne losowe, dla których realizacji tworzymy procedurę estymacji nieznanymi parametrów są niezależne o tym samym rozkładzie, którego gęstość spełnia odpowiednie warunki regularności. To założenie gwarantuje asymptotyczną normalność rozkładu estymatora. Jednak takie warunki regularności, zwłaszcza założenie o niezależności zmiennych losowych, nie są spełnione dla próby, na podstawie której estymujemy nieznanne parametry modeli przełącznikowych. Niespełnienie wymaganych warunków regularności uniemożliwia również zastosowanie powszechnie używanych testów służących do porównywania dwóch modeli, na przykład testu Vuonga (1989).

W prezentowanej pracy zostaną więc uporządkowane warunki regularności, które gwarantują, iż estymator największej wiarygodności (oraz ME) zastosowany dla estymacji nieznanymi parametrów przełącznikowego modelu Copula-GARCH utrzymuje swoje klasyczne własności. Zaprezentowany tok myślowy wykorzystuje tezę twierdzenia, którego dowód znajduje się we wspólnej pracy Czapkiewicz i Dawidowicz (2018). We wspomnianej pracy zostało wykazane centralne twierdzenie graniczne dla zmiennych losowych, których rozkład jest sterowany ukrytym łańcuchem Markowa ze skończoną liczbą stanów. To twierdzenie dało podstawy do dalszych teoretycznych analiz, które zamieszczone zostały wyłącznie w prezentowanej monografii.

Aby zbadać znaczenie czynnika w zmianach struktury powiązań pomiędzy giełdami należy wykonać test porównujący dwa modele: model przełącznikowy sterowany według ukrytego łańcucha Markowa oraz model przełącznikowy z mechanizmem TVPMS. Jednym z testów, który ma zastosowanie przy porównywaniu dwóch modeli, zarówno niezagnieżdżonych, jak i zagnieżdżonych jest test Vuonga (1989). Jednakże założenia tego testu są bardzo restrykcyjne. Pomimo, że zostały one złagodzone w pracy Riversa, Vuonga (2002), to nadal nie są spełnione dla modeli przełącznikowych. Autorka w monografii określi warunki regularności, które są spełnione dla modeli przełącznikowych oraz wykaże dla tych warunków słuszność stosowanych statystyk testu Vuonga (1989), pokaże w jaki sposób jest formułowana hipoteza zerowa dla porównywania modeli przełącznikowych i jakiej korekty wymagają odpowiednie statystyki testowe.

Monografia składa się z dwóch części: teoretycznej i praktycznej. Pierwsza część ma na celu omówienie warsztatu i metodologii, natomiast wyniki badań

empirycznych są tematem części drugiej. W pierwszym rozdziale została krótko opisana struktura rynku finansowego oraz instrumenty finansowe. Rozdział ten ma charakter wyłącznie ilustracyjny i przeglądowy. Celem tego rozdziału jest bowiem wprowadzenie pojęć, które będą używane w monografii. W rozdziale drugim przedstawiono charakterystyki jednowymiarowych finansowych szeregów czasowych oraz sposoby ich modelowania. Rozdział trzeci, w którym zdefiniowano i opisano własności kopuli, był podstawą do sformułowania modelu Copula-GARCH. Rozdział czwarty obejmuje tematykę dotyczącą dynamicznych modeli współzależności: wspomniano tylko o wielowymiarowych modelach typu GARCH, natomiast największy nacisk był położony na przełącznikowe modele Copula-GARCH, w których przełączenie jest sterowane według ukrytego łańcucha Markowa. Zostały opisane metody konstrukcji modelu, sposoby estymacji jego parametrów oraz scharakteryzowano asymptotyczne własności estymatorów metody największej wiarygodności i algorytmu EM. Rozdział piąty zawiera wyniki badań empirycznych dotyczących grupowania rynków. W rozdziale tym przedstawiono również analizę zmian jednoczesnych na GPW w Warszawie i giełdach z Europy Zachodniej, z USA oraz z Rosji. Omówiono również problem zarażania warszawskiej giełdy negatywnym impulsem pochodzącym z USA, Niemiec, Francji, Wielkiej Brytanii oraz Rosji. W rozdziale szóstym, przedstawiono badanie dotyczące wpływu wybranych wskaźników na poziom współzależności pomiędzy giełdami. Podsumowanie wyników zawarte jest w zakończeniu.

# **1. Podstawowe pojęcia dotyczące rynku finansowego**

Celem niniejszego rozdziału jest przybliżenie wybranych pojęć dotyczących rynku finansowego, które będą się pojawiać w monografii.

Sam rynek finansowy jest definiowany najczęściej jako miejsce, gdzie dokonuje się zawarcie transakcji kupna lub sprzedaży towaru, jakim jest instrument finansowy (Banaszczak-Soroka i in. 2014). Przegląd instrumentów finansowych można znaleźć między innymi w pracach Jajugi (2009), Jajugi i Jajugi (2017), Sopoćko (2010), Thiela (2010).

## **1.1. Klasyfikacja rynku finansowego**

Rynek finansowy można podzielić na dwa główne segmenty operacyjne: rynek pieniężny oraz rynek kapitałowy. Bardziej szczegółowa klasyfikacja rynku finansowego uwzględnia jeszcze dodatkowe segmenty: rynek terminowy, zwany również rynkiem instrumentów pochodnych, rynek walutowy oraz rynek depozytowo-kredytowy. Jednym z kryteriów podziału rynku na sektory jest rodzaj instrumentów finansowych będących przedmiotem handlu w danym sektorze.

Rynek pieniężny to segment rynku finansowego, na którym obraca się instrumentami finansowymi emitowanymi na okres do 52 tygodni. Podstawową rolą rynku pieniężnego jest zapewnienie odpowiedniego poziomu płynności jego uczestnikom. Cechuje go idealna konkurencja, co prowadzi do ustalenia cen walorów w wyniku popytu i podaży. Rynek ten pomaga jednostkom gospodarczym w realizacji zapotrzebowania na kapitał, umożliwiając im zaciąganie kredytów i pożyczek krótkoterminowych. Dębski (2014) podaje, że ze względu na rodzaj transakcji największymi segmentami tego rynku są rynek lokat międzybankowych oraz rynek bonów skarbowych.

Rynek lokat międzybankowych kształtuje się głównie w zależności od wysokości nadwyżek rezerw banków komercyjnych, które mogą być lokowane w walorach emitowanych przez bank centralny, skarb państwa lub być pożyczane innym bankom z odpowiednim ich oprocentowaniem. W zależności od tego, czy bank komercyjny ma zatem nadwyżkę czy niedobór wolnych rezerw gotówkowych, może wystąpić w charakterze pożyczkodawcy lub pożyczkobiorcy. W wyniku równowagi popytu i podaży nadwyżek ustala się ich stopa procentowa. W normalnych warunkach wysokość oprocentowania lokat międzybankowych zależy nie tylko od poziomu ryzyka kontrahenta, ale również od poziomu bazowych stóp procentowych banku centralnego oraz od wielkości popytu na pieniądź i podaży pieniądza.

Najbardziej znaną stopą oprocentowania lokat międzybankowych jest indeks LIBOR (*Interbank Offered Rate*), który jest referencyjną wysokością oprocentowania depozytów i kredytów na rynku lokat międzybankowym w Londynie. Stopa LIBOR jest średnią arytmetyczną stóp procentowych, po jakich najważniejsze banki Wielkiej Brytanii są skłonne pożyczać swoje środki innym bankom. W Warszawie natomiast jest ustalany indeks WIBOR (*Warsaw Interbank Offered Rate*), będący referencyjną wysokością oprocentowania kredytów na polskim rynku międzybankowym. Jest to średnia arytmetyczna stóp procentowych podawana przez banki, które zostały dopuszczone do zawierania transakcji z NBP. Stawki te są obliczane z godziny 11.00 każdego dnia roboczego.

Drugim ważnym segmentem rynku finansowego jest rynek kapitałowy. Ze względu na miejsce emisji i sprzedaży instrumentów finansowych rynek kapitałowy dzielimy na rynek pierwotny oraz na rynek wtórny. Na rynku pierwotnym z propozycją nabycia instrumentów finansowych występuje sam emitent. Na tym rynku emitent spotyka się z inwestorem. Kapitał pozyskany w wyniku emisji powiększa zasoby własne emitenta. Z rynkiem pierwotnym mamy po raz pierwszy do czynienia w momencie zakładania spółki akcyjnej, kiedy to jej założyciele sami obejmują lub proponują innym osobom objęcie określonej liczby akcji.

Natomiast na rynku wtórnym z propozycją nabycia instrumentów finansowych występuje ich właściciel. Po wyemitowaniu i przydziale papierów wartościowych nowej emisji ich pierwszemu właścicielowi, papiery te są następnie sprzedawane na rynku przez osoby inne niż emitent. Obrót papierami wartościowymi odbywa się między inwestorami.

Rynek wtórny dzieli się na trzy segmenty operacyjne: rynek niepubliczny, rynek giełdowy oraz rynek pozagiełdowy. Na podział ten ma wpływ rodzaj występowania na nim spółek oraz sposób obrotu papierami wartościowymi. Kiedy spółka nie ma jeszcze odpowiedniej renomy na rynku i jej zapotrzebowanie na kapitał w związku z potrzebami inwestycyjnymi jest stosunkowo niewielkie, to występuje ona raczej na rynku niepublicznym, gdzie obrót papierami wartościowymi ogranicza się do wąskiego kręgu osób.

Rynek giełdowy uznawany jest za najbardziej prestiżowy rynek wtórny. Jest to najbardziej zinstytucjonalizowana forma wtórnego rynku instrumentów finansowych. Cena instrumentu finansowego jest kształtowana na podstawie zlecenia kupujących i sprzedających.

Aby instrument finansowy był dopuszczony do obrotu na rynku giełdowym, musi spełniać pewne kryteria. W wyniku takich działań na parkietach giełdowych są notowane papiery wartościowe największych i najbardziej wiarygodnych emitentów oraz instrumenty pochodne charakteryzujące się znaczną wiarygodnością. Poza szczególnymi kryteriami dopuszczenia instrumentów finansowych na rynek giełdowy emitenci papierów wartościowych są zobowiązani do bieżącego i okresowego informowania inwestorów o swojej sytuacji finansowo-ekonomicznej oraz o zdarzeniach, które mogą wpływać na cenę papieru na giełdzie.

Na rynku pozagiełdowym (OTC – Over the Counter Market) transakcje mogą być zawierane bezpośrednio między inwestorami. Z dopuszczenia danego waloru do obrotu na OTC związane są znacznie mniejsze restrykcje niż ma to miejsce w przypadku rynku giełdowego. To sprawia, że rynki pozagiełdowe są przeznaczone w szczególności dla małych i średnich przedsiębiorstw, które emitują swoje akcje. Rynek pozagiełdowy stanowi również pewną alternatywę dla emitentów, którzy nie spełniają kosztownych i wysokich wymagań stawianych przez giełdę.

Najbardziej popularnym papierem wartościowym obecnym na rynku kapitałowym jest akcja. Jest ona papierem wartościowym oznaczającym prawo jej posiadacza do współwłasności firmy, która ją wyemitowała. W większości krajów (również w Polsce) każda akcja musi mieć określoną wartość nominalną wyrażoną w jednostkach pieniężnych. Biorąc pod uwagę sposób przenoszenia własności, można wyróżnić akcje imienne i akcje na okaziciela. Akcje imienne w treści zawierają nazwisko nabywcy akcji, natomiast akcje na okaziciela nie są związane z konkretną osobą. Większość akcji pozostająca w obrocie to akcje na okaziciela.

Akcjonariusz, który jest właścicielem akcji, posiada określone prawa. Między innymi ma on prawo do udziału w zysku rocznym, tzw. dywidendy oraz prawo poboru akcji nowych emisji. To ostatnie prawo zabezpiecza akcjonariuszy przed skutkami rozwodnienia kapitału w przypadku emisji nowych akcji. Aby zapewnić dotychczasowym akcjonariuszom utrzymanie ich stanu posiadania praw do majątku spółki, prawo poboru akcji daje im możliwość nabycia nowych akcji (prawo do akcji) w określonym stosunku do liczby już posiadanych akcji.

Od momentu spełnienia świadczenia przydziału akcji, prawo poboru wygasa i przekształca się w prawo do akcji, które obowiązuje od chwili przydziału akcji do momentu dopuszczenia akcji do obrotu. Prawo do akcji jest instrumentem, który również może być przedmiotem obrotu giełdowego. Umożliwia ono inwestorom wcześniejsze wycofanie się z inwestycji lub nabycie akcji zanim zadebiutują na giełdzie. Obrót prawami do nowych akcji podlega takim samym regułom jak obrót akcjami. Miejscem, w którym dokonuje się sprzedaż i zakup tych instrumentów, jest giełda papierów wartościowych.

Globalizacja rynków, otwarcie gospodarki, rozwój handlu na dużą skalę, zmienność stóp procentowych, wahania cen surowców i akcji są przyczyną powstawania pewnego rodzaju ryzyka finansowego. W związku z tym pojawiły się nowe instrumenty finansowe, będące pochodną instrumentu bazowego<sup>8</sup>, których celem jest ograniczenie tego ryzyka. Wraz z powstaniem tych nowych instrumentów automatycznie utworzył się rynek instrumentów pochodnych (będących jednocześnie instrumentami transferu ryzyka), zwany też rynkiem terminowym.

Kolejnym segmentem klasyfikacji rynku finansowego jest rynek walutowy. Na rynku tym odbywa się obrót walutami obcymi. W wyniku działania podaży i popytu ustala się kurs, który odzwierciedla stosunek ceny między walutami. Rynek ten często nazywany jest rynkiem Forex.

Rynek depozytowo-kredytowy jest uzupełnieniem rynku pieniężnego. Jak sama nazwa tego rynku wskazuje, swoje działania skupia na lokatach bankowych, kredytach bankowych i pożyczkach. Rynek depozytowo-kredytowy dotyczy transakcji między bankami i ich klientami. Na rynku tym funkcjonują instytucje finansowe, których podstawowym zadaniem jest przyjmowanie depozytów oraz udzielanie kredytów i pożyczek. Rynek tworzą między innymi banki komercyjne, banki spółdzielcze oraz spółdzielcze kasy oszczędnościowo-kredytowe.

---

<sup>8</sup> Jako instrument bazowy przyjmuje się między innymi instrument lub cechę z rynku pieniężnego lub kapitałowego (akcję, obligację, indeks giełdowy).

## 1.2. Giełda papierów wartościowych

Według Dorosz i Puławskiego (1991), giełdą papierów wartościowych są regularne, odbywające się w określonym czasie i miejscu, podporządkowane określonym normom i zasadom, spotkania osób pragnących zawrzeć umowę kupna-sprzedaży oraz osób pośredniczących w zawieraniu transakcji, których przedmiot stanowią zamienne papiery wartościowe, przy czym ceny owych transakcji ustalone są na podstawie układu podaży i popytu, a następnie podawane do wiadomości publicznej”.

W rozwiniętych gospodarkach rynkowych giełda papierów wartościowych odgrywa ważną rolę w gospodarce danego państwa. Na świecie występują dwa sposoby organizacji giełdy papierów wartościowych. Według pierwszego sposobu giełda jest powoływana przez podmioty zainteresowane utworzeniem rynku papierów wartościowych. Tworzą ją, a następnie zarządzają przedsiębiorstwa prowadzące biura maklerskie, które kierują się odpowiednimi przepisami prawa handlowego i cywilnego. W tym sposobie organizacji giełda jest instytucją niezależną od państwa (na przykład giełdy w Stanach Zjednoczonych i w Wielkiej Brytanii). W przypadku drugiego sposobu organizacji giełdy papierów wartościowych wymagane są odpowiednie zezwolenia organu państwowego, który sprawuje nad giełdą bezpośrednią kontrolę. Ten rodzaj giełdy działa według reguł ściśle określonych przez państwo. Do giełd tego rodzaju należy Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie, która działa na podstawie ustawy, określającej warunki, które muszą być spełnione przy dokonywaniu obrotu papierami wartościowymi. Dokładny opis sposobów organizacji giełdy przedstawił Dębski (2014).

Biorąc pod uwagę rodzaj instrumentu finansowego podlegającego obrotom, można wyróżnić dwie podstawowe grupy giełd. Do pierwszej grupy zaliczamy te, na których handluje się podstawowymi papierami wartościowymi, jakimi są akcje i obligacje, natomiast w drugiej grupie handluje się głównie instrumentami pochodnymi (giełdy terminowe). W wielu krajach obrót instrumentami podstawowymi i pochodnymi jest prowadzony oddzielnie.

Giełdy niektórych krajów łączą się, tworząc rozbudowane struktury. Przykładem może być parkiet o nazwie Euronext. Celem jego utworzenia było stworzenie rynku, który mógłby konkurować z giełdą papierów wartościowych w Londynie. Euronext powstał w 2000 roku na skutek połączenia giełd w Amsterdamie, Brukseli i Paryżu. W roku 2001 do współpracy z Euronextem przystąpiła giełda

w Lizbonie. W roku 2007 dokonana się fuzja nowojorskiej giełdy NYSE z giełdą Euronext, w ten sposób powstała giełda o nazwie NYSE Euronext. Objęła ona giełdę NYSE, Euronext oraz giełdę derywatów LIFFE w Londynie. Innym przykładem dużych formacji giełdowych jest NASDAQ OMX, w której połączono parkiety z kilkunastu państw, na których notowane są firmy reprezentujące ponad 50 krajów. Do europejskiej części grupy należy 12 rynków, głównie z rejonu morza Bałtyckiego (OMX Nordic).

Według danych pochodzących z Banku Światowego<sup>9</sup> największą giełdą na świecie pod względem kapitalizacji jest giełda papierów wartościowych w Nowym Jorku (NYSE). W 2015 roku kapitalizacja NYSE wynosiła 18,3 biliona dolarów amerykańskich. Druga co do wielkości jest giełda NASDAQ – również w Stanach Zjednoczonych. Jej kapitalizacja w roku 2015 wyniosła około 6,7 biliona dolarów amerykańskich. NASDAQ, czyli National Association of Securities Dealers Automated Quotations, jest przykładem pozagiełdowego, regulowanego rynku akcji. Został uruchomiony w 1971 roku jako pierwszy na świecie całkowicie elektroniczny system obrotu. Stworzono go z myślą o innowacyjnych spółkach, które były zbyt małe, by mogły debiutować na tradycyjnych giełdach.

Trzecia w rankingu największych giełd na świecie, z kapitalizacją sięgającą 6,1 biliona dolarów amerykańskich (2015 rok), jest londyńska giełda papierów wartościowych (London Stock Exchange). W Londynie notowane są wszystkie rodzaje papierów wartościowych pochodzące z Wielkiej Brytanii i akcje wybranych spółek ze świata. Czwarta giełda na świecie ma siedzibę w Tokyo. Jej kapitalizacja w roku 2015 sięgała 4,4 biliona dolarów.

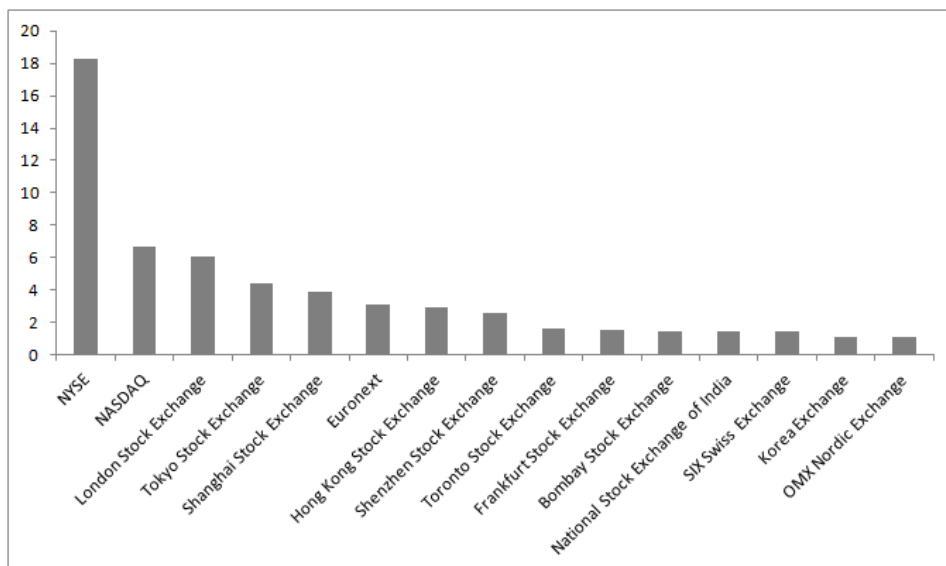
W rankingu tym wysokie pozycje zajmują również giełda w Szanghaju, która w roku 2015 osiągnęła kapitalizację 3,9 biliona dolarów, giełda w Hong Kongu z kapitalizacją 2,9 biliona dolarów oraz giełda w Shenzen z kapitalizacją 2,6 biliona dolarów. Pod koniec roku 2015 do pierwszej dziesiątki należała również giełda w Toronto z kapitalizacją 1,6 biliona dolarów. Do największych giełd w Europie, oprócz giełdy w Londynie, należy giełda niemiecka z siedzibą we Frankfurcie nad Menem z kapitalizacją 1,5 biliona dolarów (w roku 2015), która plasuje się na dziesiątym miejscu wśród największych parkietów świata.

---

<sup>9</sup> <https://data.worldbank.org/indicator/> [10.12.2016].



Natomiast Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie należy do giełd średniej wielkości. Pod względem kapitalizacji w roku 2015 zajmowała w Europie dwunastą pozycję z kapitalizacją 0,14 biliona dolarów. Rysunek 1.1 przedstawia kapitalizację wybranych rynków na podstawie danych z 2015 roku.



**Rysunek 1.1.** Kapitalizacja największych giełd papierów wartościowych w 2015 roku  
Źródło: opracowanie własne

Reprezentantem nastrojów giełdy jest indeks giełdowy. Wyraża on łączną zmianę kursów notowanych na danej giełdzie walorów. Jednym z najstarszych indeksów działającym na giełdzie jest Dow Jones Industrial Average (DJIA), który jest podawany przez giełdę w Nowym Jorku. Obecnie składa się z 30 największych amerykańskich przedsiębiorstw. Innym dobrze znanym w świecie indeksem jest Standard & Poor 500 (S&P 500) obliczany na NYSE od 1923 roku. W skład jego portfela wchodzi 500 przedsiębiorstw o największej kapitalizacji notowanych na amerykańskiej giełdzie. W Europie do bardziej znanych indeksów należy indeks giełdy londyńskiej (FTSE). Przy jego obliczaniu bierze się pod uwagę zmiany cen akcji stu największych firm notowanych na giełdzie w Londynie.

Sposoby konstrukcji wybranych indeksów giełdowych przedstawia Dębski (2014). Na przykład, indeks FTSE jest konstruowany według algorytmu:

$$Indeks(t) = \sum_{i=1}^n [n_{it}P_{it}/n_{i0}P_{i0}] \times 1000, \quad (1.1)$$

gdzie:

$Indeks(t)$  – wartość indeksu w chwili  $t$ ,

$n_{it}$  – liczba akcji  $i$ -tej firmy znajdującej się na rynku w chwili  $t$ ,

$P_{it}$  – cena akcji  $i$ -tej firmy w chwili  $t$ ,

$n_{i0}$  – liczba akcji  $i$ -tej firmy znajdującej się na rynku w okresie bazowym

$P_{i0}$  – cena akcji  $i$ -tej firmy w okresie bazowym.

Liczącym się indeksem jest również indeks DAX z giełdy we Frankfurcie nad Menem oraz CAC40 z giełdy w Paryżu, które są wyznaczane według tego samego algorytmu. Na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych najważniejszym indeksem jest Warszawski Indeks Giełdowy (WIG). Wyznacza się również Warszawski Indeks Giełdowy Dużych Spółek (WIG30), Warszawski Indeks Giełdowy Średnich Spółek (WIG50) oraz Warszawski Indeks Giełdowy Małych Spółek (WIG250). W Warszawie przyjęto kryterium, na podstawie którego w skład danego indeksu giełdowego może wejść spółka, której wartość akcji w wolnym obrocie przekracza 1 mln euro i jej liczba akcji w wolnym obrocie przekracza 10% wszystkich wyemitowanych akcji. Indeksy w Warszawie obliczane są następująco:

$$Indeks(t) = M(t) \times Indeks(t)/M(0) \times K(t), \quad (1.2)$$

gdzie:

$Indeks(t)$  – wartość indeksu w chwili  $t$ ,

$Indeks(0)$  – wartość indeksu w dniu bazowym,

$M(t)$  – kapitalizacja portfela indeksu na sesji  $t$ ,

$M(0)$  – kapitalizacja portfela indeksu w dniu bazowym,

$K(t)$  – współczynnik korygujący w chwili  $t$ .

Współczynnik  $K(t)$  ma na celu zachowanie ciągłości danego indeksu np. w przypadku operacji ustalenia praw poboru czy prawa do dywidendy. W prezentowanej monografii badanie powiązań pomiędzy rynkami papierów wartościowych będzie prowadzone dla ich głównych indeksów giełdowych.

# **Część I**

## **Własności stosowanych narzędzi ekonometrycznych**



## 2. Wybrane modele jednowymiarowych szeregów czasowych

Przed przystąpieniem do opisu wybranych metod modelowania jednowymiarowych finansowych szeregów czasowych wprowadzone zostaną oznaczenia oraz definicje przydatne w dalszej części rozprawy:

- **Szeregiem czasowym** będziemy nazywać uporządkowany w czasie ciąg zmiennych losowych  $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ . Jako  $\mathcal{T}$  możemy przyjąć zbiór liczb naturalnych lub zbiór liczb całkowitych. W pracy pojęcia „szereg czasowy” oraz „proces” będą stosowane wymiennie.
- Element szeregu czasowego w chwili  $t$  będzie oznaczany dużą literą, np.  $X_t$ ,  $Y_t$ ,  $R_t$ .
- Realizacje szeregu czasowego w chwili  $t$  będą oznaczane małymi literami, np.  $x_t$ ,  $y_t$ ,  $r_t$ . Czasem będzie tylko mowa o tym, czy to jest realizacja szeregu, czy zmienna losowa.
- Symbol  $\mathcal{R}_{t-1}$  będzie oznaczać historię procesu do chwili  $t - 1$ .
- Przez szereg czasowy stóp zwrotu będziemy rozumieć ciąg zmiennych losowych  $\{R_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ , gdzie  $\{R_t\}$  jest stopą zwrotu, wyznaczaną następująco:

$$R_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}, \quad (2.1)$$

gdzie  $P_t$  oraz  $P_{t-1}$  są cenami zamknięcia danego waloru odpowiednio w chwili  $t$  oraz  $t - 1$ . Często w rozprawie określenie **szereg stóp zwrotu** będzie oznaczać realizację tego szeregu czasowego.

W rozdziale tym zostaną zaprezentowane wybrane zagadnienia dotyczące modelowania jednowymiarowych szeregów czasowych. Część z prezentowanych modeli będzie zastosowana w analizie empirycznej, której wyniki autorka zamieściła w drugiej części rozprawy. Uwaga będzie skierowana zatem na te modele, które mogą być wykorzystywane do opisu finansowych szeregów czasowych. Do tego typu modeli należy GARCH i jego modyfikacje. W Polsce zastosowaniami modelu GARCH w empirycznych badaniach finansowych zajmowali się np.: Brzeszczyński i Kelm (2000), Osiewalski (2001), Osińska (2006), Pipień (2006), Fiszeder (2009), Doman i Doman (2009).

## 2.1. Model GARCH

Rozważmy szereg czasowy  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ . Model GARCH (p,q) można przedstawić jako (Bollerslev 1986):

$$\varepsilon_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (2.2)$$

gdzie

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 = \alpha_0 + \alpha(L) \varepsilon_t^2 + \beta(L) \sigma_t^2,$$

przy czym:

$$\begin{aligned} \alpha(L) &= \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots, \alpha_q L^q, \\ \beta(L) &= \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots, \beta_p L^p, \end{aligned}$$

gdzie  $L$  jest operatorem opóźnienia. Natomiast  $\{\varepsilon_t\}$  jest ciągiem nieskorelowanych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Klasycznie przyjmuje się, że rozkład  $\varepsilon_t$  jest normalny, tj.  $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ .

W szczególności model GARCH(1,1) przyjmuje postać:

$$\varepsilon_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

gdzie

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 > 0.$$

Warunkowa wartość oczekiwana oraz warunkowa wariancja zmiennej losowej  $\varepsilon_t$ , pod warunkiem znanej historii  $\mathcal{R}_{t-1}$ , są postaci:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon_t \mid \mathcal{R}_{t-1}) &= 0, \\ \text{var}(\varepsilon_t \mid \mathcal{R}_{t-1}) &= \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \mid \mathcal{R}_{t-1}) - \mathbb{E}^2(\varepsilon_t \mid \mathcal{R}_{t-1}) = \sigma_t^2. \end{aligned}$$

Jeśli w finansowym szeregu czasowym występuje autokorelacja, wówczas do modelowania szeregu czasowego można wprowadzić człon autoregresyjny AR ( $p$ ). Do opisu finansowego szeregu czasowego utworzonego z dziennych stóp zwrotu indeksów giełdowych stosowany jest często model AR(1)-GARCH(1,1), który spełnia następujące równanie:

$$R_t = \mu + \phi R_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.3)$$

gdzie  $\varepsilon_t$  jest opisany jako model GARCH (1,1). Biorąc pod uwagę cechy finansowych szeregów czasowych, przyjęcie w modelu GARCH warunkowego rozkładu normalnego dla  $\varepsilon_t$  nie jest satysfakcjonujące. Istnieje zatem wiele uogólnień i modyfikacji tego typu modeli, na przykład modele GARCH z innym rozkładem warunkowym.

## 2.2. Rozkłady skośne

W niniejszym podrozdziale przedstawiona zostanie ogólna charakterystyka rozkładów skośnych, które znalazły zastosowanie w praktyce. Gęstość rozkładu skośnego można zdefiniować jako (Fernandez i Steel 1998):

$$f_{\psi}(x) = \frac{2}{a(\psi) + b(\psi)} \left( f\left(\frac{x}{a(\psi)}\right) I_{(-\infty, 0)}(x) + f\left(\frac{x}{b(\psi)}\right) I_{[0, \infty)}(x) \right), \quad (2.4)$$

gdzie  $\psi > 0$  jest parametrem skośności,  $a(\psi)$  oraz  $b(\psi)$  są pewnymi funkcjami normalizującymi, natomiast  $f(\cdot)$  jest gęstością rozkładu jednomodalnego, symetrycznego względem zera. Na przykład Fernandez i Steel (1998) zdefiniowali następujące funkcje normalizujące:

$$a(\psi) = \psi, \quad b(\psi) = \frac{1}{\psi},$$

natomiast Hansen (1994) w swojej pracy rozważył:

$$a(\lambda) = 1 - \lambda, \quad b(\lambda) = 1 + \lambda.$$

W praktycznych zastosowaniach jako gęstość rozkładu symetrycznego i uni-modalnego rekomendowana jest gęstość rozkładu t-Studenta oraz gęstość GED (Generalized Error Distribution).

Odpowiednie wzory gęstości mają postać:

- dla rozkładu t-Studenta, zwykle oznaczana jako  $t_\eta(x)$ , gdzie  $\eta$  jest liczbą stopni swobody:

$$t_\eta(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\eta-2)}\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\eta-2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}},$$

- dla GED, gdzie  $v$  również oznacza liczbę stopni swobody:

$$f_v(x) = \frac{v \exp\left(-\frac{1}{2}\left|\frac{x}{\lambda}\right|^v\right)}{\lambda \Gamma\left(\frac{1}{v}\right)} 2^{\frac{v+1}{v}}, \quad \lambda = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{v}\right)} 2^{-\frac{2}{v}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nelson (1991) w swojej pracy rozważał gęstość GED, uzyskując skośny GED, natomiast Bollerslev i Wooldridge (1992) przyjęli rozkład t-Studenta, uzyskując w ten sposób skośny rozkład t-Studenta. W modelowaniu dziennych stóp zwrotu indeksów giełdowych bardzo często stosuje się najczęściej skośny rozkład t-Studenta. Poniżej zatem przedstawiona zostanie krótka jego charakterystyka. Jeśli we wzorze (2.4) uwzględnimy wagi  $a(\psi) = \psi$  oraz  $b(\psi) = \frac{1}{\psi}$  i założymy rozkład t-Studenta, to otrzymujemy następującą gęstość rozkładu:

$$f_{\eta,\psi}(x) = \frac{2}{\psi + \frac{1}{\psi}} \left( t_\eta\left(\frac{x}{\psi}\right) I_{(-\infty,0)}(x) + t_\eta(\psi x) I_{[0,\infty)}(x) \right). \quad (2.5)$$

Wartość oczekiwana  $\mathbb{E}(X)$  i wariancja  $D^2(X)$  zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie zadanym gęstością  $f_{\eta,\psi}(x)$  ma postać:

$$m = \mathbb{E}(X) = \frac{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right) \sqrt{\eta-2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \left( \psi - \frac{1}{\psi} \right)$$

oraz

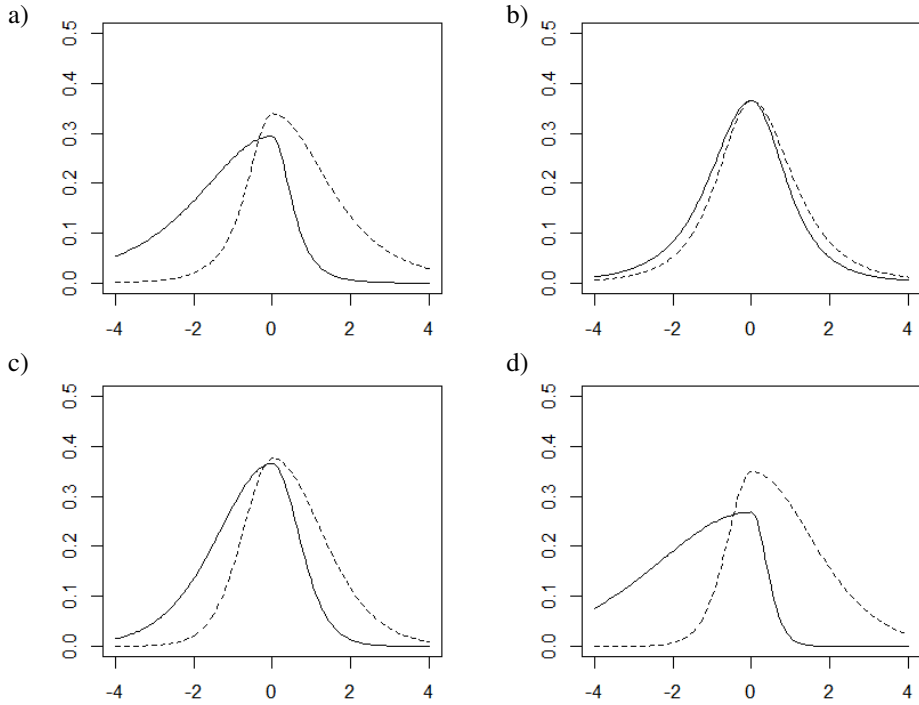
$$s^2 = D^2(X) = \left( \psi^2 + \frac{1}{\psi^2} - 1 \right) - m^2.$$

W praktyce rozważany jest rozkład standaryzowany:

$$f_{\eta,\psi}(x) = \frac{2s}{\psi + \frac{1}{\psi}} \left( t_\eta\left(\psi^{-1}(sx+m)\right) I_{(-\infty, -\frac{m}{s})}(x) + t_\eta(\psi(sx+m)) I_{[-\frac{m}{s}, \infty)}(x) \right).$$

Przykładowe gęstości rozkładów tego typu przedstawia rysunek 2.1.





**Rysunek 2.1.** Gęstość rozkładu skośnego t-Studenta: a)  $\nu = 3$ ,  $\psi = 0,5$  (linia ciągła),  $\nu = 3$ ,  $\psi = 1,5$  (linia przerywana), b)  $\nu = 3$ ,  $\psi = 0,9$  (linia ciągła),  $\nu = 3$ ,  $\psi = 1,1$  (linia przerywana), c)  $\nu = 10$ ,  $\psi = 0,7$  (linia ciągła),  $\nu = 10$ ,  $\psi = 1,3$  (linia przerywana), d)  $\nu = 10$ ,  $\psi = 0,4$  (linia ciągła),  $\nu = 10$ ,  $\psi = 1,6$  (linia przerywana)

Źródło: opracowanie własne

Kontynuując rozważania, warto nadmienić o rozkładzie Hansena (1994). Jeśli we wzorze (2.4) przyjmujemy jako funkcje normalizujące wyrażenia:  $a(\lambda) = 1 - \lambda$  oraz  $b(\lambda) = 1 + \lambda$ , to otrzymamy gęstość rozkładu, zwanego również rozkładem Hansena:

$$f(z; \eta, \lambda) = \begin{cases} bc \left( 1 + \frac{1}{\eta-2} \left( \frac{bz+a}{1-\lambda} \right)^2 \right)^{-\frac{\nu+1}{2}} & \text{gdy } z < -\frac{a}{b} \\ bc \left( 1 + \frac{1}{\eta-2} \left( \frac{bz+a}{1-\lambda} \right)^2 \right)^{-\frac{\nu+1}{2}} & \text{gdy } z \geq -\frac{a}{b}. \end{cases}$$

Przy czym:

$$a = 4\lambda c \frac{\nu-2}{\nu-1}, \quad b^2 = 1 + 3\lambda^2 - a^2, \quad c = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma(\nu/2)}.$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej o rozkładzie Hansena równa jest zero, natomiast wariancja wynosi jeden.

Prezentowane powyżej dwie gęstości rozkładu są bardzo często stosowane w modelowaniu dziennych stóp zwrotu indeksów giełdowych. Nie oznacza to jednak, że rozkłady te nie podlegają pewnym modyfikacjom poprzez uwzględnienie większej liczby ich charakterystyk, których celem jest poprawa rzetelności opisu danych. Na przykład we wspomnianej już pracy Hansena (1994) pojawiło się uogólnienie, w którym dwa parametry: parametr skali  $\eta$  oraz parametr skośności  $\lambda$  również zmieniają się w czasie.

## 2.3. Rozszerzenia modelu GARCH

Bollerslev i in. (1994) przedstawili syntezę modyfikacji modelu GARCH. Aktualizację takiej syntezy można znaleźć w pracach Bollersleva (2008) czy Hansena i in. (2010). Największe zastosowanie w modelowaniu finansowych szeregów czasowych utworzonych z dziennych stóp zwrotu indeksów giełdowych mają modyfikacje modelu GARCH (1, 1). W tej części rozdziału zostanie zatem podana krótka charakterystyka wybranych modyfikacji tego modelu.

Większość modyfikacji modeli GARCH polega na różnorodnym sposobie wyznaczania warunkowej wariancji, która jest uzależniona od historii procesu. Na przykład w często używanych w praktyce modelach EGARCH oraz GJR-GARCH w definicji warunkowej wariancji uwzględniany jest „efekt dźwigni”. Został on zdefiniowany jako asymetryczna reakcja w poziomie warunkowej wariancji na informacje pozytywne i negatywne.

### Model EGARCH

Model ten (Exponential GARCH) zaproponowany został przez Nelsona (1991). W swojej konstrukcji dopuszcza asymetrię w reakcji warunkowej wariancji na pojawiające się informacje pozytywne i negatywne.

W modelu tym zakłada się, że:

$$\log \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta \log(\sigma_{t-1}^2) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \alpha \left[ \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - \sqrt{2/\pi} \right].$$

W praktyce wykorzystuje się tylko model EGARCH (1, 1), nie znaczy to jednak, że nie istnieje uogólnienie tych modeli na przypadek EGARCH ( $p, q$ ). Modele tego typu i ich charakterystyki są tematem pracy Martinet i McAleer (2016).

## Model GJR-GARCH

Innym modelem, który w swojej konstrukcji uwzględnia efekt dźwigni, jest model GJR-GARCH zaproponowany przez Glosten, Jagannathan, Runkle (1993), w którym zakłada się, że:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_1^- I_{\varepsilon_{t-1} < 0}) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (2.6)$$

gdzie  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1^-$  oraz  $\beta_1$  są parametrami, natomiast:

$$I_p = \begin{cases} 1 & \text{gdy } p\text{-prawda} \\ 0 & \text{gdy } p\text{-fałsz} \end{cases}$$

Dodatknie, istotnie różne od zera wartości parametru  $\alpha_1^-$  świadczą o występowaniu efektu dźwigni w szeregu stóp zwrotu. Im wyższa wartość tego parametru, tym silniejszy jest efekt dźwigni.

## Krzywa wpływu informacji

Jeśli na warunkową wariancję w modelu GARCH (1,1) spojrzymy jak na zależność funkcyjną pomiędzy  $\sigma_t^2$  a obserwacją zmiennej  $\varepsilon_{t-1}$ , to naturalnym uogólnieniem tego typu modeli jest wprowadzenie rozmaitych form tej zależności. Zależność ta, opisana funkcją  $f(\varepsilon_{t-1})$ , zwana jest również „krzywą wpływu informacji” (*news impact curve*). W klasycznym modelu GARCH (1,1) krzywa ta jest parabolą, w modelu EGARCH (1,1) jest funkcją wykładniczą, natomiast w modelu GJR-GARCH (1,1) jest funkcją powstałą ze sklejenia dwóch połówek paraboli o różnym nachyleniu.

Rozmaite przykłady tej zależności funkcyjnej zostały przedstawione w pracy Engle i Ng (1993). Poniżej, oprócz funkcji dla wspomnianych wcześniej modeli EGARCH oraz GJR-GARCH, zaprezentujemy inne popularne przykłady konstrukcji krzywej wpływu informacji:

- nieliniowy ARCH:

$$f(\varepsilon_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 + |\varepsilon_{t-1}|^\gamma + \beta \sigma_{t-1}^2$$

- asymetryczny model AGARCH:

$$f(\varepsilon_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1} + \gamma)^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

- VGARCH:

$$f(\varepsilon_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1} / \sigma_{t-1} + \gamma)^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.$$

Oprócz typowych modyfikacji modelu GARCH rozważa się również modele z długą pamięcią, na przykład model FIGARCH  $(p, d, q)$  (Fractionally Integrated GARCH) wprowadzony przez Baillie'go i in. (1996). W praktyce najczęściej wykorzystywany jest model FIGARCH  $(1, d, 1)$ . W Polsce modelami tego typu zajmowali się między innymi Piontek (2002, 2003), Fiszeder (2005), Gurgul i Wójtowicz (2008).

## 2.4. Weryfikacja modelu

W praktyce pojawia się problem wyboru właściwego modelu, który najlepiej opisać dany finansowy szereg czasowy. W tym celu można zastosować rozmaite kryteria informacyjne lub też przeprowadzić odpowiedni test statystyczny. Sam temat dotyczący testowania modelu jest ogromnie szeroki. W tym podrozdziale opisane zostanie tylko to podejście, które będzie używane przez autorkę w części empirycznej prezentowanej monografii. Podejście to jest stosunkowo często wykorzystywane w opracowaniach z tej tematyki.

Punktem wyjścia do rozważań jest twierdzenie, które udowodnili w swojej pracy Diebold, Gunther oraz Tay (1998). Rozważmy ciąg zmiennych losowych  $\{Y_t\}_{t=1}^T$  oraz odpowiadający mu ciąg gęstości rozkładów, warunkowanych historią  $\mathcal{R}_{t-1}$ , który oznaczony zostanie jako:

$$\{f_t(y_t|\mathcal{R}_{t-1})\}_{t=1}^T.$$

Następnie rozważmy ciąg prognozowanych gęstości dla  $Y_t$ , również warunkowanych historią  $\mathcal{R}_{t-1}$ , które oznaczmy jako:

$$\{p_t(y_t|\mathcal{R}_{t-1})\}_{t=1}^T.$$

Naszym celem jest teraz weryfikacja stwierdzenia, że:

$$p_t(y_t|\mathcal{R}_{t-1}) = f_t(y_t|\mathcal{R}_{t-1}), \quad t = 1, \dots, T.$$

Dla uproszczenia warunkowe gęstości  $f_t(y|\mathcal{R}_{t-1})$  oraz  $p_t(y|\mathcal{R}_{t-1})$  będą oznaczane w skrócie:  $f_t(y_t)$  oraz  $p_t(y_t)$ .

W tym celu rozważmy dystrybuantę zmiennej  $Y_t$  zdefiniowaną dla gęstości  $p_t(y_t)$ , która wówczas przyjmuje postać:

$$z_t = \int_{-\infty}^{y_t} p_t(u) du = P_t(y_t).$$

Założmy jednak, że gęstością rozkładu zmiennej losowej  $Y_t$  jest funkcja  $f_t(y_t)$ . Wówczas jako gęstość rozkładu musi być ona pochodną zdefiniowanej wyżej funkcji dystrybucyjnej. Jednocześnie pochodną funkcji  $P_t(y_t)$  względem  $y_t$  jest funkcja gęstości  $p_t(y_t)$ , czyli  $p_t(y_t) = \frac{\partial P_t(y_t)}{\partial y_t}$ . Korzystając z faktu, że  $y_t = P_t^{-1}(z_t)$ , przy założeniu, że  $\frac{\partial P_t^{-1}(z_t)}{\partial z_t}$  jest ciągła i niezerowa, wykonując odpowiednie różniczkowanie względem  $z_t$ , otrzymujemy gęstość  $q_t(z_t)$  postaci:

$$q_t(z_t) = \left| \frac{\partial P_t^{-1}(z_t)}{\partial z_t} \right| f_t(P_t^{-1}(z_t)) = \frac{f_t(P_t^{-1}(z_t))}{p_t(P_t^{-1}(z_t))}.$$

Zatem w przypadku, gdy gęstości  $p_t$  oraz  $f_t$  są sobie równe, tj.:  $p_t(y_t) = f_t(y_t)$ , to  $q_t(z_t)$  jest gęstością rozkładu jednostajnego na przedziale  $[0, 1]$ .

Uogólniając powyższe rozważanie na przypadek wielowymiarowy, możemy sformułować następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 1.** *Rozważmy wektor losowy  $(Y_1, \dots, Y_T)$ , którego realizacje są generowane przez ciąg nieznaną gęstości  $\{f_t(y_t | \mathcal{R}_{t-1})\}_{t=1}^T$ . Jeśli ciąg prognozowanych gęstości  $\{p_t(y_t | \mathcal{R}_{t-1})\}_{t=1}^T$  pokrywa się z  $\{f_t(y_t | \mathcal{R}_{t-1})\}_{t=1}^T$ , to przy odpowiednich warunkach regularności ciągu  $\{Z_t\}_{t=1}^T$ , o realizacjach:*

$$z_t = \int_{-\infty}^{y_t} p_t(u) du = P_t(y_t), \quad t = 1, \dots, T,$$

*jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie  $U(0, 1)$ , czyli rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[0, 1]$ .*

W celu udowodnienia tego faktu wystarczy zauważyć, że wspólny rozkład

$$f(y_T, y_{T-1}, \dots, y_1 | \mathcal{R}_0),$$

przy czym  $\mathcal{R}_0$  oznacza informację o procesie w chwili  $t = 0$ , jest postaci:

$$f(y_T, y_{T-1}, \dots, y_1 | \mathcal{R}_0) = f_T(y_T | \mathcal{R}_{T-1}) f_{T-1}(y_{T-1} | \mathcal{R}_{T-2}) \dots f_1(y_1 | \mathcal{R}_0).$$

Natomiast wspólny rozkład  $q(z_1, \dots, z_T)$  można wyrazić jako:

$$\begin{aligned} q(z_1, \dots, z_T) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial z_T} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial y_T}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial y_T}{\partial z_T} \end{vmatrix} \times f_T(P_T^{-1}(z_T) | \mathcal{R}_{T-1}) \dots f_1(P_1^{-1}(z_1) | \mathcal{R}_0) = \\ &= \frac{\partial y_1}{\partial z_1} \dots \frac{\partial y_T}{\partial z_T} f_T(P_T^{-1}(z_T) | \mathcal{R}_{T-1}) \dots f_1(P_1^{-1}(z_1) | \mathcal{R}_0). \end{aligned}$$

W powyższym wzorze wyznacznik macierzy pochodnych cząstkowych to Jakobian. Korzystając z faktu, że Jakobian tego przekształcenia jest macierzą trójkątną górną, zauważamy że:

$$q(z_1, \dots, z_T) = \frac{f_1(P_1^{-1}(z_1))}{p_1(P_1^{-1}(z_1))} \cdots \frac{f_T(P_T^{-1}(z_T))}{p_T(P_T^{-1}(z_T))}.$$

Jeśli są spełnione odpowiednie założenia regularności (dotyczące istnienia pochodnych funkcji oraz istnienia funkcji odwrotnej), to każdy czynnik tego iloczynu ma rozkład jednostajny  $U[0, 1]$ . W efekcie tych przekształceń otrzymaliśmy iloczyn  $T$  rozkładów jednostajnych, co daje nam  $T$ -wymiarowy rozkład jednostajny. Jest to również iloczyn rozkładów brzegowych, a to oznacza, że  $\{Z_t\}_{t=1}^T$  jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym.

Wnioski wynikające z tego twierdzenia można wykorzystać w praktyce do weryfikacji przyjętego modelu jednowymiarowego finansowego szeregu czasowego. Idea testu polega na następującym rozumowaniu. Niech  $F_t$  będzie hipotetyczną dystrybuantą zmiennej losowej  $Y_t$ , ( $t = 1, \dots, T$ ). Dla obserwacji  $(y_1, \dots, y_T)$  tworzymy próbę  $(z_1, \dots, z_T)$ , gdzie  $z_t = F_t(y_t)$ . Na podstawie tak utworzonej próby przeprowadzamy wybrany test niezależności zmiennych losowych  $Z_t$  oraz test ich zgodności z rozkładem jednostajnym  $U[0, 1]$ .

W celu zbadania niezależności zmiennych losowych  $Z_t$  Diebold i in. (1998) sugerują testowanie braku autokorelacji dla zmiennych losowych typu:

$$Z_t(k) = (Z_t - \bar{Z})^k, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Dla każdej z tych zmiennych losowych, dla potrzeb testowania braku autokorelacji można zastosować statystykę testową postaci:

$$R(k) = (T - 20)R^2, \quad k = 1, \dots, 4,$$

gdzie  $R^2$  jest współczynnikiem determinacji regresji wielorakiej pomiędzy wartościami zmiennej  $Z_t(k)$  a wartościami kolejnych opóźnień tej zmiennej, czyli:

$$Z_{t-1}(k), \dots, Z_{t-20}(k).$$

Statystyka  $R(k)$  ma rozkład  $\chi^2(20)$  z dwudziestoma stopniami swobody.

Testowanie jednostajności zmiennych losowych  $Z_t$  można przeprowadzić wykorzystując test zgodności, na przykład test Kołmogorowa-Smirnova, test Cramera von Misesa lub inny.

### 3. Kopule w modelowaniu struktury powiązań pomiędzy szeregami czasowymi

W poprzednim rozdziale przedstawione zostały własności jednowymiarowych finansowych szeregów czasowych oraz propozycje ich modelowania. Z punktu widzenia ryzyka ważną rolę odgrywa jednak modelowanie wielowymiarowych finansowych szeregów czasowych.

Do tworzenia rozkładów wielowymiarowych szeregów czasowych można wykorzystać własności kopuli<sup>10</sup>. Zaletą bowiem tego podejścia jest fakt, że rozkłady brzegowe analizujemy niezależnie, a następnie, za pomocą kopuli, tworzymy wielowymiarowe struktury.

#### 3.1. Pojęcie kopuli

Przed przystąpieniem do podania formalnej definicji kopuli wprowadzone zostaną pewne pojęcia. Niech  $B$  będzie prostokątem postaci:

$$B = [\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{t}] = [u_1, u_1 + t_1] \times [u_2, u_2 + t_2] \times \cdots \times [u_d, u_d + t_d].$$

Wierzchołkami tego prostokąta są punkty:

$$(c_1, c_2, \dots, c_d),$$

takie, że  $c_i = u_i$  lub  $c_i = u_i + t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ . Zbiór wszystkich wierzchołków prostokąta  $B$  będziemy oznaczać jako  $\text{vert}(B)$ .

---

<sup>10</sup> W niniejszej monografii pojęcie „kopula” będzie stosowane wymiennie z pojęciem „funkcja łącząca”.

Kopulą  $d$ -wymiarową nazywamy funkcję  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ , spełniającą następujące warunki:

- dla dowolnego  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$  zachodzi następująca równość:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_d) = 0, \quad (3.1)$$

- dla dowolnego  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$  zachodzi warunek:

$$C(1, 1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i, \quad (3.2)$$

- dla dowolnych  $\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{t} \in [0, 1]^d$  spełniona jest nierówność:

$$\sum_{\mathbf{c} \in \text{vert}(B)} \text{sgn}(\mathbf{c}) C(\mathbf{c}) \geq 0, \quad (3.3)$$

gdzie

$$\text{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } c_j = u_j, \text{ gdy } j \text{ parzyste,} \\ -1, & \text{gdy } c_j = u_j, \text{ gdy } j \text{ nieparzyste.} \end{cases}$$

Do zastosowania teorii kopuli w praktyce przyczyniło się twierdzenie Sklara (1959), które łączy w sobie rozkłady brzegowe, kopule oraz rozkład wielowymiarowy.

**Twierdzenie 2.** *Niech  $F$  będzie  $d$ -wymiarową dystrybuantą oraz niech*

$$F_1, F_2, \dots, F_d$$

*będą dystrybuantami brzegowymi. Istnieje taka kopula  $C$ , że dla dowolnego punktu*

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \bar{\mathbb{R}}^d, \quad \bar{\mathbb{R}} = [-\infty; \infty]$$

*zachodzi związek:*

$$F(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)). \quad (3.4)$$

Jeśli  $F_1, F_2, \dots, F_d$  są ciągłe, wówczas kopula  $C$  jest wyznaczona jednoznacznie. W przeciwnym wypadku  $C$  jest wyznaczona jednoznacznie na iloczynie kartezjańskim  $\text{Ran}(F_1) \times \dots \times \text{Ran}(F_d)$ , gdzie  $\text{Ran}(F_i)$  jest zbiorem wartości funkcji  $F_i$ . Jeśli  $C$  jest kopulą oraz  $F_1, F_2, \dots, F_d$  są dystrybuantami, wówczas funkcja  $F$  opisana równaniem (3.4) jest  $d$ -wymiarową dystrybuantą.



Zachodzi warunek:

$$C(\mathbf{u}) = F\left(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), \dots, F_d^{(-1)}(u_d)\right),$$

gdzie

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d) = (F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d))$$

oraz  $F_1^{(-1)}$  jest uogólnioną dystrybuantą odwrotną, która definiujemy wzorem:

$$F_1^{(-1)}(u) = \inf\{x \in \bar{\mathbb{R}} : F(x) \geq u\}$$

dla  $u$  należących do  $[0, 1]$ . Jeśli  $F$  jest silnie rosnąca to uogólniona dystrybuantą odwrotną jest zwykłą funkcją odwrotną.

Dla potrzeb estymacji parametrów rozkładów wielowymiarowych, która będzie miała miejsce w dalszej części rozprawy, wprowadzone zostanie pojęcie gęstości kopuli, którą będziemy oznaczać jako  $c$ . Jeśli symbolem  $f$  oznaczymy gęstość rozkładu wielowymiarowego o dystrybuantie  $F$ , symbolami  $f_1, f_2, \dots, f_d$  gęstości związane z dystrybuantami  $F_1, F_2, \dots, F_d$ , to różniczkując wzór (3.4) względem zmiennych  $(x_1, x_2, \dots, x_d)$  otrzymujemy zależność:

$$\frac{\partial^d}{\partial x_1 \dots \partial x_d} F(x_1, \dots, x_d) = \frac{\partial^d}{\partial x_1 \dots \partial x_d} C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

Zatem

$$f(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i), \quad (3.5)$$

gdzie

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d}{\partial u_1 \dots \partial u_d} C(u_1, \dots, u_d).$$

Patton (2001) wykazał, że wzór 3.4 można rozszerzyć na przypadek rozkładów warunkowych, tj.:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d | \mathcal{R}) = C(F_1(x_1 | \mathcal{R}), \dots, F_d(x_d | \mathcal{R}) | \mathcal{R}), \quad (3.6)$$

przy czym  $\mathcal{R}$  jest pewnym  $\sigma$ -ciałem (zob: Jakubowski, Sztencel 2001). W monografii jako  $\mathcal{R}$  będzie zazwyczaj rozważana historia danego szeregu czasowego.

Warto również wspomnieć o innej własności kopuli, czyli o jej niezmienniczości względem przekształcenia przez funkcję rosnącą. Własność ta jest szczególnie przydatna przy definiowaniu zależności pomiędzy zmiennymi losowymi w oparciu o kopule z twierdzenia 3.

**Twierdzenie 3.** Niech  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  będzie wektorem losowym o ciągłych rozkładach brzegowych i kopuli  $C_{X_1 \dots X_d}$ . Natomiast niech  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  będą funkcjami rzeczywistymi ściśle rosnącymi odpowiednio na  $\text{Ran}(X_1), \dots, \text{Ran}(X_d)$ . Wówczas  $C_{X_1 \dots X_d}$  jest kopulą również dla wektora losowego  $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_d(X_d))$ , czyli

$$C_{\alpha_1(X_1) \dots \alpha_d(X_d)} = C_{X_1 \dots X_d}.$$

## 3.2. Miary współzależności

Współzależność dwóch zmiennych losowych możemy zdefiniować na wiele sposobów. W praktycznych zastosowaniach często jest rozważana definicja, która bazuje na pojęciu zgodności, co formalnie możemy wyrazić następująco. Niech  $(x_i, y_j)$  oraz  $(x_j, y_j)$  oznaczają dwie obserwacje dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(X, Y)$  o rozkładzie ciągłym.

Mówimy, że obserwacje te są „zgodne”, a co za tym idzie: zmienne losowe są „zgodne”, gdy z nierówności  $x_i < x_j$  wynika nierówność  $y_i < y_j$ . Zatem „niezgodność” w tym rozumieniu mamy wówczas, gdy zachodzi jeden z dwóch przypadków:  $x_i < x_j$  i  $y_i > y_j$  lub  $x_i > x_j$  i  $y_i < y_j$ .

### Współczynnik $\tau$ Kendalla

Jednym z najprostszych miar współzależności tego typu jest współczynnik korelacji  $\tau$  Kendalla. Niech  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$  będą dwuwymiarowymi zmiennymi losowymi o ciągłym rozkładzie  $H$ . Współczynnik  $\tau$  Kendalla jest definiowany następująco:

$$\tau = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0).$$

Jest to różnica pomiędzy prawdopodobieństwem zgodności zmiennych losowych oraz prawdopodobieństwem ich niezgodności. Miarę, będącą różnicą pomiędzy takimi prawdopodobieństwami można zdefiniować za pomocą kopuli (Nelsen 2006):

**Twierdzenie 4.** Niech  $(X_1, Y_1)$  oraz  $(X_2, Y_2)$  będą dwuwymiarowymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio  $H_1$  i  $H_2$  oraz o wspólnym rozkładzie brzegowym  $F$  dla  $X_1$  i  $X_2$  i wspólnym rozkładzie brzegowym  $G$  dla  $Y_1$  i  $Y_2$ . Niech  $C_1$  będzie kopulą rozkładu  $(X_1, Y_1)$  oraz  $C_2$  będzie kopulą rozkładu  $(X_2, Y_2)$ .

Wówczas:

$$H_1(x_1, y_1) = C_1(F(x_1), G(y_1)),$$

$$H_2(x_2, y_2) = C_2(F(x_2), G(y_2)).$$

Jeśli  $Q$  oznacza różnicę prawdopodobieństw:

$$Q = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0),$$

to można ją również wyrazić jako:

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \quad (3.7)$$

Współczynnik zgodności  $\tau$  Kendalla wyraża się jako  $\tau = Q(C, C)$ . Można również pokazać, że:

$$Q(C_1, C_2) = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 (\partial C_2(u, v) / \partial u) (\partial C_1(u, v) / \partial v) du dv.$$

Dowód tych faktów znajduje się w pracy Nelsena (2006).

### Współczynnik $\rho$ Spearmana

Inną miarą współzależności zmiennych losowych, również opartą na mierze zgodności i niezgodności obserwacji, jest współczynnik korelacji  $\rho$  Spearmana. Rozważmy trzy dwuwymiarowe, niezależne zmienne losowe:

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3),$$

o których będziemy zakładać, że mają jednakową dystrybuantę  $H$  oraz kopulę  $C$ . Ponadto zakładamy, że zmienne losowe  $X_1, X_2, X_3$  mają jednakowy rozkład  $F$ , natomiast zmienne losowe  $Y_1, Y_2, Y_3$  – jednakowy rozkład  $G$ . Współczynnik korelacji Spearmana jest definiowany jako:

$$\rho_S = 3 [P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)].$$

Z niezależności zmiennych  $X_2, Y_3$  wynika, że ich wspólny rozkład  $(X_2, Y_3)$  jest iloczynem  $F(x)G(y)$ . Kopula dla zmiennych niezależnych ma postać:

$$\Pi(u, v) = uv,$$

gdzie  $u = F(x)$ ,  $v = G(x)$ . Przy odpowiednich założeniach współczynnik  $\rho_S$  jest definiowany jako  $\rho_S = 3Q(C, \Pi)$ , przy czym:

$$Q(C, \Pi) = 4 \int_0^1 \int_0^1 \Pi(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Tak więc wzór na współczynnik korelacji  $\rho_S$  Spearmana pomiędzy zmiennymi  $X$  i  $Y$  jest postaci:

$$\rho_S = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) du dv - 3$$

lub równoważnie:

$$\rho_S = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3.$$

Bezpośrednim wnioskiem z powyższego rozumowania jest równanie:

$$\rho_S = 12 \mathbb{E}(C(U, V)) - 3. \quad (3.8)$$

Współczynnik Spearmana jest często nazywany współczynnikiem korelacji rang. Jeśli przyjmiemy, że  $x$  oraz  $y$  są obserwacjami zmiennych losowych  $X$  i  $Y$ , to pewnym odpowiednikiem znanych powszechnie „rang” są wartości  $u = F(x)$  oraz  $v = G(y)$ . Są to jednocześnie obserwacje zmiennych losowych  $U$  i  $V$ , które pochodzą z rozkładu jednostajnego na przedziale  $[0, 1]$ . Zatem wartość oczekiwana  $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = 1/2$ , natomiast wariancja dla obu tych zmiennych  $\text{var}(U) = \text{var}(V) = 1/12$ .

Z wcześniejszych założeń wynika, iż łączny rozkład zmiennych losowych  $(U, V)$  jest wyrażony kopulą  $C$ . Zatem przekształcając odpowiednio wzór (3.8), mamy następujące wyrażenie na współczynnik Spearmana:

$$\rho_S = \frac{\mathbb{E}(C(U, V)) - 1/4}{1/12} = \frac{\mathbb{E}(C(U, V)) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)}{\sqrt{\text{var}(U)}\sqrt{\text{var}(V)}}.$$

Można zauważyć, że:

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F(X), G(Y)),$$

gdzie  $\rho(\cdot, \cdot)$  jest współczynnikiem korelacji liniowej Pearsona.

### Zależności asymptotyczne

Dotychczasowe miary współzależności koncentrowały się na pojęciu zgodności oraz niezgodności obserwacji zmiennych losowych  $X$  oraz  $Y$ . W praktyce przydatna staje się umiejętność wyznaczenia tzw. zależności asymptotycznej, potocznie zwanej zależnością „w ogonie” rozkładu.

Niech  $X$  i  $Y$  będą zmiennymi losowymi typu ciągłego, o dystrybuancie  $F$  oraz  $G$ . Współczynnik zależności w „lewym ogonie” definiuje się następująco:

$$\lambda_L = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P\left(Y \leq G^{(-1)}(\alpha) \mid X \leq F^{(-1)}(\alpha)\right), \quad (3.9)$$

natomiast współczynnik zależności w „prawym ogonie” jako:

$$\lambda_U = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P\left(Y > G^{(-1)}(\alpha) \mid X > F^{(-1)}(\alpha)\right). \quad (3.10)$$

Znając kopulę  $C$ , powyższe zależności można wyrazić w postaci:

$$\lambda_L = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{C(\alpha, \alpha)}{\alpha}$$

oraz:

$$\lambda_U = 2 - \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha}.$$

### 3.3. Przegląd i charakterystyka wybranych kopul

Przegląd wybranych kopul rozpoczyna kopule Gaussa oraz t-Studenta, których własności wynikają bezpośrednio z twierdzenia Sklara. Następnie przedstawione zostaną kopule archimedesowe i sposób ich konstrukcji.

#### Kopuła Gaussa

Najbardziej popularna w zastosowaniach jest kopuła Gaussa, zwana również kopulą normalną. Przez  $\Phi(x)$  oznaczmy dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego  $N(0, 1)$ , symbolem  $\Phi_{\Sigma}(\mathbf{x})$  – dystrybuantę  $d$ -wymiarowego rozkładu normalnego z macierzą korelacji  $\Sigma$ . Kopuła Gaussa,  $C(\mathbf{u})$ , gdzie  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ , wyraża się wzorem:

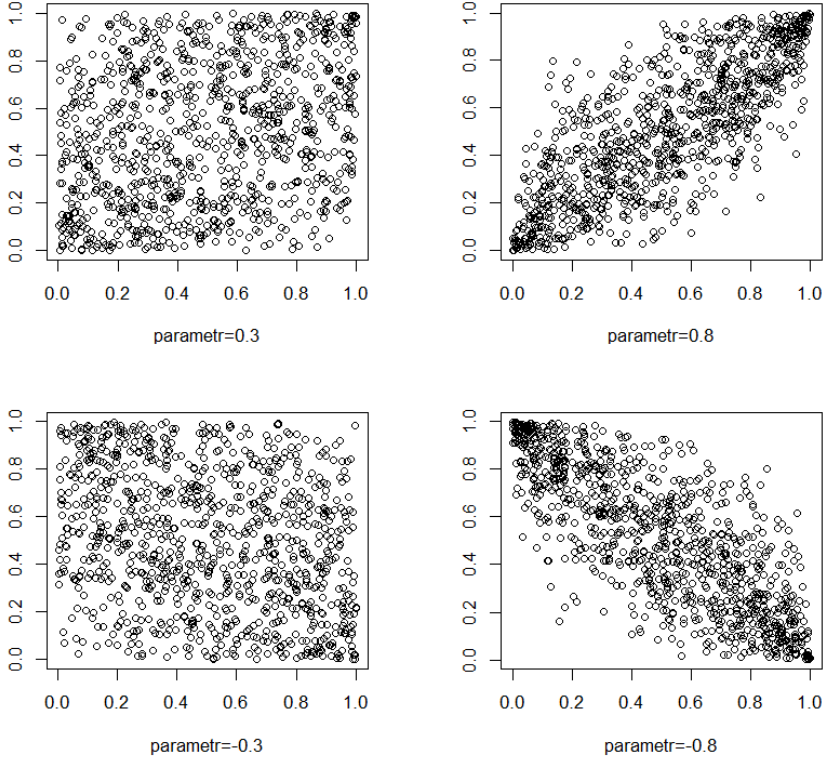
$$C(\mathbf{u}) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)), \quad (3.11)$$

lub jako całka:

$$C(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{s}^T \Sigma^{-1} \mathbf{s}} ds_1 \dots ds_d,$$

gdzie  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_d]^T$ .

Rysunek 3.1 przedstawia przykładowe dane, które zostały wygenerowane z kopuli Gaussa dla różnych wartości współczynnika korelacji  $\rho$  (na rysunku oznaczonej jako „parametr”).



**Rysunek 3.1.** Wygenerowane próby losowe z kopuli Gaussa o różnych wartościach współczynnika korelacji liniowej  $\rho$  (parametr)

Źródło: opracowanie własne

Wyznaczając gęstość d-wymiarowej kopuli Gaussa, korzystamy z faktu, że:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}} = c(\mathbf{u}) \prod_{i=1}^d \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} x_i^2},$$

przy czym:

$$c(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T (\Sigma^{-1} - \mathbf{I}) \mathbf{z}},$$

gdzie

$$\mathbf{z} = [\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)]^T,$$

oraz

$$\mathbf{u} = (\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_d)).$$

W szczególności dla  $d = 2$  mamy:

$$C(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} e^{\frac{2\rho s_1 s_2 - s_1^2 - s_2^2}{2(1-\rho^2)}} ds_1 ds_2$$

oraz:

$$c(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{\rho}{2(1-\rho^2)}(2z_1 z_2 - \rho z_1^2 - \rho z_2^2)},$$

gdzie

$$z_1 = \Phi^{-1}(u_1) \quad z_2 = \Phi^{-1}(u_2).$$

Dla kopuli Gaussa nietrudno analitycznie wyznaczyć wartości współczynników korelacji  $\tau$  oraz  $\rho_S$ . Zachodzą bowiem następujące relacje:

$$\begin{aligned} \tau &= Q(C, C) = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 = \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 (\partial C(u, v)/\partial v) (\partial C(u, v)/\partial u) dudv = \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \rho. \end{aligned}$$

Analogicznie wyznaczony współczynnik korelacji Spearmana ma natomiast postać:

$$\rho_S = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2}.$$

Kopule Gaussa mogą być wykorzystywane w tworzeniu struktur powiązań pomiędzy finansowymi szeregami czasowymi. Jednak należy mieć na uwadze fakt, że kopula tego typu nie opisuje zależności w „ogonach”, ponieważ:

$$\lambda_U = \lambda_L = 0.$$

### Kopula t-Studenta

Kopula t-Studenta jest często rekomendowana do opisu struktury powiązań pomiędzy finansowymi szeregami czasowymi, między innymi przez Mashal i Zeevi (2002) oraz Breymann i in. (2003).

Niech  $t_v(x)$  oznacza dystrybuantę centralnego rozkładu t-Studenta z  $v$  stopniami swobody. Ma ona postać:

$$t_v(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\sqrt{\pi v} \Gamma(v/2)} \left(1 + \frac{s^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} ds.$$

Następnie niech  $t_{\Sigma,v}(\mathbf{x})$  oznacza dystrybuantę d-wymiarowego rozkładu t-Studenta z macierzą korelacji  $\Sigma$  oraz  $v$  stopniami swobody. Kopulę t-Studenta definiujemy wówczas jako:

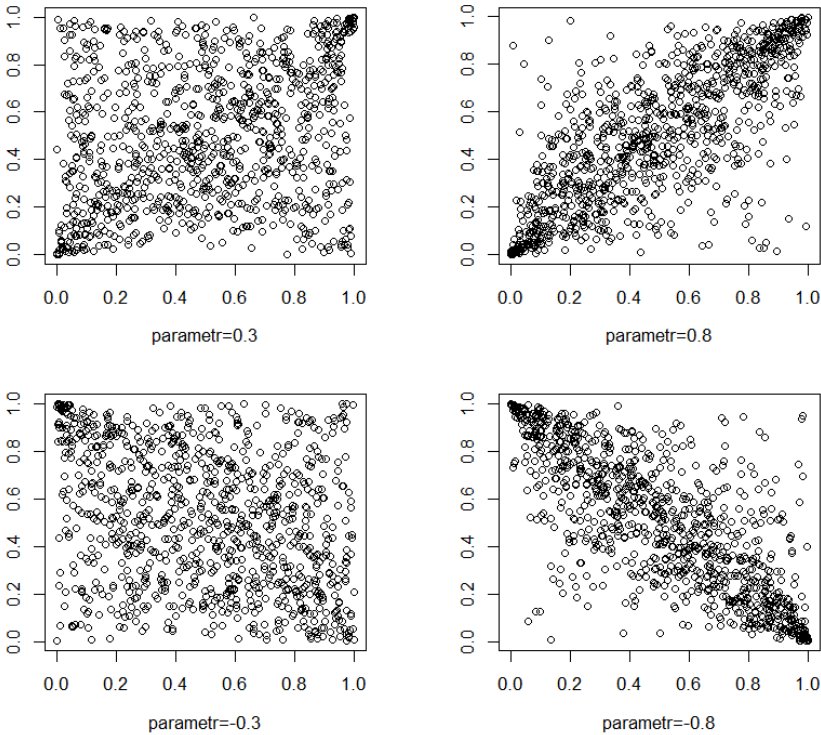
$$C_{\Sigma,v}(u_1, \dots, u_d) = t_{\Sigma,v}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)). \quad (3.12)$$

Jej gęstość wyraża się następująco:

$$c_{\Sigma,v}(u_1, \dots, u_d) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma^{d-1}\left(\frac{v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma^d\left(\frac{v+1}{2}\right)} \frac{\left(1 + \frac{\mathbf{z}^T \Sigma^{-1} \mathbf{z}}{v}\right)^{-\frac{v+d}{2}}}{\prod_{j=1}^d \left(1 + \frac{z_j^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}},$$

gdzie  $\mathbf{z} = [t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)]^T$ .

Na rysunku 3.2 przedstawione zostały przykładowe próby losowe wygenerowane z kopuli t-Studenta o różnych wartościach współczynnika  $\rho$  oraz  $v = 3$ .



**Rysunek 3.2.** Próby losowe dla kopuli t-Studenta dla różnych wartości współczynników korelacji  $\rho$  (parametr) oraz  $v = 3$

Źródło: opracowanie własne



Dla przypadku  $d = 2$  mamy:

$$t_{\rho, v}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{z_1} \int_{-\infty}^{z_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} ds dt,$$

gdzie  $z_1 = t_v^{-1}(u_1)$  oraz  $z_2 = t_v^{-1}(u_2)$ .

Dla kopuli t-Studenta wartości współczynników  $\tau$  oraz  $\rho_S$  zazwyczaj wyznacza się numerycznie. Można natomiast pokazać, że:

$$\lambda_U = \lambda_L = 2t_{v+1} \left( -\sqrt{\frac{(v+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right).$$

### Kopule archimedesowe

Inną grupę kopuli, często wykorzystywaną w praktycznych zastosowaniach, stanowią kopule archimedesowe. Podstawą ich konstrukcji jest funkcja

$$\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$$

określona w następujący sposób:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & t \in [0, \varphi(0)] \\ 0, & t \in [\varphi(0), \infty]. \end{cases} \quad (3.13)$$

Zachodzi wówczas twierdzenie:

**Twierdzenie 5.** Niech  $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$  będzie funkcją ciągłą, ściśle malejącą, taką że  $\varphi(1) = 0$ . Niech  $\varphi^{[-1]}$  będzie funkcją zdefiniowaną wzorem (3.13). Wówczas  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  postaci:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d))$$

jest kopulą wtedy i tylko wtedy, gdy  $\varphi$  jest wypukła. Funkcję  $\varphi$ , o takich własnościach nazywamy generatorem kopuli.

Rozważmy przypadek, kiedy  $d = 2$ . Poniżej przedstawiona zostanie lista przykładowych generatorów  $\varphi$  i odpowiadających im kopuli.

- kopula Clayтона (Clayton 1978, Genest i Rivest 1993):

$$\varphi(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1),$$

$$C(u, v) = \left[ \max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1; 0) \right]^{-1/\theta}, \quad \theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}.$$

- kopula Gumbel-Hougaard (Gumbel 1960, Hutchinson i Lai 1990):

$$\varphi(t) = (-\ln t)^\theta,$$

$$C(u, v) = \exp \left( - \left[ (-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{1/\theta} \right), \quad \theta \in [1, \infty).$$

– kopula Franka (1979):

$$\varphi(t) = -\ln \frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1},$$

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right], \theta \neq 0.$$

– kopula Joe (1993, 1997):

$$\varphi(t) = -\ln \left( 1 - (1 - t)^\theta \right),$$

$$C(u, v) = 1 - \left[ (1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta - (1 - u)^\theta (1 - v)^\theta \right]^{1/\theta}, \theta \in [1, \infty).$$

– kopula Gumbela (1960):

$$\varphi(t) = \ln(1 - \theta \ln t),$$

$$C(u, v) = uv \exp(-\theta \ln u \ln v), \theta \in (0, 1).$$

Kopule archimedesowe mają kilka ciekawych własności. Między innymi współczynnik korelacji Kendalla  $\tau$  może być wyznaczony bezpośrednio z funkcji generującej kopulę jako:

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

Bezpośrednio z funkcji generującej kopulę mogą być również wyznaczone zależności asymptotyczne.

Jak wykazał Nelsen (1997), zachodzą następujące związki:

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - \varphi^{[-1]}(2\varphi(t))}{1 - t} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varphi^{[-1]}(2x)}{1 - \varphi^{[-1]}(x)}$$

oraz

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{[-1]}(2\varphi(t))}{t} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{[-1]}(2x)}{\varphi^{[-1]}(x)}.$$

Na przykład:

- dla kopuli Claytona  $\lambda_L = 2^{-1/\theta}$ ,  $\lambda_U = 0$ ,
- dla kopuli Gumbel-Hougaard:  $\lambda_L = 0$ ,  $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$ ,
- dla kopuli Franka:  $\lambda_L = 0$ ,  $\lambda_U = 0$ ,
- dla kopuli Joe:  $\lambda_L = 0$ ,  $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$ ,
- dla kopuli Gumbela:  $\lambda_L = 0$ ,  $\lambda_U = 0$ .

Zaprezentowane do tej pory kopule archimedesowe modelują tylko jeden „ogon”. Rosnące zapotrzebowanie na modelowanie zależności w „ogonach” było impulsem do konstrukcji kopuli dwuparametrycznych, które pozwalają na opis niesymetrycznych zależności asymptotycznych. Między innymi dwuparametrową kopulę można skonstruować, stosując schemat przedstawiony w poniższym twierdzeniu (Nelsen 2006).

**Twierdzenie 6.** *Zdefiniujmy zbiór  $\Omega$  będący zbiorem generatorów kopuli. Niech  $\varphi$  należy do  $\Omega$  oraz  $\alpha$  i  $\beta$  będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Zdefiniujmy:*

$$\varphi_{\alpha,1}(t) = \varphi(t^\alpha) \text{ oraz } \varphi_{1,\beta}(t) = \varphi(t)^\beta.$$

*Jeżeli  $\beta \geq 1$ , wówczas  $\varphi_{1,\beta}(t)$  jest elementem  $\Omega$ . Jeśli  $\alpha \in (0, 1]$ , to  $\varphi_{1,\alpha}(t)$  też jest<sup>11</sup> elementem  $\Omega$ .*

Z twierdzenia wynika następujący wniosek. Jeżeli  $\varphi_{\alpha,1}(t)$  generuje kopulę  $C_{\alpha,1}$  oraz  $\varphi_{1,\beta}(t)$  generuje kopulę  $C_{1,\beta}$ , to złożenie funkcji:

$$\varphi_{\alpha,\beta}(t) = \varphi(t^\alpha)^\beta \tag{3.14}$$

generuje kopulę dwuparametrową  $C_{\alpha,\beta}$ . Przykładem takiej kopuli jest uogólniona kopula Clayтона. Biorąc generator postaci:  $\varphi(t) = \left(\frac{1}{t} - 1\right)$ , a następnie stosując wzór (3.14), otrzymujemy:

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \left( \left( (u^{-\alpha} - 1)^\beta + (v^{-\alpha} - 1)^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} + 1 \right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Przykładem kopuli dwuparametrowej jest również kopula Joe-Clayтона, która ze względu na swoje własności asymptotyczne jest często wykorzystywana do opisu struktury powiązań finansowych szeregów czasowych.

Kopula Joe-Clayтона jest postaci:

$$C_{\kappa,\gamma}(u, v) = 1 - \left( 1 - \left( [1 - (1 - u)^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1 - v)^\kappa]^{-\gamma} - 1 \right)^{-1/\gamma} \right)^{1/\kappa}.$$

Asymptotyczne zależności wyrażają się następująco:

$$\lambda_L = 2^{-1/\gamma}, \quad \lambda_U = 2 - 2^{1/\kappa}.$$

---

<sup>11</sup> Przy pewnych założeniach dotyczących generatora  $\varphi$ , można rozważać wszystkie  $\alpha > 0$ .

### 3.4. Model Copula-GARCH i estymacja jego parametrów

Przejdźmy teraz do opisu modelu, który będziemy stosować do modelowania wielowymiarowej struktury zależności finansowych szeregów czasowych. W tym zakresie dużą popularność zyskał tzw. **model Copula-GARCH**, w którym:

- do opisu jednowymiarowych finansowych szeregów czasowych są wykorzystane modele typu AR-GARCH lub jego modyfikacje<sup>12</sup>,
- do tworzenia wielowymiarowego rozkładu wybierana jest odpowiednia kopuła  $C$ .

Do estymacji nieznanymi parametrów modelu Copula-GARCH, w których rozkłady brzegowe opisuje liczny zbiór parametrów, najczęściej stosuje się metodę dwukrokową, zwaną metodą IFM (Joe i Xu 1996). Do opisu tej metody wprowadzimy następujące oznaczenia. Rozważmy ciąg zmiennych losowych:

$$(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_T)$$

oraz jego realizacje

$$(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_T).$$

Gęstość rozkładu  $d$ -wymiarowej zmiennej losowej  $\mathbf{R}_t$ , ( $t = 1, \dots, T$ ) oznaczmy przez  $f(\mathbf{r}_t; \boldsymbol{\theta})$ , natomiast gęstości rozkładów brzegowych oraz odpowiadające im dystrybuanty oznaczone zostaną odpowiednio jako  $f_j(r_{j,t}; \boldsymbol{\theta}_j)$  oraz  $F_j(r_{j,t}; \boldsymbol{\theta}_j)$ , ( $j = 1, \dots, d$ ). Z kolei  $C(\mathbf{u}_t; \boldsymbol{\theta}_c)$  oznacza kopulę o gęstości  $c(\mathbf{u}_t; \boldsymbol{\theta}_c)$ .

Zdefiniujmy wektor wszystkich nieznanymi parametrów modelu jako:

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_m, \boldsymbol{\theta}_c), \text{ gdzie } \boldsymbol{\theta}_m = (\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_d).$$

Z własności rozkładów wielowymiarowych wynika, że:

$$f(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\theta}) = c(\mathbf{u}_t; \boldsymbol{\theta}_c) \cdot \prod_{j=1}^d f_j(r_{j,t}; \boldsymbol{\theta}_j),$$

gdzie

$$c(\mathbf{u}_t; \boldsymbol{\theta}_c) = \frac{\partial^d C(u_{1,t}, u_{2,t}, \dots, u_{d,t}; \boldsymbol{\theta}_c)}{\partial u_{1,t} \partial u_{2,t} \dots \partial u_{d,t}},$$

<sup>12</sup> Pomimo że jednowymiarowe finansowe szeregi czasowe są opisane modelem typu AR – GARCH lub jego modyfikacjami, to wielowymiarowe modele tej postaci dla wygody będziemy określać mianem: Copula-GARCH.

natomiast

$$\mathbf{u}_t = (F_1(r_{1,t}; \boldsymbol{\theta}_1), \dots, F_d(r_{d,t}; \boldsymbol{\theta}_d)).$$

Zatem funkcję log-wiarogodności  $\ell(\boldsymbol{\theta})$  utworzoną dla obserwacji  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_T)$  można zapisać jako:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \log(c(\mathbf{u}_t; \boldsymbol{\theta}_c)) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^d \log(f_j(r_{j,t}; \boldsymbol{\theta}_j)). \quad (3.15)$$

Funkcję zdefiniowaną równaniem 3.15 można przedstawić jako sumę dwóch składników:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \ell_c(\boldsymbol{\theta}) + \ell_m(\boldsymbol{\theta}_m), \quad (3.16)$$

gdzie

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \log(c(F_1(r_{1,t}; \boldsymbol{\theta}_1), \dots, F_d(r_{d,t}; \boldsymbol{\theta}_d); \boldsymbol{\theta}_c))$$

oraz

$$\ell_m(\boldsymbol{\theta}_m) = \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^d \log(f_j(r_{j,t}; \boldsymbol{\theta}_j)) = \sum_{t=1}^T (\ell_1(\boldsymbol{\theta}_1) + \dots + \ell_d(\boldsymbol{\theta}_d)).$$

Pierwszy składnik we wzorze (3.16) związany jest z estymacją parametrów funkcji kopuli i parametrów rozkładów brzegowych, natomiast drugi – wyłącznie z estymacją rozkładów brzegowych. Podział taki daje możliwość estymacji w dwóch krokach. W pierwszym kroku estymujemy parametry rozkładów brzegowych, otrzymując  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_j$ , natomiast w kroku drugim estymujemy tylko parametry kopuli, jako:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_c = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}_c} \sum_{t=1}^T \log \left( c \left( F_1(r_{1,t}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_1), \dots, F_d(r_{d,t}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_d); \boldsymbol{\theta}_c \right) \right).$$

Przy spełnieniu odpowiednich warunków regularności estymator ten jest zgodny i asymptotycznie efektywny. Joe (2005) oraz Patton (2006) wykazali, że:

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathcal{G}^{-1}(\boldsymbol{\theta})),$$

gdzie  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$  jest macierzą informacyjną Godambe’a definiowaną jako:

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V} (\mathbf{D}^{-1})^T,$$

w której:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbb{E} \left[ \frac{\partial s(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right], \\ \mathbf{V} &= \mathbb{E} \left[ s(\boldsymbol{\theta}) (s(\boldsymbol{\theta}))^T \right], \\ s(\boldsymbol{\theta}) &= \left[ \frac{\partial \ell_1}{\partial \boldsymbol{\theta}_1}, \frac{\partial \ell_2}{\partial \boldsymbol{\theta}_2}, \dots, \frac{\partial \ell_d}{\partial \boldsymbol{\theta}_d}, \frac{\partial \ell_c}{\partial \boldsymbol{\theta}_c} \right]. \end{aligned}$$

### 3.5. Weryfikacja modelu Copula-GARCH

W praktycznych zastosowaniach model Copula-GARCH jest najczęściej weryfikowany dwuetapowo. W pierwszym kroku weryfikacji podlegają modele zastosowane do opisu jednowymiarowych stóp zwrotu, natomiast w drugim kroku przeprowadzany jest test zgodności dla kopuli.

W badaniu empirycznym opisanym w drugiej części prezentowanej monografii stosowany test zgodności dla kopuli będzie oparty na przekształceniu Rosenblatta (1952). Punktem wyjścia do konstrukcji takiego testu jest następujące rozumowanie.

Niech  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  będzie wektorem losowym o ciągłej dystrybucji  $F(\mathbf{x})$ , przy czym  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ . Zdefiniujemy przekształcenie  $\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$  jako:

$$\begin{aligned} z_1 &= P(X_1 \leq x_1) = F_1(x_1), \\ z_2 &= P(X_2 \leq x_2 | X_1 = x_1) = F_2(x_2 | x_1), \\ &\vdots \\ z_d &= P(X_d \leq x_d | X_1 = x_1, \dots, X_{d-1} = x_{d-1}) = F_d(x_d | x_1, \dots, x_{d-1}). \end{aligned}$$

Nietrudno zauważyć, że rozkład wektora losowego  $Z = T(\mathbf{X})$  na kostce  $[0, 1]^d$  jest postaci:

$$\begin{aligned} P(Z_1 \leq z_1, \dots, Z_d \leq z_d) &= \\ &= \int_{\{Z|Z_1 \leq z_1\}} \dots \int_{\{Z|Z_d \leq z_d\}} d_{x_d} F_d(x_d | x_1, \dots, x_{d-1}) d_{x_1} F_1(x_1) = \\ &= \int_0^{z_1} \dots \int_0^{z_d} dz_1 \dots dz_d = \prod_{i=1}^d z_i. \end{aligned}$$

Z faktu tego wynika, że zmienne losowe  $Z_i$  są niezależne o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[0, 1]$ .

Niech teraz testowaniu podlega następująca hipoteza zerowa  $H_0$ :

$$C(\mathbf{u}) = C_0(\mathbf{u}; \theta) \text{ dla } \theta \in \Theta,$$

przeciwko hipotezie  $H_1$ :

$$C(\mathbf{u}) \neq C_0(\mathbf{u}; \theta).$$

Cytowane powyżej przekształcenie Rosenblatta (1952) można wykorzystać w konstrukcji testu zgodności dla kopuli. Breymann i in. (2003) przedstawili następujące rozumowanie.

Niech  $C_j(u_1, \dots, u_j)$  oznacza dystrybuantę wektora zmiennych losowych  $(U_1, \dots, U_j)$  dla  $j \leq d$ , zdefiniowaną jako:

$$C_j(u_1, \dots, u_j) = C_0(u_1, \dots, u_j, 1, \dots, 1).$$

Odpowiednie dystrybuanty warunkowe są postaci:

$$P(U_j \leq u_j | U_1 = u_1, \dots, U_{j-1} = u_{j-1}) = C_j(u_j | u_1, \dots, u_{j-1}).$$

Z własności rozkładów warunkowych wynika, że:

$$C_j(u_j | u_1, \dots, u_{j-1}) = \frac{\partial^{j-1} C_j(u_1, \dots, u_j)}{\partial u_1, \dots, \partial u_{j-1}} / \frac{\partial^{j-1} C_{j-1}(u_1, \dots, u_{j-1})}{\partial u_1, \dots, \partial u_{j-1}}.$$

Niech teraz  $\mathbf{z} = T(\mathbf{u})$ , gdzie:

$$z_1 = u_1,$$

$$z_2 = P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = C_2(u_2 | u_1),$$

$$\vdots$$

$$z_d = P(U_d \leq u_d | U_1 = u_1, \dots, U_{d-1} = u_{d-1}) = C_d(u_d | u_1, \dots, u_{d-1}).$$

Wówczas składowe wektora  $Z = T(\mathbf{U})$ , przy założeniu poprawności hipotezy  $H_0$ , są niezależne o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[0, 1]$ . Zauważamy więc, że statystyka postaci:

$$W = \sum_{i=1}^d (\Phi^{-1}(Z_i))^2$$

ma rozkład chi-kwadrat z  $d$  stopniami swobody. Więcej szczegółów dotyczących tego typu testowania można znaleźć również w pracach, których autorami są Genest i Remillard (2008), Genest i in. (2009), Kojdanovic i Yan (2009).

W badaniach empirycznych, których wyniki są zaprezentowane w drugiej części rozprawy, rozumowanie to będzie podstawą teoretyczną do weryfikacji przełącznikowego modelu Copula-GARCH, o którym będzie mowa w następnym rozdziale.





## 4. Dynamiczne modele wielowymiarowe

W rozdziale tym przedstawiona zostanie dyskusja dotycząca sposobu modelowania dynamiki struktury powiązań finansowych szeregów czasowych. Opisane zostaną dwa podejścia do tego zagadnienia: użycie wielowymiarowych modeli typu GARCH i ich modyfikacji oraz przełącznikowego modelu Copula-GARCH sterowanego przy użyciu ukrytego łańcucha Markowa<sup>13</sup>.

Po krótkiej charakterystyce wielowymiarowych modeli typu GARCH, omówione zostaną przełącznikowe modele Copula-GARCH w dwóch przypadkach: gdy przełączenie sterowane jest według łańcucha Markowa ze stałą macierzą przejścia (MS) oraz gdy sterowane jest według łańcucha Markowa z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) uzależnioną od pewnych czynników. Dla obu przypadków przedstawiony zostanie sposób estymacji nieznanymi parametrów modelu przy zastosowaniu algorytmu EM (*Expectation Maximization*). Zostanie również podana procedura, według której z dwóch proponowanych modeli przełącznikowych będziemy mogli wybrać model statystycznie lepszy. W tym celu będą sformułowane tezy twierdzeń, które wraz z dowodami są opracowaniami własnymi autorki.

### 4.1. Wielowymiarowe modele GARCH

Naturalnym uogólnieniem modeli typu GARCH na przypadek wielowymiarowy jest ich następująca postać. Rozważmy  $N$ -wymiarowy proces  $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ , taki że:

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = 0,$$

gdzie

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\eta}_t,$$

---

<sup>13</sup> Przełącznikowy model Copula-GARCH należy do ogólnej klasy modeli HMM (*Hidden Markov Models*). W monografii będzie też używana nazwa: „Ukryte Modele Markowa”.

przy czym  $\boldsymbol{\mu}$  jest  $N$ -wymiarowym wektorem stałych, natomiast  $\mathbf{H}_t$  jest macierzą warunkowych kowariancji o wymiarach  $N \times N$ . Jako pierwiastek z tej macierzy przyjmujemy macierz  $\mathbf{H}_t^{1/2}$  spełniającą warunek:  $\mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{H}_t^{1/2} = \mathbf{H}_t$ .

Jeśli jako  $\mathcal{R}_{t-1}$  oznaczymy informacje o procesie do chwili  $t - 1$ , to dla danej historii procesu zachodzą następujące relacje:

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathcal{R}_{t-1}) = 0 \quad \text{oraz} \quad E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T | \mathcal{R}_{t-1}) = \mathbf{H}_t.$$

Ponadto o wektorach losowych  $\boldsymbol{\eta}_t$  zakładamy, że są niezależne oraz:

$$E(\boldsymbol{\eta}_t) = 0, \quad E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\eta}_t^T) = \mathbf{I}_N.$$

Standardowo zakłada się, że warunkowy rozkład zmiennej losowej  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jest normalny, tj.:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathcal{R}_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t), \quad (4.1)$$

dopuszczalny jest jednak dowolny rozkład eliptyczny.

W zależności od specyfikacji macierzy  $\mathbf{H}_t$  definiuje się różne reprezentacje wielowymiarowego modelu typu GARCH. We wszystkich modelach tego typu zakłada się, że:

- 1) wszystkie elementy na diagonalnej macierzy  $\mathbf{H}_t$  są dodatnie,
- 2) macierz  $\mathbf{H}_t$  jest dodatnio określona,
- 3) w celu zagwarantowania stacjonarności procesu przyjmuje się, że  $\mathbb{E}(\mathbf{H}_t)$  istnieje i jest stała w czasie.

Poniżej zostaną zaprezentowane przykładowe modele tego typu.

### Model VEC

Model, który jest bezpośrednim uogólnieniem jednowymiarowych modeli GARCH na przypadek wielowymiarowy, pojawił się w pracy Bollerslev i in. (1988). Jest to tzw. model VEC. W tym modelu macierz  $\mathbf{H}_t$  powstaje przez naturalne uogólnienie jednowymiarowych GARCH. Używając operatora  $\text{vech}()$ , który jest zdefiniowany jako:

$$\text{vech}(A) = [a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}]^T,$$

macierz  $\mathbf{H}_t$  jest postaci:

$$\text{vech}(\mathbf{H}_t) = \mathbf{C} + \sum_{j=1}^q \mathbf{A}_j \text{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}^T) + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j \text{vech}(\mathbf{H}_{t-j}),$$

gdzie  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}_j$ ,  $\mathbf{B}_j$  są nieznanymi macierzami parametrów o wymiarach  $N \times N$ .

Jak można zauważyć, wraz ze wzrostem  $N$  gwałtownie rośnie liczba nieznanymi parametrów modelu. Dodatkowym utrudnieniem w jego estymacji jest zagwarantowanie dodatniej określoności macierzy  $\mathbf{H}_t$ .

### Model BEKK

W celu zagwarantowania dodatniej określoności macierzy  $\mathbf{H}_t$  Engle i Kroner (1995) zdefiniowali tę macierz jako:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}^T + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_{jk} (\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}^T) \mathbf{A}_{jk}^T + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_{jk} (\mathbf{H}_{t-j}) \mathbf{B}_{jk}^T,$$

gdzie  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}_{jk}$ ,  $\mathbf{B}_{jk}$  są macierzami wymiaru  $N \times N$ , przy czym macierz  $\mathbf{C}$  jest macierzą trójkątną dolną. Dla  $K = 1$ , który jest przypadkiem najczęściej stosowanym w praktyce, macierz  $\mathbf{H}_t$  przyjmuje postać:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}^T + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j (\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}^T) \mathbf{A}_j^T + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j (\mathbf{H}_{t-j}) \mathbf{B}_j^T.$$

Dla tego przypadku Engle i Kroner (1995) podali warunki konieczne i wystarczające do tego, by macierz  $\mathbf{H}_t$  była dodatnio określona.

### Model CCC

Z punktu widzenia zastosowań bardzo dużą rolę odgrywają modele, w których obok warunkowej wariancji występuje również warunkowa korelacja. Zakładając, że warunkowe współczynniki korelacji są stałe w czasie, Bollerslev (1990) zaproponował reprezentację typu CCC (ang. *Constant Conditional Correlations*). Rozważana jest tutaj następująca dekompozycja macierzy  $\mathbf{H}_t$ :

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t, \quad (4.2)$$

gdzie macierz warunkowych współczynników korelacji  $\mathbf{R}$  jest stała, natomiast w diagonalnej macierzy  $\mathbf{D}_t$  przekątna główna jest postaci:

$$\text{diag}(\mathbf{D}_t) = \left( \sqrt{h_{1,t}}, \dots, \sqrt{h_{N,t}} \right),$$

przy czym  $h_{i,t}$  są warunkowymi wariancjami jednowymiarowych procesów będących składowymi wielowymiarowego wektora  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ . Dodatnie elementy przekątnej głównej macierzy  $\mathbf{D}_t$  gwarantują dodatnią określoność macierzy  $\mathbf{H}_t$ . Zatem:

$$[\mathbf{H}_t]_{ij} = \sqrt{h_{i,t}}\sqrt{h_{j,t}}\rho_{ij},$$

gdzie  $\rho_{ij}$  jest współczynnikiem korelacji pomiędzy  $\varepsilon_{i,t}$  oraz  $\varepsilon_{j,t}$ .

Zaletą modelu CCC jest stosunkowo prosty sposób estymacji jego parametrów. Asymptotyczne własności estymatorów jego parametrów, uzyskanych metodą największej wiarygodności, przedstawili McAleer i Ling (2003).

### Model DCC

W praktycznych zastosowaniach warunek dotyczący stałości w czasie macierzy warunkowych współczynników korelacji jest zbyt restrykcyjny. Engle (2002) oraz Tse i Tsui (2002) zaproponowali reprezentację typu DCC (*Dynamic Conditional Correlation*), w której warunkowe współczynniki korelacji są dynamiczne i zależą od  $t$ . W modelu DCC przyjmuje się następującą dekompozycję macierzy  $\mathbf{H}_t$ :

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t, \quad (4.3)$$

gdzie  $\mathbf{R}_t$  jest macierzą warunkowych współczynników korelacji dla składowych wektora  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ . Macierz  $\mathbf{D}_t$ , podobnie jak w reprezentacji typu CCC, jest diagonalna, w której przekątna główna składa się z warunkowych odchyłeń standardowych składowych wektora  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ , oznaczanych jako  $\sqrt{h_{i,t}}$ , przy czym:

$$h_{i,t} = \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} \varepsilon_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} h_{i,t-j}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Kluczowym problemem modelu w tym podejściu jest specyfikacja macierzy  $\mathbf{R}_t$ . Tse i Tsui (2002) zastosowali następującą specyfikację tej macierzy:

$$\mathbf{R}_t = (1 - \alpha - \beta) \mathbf{S} + \alpha \mathbf{S}_{t-1} + \beta \mathbf{R}_{t-1}, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta < 1, \quad (4.4)$$

gdzie  $\mathbf{S}$  oznacza macierz, która ma jedynki na przekątnej głównej, natomiast  $\mathbf{S}_{t-1}$  jest macierzą korelacji wyznaczoną z próby  $\mathbf{Z}_{t-1}, \dots, \mathbf{Z}_{t-M}$  ( $M > N$ ), gdzie:

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{D}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Natomiast Engle (2002) zdefiniował macierz  $\mathbf{R}_t$  jako:

$$\mathbf{R}_t = \text{diag}(\mathbf{Q}_t)^{-1/2} \mathbf{Q}_t \text{diag}(\mathbf{Q}_t)^{-1/2},$$

gdzie

$$\mathbf{Q}_t = (1 - \alpha - \beta) \mathbf{S} + \alpha \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^T + \beta \mathbf{Q}_{t-1}, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta < 1,$$

w której  $\mathbf{S}$  jest bezwarunkową macierzą korelacji dla zmiennych losowych  $\mathbf{Z}_t$ . Należy zwrócić uwagę, że specyfikacja parametrów odpowiedzialnych za warunkowe współczynniki korelacji jest taka sama dla wszystkich składowych analizowanego szeregu wielowymiarowego.

### Modyfikacje modelu DCC

W literaturze pojawiły się propozycje modeli, które w pewien sposób rozwiązują problem jednakowej specyfikacji parametrów odpowiedzialnych za warunkowe współczynniki korelacji. Na przykład Billio i Caporin (2009) zaproponowali warunek dla macierzy  $\mathbf{Q}_t$ , jako:

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} + \mathbf{A}^T \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^T \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_{t-1} \mathbf{B}, \quad (4.5)$$

gdzie  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  są nieznanymi, symetrycznymi macierzami o wymiarze  $N \times N$ .

Cappiello i in. (2006) uogólnili model DCC, dopuszczając istnienie asymetrii w modelu (model AGDCC). Wówczas macierz  $\mathbf{Q}_t$  zdefiniowana jest jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_t = & (\mathbf{S} - \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A} - \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B} - \mathbf{G}^T \mathbf{S}^- \mathbf{G}) + \\ & + \mathbf{A}^T \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^T \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_{t-1} \mathbf{B} + \mathbf{G}^T \mathbf{Z}_{t-1}^- \mathbf{Z}_{t-1}^{-T} \mathbf{G}, \end{aligned}$$

gdzie  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  oraz  $\mathbf{G}$  są macierzami nieznanymi parametrów wymiaru  $N \times N$ , natomiast  $\mathbf{Z}_{t-1}^- = \mathbb{I}_{\{\mathbf{Z}_{t-1} < 0\}} \odot \mathbf{Z}_{t-1}$  oraz  $\mathbf{S}^- = \mathbb{I}_{\{\mathbf{S} < 0\}} \odot \mathbf{S}$ . Symbol  $\odot$  oznacza mnożenie wektorów po jego współrzędnych.

### Problemy wielowymiarowych modeli typu GARCH

Każda reprezentacja wielowymiarowego modelu typu GARCH niesie ze sobą zwiększenie trudności estymacji jego parametrów. W praktyce do analizy warunkowej korelacji pomiędzy finansowymi szeregami czasowymi najczęściej stosuje się reprezentację typu DCC, której parametry estymuje się metodą największej wiarygodności, przeprowadzaną w dwóch krokach (Engle 2002).

W pierwszym kroku dokonuje się estymacji parametrów brzegowych, które są parametrami modelu GARCH dla jednowymiarowych procesów, traktowanych jako niezależne szeregi czasowe. W drugim kroku estymuje się pozostałe parametry modelu DCC maksymalizując funkcję największej wiarygodności przy założeniu, że znane są parametry rozkładów brzegowych.

Engle (2002) zauważył, że przy spełnieniu odpowiednich warunków regularności, jeśli estymatory otrzymane w pierwszym kroku estymacji są zgodne, to estymatory uzyskane w drugim kroku też są zgodne. Niemniej wspomniane warunki regularności nie były nigdzie jednoznacznie zdefiniowane. W swojej pracy Caporin i McAleer (2013) zestawili główne zarzuty, które należy mieć na względzie przy korzystaniu z modelu DCC i jego modyfikacji. Do głównych zarzutów należy między innymi trudność zweryfikowania warunków regularności, przy których estymatory modelu mają pożądane własności asymptotyczne. Ponadto autorzy podali w wątpliwość interpretację  $\mathbf{R}_t$  jako macierzy warunkowej korelacji (McAleer i in. 2008, Caporin i McAleer 2012, Aielli 2013). Przy takiej bowiem jej definicji macierz nie ma pożądanych własności statystycznych charakteryzujących warunkowy współczynnik korelacji. Trudno jest jednoznacznie stwierdzić, czy wartości estymatorów elementów tej macierzy mają jakikolwiek związek z definicją warunkowego współczynnika korelacji. Kolejnym zarzutem jest stwierdzenie, że reprezentacja typu DCC nie może być interpretowana jako liniowy wielowymiarowy GARCH, zatem w wyniku zastosowania „dwukrokowej” estymacji nieznanymi parametrami tego modelu uzyskujemy niekoniecznie zgodne estymatory (Aielli 2013).

Reasumując, model DCC nie ma pożądanych własności matematycznych oraz statystycznych. Może być on natomiast z powodzeniem traktowany jako pewnego rodzaju filtracja.

## 4.2. Ukryty Model Markowa

Dynamiczną strukturę powiązań pomiędzy finansowymi szeregami czasowymi można również uzyskać stosując Ukryty Model Markowa, który można scharakteryzować jak poniżej.

Rozważmy parę procesów stochastycznych:

$$(S_t, \mathbf{R}_t)_{t \in \mathcal{T}}, \quad (4.6)$$

gdzie:

- proces  $(S_t)_{t \in \mathcal{T}}$  jest łańcuchem Markowa o zbiorze stanów  $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, l\}$ ,
- proces  $(\mathbf{R}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie warunkowym realizacją  $S_t$ ,
- obserwowalne są tylko realizacje  $\mathbf{R}_t$ , natomiast realizacje  $S_t$  są nieobserwowalne. Na podstawie realizacji  $\mathbf{R}_t$  możemy tylko określić prawdopodobieństwo, z jakim łańcuch Markowa przyjmuje swoje stany.

O  $(S_t)_{t \in \mathcal{T}}$ <sup>14</sup> będziemy mówić, że jest „ukrytym” procesem (łańcuchem) Markowa, natomiast o całym modelu: „Ukryty Model Markowa”. Podejście to jest oparte głównie na pracach Hamiltona (1989, 1990, 1994). Jako przełącznikowy model Copula-GARCH będziemy rozumieć model, w którym

- do opisu jednowymiarowych szeregów czasowych są zastosowane modele typu GARCH lub jego modyfikacje,
- do utworzenia wielowymiarowego rozkładu finansowych szeregów czasowych są używane kopule, których gęstość w chwili czasowej  $t$  jest sterowana ukrytym łańcuchem Markowa.

W przełącznikowym modelu Copula-GARCH warunkowa dystrybucja zmiennej  $\mathbf{R}_t$  przyjmuje postać:

$$F(\mathbf{r}_t | S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = C(\mathbf{u}_t | S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_c),$$

gdzie  $C$  jest odpowiednią kopulą,  $\mathbf{u}_t$  jest wektorem dystrybucji brzegowych:

$$\mathbf{u}_t = (F_1(r_{1,t} | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1), \dots, F_d(r_{d,t} | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_d)),$$

natomiast  $\boldsymbol{\theta}$  oznacza wektor wszystkich parametrów modelu:

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_d, \boldsymbol{\theta}_c).$$

## Łańcuch Markowa

Proces stochastyczny  $S_t$  o wartościach w zbiorze stanów  $\mathcal{S}$  nazywamy łańcuchem Markowa, jeśli dla dowolnego wyboru stanów  $s_0, \dots, s_t \in \mathcal{S}$  oraz dla dowolnego  $t$  spełniony jest warunek:

$$P(S_t = s_t | S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_0 = s_0) = P(S_t = s_t | S_{t-1} = s_{t-1}).$$

<sup>14</sup> Dla wygody w dalszej części rozprawy proces ten będzie również oznaczony krótko jako „proces  $S_t$ ”.

W przypadku łańcucha Markowa zakładamy, że czas  $t$  jest dyskretny<sup>15</sup>. Łańcuch  $S_t$  jest łańcuchem Markowa ze stałym prawdopodobieństwem przejścia, gdy dla dowolnej chwili  $t$  oraz dowolnych stanów zachodzi równość:

$$P(S_t = j \mid S_{t-1} = i) = P(S_1 = j \mid S_0 = i) = p_{ij}.$$

Macierz stałych prawdopodobieństw przejścia ze stanu  $i$  do stanu  $j$  będziemy oznaczać jako  $\mathbf{P}$ . Na przykład dla łańcucha Markowa o dwóch stanach macierz  $\mathbf{P}$  jest postaci:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{22} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

W prezentowanej monografii, obok łańcuchów Markowa ze stałym prawdopodobieństwem przejścia ze stanu  $i$  do stanu  $j$ , analizowane będą również przypadki, w których:

$$P(S_t = j \mid S_{t-1} = i) = p_{ij}(t),$$

co oznacza, że prawdopodobieństwo przejścia z  $i$ -tego stanu do  $j$ -tego stanu nie jest stałe i zależy od chwili  $t$ . Macierz prawdopodobieństw tego typu będziemy oznaczać jako  $\mathbf{P}_t$ , przy czym:

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij}(t) = 1.$$

W celu estymacji parametrów ukrytego modelu Markowa, która będzie omówiona w dalszej części pracy, użyteczny staje się wielowymiarowy odpowiednik łańcucha Markowa, który daje się przedstawić w postaci autoregresyjnej. Posiada on te same własności probabilistyczne, co łańcuch wyjściowy, ale charakteryzuje się innym zbiorem stanów, które w tym wypadku są wektorami.

Niech  $S_t$  oznacza łańcuch Markowa o zbiorze stanów  $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, l\}$  oraz macierzy przejścia  $\mathbf{P}$ . Następnie niech:

$$\boldsymbol{\xi}_t = \begin{cases} \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T, & \text{dla } S_t = 1, \\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, & \text{dla } S_t = 2, \\ \vdots & \\ \mathbf{e}_l = (0, 0, 0, \dots, 1)^T, & \text{dla } S_t = l. \end{cases}$$

<sup>15</sup> Stany procesu często zamiennie będą nazywane „reżimami”, natomiast realizacje stanów będą również oznaczone liczbami naturalnymi:  $1, \dots, l$ .



Można zauważyć, że  $\xi_t$  jest łańcuchem Markowa o tych samych własnościach probabilistycznych co łańcuch  $S_t$ , posiada jednak inny zbiór stanów. Zauważmy, że (Hamilton 1994):

$$P(\xi_{t+1} = e_j \mid \xi_t = e_i) = P(S_{t+1} = j \mid S_t = i) = p_{ij},$$

czyli:

$$\mathbb{E}(\xi_{t+1} \mid \xi_t, \xi_{t-1}, \dots) = \mathbb{E}(\xi_{t+1} \mid \xi_t) = \mathbf{P}^T \xi_t.$$

Zatem:

$$\xi_{t+1} = \mathbf{P}^T \xi_t + \mathbf{v}_{t+1}, \quad (4.7)$$

gdzie

$$\mathbf{v}_{t+1} = \xi_{t+1} - \mathbb{E}(\xi_{t+1} \mid \xi_t, \xi_{t-1}, \dots).$$

Na zakończenie rozważań dotyczących łańcucha Markowa przytoczone zostanie pojęcie jego ergodyczności. Rozumowanie przedstawione jest w monografii Hamiltona (1994). Dla macierzy przejścia  $\mathbf{P}$  zachodzi następująca własność:

$$\mathbf{P}\mathbf{1} = \mathbf{1},$$

gdzie  $\mathbf{1}$  oznacza  $l$ -wymiarowy wektor jedynek.

Zatem jedynka jest wartością własną macierzy  $\mathbf{P}$  oraz wektor składający się z samych jedynek jest jej wektorem własnym. Ponieważ macierz  $\mathbf{P}^T$  oraz macierz  $\mathbf{P}$  mają te same wartości własne, to jedynka jest również wartością własną macierzy  $\mathbf{P}^T$ .

Niech teraz  $\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}$  będą pozostałymi wartościami własnymi macierzy  $\mathbf{P}^T$ . Łańcuch Markowa jest **ergodyczny**, jeśli spełniony jest warunek, w którym:

$$|\alpha_i| < 1, i = 1, \dots, l-1.$$

Niech  $\boldsymbol{\pi}$  będzie  $(N \times 1)$  – wymiarowym wektorem prawdopodobieństw ergodycznych. Definiuje się go jako unormowany wektor własny macierzy  $\mathbf{P}^T$  odpowiadający jej wartości własnej równej jeden, czyli:

$$\mathbf{P}^T \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}.$$

## Filtr Hamiltona

Przedstawione w tym podrozdziale rozumowanie jest przeprowadzone na podstawie prac Hamiltona (1990, 1994). Rozważmy próbę:

$$(S_t, \mathbf{r}_t)_{t=1}^T$$

oraz jej hipotetyczne realizacje:

$$(s_t, \mathbf{r}_t)_{t=1}^T.$$

Warunkową gęstość  $\mathbf{r}_t$ , pod warunkiem że dany łańcuch Markowa przyjmuje określony stan, oznaczmy jako:

$$f(\mathbf{r}_t \mid S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}).$$

Oznaczmy teraz wektor wszystkich analizowanych gęstości warunkowanych wartością stanu  $j$ , jako:

$$\boldsymbol{\eta}_t = \begin{bmatrix} f(\mathbf{r}_t \mid S_t = 1, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\alpha}) \\ f(\mathbf{r}_t \mid S_t = 2, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\alpha}) \\ \vdots \\ f(\mathbf{r}_t \mid S_t = l, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix}.$$

Wektor  $\boldsymbol{\alpha}$  oznacza tutaj parametry wszystkich funkcji gęstości biorących udział w konstrukcji modelu. Symbolem  $\boldsymbol{\theta}$  oznaczmy wektor wszystkich nieznanych parametrów modelu przełącznikowego: parametry gęstości warunkowych  $\boldsymbol{\alpha}$  oraz parametry charakteryzujące łańcuch Markowa, tj. prawdopodobieństwa początkowe oznaczone symbolem  $\boldsymbol{\rho}$  i elementy macierzy przejścia  $\mathbf{P}$ .

Wektor prawdopodobieństw przebywania w danym reżimie w chwili  $t$ , pod warunkiem historii procesu do chwili  $t - 1$ , oznaczmy jako:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1} = \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}_t \mid \mathcal{R}_{t-1}) = \begin{bmatrix} P(S_t = 1 \mid \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \\ P(S_t = 2 \mid \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ P(S_t = l \mid \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}.$$

Z reprezentacji autoregresyjnej łańcucha Markowa (4.7), biorąc warunkową wartość oczekiwaną względem historii procesu  $\mathcal{R}_t$ , otrzymujemy równość:

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}_{t+1} \mid \mathcal{R}_t) = \mathbf{P}^T \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}_t \mid \mathcal{R}_t) + \mathbb{E}(\mathbf{v}_{t+1} \mid \mathcal{R}_t) = \mathbf{P}^T \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}_t \mid \mathcal{R}_t).$$

Zatem:

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = \mathbf{P}^T \hat{\xi}_{t|t}.$$

Aby więc wyznaczyć  $\hat{\xi}_{t|t}$ , należy wykonać stosowne obliczenia<sup>16</sup>. Niech  $p(s_t, \mathbf{r}_t | \mathcal{R}_{t-1})$  oznacza warunkową gęstość rozkładu zmiennej  $(S_t, \mathbf{R}_t)$ . Można zauważyć, że:

$$p(s_t, \mathbf{r}_t | \mathcal{R}_{t-1}) = P(S_t = j | \mathcal{R}_{t-1}) \cdot f(\mathbf{r}_t | S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}), \quad (4.8)$$

czyli jest to iloczyn współrzędnych wektorów  $\hat{\xi}_{t|t-1}$  oraz  $\boldsymbol{\eta}_t$ . Sumując wyrażenie (4.8) po wszystkich stanach łańcucha Markowa otrzymujemy gęstość warunkowego rozkładu zmiennej losowej  $\mathbf{R}_t$  postaci<sup>17</sup>:

$$f(\mathbf{r}_t | \mathcal{R}_{t-1}) = \mathbf{1}^T \left( \hat{\xi}_{t|t-1} \odot \boldsymbol{\eta}_t \right). \quad (4.9)$$

Wykorzystując wzory na rozkłady warunkowe, ostatecznie otrzymujemy, że:

$$\hat{\xi}_{t|t} = \frac{\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \boldsymbol{\eta}_t}{\mathbf{1}^T \left( \hat{\xi}_{t|t-1} \odot \boldsymbol{\eta}_t \right)}.$$

Zatem filtr Hamiltona polega na wyznaczaniu w każdej chwili  $t$  wartości:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{t|t} &= \frac{\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \boldsymbol{\eta}_t}{\mathbf{1}^T \left( \hat{\xi}_{t|t-1} \odot \boldsymbol{\eta}_t \right)}, \\ \hat{\xi}_{t+1|t} &= \mathbf{P}^T \hat{\xi}_{t|t}. \end{aligned}$$

Filtr Hamiltona można wykorzystać w konstrukcji funkcji wiarygodności. Funkcja log-wiarygodności dla obserwacji  $(\mathbf{r}_t)_{t=1}^T$  przyjmuje wzór:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \log f(\mathbf{r}_t | \mathcal{R}_{t-1}).$$

Korzystając ze wzoru (4.9), uzyskamy funkcję log-wiarygodności postaci:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \log f(\mathbf{r}_t | \mathcal{R}_{t-1}) = \sum_{t=1}^T \log \mathbf{1}^T \left( \hat{\xi}_{t|t-1} \odot \boldsymbol{\eta}_t \right).$$

<sup>16</sup> Rachunek przedstawiony jest w monografii Hamiltona (1994).

<sup>17</sup> Symbol  $\odot$  oznacza mnożenie wektorów po jego współrzędnych.

Stosując filtr Hamiltona dostajemy również oszacowania prawdopodobieństw przebywania w danym reżimie w chwili  $t$ , pod warunkiem wiedzy o procesie do chwili  $(t - 1)$ . Oszacowania tych prawdopodobieństw można doprecyzować dysponując wiedzą o całym procesie, którą oznaczmy symbolem  $\mathcal{R}_T$ . Algorytm wyznaczenia „wygładzonych” wartości  $\hat{\xi}_{t|T}$  przedstawiony jest w pracach Hamiltona (1990, 1994). Jest on postaci<sup>18</sup>:

$$\hat{\xi}_{t|T} = \hat{\xi}_{t|t} \odot \left( \mathbf{P} \left( \hat{\xi}_{t+1|T} (\div) \hat{\xi}_{t+1|t} \right) \right). \quad (4.10)$$

W celu uzyskania efektu wygładzenia należy zastosować algorytm iteracyjny polegający na stosowaniu wzoru (4.10) kolejno dla  $t = T - 1, T - 2, \dots, 1$ .

### Algorytm EM

Jak pokazuje praktyka, metoda największej wiarygodności nie zawsze jest skuteczna w estymacji parametrów przełącznikowego modelu Copula-GARCH. Skuteczniejszą metodą estymacji w takich przypadkach może być algorytm EM (*Expectation Maximization*)<sup>19</sup>. Charakterystyka tej metody zastosowanej do estymacji nieznanymi parametrów Ukrytych Modeli Markowa została omówiona w pracach Hamiltona (1990, 1994).

Rozważmy próbę:

$$(S_t, \mathbf{R}_t)_{t=1}^T$$

oraz jej hipotetyczne realizacje:

$$(s_t, \mathbf{r}_t)_{t=1}^T.$$

Niech  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$  to:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_T), \\ \mathbf{s} &= (s_1, s_2, \dots, s_T). \end{aligned}$$

Stosując oznaczenia Hamiltona, zdefiniujmy operator:

$$\int_{\mathcal{S}} f(\mathbf{s}) = \sum_{s_1=1}^l \sum_{s_2=1}^l \cdots \sum_{s_T=1}^l f(s_1, s_2, \dots, s_T).$$

<sup>18</sup> Symbol  $(\div)$  oznacza dzielenie współrzędnych wektorów.

<sup>19</sup> Uporządkowanie własności metody EM, wykorzystanej do estymacji parametrów modelu przełącznikowego Copula-GARCH, było tematem pracy magisterskiej Jamera (2013).

Funkcję wiarygodności dla wszystkich obserwacji,  $\mathbf{r}$ , oznaczmy jako:

$$p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_T \mid \mathcal{R}_0; \boldsymbol{\theta}), \quad (4.11)$$

natomiast funkcję wiarygodności łącznie dla  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$  jako:

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_T, s_1, s_2, \dots, s_T \mid \mathcal{R}_0; \boldsymbol{\theta}). \quad (4.12)$$

Symbol  $\mathcal{R}_0$  oznacza wiedzę o procesie w chwili  $t = 0$ .

Wartość oczekiwaną funkcji log-wiarygodności dla  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$ , parametryzowanej przez  $\boldsymbol{\theta}_{m+1}$ , wyznaczoną względem  $p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_m)$ , która jest parametryzowana przez  $\boldsymbol{\theta}_m$ , możemy wyrazić jako:

$$Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{r}) = \int_{\mathcal{S}} \log p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_{m+1}) \cdot p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_m) \cdot d\mathbf{s}.$$

Idea algorytmu EM polega na zastosowaniu następujących kroków:

1. Wybieramy pierwsze przybliżenie  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$  wartości parametrów  $\boldsymbol{\theta}$ .
2. Dopóki nie zostanie uzyskana pożądana dokładność estymatorów nieznanymi parametrów, to:
  - a. znajdujemy wartości  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m+1}$  maksymalizujące  $Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_m, \mathbf{r})$ ,
  - b. zwiększamy  $m$  o 1.

W celu pokazania skuteczności takiego postępowania należy uzasadnić stwierdzenie, z którego wynika, że uzyskany w ten sposób ciąg estymatorów  $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_m\}_{m=0}^{\infty}$  zbiega do lokalnego maksimum funkcji wiarygodności konstruowanej dla szeregu  $\mathbf{r}$ , tzn.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}_m = \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Hamilton (1990) wykazał, że dla kolejnych przybliżeń  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m+1}$ , maksymalizujące funkcję  $Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_m, \mathbf{r})$  zachodzi również nierówność dla wartości funkcji wiarygodności tworzonej dla  $\mathbf{r}$ , tj.:

$$p(\mathbf{r}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m+1}) \geq p(\mathbf{r}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_m).$$

Ponadto, lokalne maksimum funkcji  $Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_m, \mathbf{r})$  jest także lokalnym maksimum funkcji wiarygodności  $p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}_{m+1})$ .

Niech  $\boldsymbol{\theta}$  oznacza wektor parametrów:

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\rho}),$$

gdzie  $\mathbf{p}$  jest wektorem wszystkich nieznanymi parametrów macierzy przejścia w łańcuchu Markowa, czyli  $\mathbf{p}^T = (p_{11}, \dots, p_{ll})$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  jest wektorem parametrów

wszystkich rozważanych w modelu gęstości rozkładów zmiennych losowych, natomiast wektor  $\boldsymbol{p}$  składa się z prawdopodobieństw początkowych przebywania w danym stanie w chwili  $t = 0$ . Zachodzi następujące twierdzenie, którego dowód przedstawił Hamilton (1990).

**Twierdzenie 7.** *W modelu przełącznikowym sterowanym według ukrytego łańcucha Markowa, przy ustalonych parametrach  $\boldsymbol{\theta}_m$  wyrażenie:*

$$Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \boldsymbol{r})$$

*jest maksymalizowane przez  $\boldsymbol{\theta}_{m+1} = (\boldsymbol{p}_{m+1}, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}, \boldsymbol{\rho}_{m+1})$ , gdzie:*

$$p_{ij,m+1} = \frac{\sum_{t=2}^T p(S_t = j, S_{t-1} = i \mid \mathcal{R}_T; \boldsymbol{\theta}_m)}{\sum_{t=2}^T p(S_{t-1} = i \mid \mathcal{R}_T; \boldsymbol{\theta}_m)}, \quad (4.13)$$

$$\sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial \log \boldsymbol{\eta}_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{m+1}} \right)^T \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|T} = \mathbf{0}, \quad (4.14)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{m+1} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_{1|T}. \quad (4.15)$$

Dowód Hamiltona (1990) będzie wykorzystany w dalszej części monografii, dlatego poniżej zostaną przytoczone główne jego etapy. Na początek zostanie zastosowany wzór na prawdopodobieństwo łańcuchowe dla funkcji wiarygodności  $p(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}; \boldsymbol{\theta})$ .

Stosując dekompozycję wektora  $\boldsymbol{\theta}$  na poszczególne jego składowe, otrzymujemy<sup>20</sup>:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}; \boldsymbol{\theta}) &= p(\boldsymbol{r}_T \mid s_T, \mathcal{R}_{T-1}; \boldsymbol{\alpha}) p(s_T \mid s_{T-1}; \boldsymbol{p}) \\ & p(\boldsymbol{r}_{T-1} \mid s_{T-1}, \mathcal{R}_{T-2}; \boldsymbol{\alpha}) p(s_{T-1} \mid s_{T-2}; \boldsymbol{p}) \dots \\ & \dots p(\boldsymbol{r}_1 \mid s_1, \mathcal{R}_0; \boldsymbol{\alpha}) p(s_1; \boldsymbol{p}). \end{aligned}$$

<sup>20</sup> Dla wygody realizacji łańcucha Markowa  $S_t$  będziemy oznaczać również przez  $s_t$ . Często w zapisie będzie używane skrócone oznaczenie:

$$P(S_t = j \mid S_{t-1} = i) = p(s_t \mid s_{t-1}).$$

Stosując oznaczenia zaproponowane przez Hamiltona, warunkową gęstość dla zmiennej losowej  $\boldsymbol{R}_t$  oznaczmy jako

$$p(\boldsymbol{r}_t \mid s_t, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\alpha}).$$

Można zauważyć, że:

$$\frac{\partial \log p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta})}{\partial p_{ij}} = \sum_{t=2}^T \frac{\partial \log p(s_t | s_{t-1}; \mathbf{p})}{\partial p_{ij}} = \frac{1}{p_{ij}} \sum_{t=2}^T I_{\{s_t=j, s_{t-1}=i\}}(s_t, s_{t-1}).$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{r})}{\partial p_{ij, m+1}} &= \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \log p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_{m+1})}{\partial p_{ij, m+1}} \cdot p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_m) \\ &= \frac{1}{p_{ij, m+1}} \sum_{t=2}^T \int_{\mathcal{S}} I_{\{s_t=j, s_{t-1}=i\}}(s_t, s_{t-1}) \cdot p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_m) \\ &= \frac{1}{p_{ij, m+1}} \sum_{t=2}^T p(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{R}_T; \boldsymbol{\theta}_m) \cdot p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}_m). \end{aligned}$$

Uwzględniając warunek:

$$\sum_{j=1}^l p_{ij, m+1} = 1,$$

zdefiniujemy funkcję Lagrange'a z mnożnikiem  $\lambda$ :

$$Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{r}) - \lambda \left( \sum_{j=1}^l p_{ij, m+1} - 1 \right).$$

Różniczkując tę funkcję względem  $p_{ij, m+1}$  oraz względem  $\lambda$ , a następnie otrzymane pochodne cząstkowe przyrównując do zera i rozwiązując otrzymany układ równań, uzyskujemy żadaną równość (4.13). Występujące w tym wzorze prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P(S_t = j, S_{t+1} = i | \mathcal{R}_T)$$

wyznacza się następująco:

$$P(S_t = j, S_{t+1} = i | \mathcal{R}_T) = P(S_{t+1} = i | \mathcal{R}_T) \cdot \frac{p_{ji} \cdot P(S_t = j | \mathcal{R}_t)}{P(S_{t+1} = i | \mathcal{R}_t)}.$$

Zależność (4.14) otrzymamy wykonując poniższe przekształcenia. Różniczkując funkcję  $p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta})$  względem  $\boldsymbol{\alpha}$  otrzymujemy równanie:

$$\frac{\partial \log p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \sum_{t=1}^T \frac{\partial \log p(\mathbf{r}_t | s_t, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}.$$

Następnie obliczamy:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{r})}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{m+1}} &= \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \log p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_{m+1})}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{m+1}} \cdot p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_m) \\
&= \sum_{t=1}^T \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \log p(\mathbf{r}_t | s_t, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{m+1}} \cdot p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_m) \\
&= \sum_{t=1}^T \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \log p(\mathbf{r}_t | s_t, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{m+1}} \cdot p(\mathbf{s} | \mathcal{R}_T; \boldsymbol{\theta}_m) \cdot p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}_m) \\
&= p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}_m) \sum_{t=1}^T \sum_{s_t=1}^l \frac{\partial \log p(\mathbf{r}_t | s_t, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{m+1}} \cdot p(s_t | \mathcal{R}_T; \boldsymbol{\theta}_m) \\
&= p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}_m) \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial \log \boldsymbol{\eta}_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{m+1}} \right)^T \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|T}.
\end{aligned}$$

Przyrównując do zera otrzymane wyrażenie, uzyskujemy żadaną zależność (4.14).

Na zakończenie zostanie uzasadniona równość (4.15). W tym celu, różniczkując funkcję wiarygodności  $p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta})$  względem składowych wektora  $\boldsymbol{\rho}$ , zauważamy, że:

$$\frac{\partial \log p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \rho_i} = \frac{1}{\rho_i} I(S_1 = i).$$

Zatem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{r})}{\partial \rho_{i,m+1}} &= \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \log p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_{m+1})}{\partial \rho_{i,m+1}} \cdot p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_m) \\
&= \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{\rho_{i,m+1}} I(S_1 = i) \cdot p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_m).
\end{aligned}$$

Uwzględniając warunek, że:

$$\sum_{i=1}^l \rho_{i,m+1} = 1,$$

podobnie jak w pierwszym przypadku, tworzymy funkcję Lagrange'a:

$$Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{r}) - \lambda \left( \sum_{i=1}^l \rho_{i,m+1} - 1 \right).$$



Po obliczeniu odpowiednich pochodnych cząstkowych, przyrównaniu ich do zera, a następnie rozwiązaniu układu równań, otrzymujemy zależność:

$$\rho_{i,m+1} = p(S_1 = i \mid \mathcal{R}_T; \boldsymbol{\theta}_m),$$

co w zapisie wektorowym daje nam równość (4.15).

### Estymacja przełącznikowego modelu Copula-GARCH

Tok myślowy przedstawiony w poprzednim paragrafie zostanie zastosowany w celu estymacji parametrów przełącznikowego modelu Copula-GARCH. Dystrybuanta zmiennej  $\mathbf{R}_t$ , pod warunkiem historii  $\mathcal{R}_{t-1}$  oraz stanu, w którym znajduje się ukryty łańcuch Markowa, przyjmuje postać:

$$F(\mathbf{r}_t \mid S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = C(\mathbf{u}_t \mid S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_c),$$

gdzie  $C$  jest odpowiednią kopułą,  $\mathbf{u}_t$  jest wektorem dystrybuant brzegowych:

$$\mathbf{u}_t = (F_1(r_{1,t} \mid \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1), \dots, F_d(r_{d,t} \mid \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_d)).$$

Odpowiadająca jej warunkowa gęstość zmiennej  $\mathbf{R}_t$  wyraża się wzorem:

$$f(\mathbf{r}_t \mid S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = c(\mathbf{u}_t \mid S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_c) \prod_{i=1}^d f_i(r_{i,t} \mid \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_i).$$

Warunkowa gęstość zmiennej  $\mathbf{R}_t$  pod warunkiem samej tylko historii  $\mathcal{R}_{t-1}$  to:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}_t \mid \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) &= \sum_{j=1}^l f(\mathbf{r}_t \mid S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) P(S_t = j \mid \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \\ &= \left( \sum_{j=1}^l c(\mathbf{u}_t \mid S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_c) P(S_t = j \mid \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \right) \prod_{i=1}^d f_i(r_{i,t} \mid \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_i). \end{aligned}$$

Wektor parametrów  $\boldsymbol{\theta}$  obejmuje wszystkie nieznane parametry modelu wraz z parametrami macierzy przejścia oraz prawdopodobieństwami początkowymi. Funkcję log-wiarogodności dla obserwacji  $(\mathbf{r}_t)_{t=1}^T$  można przedstawić w następującej formie:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \log f(\mathbf{r}_t \mid \mathcal{R}_{t-1}).$$

Jeśli założymy, że przełączeniu sterowanym ukrytym łańcuchem Markowa podlegają tylko gęstości kopuli, to funkcję log-wiarogodności można wyrazić za pomocą sumy dwóch składników:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \ell_c(\boldsymbol{\theta}) + \ell_m(\boldsymbol{\theta}),$$

gdzie

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \log \left( \sum_{j=1}^l c(\mathbf{u}_t | S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_c) P(S_t = j | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \right)$$

oraz

$$\ell_m(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^d \sum_{t=1}^T \log(f_i(r_{i,t} | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_i)).$$

Drugi składnik sumy dotyczy wyłącznie estymacji parametrów rozkładów brzegowych. Do estymacji nieznanymi parametrów całego modelu zostanie więc zastosowana metoda dwukrokowa IFM, o której wspomniano w poprzednim rozdziale<sup>21</sup>. W pierwszym kroku estymowane są parametry rozkładów brzegowych, natomiast w kroku drugim pozostałe parametry. Obecnie wektor nieznanymi parametrów  $\boldsymbol{\theta}$  nie obejmuje parametrów rozkładów brzegowych.

Zatem:

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \log \left( \sum_{j=1}^l c(\hat{\mathbf{u}}_t | S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_c) P(S_t = j | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \right),$$

gdzie

$$\hat{\mathbf{u}}_t = \left( F_1(r_{1,t} | \mathcal{R}_{t-1}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_1), \dots, F_d(r_{d,t} | \mathcal{R}_{t-1}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_d) \right).$$

Wektor gęstości  $\boldsymbol{\eta}_t$  występujący w filtrze Hamiltona przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\eta}_t = \begin{bmatrix} c(\hat{\mathbf{u}}_t | S_t = 1, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_c) \\ \vdots \\ c(\hat{\mathbf{u}}_t | S_t = l, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_c) \end{bmatrix}.$$

<sup>21</sup> Pomimo że statystyczne własności tej procedury są dobrze udokumentowane tylko dla statycznych modeli Copula-GARCH (Joe, Xu 1996), metoda ta zostanie adaptowana również do estymacji parametrów przełącznikowego modelu Copula-GARCH. W dalszej części monografii podane zostaną warunki regularności, dla których estymatory wyznaczone metodą największej wiarygodności zachowują swoje klasyczne własności.

Jamer (2013) przedyskutował przypadek, w którym przełączeniu podlega  $l$  kopuli Gaussa, odpowiednio z macierzą korelacji  $\mathbf{\Sigma}_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ . W zależności od stanu, który przyjmuje łańcuch Markowa, kopula ta ma wzór:

$$C(\mathbf{u}_t | S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}) = \Phi_{\mathbf{\Sigma}_j}(\Phi^{-1}(u_{1,t}), \dots, \Phi^{-1}(u_{d,t})).$$

Jej gęstość wyraża się wzorem:

$$c(\mathbf{u}_t | S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}) = \frac{1}{|\mathbf{\Sigma}_j|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varsigma}_t^T (\mathbf{\Sigma}_j^{-1} - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varsigma}_t},$$

gdzie

$$\boldsymbol{\varsigma}_t = (\Phi^{-1}(u_{1,t}), \dots, \Phi^{-1}(u_{d,t}))^T.$$

Zatem:

$$\log c(\mathbf{u}_t | S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}) = -\frac{1}{2} \log |\mathbf{\Sigma}_j| - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varsigma}_t^T \mathbf{\Sigma}_j^{-1} \boldsymbol{\varsigma}_t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varsigma}_t^T \boldsymbol{\varsigma}_t.$$

Wykonując techniczne przekształcenia, można wykazać, że:

$$\frac{\partial \log c(\mathbf{u}_t | S_t = j, \mathcal{R}_{t-1})}{\partial \mathbf{\Sigma}_k^{-1}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{\Sigma}_j - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varsigma}_t \boldsymbol{\varsigma}_t^T, & \text{gdzie } k = j, \\ 0, & \text{gdzie } k \neq j. \end{cases}$$

Wykorzystując wzór (4.14), wykonując stosowne obliczenia, otrzymujemy kolejne iteracje dla estymatora  $\mathbf{\Sigma}_j$ :

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{j,m+1} = \frac{\sum_{t=1}^T \boldsymbol{\varsigma}_t \boldsymbol{\varsigma}_t^T P(S_t = j | \mathcal{R}_T; \boldsymbol{\theta}_m)}{\sum_{t=1}^T P(S_t = j | \mathcal{R}_T; \boldsymbol{\theta}_m)}.$$

W celu poprawienia w każdej iteracji jakości uzyskanych estymatorów można dokonać normalizacji tej macierzy, według wzoru:

$$\Delta(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{j,m+1}) = \text{diag} \left( \left( \tilde{\sigma}_{11}^{(m+1)} \right)^{\frac{1}{2}}, \left( \tilde{\sigma}_{22}^{(m+1)} \right)^{\frac{1}{2}}, \dots, \left( \tilde{\sigma}_{ss}^{(m+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

gdzie

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}_{j,m+1} = (\Delta(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{j,m+1}))^{-1} \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{j,m+1} (\Delta(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{j,m+1}))^{-1}$$

oraz

$$\tilde{\sigma}_{11}^{(m+1)}, \tilde{\sigma}_{22}^{(m+1)}, \dots, \tilde{\sigma}_{ss}^{(m+1)}$$

są elementami przekątnej głównej macierzy  $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{j,m+1}$ .

### 4.3. Ukryty Model Markowa z mechanizmem TVPMS

W podrozdziale tym zostanie omówiony Ukryty Model Markowa, w którym przełączenie pomiędzy jego stanami sterowane jest według ukrytego łańcucha Markowa z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od pewnych czynników. Mechanizm TVPMS (*time-varying transition probability Markov-switching*) w modelach przełącznikowych zaproponował Filardo (1994). Metodą estymacji wybranych modeli tego typu zajmowali się między innymi Diebold i in. (1994), Kim i in. (2008). Rozważmy procesy stochastyczne:

$$(S_t, \mathbf{X}_t, \mathbf{R}_t)_{t \in \mathcal{T}} \quad (4.16)$$

gdzie:

- proces  $(S_t)_{t \in \mathcal{T}}$  jest łańcuchem Markowa o zbiorze stanów  $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, l\}$ ,
- proces  $S_t$  jest łańcuchem Markowa, dla którego macierz przejścia z jednego stanu do drugiego w chwili  $t$  zależy od realizacji  $\mathbf{X}_{t-1}$ ,
- proces  $\mathbf{R}_t$  jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie warunkowanym realizacją  $S_t$ ,
- obserwowalne są tylko realizacje  $\mathbf{R}_t$  oraz  $\mathbf{X}_t$ .

W praktycznych zastosowaniach najczęściej wykorzystywane są modele przełącznikowe z mechanizmem TVPMS z dwoma stanami. Wówczas macierz przejścia w ukrytym łańcuchu Markowa ma postać:

$$\mathbf{P}_t = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & 1 - p_{11}(t) \\ 1 - p_{22}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

W badaniach empirycznych, których wyniki zostaną omówione w drugiej części monografii, będzie wykorzystany przełącznikowy model Copula-GARCH z mechanizmem TVPMS, w którym przełączenie sterowane jest łańcuchem Markowa z macierzą przejścia określoną wzorem:

$$\mathbf{P}_t = \begin{bmatrix} \frac{\exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_1)} & 1 - \frac{\exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_1)} \\ 1 - \frac{\exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_2)} & \frac{\exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_2)} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Wektor  $\mathbf{x}_t = [1, f_{1,t}, \dots, f_{K,t}]^T$ , który jest realizacją zmiennej  $\mathbf{X}_t$ , zawiera czynniki wpływające na prawdopodobieństwo przejścia z jednego stanu do drugiego<sup>22</sup>.

<sup>22</sup> Celem zagwarantowania własności prawdopodobieństwa, które przyjmuje wartość z przedziału  $[0, 1]$ , elementy macierzy  $\mathbf{P}_t$  są konstruowane jako odpowiednia transformacja wyrażenia  $\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_i$ .

Nieznane parametry tego modelu można estymować stosując dwukrokową metodę największej wiarygodności. Podobnie jak w modelu przełącznikowym ze stałą macierzą przejścia, w pierwszym kroku szacowane są parametry rozkładów brzegowych, natomiast w kroku drugim – parametry kopuli oraz parametry macierzy  $P_t$ .

### Filtr Hamiltona

Dyskusja na temat dwukrokowej metody IFM, zastosowanej do estymacji nieznanymi parametrów modelu, zostanie przeprowadzona tylko dla kroku drugiego.

Niech  $\theta$  oznacza wektor parametrów:

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2),$$

gdzie  $\theta_1, \theta_2$  są parametrami gęstości kopuli, natomiast  $\beta_1, \beta_2$  są wektorami występującymi w macierzy przejścia zdefiniowanej wzorem (4.18).

Należy zwrócić uwagę na fakt, że w estymacji modelu przełącznikowego z mechanizmem TVPMS, ważna jest historia obu procesów  $(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ . Wiedza o ich historii do chwili  $(t-1)$  będzie oznaczana nadal symbolem  $\mathcal{R}_{t-1}$ . Jeśli rozważymy łańcuch Markowa z dwoma stanami, to wektor  $\eta_t$  przyjmie postać:

$$\eta_t = \begin{bmatrix} c(\mathbf{u}_t | S_t = 1, \mathcal{R}_{t-1}; \alpha) \\ c(\mathbf{u}_t | S_t = 2, \mathcal{R}_{t-1}; \alpha) \end{bmatrix},$$

gdzie  $\alpha = (\theta_1, \theta_2)$ , natomiast wektor  $\hat{\xi}_{t|t-1}$ , to:

$$\hat{\xi}_{t|t-1} = \mathbb{E}(\xi_t | \mathcal{R}_{t-1}; \theta) = \begin{bmatrix} P(S_t = 1 | \mathcal{R}_{t-1}; \theta) \\ P(S_t = 2 | \mathcal{R}_{t-1}; \theta) \end{bmatrix}.$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie co w monografii Hamiltona (1994), dochodzimy do wniosku, że:

$$\hat{\xi}_{t|t} = \frac{\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t}{\mathbf{1}^T (\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t)},$$

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = P_{t+1}^T \hat{\xi}_{t|t}.$$

Logarytm funkcji wiarygodności, podobnie jak w przypadku modelu przełącznikowego ze stałą macierzą przejścia, jest postaci:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \log \left[ \mathbf{1}^T \left( \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1} \odot \boldsymbol{\eta}_t \right) \right].$$

Stosując filtr Hamiltona, w którym uwzględniamy dynamiczną macierz przejścia  $\mathbf{P}_t$ , wykorzystując typowe algorytmy wyznaczania maksimum funkcji wielu zmiennych, można wyznaczyć oszacowania nieznanych parametrów przełącznikowego modelu Copula-GARCH z mechanizmem TVPMS. Dla estymacji parametrów niektórych modeli jednak skuteczna staje się dopiero implementacja algorytmu EM.

### Algorytm EM

Diebold i in. (1994) skonstruowali algorytm EM dla modelu przełącznikowego z mechanizmem TVPMS, gdy przełączeniu podlegały gęstości dwóch rozkładów normalnych.

W prezentowanym podrozdziale zostaną przedstawione wzory, które zostały wyprowadzone przez autorkę. Posłużą one do adaptacji algorytm EM zastosowanego do estymacji parametrów dowolnego Ukrytego Modelu Markowa sterowanego przy użyciu łańcucha Markowa z macierzą przejścia określoną wzorem (4.18).

Rozważmy nieobserwowalny ciąg realizacji stanów:

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_T)$$

oraz dwa ciągi obserwacji:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_T),$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_T).$$

Podobnie jak w poprzednim rozdziale, wprowadzone zostanie znaczenie dla operatora:

$$\int_{\mathcal{S}} f(\mathbf{s}) = \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 f(s_1, s_2, \dots, s_T).$$

Wartość oczekiwaną łącznej funkcji log-wiarygodności  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$  parametryzowanej przez  $\boldsymbol{\theta}_{m+1}$  względem rozkładu łącznego  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{s}$  parametryzowanego przez  $\boldsymbol{\theta}_m$  oznaczmy również jako:

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{r}) = \int_{\mathcal{S}} \log p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_{m+1}) \cdot p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_m).$$

Dla potrzeb estymacji parametrów Ukrytego Modelu Markowa z mechanizmem TVPMS udowodnione zostanie przez autorkę następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 8.** *W modelu przełącznikowym z mechanizmem TVPMS, z macierzą przejścia  $\mathbf{P}_t$ , dla ustalonego wektora parametrów  $\boldsymbol{\theta}_m$ , wyrażenie:*

$$Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{r})$$

*jest maksymalizowane przez  $\boldsymbol{\theta}_{m+1}$ , którego składowe spełniają poniższe warunki:*

$$\sum_{t=2}^T (-1)^{i+j} x_{k,t-1} \frac{p_{ii,m+1}(t)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_{i,m+1})} p(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{R}_T; \boldsymbol{\theta}_m) = 0,$$

gdzie

$$p_{ii,m+1}(t) = \frac{\exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_{i,m+1})}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_{i,m+1})}, \quad i = 1, 2; \quad k = 1, \dots, K \quad (4.19)$$

oraz

$$\sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial \log \boldsymbol{\eta}_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{m+1}} \right)^T \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|T} = \mathbf{0}. \quad (4.20)$$

Dowód tego twierdzenia bazuje na rozumowaniu, które było prowadzone dla modelu przełącznikowego ze stałą macierzą przejścia. Oznaczmy wektor parametrów macierzy przejścia w ukrytym łańcuchu Markowa jako  $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1^T, \boldsymbol{\beta}_2^T)^T$ . Dla funkcji wiarygodności  $p(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  zachodzi wzór:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}) &= p(\mathbf{r}_T | s_T, \mathcal{R}_{T-1}; \boldsymbol{\alpha}) p(s_T | s_{T-1}, \mathbf{x}_{T-1}; \boldsymbol{\beta}) \\ & p(\mathbf{r}_{T-1} | s_{T-1}, \mathcal{R}_{T-2}; \boldsymbol{\alpha}) p(s_{T-1} | s_{T-2}, \mathbf{x}_{T-2}; \boldsymbol{\beta}) \dots \\ & \dots p(\mathbf{r}_1 | s_1, \mathcal{R}_0; \boldsymbol{\alpha}) p(s_1). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Niech  $\beta_{ik}$  oznacza  $k$ -tą składową wektora  $\boldsymbol{\beta}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Zauważmy, że:

$$\frac{\partial \log p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{ik}} = \sum_{t=2}^T \frac{\partial \log p(s_t | s_{t-1}, \mathbf{x}_{t-1}; \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_{ik}} = \sum_{t=2}^T \frac{\partial p_{ij}(t)}{\partial \beta_{ik}},$$

przy czym:

$$\sum_{t=2}^T \frac{\partial p_{ij}(t)}{\partial \beta_{ik}} = \sum_{t=2}^T (-1)^{i+j} x_{k,t-1} \frac{p_{ii}(t)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_i)} I_{\{S_t=j, S_{t-1}=i\}}(s_t, s_{t-1}).$$

Zatem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{r})}{\partial \beta_{ik,m+1}} &= \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \log p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_{m+1})}{\partial \beta_{ik,m+1}} \cdot p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_m) = \\
&= \sum_{t=2}^T \int_{\mathcal{S}} (-1)^{i+j} x_{k,t-1} \frac{p_{ii,m+1}(t)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_{i,m+1})} I_{\{S_t=j, S_{t-1}=i\}}(s_t, s_{t-1}) \cdot p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_m) = \\
&= \sum_{t=2}^T (-1)^{i+j} x_{k,t-1} \frac{p_{ii,m+1}(t)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_{i,m+1})} p(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{R}_T; \boldsymbol{\theta}_m) \cdot p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}_m) = \\
&= p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}_m) \sum_{t=2}^T (-1)^{i+j} x_{k,t-1} \frac{p_{ii,m+1}(t)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_{i,m+1})} p(S_t = j, S_{t-1} = i | \mathcal{R}_T; \boldsymbol{\theta}_m).
\end{aligned}$$

Aby wyznaczyć wartości estymatorów składowych wektorów  $\boldsymbol{\beta}_{i,m+1}$ , powyższe równania należy przyrównać do zera i numerycznie rozwiązać otrzymany układ równań. W celu wykazania wzoru (4.20), wystarczy zauważyć, że dla funkcji wiarygodności  $p(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  zachodzi następująca równość:

$$\frac{\partial \log p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \sum_{t=1}^T \frac{\partial \log p(\mathbf{r}_t | s_t, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}.$$

Zatem:

$$\frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{r})}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{m+1}} = \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \log p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_{m+1})}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{m+1}} \cdot p(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}_m),$$

a następnie:

$$\frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}_{m+1}; \boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{r})}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{m+1}} = p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}_m) \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial \log \eta_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{m+1}} \right)^T \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|T}.$$

Przyrównując powyższą równość do zera otrzymujemy żadaną tożsamość. Pozostaje jeszcze uzasadnienie wyboru prawdopodobieństw początkowych. W przypadku rozpatrywania w modelu dwóch reżimów można przyjąć *a priori*, że pierwsza obserwacja jest w pierwszym lub drugim stanie.

## 4.4. Efektywność estymatorów ML w Ukrytych Modelach Markowa

Klasyczna metoda największej wiarygodności zakłada między innymi, że zmienne losowe  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_T$ , dla których realizacji tworzymy funkcję wiarygodności, są niezależne, o tym samym rozkładzie, którego gęstość  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  spełnia pewne warunki regularności (zob: Bartoszewicz 1989, Serfling 1991).



Wówczas asymptotyczny rozkład estymatora  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  jest normalny, z wartością oczekiwaną  $\boldsymbol{\theta}$  i macierzą wariancji i kowariancji będącej odwrotnością dodatnio określonej macierzy informacyjnej  $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}}$ , gdzie:

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{X}_t; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j^T} \right].$$

Jeśli rozważymy zmienną losową  $\mathbf{X}_t$ , której rozkład zależy od realizacji ukrytego łańcucha Markowa  $S_t$ , czyli jest postaci:

$$f(\mathbf{x}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^l f(\mathbf{x}_t | S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) P(S_t = j | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}), \quad (4.22)$$

to w tak zdefiniowanym modelu przede wszystkim nie jest spełnione założenie dotyczące niezależności zmiennych losowych  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_T$ . Wówczas klasyczne warunki regularności w tego typu modelach wymagają pewnej korekty.

W rozdziale tym zostaną uporządkowane warunki regularności, dla których estymatory uzyskane metodą największej wiarygodności, zastosowaną do wyznaczenia nieznanymi parametrów Ukrytych Modeli Markowa, posiadają pożądane własności asymptotyczne. Na początek uzasadniony zostanie fakt, że jednym z koniecznych warunków regularności jest założenie o ergodyczności procesu  $(S_t)_{t \in \mathcal{T}}$ . Rozumowanie będzie prowadzone dla jednowymiarowej zmiennej losowej, ale wnioski można uogólnić na wielowymiarową zmienną losową. Można wykazać następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 9.** *Niech  $(S_t)_{t \in \mathcal{T}}$  będzie ukrytym, ergodycznym procesem Markowa ze skończoną liczbą stanów oraz niech  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  będzie procesem, w którym warunkowa gęstość  $X_t$  jest postaci:*

$$f(x_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^l f(x_t | S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) P(S_t = j | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}). \quad (4.23)$$

Wówczas zmienne losowe  $X_t$  są asymptotycznie niezależne, co będziemy rozumieć następująco:

$$\lim_{\tau_1, \dots, \tau_k \rightarrow \infty} \left| P\left(\bigcap_{v=1}^k \{X_{t+\sum_{p=0}^v \tau_p} \in A_p\}\right) - \prod_{v=1}^k P(X_{t+\sum_{p=0}^v \tau_p} \in A_p) \right| = 0,$$

gdzie  $A_p$  jest dowolnym zbiorem mierzalnym, natomiast  $p = 1, \dots, k$ .

Dowód powyższego twierdzenia jest przedstawiony w pracy Czapkiewicz, Dawidowicz (2018). Niech teraz  $\varphi_Z(t)$  oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej  $Z$ , która, jak wiadomo, koduje pełną informację o jej rozkładzie<sup>23</sup>.

<sup>23</sup> Funkcja charakterystyczna standaryzowanego rozkładu normalnego jest postaci:  $\varphi_Z(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ .

Kolejnym etapem rozumowania jest wykazanie twierdzenia, że dla zmiennych losowych, które są asymptotycznie niezależne, przy pewnych dodatkowych założeniach zachodzi następujące centralne twierdzenie graniczne:

**Twierdzenie 10.** *Założmy, że  $X_1 \dots, X_T$  są asymptotycznie niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej 0 oraz takimi, że:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E} X_t^2 \right) = 1.$$

*Dodatkowo założmy, że jest spełniony warunek Lindeberga, który w ogólnym przypadku ma postać (oznaczenie  $\|\cdot\|$  oznacza normę Euklidesa):*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E} \|\mathbf{X}_t\|^2 I_{\{\|\mathbf{x}_t\| > \eta\}} \right) = 0 \quad \text{dla każdego } \eta > 0. \quad (4.24)$$

*Wówczas rozkład zmiennej losowej postaci*

$$Y_T = (X_1 + X_2 + \dots + X_T) / \sqrt{T}$$

*dąży do rozkładu normalnego, tj.:  $\lim_{T \rightarrow \infty} |\phi_{Y_T}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2}| = 0$ .*

Dowód powyższego twierdzenia jest również przedstawiony w pracy Czapkiewicz, Dawidowicz (2018). Jeśli zachodzi teza Twierdzenia 10, to prawdziwe jest twierdzenie Lindeberga-Fellera (zob: Greene 2002)). Dla przypadku jednowymiarowego można je przedstawić w następującej formie:

**Twierdzenie 11.** *Założmy, że  $X_1 \dots, X_T$  są asymptotycznie niezależnymi zmiennymi losowymi, dla których spełniony jest warunek Lindeberga. Niech:*

$$E_t(X_t) = E(X_t | \mathcal{R}_t) = \mu_t \quad \text{oraz} \quad D_t^2(X_t) = D^2(X_t | \mathcal{R}_t) = \sigma_t^2.$$

*Jeśli ponadto założymy, że*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma_t^2}{\sum_{t=1}^T \sigma_t^2} = 0,$$

*to zachodzi następujący fakt<sup>24</sup>:*

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \xrightarrow{d} N(\mu, \sigma^2)$$

*gdzie*

$$\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mu_t \quad \text{oraz} \quad \sigma^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sigma_t^2.$$

---

<sup>24</sup>  $\xrightarrow{d}$  oznacza zbieżność według rozkładu.

Przejdźmy teraz do uporządkowania warunków regularności, przy których estymatory największej wiarygodności nieznanymi parametrami Ukrytego Modelu Markowa są zgodne oraz asymptotycznie normalne i efektywne.

Rozważmy zmienne losowe  $R_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) o gęstości  $f(r_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$  zadanych wzorem:

$$f(r_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^l f(r_t | S_t = j, \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) P(S_t = j | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}), \quad (4.25)$$

przy czym  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ .

Dla realizacji tych zmiennych losowych tworzymy funkcję wiarygodności. W celu uzyskania pożądanych własności estymatora  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  wyznaczonego metodą największej wiarygodności załóżmy, że:

1. Proces  $(S_t)_{t \in \mathcal{T}}$  jest ergodyczny.
2. Zmienne losowe  $R_t$  spełniają warunek Lindeberga opisany równaniem (4.24).
3. Dla każdego  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  funkcja  $f(r_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$  jest ciągła i różna od zera.
4. Dla każdego  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  istnieją pochodne:  $\frac{\partial \log f(r_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ ,  $\frac{\partial^2 \log f(r_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}$ ,  $\frac{\partial^3 \log f(r_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_l}$ , dla każdych  $i, j, l = 1, \dots, k$ .
5. Dla pewnego  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  zachodzi warunek  $\mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^T \frac{\partial \log f(R_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] = \mathbf{0}$ .
6. Istnieje  $M > 0$  takie, że dla każdego  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  oraz  $t = 1, \dots, T$  występuje wspólne ograniczenie:

$$\left| A_t^f(\boldsymbol{\theta}) \right| < M \text{ oraz } \left| B_t^f(\boldsymbol{\theta}) \right| < M,$$

gdzie

$$A_t^f(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}_t \left[ \frac{\partial^2 \log f(R_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]$$

oraz:

$$B_t^f(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}_t \left[ \frac{\partial^3 \log f(R_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_l} \right],$$

dla każdych  $i, j, l = 1, \dots, k$ .

Symbol  $\mathbb{E}_t[\cdot]$  oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej w chwili  $t$ , pod warunkiem jej historii do chwili  $t - 1$ .

Pierwsze dwa warunki determinują nam tezę twierdzenia 10 oraz 11. Warunki 3–4 są warunkami regularności w klasycznym twierdzeniu dotyczącym

własności estymatorów największej wiarygodności (zob: Bartoszewicz 1989, Serfling 1991). Warunek 5 jest modyfikacją klasycznego warunku dla przypadku, gdy niespełnione jest założenie o niezależności i jednakowym rozkładzie zmien-nych losowych tworzących próbę. Ostatni warunek gwarantuje nam istnienie granicy  $A^f$  oraz  $B^f$ :

$$A^f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T A_t^f(\boldsymbol{\theta}), \quad B^f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T B_t^f(\boldsymbol{\theta}).$$

Przy takich warunkach regularności rozkład estymatora  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , wyznaczonego metodą największej wiarygodności, dąży (według rozkładu) do rozkładu normalnego:

$$\sqrt{T} \left[ \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right] \xrightarrow{d} N(0; \Sigma_f),$$

gdzie  $\Sigma_f = -[A^f]^{-1}$ . Przy tych założeniach oraz korzystając z faktu, że zachodzi centralne twierdzenie graniczne, które zostało wykazane przez Czapkiewicz, Dawidowicz (2018), dowód tego faktu jest powtórzeniem rozumowania przedstawionego w pracy Serflinga (1991). Powyższe twierdzenie może być również uogólnione na przypadek wielowymiarowy.

## 4.5. Test porównania modeli

Test służący do porównania dwóch modeli, zarówno zagnieżdżonych, jak i niezagnieżdżonych, był konstruowany przez Vuonga (1989). Jest on znany pod nazwą **testu Vuonga**. Autor tego testu uzyskał rozkład statystyk testowych przy założeniu pewnych warunków regularności, które nie są spełnione w przypadku porównywania dwóch Ukrytych Modeli Markowa. W pracy Riversa i Vuonga (2002) znajduje się pewna modyfikacja tego testu w przypadku porównywania nieliniowych modeli szeregów czasowych, jednak nowo zdefiniowane warunki regularności również nie są spełnione dla modeli przełącznikowych sterowanych ukrytym łańcuchem Markowa.

W podrozdziale tym przedstawione zostaną etapy rozumowania Vuonga (1989), gdyż będą one wykorzystane w testowaniu modeli przełącznikowych, w których przełączenie sterowane jest według ukrytego łańcucha Markowa. Punktem wyjścia dla konstrukcji statystyk testowych dla tego testu jest kryterium informacji Kullbacka-Leiblera, które mierzy odległość postulowanego rozkładu od prawdziwego, ale nieznanego rozkładu procesu generującego obserwacje.

Niech  $Y$  oznacza zmienną losową. Rozważmy dwie rodziny rozkładów  $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_1}$  oraz  $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_2}$ , gdzie:

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_1} = \{f(y; \boldsymbol{\theta}_1), \boldsymbol{\theta}_1 \in \boldsymbol{\Theta}_1 \subset \mathbb{R}^p\} \quad (4.26)$$

oraz

$$\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_2} = \{g(y; \boldsymbol{\theta}_2), \boldsymbol{\theta}_2 \in \boldsymbol{\Theta}_2 \subset \mathbb{R}^q\}. \quad (4.27)$$

Przy czym nie zakładamy *a priori*, że prawdziwy rozkład procesu generującego obserwacje, który będziemy oznaczać jako  $h(y, \boldsymbol{\theta})$ , należy do jednej z tych rodzin. Modele  $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_1}$  oraz  $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_2}$  mogą być niezagnieżdżone, nakładać się na siebie lub być zagnieżdżone, co będziemy rozumieć następująco:

- modele  $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_1}$ ,  $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_2}$  są niezagnieżdżone, gdy:

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_1} \cap \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_2} = \emptyset;$$

- modele  $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_1}$ ,  $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_2}$  nakładają się na siebie, gdy:

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_1} \cap \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_2} \neq \emptyset,$$

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_1} \not\subset \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_2},$$

$$\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_2} \not\subset \mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_1};$$

- modele  $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_1}$ ,  $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_2}$  są zagnieżdżone, gdy:

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_1} \subset \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_2}.$$

W każdym z tych przypadków hipoteza zerowa, mówiąca o tym, że dwa modele są porównywalne, jest definiowana jako:

$$\mathbf{H}_0 : \mathbb{E}^0(\log f(Y; \boldsymbol{\theta}_1^*)) = \mathbb{E}^0(\log g(Y; \boldsymbol{\theta}_2^*)).$$

Hipotezy alternatywne to:

$$\mathbf{H}_1 : \mathbb{E}^0(\log f(Y; \boldsymbol{\theta}_1^*)) \neq \mathbb{E}^0(\log g(Y; \boldsymbol{\theta}_2^*)),$$

$$\mathbf{H}_2 : \mathbb{E}^0(\log f(Y; \boldsymbol{\theta}_1^*)) > \mathbb{E}^0(\log g(Y; \boldsymbol{\theta}_2^*))$$

lub

$$\mathbf{H}_3 : \mathbb{E}^0(\log f(Y; \boldsymbol{\theta}_1^*)) < \mathbb{E}^0(\log g(Y; \boldsymbol{\theta}_2^*)).$$

Symbolem  $\mathbb{E}^0$  oznaczono wartość oczekiwaną zmiennej losowej wyznaczaną względem prawdziwego (nieznanego) rozkładu  $h$ .

Ponieważ porównywane ze sobą wartości oczekiwane są nieznanne, należy je oszacować na podstawie próby  $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_T]$ , w której rozkład  $Y_t$  jest taki sam co rozkład zmiennej losowej  $Y$ . Narzucając odpowiednie warunki regularności<sup>25</sup> na zmienne losowe  $Y_t$  oraz na funkcje gęstości  $f$  i  $g$ , można

<sup>25</sup> Warunki regularności zostały podane w pracy Vuonga (1989).

pokazać, że zgodnymi estymatorami wartości oczekiwanych  $\mathbb{E}^0(\log f(Y; \boldsymbol{\theta}_1^*))$  oraz  $\mathbb{E}^0(\log g(Y; \boldsymbol{\theta}_2^*))$  są statystyki:

$$LR(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \log f(Y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*)$$

oraz

$$LR(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \log g(Y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*).$$

Parametry  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*$  zostały wyznaczone metodą największej wiarygodności odpowiednio dla gęstości  $f$  lub  $g$  (pomimo że prawdziwy rozkład zadany jest gęstością  $h$ ). Hipotezę  $\mathbf{H}_0$  można wówczas przedstawić jako:

$$\mathbf{H}_0 : \mathbb{E}^0 \left( \log \frac{f(Y_i; \boldsymbol{\theta}_1^*)}{g(Y_i; \boldsymbol{\theta}_2^*)} \right) = 0.$$

Niech:

$$LR_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*) = \left[ \sum_{i=1}^T \log \frac{f(Y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*)}{g(Y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*)} \right]. \quad (4.28)$$

Vuong (1989) wykazał, że statystyka:

$$\frac{1}{T} LR_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*)$$

dąży do testowanej wartości oczekiwanej, czyli zachodzi warunek<sup>26</sup>:

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} LR_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*) = \mathbb{E}^0 \left( \log \frac{f(Y; \boldsymbol{\theta}_1^*)}{g(Y; \boldsymbol{\theta}_2^*)} \right).$$

Rozważmy teraz statystykę  $\hat{\omega}_T^2$  postaci:

$$\hat{\omega}_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left[ \log \frac{f(Y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*)}{g(Y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*)} \right]^2 - \left[ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left( \log \frac{f(Y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*)}{g(Y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*)} \right) \right]^2. \quad (4.29)$$

Vuong (1989) wykazał również, że statystyka  $\hat{\omega}_T^2$  dąży do wariancji  $\omega_*^2$ , gdzie:

$$\omega_*^2 = \mathbb{E}^0 \left[ \log \frac{f(Y; \boldsymbol{\theta}_1^*)}{g(Y; \boldsymbol{\theta}_2^*)} \right]^2 - \left[ \mathbb{E}^0 \left( \log \frac{f(Y; \boldsymbol{\theta}_1^*)}{g(Y; \boldsymbol{\theta}_2^*)} \right) \right]^2.$$

Zachodzi poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 12.** *Jeśli spełniona jest hipoteza  $\mathbf{H}_0$ , to:*

- *gdy modele  $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_1}$  oraz  $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_2}$  są niezagnieżdżone, to rozkład statystyki:*

$$LR = T^{-1/2} LR_T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*) / \hat{\omega}_T$$

*asymptotycznie dąży do standardowego rozkładu normalnego  $N(0, 1)$ ;*

<sup>26</sup> Oznaczenie plim oznacza zbieżność według prawdopodobieństwa.

- gdy modele  $\mathbf{F}_{\theta_1}$  oraz  $\mathbf{G}_{\theta_2}$  są zagnieżdżone, to rozkład statystyki:

$$LR = 2LR_T \left( \hat{\theta}_{1,T}, \hat{\theta}_{2,T} \right)$$

asymptotycznie dąży do rozkładu  $\chi^2_{q-p}$  z  $(p - q)$  stopniami swobody, gdzie  $p$  i  $q$  oznaczają odpowiednio liczbę nieznanymi parametrów porównywanych modeli.

Jeśli natomiast porównujemy ze sobą modele  $\mathbf{F}_{\theta_1}$ ,  $\mathbf{G}_{\theta_2}$ , które nakładają się na siebie, wówczas testowanie hipotezy  $\mathbf{H}_0$  przebiega dwuetapowo:

- w pierwszym kroku testujemy hipotezę:  $H : \omega_*^2 = 0$  przeciwko hipotezie  $K : \omega_*^2 \neq 0$ ,
- w przypadku odrzucenia hipotezy  $H$ , w drugim kroku postępujemy tak jak przy porównywaniu dwóch modeli niezagnieżdżonych.

Statystyką testową służącą testowaniu hipotezy  $H$  jest statystyka  $\hat{\omega}_T^2$  opisana równaniem (4.29). Jej asymptotyczny rozkład to  $\chi^2_{p+q}$  z  $p + q$  stopniami swobody, gdzie  $p$  oraz  $q$  oznaczają odpowiednio liczbę nieznanymi parametrów porównywanych modeli.

## 4.6. Modyfikacja klasycznego testu

Konstruując przełącznikowy model sterowany ukrytym łańcuchem Markowa, pojawia się problem wyboru odpowiedniej liczby stanów. W literaturze finansowej dotyczącej badań zależności pomiędzy giełdami papierów wartościowych najczęściej przyjmuje się model z dwoma reżimami, które można interpretować jako stan dobrej i złej koniunktury na rynkach finansowych. W przypadku analizy rynków rozwiniętych takie założenie wydaje się być naturalne.

Jeżeli jednak będziemy analizować strukturę powiązań pomiędzy rynkiem wschodzącym i rynkiem rozwiniętym, to może się okazać, że w modelu powinien być uwzględniony dodatkowy stan, który niekoniecznie jest związany z okresami „hossy” lub „bessy”, lecz jest związany z okresem, po którym rynki osiągają swoją dojrzałość. Zatem konstruując model, powinno się zweryfikować hipotezę  $\mathbf{H}_0$ , przeciwko hipotezie  $\mathbf{H}_1$ , gdzie:

**$\mathbf{H}_0$ :** Model przełącznikowy sterowany według ukrytego łańcucha Markowa z  $(l + 1)$  stanami jest porównywalny z modelem przełącznikowym z  $l$  stanami,

**$\mathbf{H}_1$ :** Model przełącznikowy sterowany według ukrytego procesu Markowa z  $(l + 1)$  stanami jest lepszy niż model przełącznikowy z  $l$  stanami.

W konstrukcji modelu przełącznikowego pomiędzy dwoma kopułami pojawia się również problem ich odpowiedniego doboru. Wówczas należy dokonać porównania modeli, które w swojej konstrukcji wykorzystują różne kopule.

W badaniach empirycznych pojawia się również konieczność porównania dwóch modeli sterowanych według ukrytego łańcucha Markowa: ze stałą macierzą przejścia oraz z mechanizmem TVPMS. Ma to kluczowe znaczenie w analizie czynników w kształtowaniu się poziomów współzależności giełd papierów wartościowych. Zagadnienie to będzie omawiane w części empirycznej monografii. Testowaniu podlega wówczas hipoteza  $H_0$  przeciwko hipotezie  $H_1$ , gdzie:

$H_0$ : Model przełącznikowy sterowany według ukrytego łańcucha Markowa z macierzą przejścia  $P_t$  jest porównywalny z modelem przełącznikowym ze stałą macierzą przejścia  $P$ ,

$H_1$ : Model przełącznikowy sterowany według ukrytego łańcucha Markowa z macierzą przejścia  $P_t$  jest lepszy od modelu przełącznikowego z macierzą przejścia  $P$ .

Do testowania tych hipotez nie mogą być bezpośrednio zastosowane testy Vuonga (1989), gdyż przyjęte założenia regularności, które występują w dowodzie rozkładu statystyk testowych, nie są spełnione w przypadku porównywania dwóch Ukrytych Modeli Markowa.

Autorskie rozumowanie przedstawione w tym rozdziale dotyczy zatem adaptacji testu Vuonga do porównywania dwóch Ukrytych Modeli Markowa. Adaptacja ta obejmuje korektę warunków regularności oraz niewielką modyfikację statystyk testowych Vuonga (1989) przedstawionych w twierdzeniu 12.

Niech  $(\mathbf{R}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  będzie obserwowalnym procesem, w którym warunkowy rozkład w chwili  $t$  oznaczmy jako:

$$h(\mathbf{r}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}).$$

Rozważamy dwa modele:  $\mathbf{F}_{t, \theta_1}$  oraz  $\mathbf{G}_{t, \theta_2}$ , gdzie :

$$\mathbf{F}_{t, \theta_1} = \{f(\mathbf{r}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1), \boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta_1 \subset \mathbb{R}^p\}$$

oraz

$$\mathbf{G}_{t, \theta_2} = \{g(\mathbf{r}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_2), \boldsymbol{\theta}_2 \in \Theta_2 \subset \mathbb{R}^q\},$$

przy czym nie zakładamy *a priori*, że prawdziwy rozkład  $h(\mathbf{r}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$  należy do jednej z tych rodzin.



Rozważmy teraz dwa Ukryte Modele Markowa, zadane odpowiednio gęstościami:

$$f(\mathbf{r}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1^*) \quad \text{oraz} \quad g(\mathbf{r}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_2^*).$$

Ponieważ rozkład zmiennej losowej  $\mathbf{R}_t$  zależy od historii procesu, nie jest spełnione założenie o niezależności i jednakowym rozkładzie zmiennych losowych tworzących dany proces.

W celu wykazania możliwości stosowania testu Vuonga (1989) dla porównania dwóch Ukrytych Modeli Markowa konieczna jest pewna korekta jego warunków regularności.

Korekta ta obejmuje następujące przypadki:

1. Proces  $(S_t)_{t \in \mathcal{T}}$ , warunkujący realizacje zmiennych  $\mathbf{R}_t$  jest ergodyczny.
2. Dla zmiennych losowych  $\mathbf{R}_t$  spełniony jest wielowymiarowy warunek Lindeberga (4.24).
3. Dla każdego  $\boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta$  funkcja  $f(\mathbf{r}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$  jest ciągła i różna od zera.
4. Dla pewnego  $\boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta$  zachodzi warunek  $\mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^T \frac{\partial \log f(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] = \mathbf{0}$ .
5. Istnieje takie  $M > 0$ , że dla każdego  $t$  oraz  $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in \Theta$  zachodzi wspólne ograniczenie:

$$\left| A_t^f(\boldsymbol{\theta}_1) \right| < M, \quad \left| B_t^f(\boldsymbol{\theta}_1) \right| < M, \quad \left| B_{fg}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) \right| < M,$$

gdzie

$$A_t^f(\boldsymbol{\theta}_1) = \mathbb{E}_t \left[ \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{r}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1 \partial \boldsymbol{\theta}_1^T} \right],$$

$$B_t^f(\boldsymbol{\theta}_1) = \mathbb{E}_t^0 \left[ \frac{\partial \log f(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} \frac{\partial \log f(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1^T} \right],$$

$$B_{fg}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) = \mathbb{E}_t^0 \left[ \frac{\partial \log f(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} \frac{\partial \log g(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_2)}{\partial \boldsymbol{\theta}_2^T} \right].$$

Warunki podano tylko dla funkcji  $f$ , dla funkcji  $g$  są analogiczne.

Niech teraz  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*$  oraz  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*$  będą estymatorami nieznanymi parametrów  $\boldsymbol{\theta}_1^*$  oraz  $\boldsymbol{\theta}_2^*$  wyznaczone metodą największej wiarygodności. Przy tak zdefiniowanych warunkach regularności rozkład tych estymatorów dąży (według rozkładu)

do rozkładu normalnego, tj.:

$$\sqrt{T} \left[ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^* - \boldsymbol{\theta}_1^* \right] \xrightarrow{d} N(0; \Sigma_f), \quad (4.30)$$

$$\sqrt{T} \left[ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^* - \boldsymbol{\theta}_2^* \right] \xrightarrow{d} N(0; \Sigma_g), \quad (4.31)$$

gdzie

$$\Sigma_f = [A^f]^{-1} [B^f] [A^f]^{-1}, \quad \Sigma_g = [A^g]^{-1} [B^g] [A^g]^{-1}$$

oraz:

$$A^f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T A_t^f(\boldsymbol{\theta}_1^*), \quad B^f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T B_t^f(\boldsymbol{\theta}_1^*),$$

$$A^g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T A_t^g(\boldsymbol{\theta}_2^*), \quad B^g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T B_t^g(\boldsymbol{\theta}_2^*).$$

Aby uzasadnić powyższy fakt, należy zauważyć, że przy założeniu ergodyczności procesu  $(S_t)_{t \in \mathcal{T}}$  otrzymujemy asymptotyczną niezależność zmiennych losowych. Jeśli ponadto spełniony jest warunek Lindeberga, to zachodzi centralne twierdzenie graniczne (twierdzenie 10). Jeśli ponadto uwzględnimy, że zachodzi wspólne oszacowanie na wyrażenia zdefiniowane w punkcie 3, dowód faktów oznaczonych równaniem (4.30) oraz (4.31) jest analogiczny do rozumowania przedstawionego w pracach White (1982) oraz Vuonga (1989).

Porównując dwa modele przełącznikowe, konieczne staje się postawienie odpowiedniej hipotezy zerowej. W tym celu naturalna jest weryfikacja faktu, że dla każdej chwili  $t$  zachodzi równość:

$$\mathbb{E}_t^0(\log f(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1^*)) = \mathbb{E}_t^0(\log g(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_2^*)). \quad (4.32)$$

Ponieważ w tym wypadku skonstruowanie statystyki testowej jest raczej niemożliwe, hipoteza zerowa zostanie przedstawiona w nieco innej postaci. Niech  $M_1$  oraz  $M_2$  oznaczają sumy:

$$M_{1,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_{1,t}, \quad M_{2,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_{2,t},$$

gdzie

$$m_{1,t} = \mathbb{E}_t^0(\log f(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1^*)),$$

$$m_{2,t} = \mathbb{E}_t^0(\log g(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_2^*)).$$

Hipotezę zerową, zakładającą że dwa modele są ze sobą porównywalne, można wówczas przedstawić jako:

$$\mathbf{H}_0 : \lim_{T \rightarrow \infty} [M_{1,T} - M_{2,T}] = 0, \quad (4.33)$$

przeciwko jednej z hipotez alternatywnych:

$$\mathbf{H}_1 : \lim_{T \rightarrow \infty} [M_{1,T} - M_{2,T}] \neq 0,$$

$$\mathbf{H}_2 : \lim_{T \rightarrow \infty} [M_{1,T} - M_{2,T}] < 0,$$

$$\mathbf{H}_3 : \lim_{T \rightarrow \infty} [M_{1,T} - M_{2,T}] > 0.$$

Jako statystykę testującą taką hipotezę zerową można przyjąć wyrażenie, które oszacuje różnicę  $M_{1,T} - M_{2,T}$ . Rozważmy zatem statystykę postaci:

$$\frac{1}{T} LR_T \left( \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^* \right) = \frac{1}{T} \left[ \sum_{t=1}^T \log \frac{f(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*)}{g(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*)} \right], \quad (4.34)$$

w której parametry  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*$  oraz  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*$  zostały wyznaczone metodą największej wiarygodności z próby.

W następnych krokach należy:

**Krok I:** wykazać, że:

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} LR_T \left( \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^* \right) - (M_{1,T} - M_{2,T}) \right] = 0, \quad (4.35)$$

W powyższym wzorze oznaczenie  $p\text{lim}$  oznacza zbieżność według prawdopodobieństwa.

**Krok II:** przy założeniu, że spełniona jest hipoteza  $\mathbf{H}_0$ , podać asymptotyczny rozkład statystyki  $\frac{1}{T} LR_T \left( \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^* \right)$ .

Najpierw zostanie wykazany krok I. Zdefiniujmy dwie zmienne losowe, których realizacje są wartościami funkcji wiarygodności dla parametrów  $\boldsymbol{\theta}_1^*$  oraz  $\boldsymbol{\theta}_2^*$ :

$$\sum_{t=1}^T \log f(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1^*) \quad \text{oraz} \quad \sum_{t=1}^T \log g(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_2^*).$$

Oznaczmy:

$$M_{1,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_t^0 (\log f(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1^*)) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_{1,t},$$

$$M_{2,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_t^0 (\log g(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_2^*)) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_{2,t}.$$

Wówczas:

$$M_{1,T} - M_{2,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_t^0 \left[ \log \frac{f(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1^*)}{g(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_2^*)} \right] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (m_{1,t} - m_{2,t}).$$

Ponieważ parametry  $\boldsymbol{\theta}_1^*$  oraz  $\boldsymbol{\theta}_2^*$  są nieznane, zastępujemy je estymatorami  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*$  oraz  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*$  uzyskanymi z metody największej wiarygodności wykonanej dla realizacji próby o długości  $T$ . Niech teraz zmienne losowe  $Y_t$  oraz  $Y_t^*$  oznaczają:

$$Y_t = \log \frac{f(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^*)}{g(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^*)} \quad \text{oraz} \quad Y_t^* = \log \frac{f(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_1^*)}{g(\mathbf{R}_t | \mathcal{R}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_2^*)}.$$

Zauważamy, że:

$$\mathbb{E}_t^0(Y_t^*) = m_{1,t} - m_{2,t}.$$

Ponadto z własności (4.30) oraz (4.31) wynika, że:

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}^* = \boldsymbol{\theta}_1^* \quad (4.36)$$

oraz

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T}^* = \boldsymbol{\theta}_2^*. \quad (4.37)$$

Rozważając sumy zmiennych losowych:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^*,$$

można zauważyć, że obie dążą do tej samej granicy. Zatem stosując tezę twierdzenia 11 zastosowanego dla zmiennych  $Y_t^*$ , uzyskujemy wniosek, że ich suma dąży do tej samej granicy co wyrażenie:  $(M_{1,T} - M_{2,T})$ . W ten sposób został uzasadniony krok I.

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie rozkładu postulowanej statystyki testowej. Podobnie jak w przypadku rozumowania Vuonga (1989) rozważone zostaną trzy przypadki: (i) modele są rozłączne, (ii) modele nakładają się na siebie, (iii) modele są zagnieżdżone. Na początek rozważony zostanie przypadek (i). Zauważamy, że dla zmiennej losowej  $Y_t^*$  wartość oczekiwana oraz jej wariancja wynoszą odpowiednio:

$$\mathbb{E}_t^0(Y_t^*) = m_{1,t} - m_{2,t} = m_t \quad \text{oraz} \quad \sigma_t^2 = \mathbb{E}_t^0(Y_t^* - m_t)^2.$$

Jeśli dla zmiennych losowych  $Y_t^*$  zastosujemy tezę twierdzenia 11, to otrzymamy natychmiastowy wniosek, że:

$$\sqrt{T}(\bar{Y}_t^* - M) \xrightarrow{d} N(0, \bar{\sigma}^2), \quad (4.38)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} - \bar{Y}_t^* &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^*, \\ - M &= \lim_{T \rightarrow \infty} (M_{1,T} - M_{2,T}), \\ - \bar{\sigma}^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sigma_t^2. \end{aligned}$$

W praktyce wariancja  $\bar{\sigma}^2$  jest jednak nieznana. Wykonując stosowne obliczenia, zauważamy, że:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sigma_t^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_t(Y_t^* - m_t)^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_t(Y_t^{*2}) - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_t^2.$$

Zakładając, że hipoteza  $H_0$  jest spełniona, bez straty ogólności, można przyjąć, że  $m_t = 0$ . Wówczas:  $\sigma_t^2 = \mathbb{E}_t(Y_t^{*2})$ . Z równości (4.36) oraz (4.37) otrzymujemy wniosek, że:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^2 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^{*2}$$

posiadają te same asymptotyczne własności.

Z tezy twierdzenia 11 zastosowanego dla zmiennych  $Y_t^{*2}$  wynika, że:

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^{*2} - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_t(Y_t^{*2}) \right) = 0.$$

Zestawiając razem wszystkie elementy prowadzonej dyskusji i korzystając ze stwierdzenia (4.38) wnioskujemy, iż rozkład statystyki testowej  $LR$  postaci:

$$LR = T^{-1/2} LR_T \left( \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,T}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2,T} \right) / \hat{\omega}_T, \quad (4.39)$$

gdzie

$$\hat{\omega}_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^2, \quad (4.40)$$

asymptotycznie dąży do rozkładu normalnego  $N(0, 1)$ .

Dyskusja dotycząca przypadku (ii) oraz (iii) jest powtórzeniem rozumowania przedstawionego w pracy Vuonga (1989), które przy wprowadzonej korekcie warunków regularności można bezpośrednio uogólnić na modele przełącznikowe. Jedynie rozważając przypadek (ii), w którym należy wykonać test hipotezy:  $H : \bar{\sigma}^2 = 0$ , przeciwko hipotezie  $K : \bar{\sigma}^2 \neq 0$ , jako statystykę testującą taką hipotezę należy przyjąć zmienną losową:  $\hat{\omega}_T$  zdefiniowaną wzorem (4.40). Przy założonych warunkach regularności, prowadząc rozumowanie przedstawione w pracy Vuonga (1989), uzyskujemy jej asymptotyczny rozkład postaci  $\chi_{q-p}^2$  z  $(q + p)$  stopniami swobody, gdzie  $p$  i  $q$  oznaczają odpowiednio liczbę nieznanymi parametrów porównywanych modeli.

## **Podsumowanie**

Reasumując, w podrozdziale tym autorka wykazała, że test Vuonga (1989), dla którego rozkład statystyki testowej jest konstruowany przy narzuconych do tego celu założeniach i warunkach regularności, może być również stosowany w przypadku porównywania dwóch Ukrytych Modeli Markowa. W tym celu została zmieniona koncepcja hipotezy zerowej, która definiuje nam, kiedy dwa modele są porównywalne. Zdefiniowano nowe warunki regularności oraz dokonano niewielkiej modyfikacji istniejących statystyk testu Vuonga.

## **Część II**

### **Badanie empiryczne**





## **5. Weryfikacja struktury powiązań wybranych giełd papierów wartościowych**

Jak zauważa Rybiński (2007) w swojej monografii, wzrost międzynarodowej wymiany towarów i usług, który miał początek w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku skutkuje zwiększeniem przepływów kapitałowych. Ich wzrost oraz rozwój technologii informatycznych i komunikacyjnych spowodował, że inwestorzy zaczęli realizować inwestycje portfelowe na rynkach międzynarodowych, co w oczywisty sposób przekłada się na wzrost siły powiązań pomiędzy giełdami. Skutkiem istniejącej globalizacji jest spostrzeżenie, iż kryzysy finansowe przestały mieć swój lokalny charakter. Nastroje panujące na giełdach papierów wartościowych przenoszą się bowiem na inne rynki. Zatem z punktu widzenia międzynarodowej dywersyfikacji portfela przydatna jest wiedza na temat powiązań rynków finansowych.

W tej części monografii przedstawione zostaną wyniki badań empirycznych dotyczące analizy powiązań pomiędzy giełdami papierów wartościowych. Na początek przeprowadzona będzie taksonomia analizowanych giełd. Stosując wybrane metody analizy skupień, dokonano grupowania indeksów giełdowych, tworząc grupy giełd podobnych do siebie pod względem powiązań z innymi giełdami. Kolejna część badań przedstawiona w tym rozdziale dotyczyć będzie analizy współzależności GPW w Warszawie i giełd pochodzącymi z Europy Zachodniej, USA oraz Rosji. Badany będzie również efekt zarażania (*contagion*) GPW w Warszawie na skutek negatywnego impulsu powstałego na innej giełdzie. Wyniki empiryczne przedstawione w tym rozdziale wykażą również, że po roku 2006 nastąpiła zmiana w strukturze powiązań pomiędzy GPW w Warszawie oraz rynkami Europy Zachodniej i USA.

Przed przystąpieniem do opisu badań empirycznych wprowadzone zostaną oznaczenia oraz pojęcia, które będą się pojawiały w dalszej części rozprawy:

- Zakładając, że wyznacznikiem nastrojów panujących na giełdzie jest jej indeks giełdowy, w badaniach empirycznych będą analizowane szeregi czasowe utworzone ze stóp zwrotu głównych indeksów giełdowych.
- Jako **współzależność giełd** będziemy rozumieć korelację pomiędzy szeregami czasowymi utworzonych ze stóp zwrotu indeksów giełdowych.
- W pracy będą stosowane zamiennie określenia:
  - a) struktura powiązań pomiędzy giełdami,
  - b) struktura powiązań pomiędzy szeregami czasowymi utworzonych ze stóp zwrotu indeksów giełdowych,
  - c) struktura powiązań pomiędzy stopami zwrotu,
  - d) określenie: giełda i rynek.
- **Strukturę powiązań pomiędzy giełdami** będziemy rozumieć jako wielowymiarowy rozkład szeregu czasowego utworzonego ze stóp zwrotu indeksów giełdowych.
- Termin „**powiązanie pomiędzy giełdami**” (rynkami finansowymi) będziemy rozumieć dwojako: albo jako **strukturę powiązań pomiędzy giełdami** albo jako **współzależność giełd**.
- Miarą **poziomu współzależności giełd** lub **siły powiązań pomiędzy giełdami** w chwili  $t$  będzie warunkowy współczynnik korelacji liniowej Pearsona lub warunkowy współczynnik korelacji Spearmana wyznaczony dla szeregów czasowych utworzonych ze stóp zwrotu indeksów giełdowych.

## 5.1. Grupowanie indeksów giełdowych

Z punktu widzenia międzynarodowej dywersyfikacji portfela, przydatna staje się klasyfikacja giełd na świecie. Jedną z możliwości przeprowadzenia takiej klasyfikacji jest analiza skupień (*cluster analysis*). Jest to metoda dokonująca grupowania elementów we względnie jednorodne klasy. Podstawą stosowania tej metody jest zdefiniowane podobieństwo pomiędzy elementami, wyrażone za pomocą funkcji podobieństwa. Na przykład Mantegna (1999) oraz Bonanno i in. (2001) grupując akcje na giełdzie amerykańskiej, jako miarę podobieństwa

przyjęli współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy stopami zwrotów tych akcji. Otranto (2004) zdefiniował miarę podobieństwa dla procesów typu GARCH, na podstawie której Caiado i Crato (2007) pogrupowali 27 indeksów giełdowych notowanych w okresie 1966–2006. Czas ten został podzielony na dwa podokresy: przed i po ataku terrorystycznym z 11 września 2001 roku. Okazało się, że grupowanie rynków znacząco różni się w czasie. Grupowaniem indeksów światowych zajmowali się również Bastos i Caiado (2009). Autorzy także podzielili próbę na różne podokresy i wykazali, że dla każdego podokresu rynki grupują się głównie według ich wielkości oraz poziomu rozwinięcia. Ponadto zauważyli również, że grupowanie nie jest stałe w czasie.

Analiza skupień kilkudziesięciu indeksów giełdowych była przeprowadzona w pracy Czapkiewicz i Basiura (2010). Biorąc pod uwagę dzienne stopy zwrotu z okresu 2002–2008, tworząc miarę podobieństwa z wykorzystaniem w tym celu współczynnik korelacji uzyskany z modelu Copula-GARCH, wyodrębniono wówczas pięć głównych klas rynków: rynki z Europy Wschodniej, rynki z Europy Zachodniej, rynki z Ameryki Północnej i Południowej, rynki azjatyckie oraz grupę rynków słabo powiązanych z pozostałymi. W kolejnej pracy Czapkiewicz i Basiura (2014) dokonano grupowania indeksów giełdowych w podokresach, na które został podzielony okres 2002–2012. Podokresy te reprezentowały hossę i bessę panującą na GPW w Warszawie.

Jednym z wniosków z przeprowadzonego badania jest fakt, że w okresie bessy rynki są do siebie bardziej podobne niż w okresie hossy. Skutkuje to mniejszą liczbą uzyskanych grup w procesie klasteryzacji. Podobny efekt został uzyskany w pracy Czapkiewicz i Majdosz (2014), w której dokładny efekt zmian w grupowaniach rynków został uzyskany na podstawie miary podobieństwa konstruowanej w oparciu o warunkowy współczynnik Spearmana uzyskany z przełącznikowego modelu Copula-GARCH, którego przełączenie było sterowane według ukrytego łańcucha Markowa.

W badaniu empirycznym, którego wyniki zaprezentowano w tej pracy, rozważono okres przed światowym kryzysem finansowym (2007–2009), okres kryzysu i okres po kryzysie. Analizując uzyskane wyniki również uzyskano wniosek, że rynki dzielą się na pięć głównych klas: rynki z Europy Wschodniej, rynki z Europy Zachodniej, rynki z Ameryki Północnej i Południowej, rynki azjatyckie oraz rynki słabo powiązane z pozostałymi. Zmiany w grupowaniu odbywają się tylko w obrębie tych głównych klas.

## Dane i ich specyfikacja

Do analizy wzięto dane zawierające dzienny kurs zamknięcia wybranych indeksów giełdowych z okresu od stycznia 2006 do grudnia 2016<sup>27</sup>. Przyczyna, dla której rok 2006 był wybrany jako początek okresu badania, będzie wyjaśniona w podrozdziale 5.4. Zestawienie krajów oraz skróty indeksów, które reprezentują ich giełdę papierów wartościowych, przedstawia tablica (5.1).

**Tabela 5.1.** Kraje oraz skróty głównego indeksu reprezentującego giełdę papierów wartościowych w danym kraju

| Kraj      | Indeks | Kraj              | Indeks |
|-----------|--------|-------------------|--------|
| Argentyna | MRV    | Kanada            | TSX    |
| Szwecja   | OMXs   | Malezja           | KLCI   |
| Grecja    | ATH    | Meksyk            | IPC    |
| Brazylia  | BVP    | Niemcy            | DAX    |
| Chile     | IPSA   | Norwegia          | OSEA   |
| Chiny     | SHC    | Polska            | WIG    |
| Czechy    | PX     | Rosja             | RTS    |
| Filipiny  | PSEI   | Singapur          | STI    |
| Finlandia | HEX    | Stany Zjednoczone | S&P500 |
| Francja   | CAC    | Korea Południowa  | KOSPI  |
| Rumunia   | BET    | Szwajcaria        | SMI    |
| Hiszpania | IBEX   | Tajlandia         | SET    |
| Holandia  | AEX    | Tajwan            | TWSE   |
| Hongkong  | HSI    | Turcja            | XU100  |
| Indie     | SNX    | Węgry             | BUX    |
| Indonezja | JCI    | Wielka Brytania   | FTSE   |
| Japonia   | NKX    | Włochy            | FMIB   |
| Słowacja  | SAX    | Bułgaria          | SOFIX  |

Źródło: opracowanie własne

W badaniu wzięły udział rynki zarówno rozwinięte, jak i rozwijające się, pochodzące z Ameryki, z Europy oraz z Azji. W celu usunięcia braku danych zastosowano interpolację liniową.

<sup>27</sup> Dane pochodzą ze strony internetowej [www.stooq.pl](http://www.stooq.pl) [5.01.2017].

Dla każdego indeksu zdefiniowano dzienną stopę zwrotu jako:

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.1)$$

gdzie  $P_t$  oraz  $P_{t-1}$  są dziennymi cenami zamknięcia odpowiednio w chwili  $t$  oraz  $t - 1$ . Wszystkie stopy zwrotu zostały skorygowane o zmiany kursu dolara amerykańskiego.

Do modelowania stóp zwrotu prezentowanych indeksów giełdowych rozważono model typu GARCH i jego modyfikacje opisane w podrozdziale 2.4. Wybór modelu był podyktowany wynikami przeprowadzonego testowania. Jako test zastosowano procedurę opisaną przez Diebold i in. (1998). Szczegóły tego podejścia przedstawione były w podrozdziale 2.5. Jeśli model jest dobrze wyspecyfikowany, to przekształcone przez postulowaną dystrybuantę rozkładu zmienne losowe (u nas  $\epsilon_t$  z równania (2.2)) są niezależne, o rozkładzie jednostajnym na odcinku  $[0, 1]$ .

Jako test zgodności wybrano test Andersona-Darlinga. W celu wykazania niezależności zmiennych losowych  $Z_t = F(\epsilon_t)$ , gdzie  $F$  jest postulowaną dystrybuantą rozkładu, testowano brak autokorelacji dla zmiennych

$$Z_t(k) = (Z_t - \bar{Z})^k, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Wyniki dla procedury testującej wybór modelu AR(1) - GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem skośnym t-Studenta zawiera tablica 5.2. Analizując uzyskane wyniki, zauważamy, że w większości przypadków model okazał się bardzo dobrze wyspecyfikowany.

Jeśli pod uwagę weźmiemy niezależność zmiennych  $Z_t(k)$ , to prawie wszystkie  $p(k)$  (oznaczające  $p$ -value dla kolejnej wartości  $k$ ) przyjmują wartości większe od założonego poziomu istotności  $\alpha = 0,05$ . Wyjątek stanowi SHC (indeks Chin), HSI (indeks Hongkongu), TWSE (indeks Tajwanu) oraz SOFIX (indeks Bułgarii). Indeksy te były analizowane oddzielnie.

Wartości  $p$  otrzymane w wyniku przeprowadzenia testu zgodności z rozkładem jednostajnym wskazują, że na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  nie ma podstaw do odrzucenia zakładanej hipotezy zerowej dla prawie wszystkich rozważanych indeksów, z wyjątkiem SPX (indeks USA). Jednak, na poziomie istotności  $\alpha = 0,01$ , również dla tego indeksu nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej zakładającej istnienie rozkładu jednostajnego.

**Tabela 5.2.** Wyniki procedury testowania specyfikacji modelu  
 $AR(1) - GARCH(1, 1)$  z warunkowym rozkładem skośnym t-Studenta

| Indeks | p (1) | p (2) | p (3) | p (4) | p     |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| MRV    | 0,280 | 0,213 | 0,386 | 0,084 | 0,645 |
| BVP    | 0,812 | 0,797 | 0,954 | 0,817 | 0,384 |
| SPX    | 0,209 | 0,299 | 0,023 | 0,110 | 0,011 |
| IPC    | 0,257 | 0,612 | 0,797 | 0,520 | 0,546 |
| TSX    | 0,114 | 0,417 | 0,490 | 0,398 | 0,457 |
| IPSA   | 0,570 | 0,623 | 0,704 | 0,683 | 0,343 |
| JCI    | 0,075 | 0,425 | 0,218 | 0,703 | 0,524 |
| HSI    | 0,510 | 0,045 | 0,527 | 0,034 | 0,162 |
| KLCI   | 0,490 | 0,181 | 0,652 | 0,234 | 0,465 |
| KOSPI  | 0,505 | 0,560 | 0,059 | 0,402 | 0,335 |
| NKX    | 0,356 | 0,595 | 0,390 | 0,519 | 0,328 |
| PSEI   | 0,327 | 0,504 | 0,541 | 0,896 | 0,463 |
| SET    | 0,026 | 0,266 | 0,207 | 0,757 | 0,301 |
| SHC    | 0,005 | 0,263 | 0,010 | 0,675 | 0,271 |
| SNX    | 0,619 | 0,704 | 0,510 | 0,604 | 0,179 |
| STI    | 0,166 | 0,442 | 0,499 | 0,294 | 0,675 |
| TWSE   | 0,047 | 0,007 | 0,221 | 0,010 | 0,181 |
| AEX    | 0,991 | 0,506 | 0,974 | 0,538 | 0,720 |
| ATH    | 0,648 | 0,320 | 0,871 | 0,850 | 0,051 |
| BET    | 0,107 | 0,524 | 0,770 | 0,388 | 0,861 |
| BUX    | 0,821 | 0,898 | 0,787 | 0,907 | 0,689 |
| DAX    | 0,996 | 0,243 | 0,928 | 0,069 | 0,091 |
| CAC    | 0,980 | 0,613 | 0,687 | 0,379 | 0,086 |
| FMIB   | 0,659 | 0,920 | 0,736 | 0,952 | 0,056 |
| FTM    | 0,173 | 0,766 | 0,429 | 0,511 | 0,119 |
| HEX    | 0,714 | 0,380 | 0,769 | 0,569 | 0,769 |
| IBEX   | 0,851 | 0,653 | 0,812 | 0,621 | 0,084 |
| RTS    | 0,681 | 0,702 | 0,639 | 0,395 | 0,163 |
| OMXs   | 0,499 | 0,505 | 0,354 | 0,685 | 0,430 |
| OSEA   | 0,404 | 0,927 | 0,491 | 0,909 | 0,395 |
| PX     | 0,558 | 0,807 | 0,857 | 0,651 | 0,688 |
| SAX    | 0,414 | 0,005 | 0,638 | 0,071 | 0,522 |
| SMI    | 0,215 | 0,328 | 0,030 | 0,247 | 0,149 |
| SOFIX  | 0,004 | 0,023 | 0,001 | 0,090 | 0,349 |
| WIG    | 0,998 | 0,445 | 0,977 | 0,640 | 0,839 |
| XU100  | 0,828 | 0,636 | 0,679 | 0,770 | 0,297 |

$p(k)$  – wartości  $p$ -value dla statystyki testującej hipotezę zerową o braku autokorelacji odpowiednich momentów rzędu  $k$ ;  $p$  – wartość  $p$ -value dla testu Kołmogorowa-Smirnowa dotyczącym zgodności z rozkładem jednostajnym na przedziale  $[0, 1]$

Źródło: opracowanie własne

Do modelowania samej struktury powiązań pomiędzy dziennymi stopami zwrotu analizowanych indeksów giełdowych wybrano model przełącznikowy Copula-GARCH. W konstrukcji modelu z dwoma reżimami brały udział różne kopule<sup>28</sup>. Wybór modelu został potwierdzony przeprowadzoną procedurą testowania opisaną w podrozdziale 3.5 i zaadaptowaną dla potrzeb testowania modelu dynamicznego.

Rozważmy kopulę  $C$ . Zdefiniujmy dystrybuantę warunkową postaci:

$$C_u(v) = C(V \leq v | U = u) = \frac{\partial}{\partial u} C(u, v).$$

Wówczas  $C_u(v)$  ma rozkład jednostajny na odcinku  $[0, 1]$ . Jeśli powyższe rozumowanie zastosujemy do kopuli warunkowej zadanej równaniem:

$$C(u_t, v_t | \mathcal{R}_{t-1}) = \sum_{i=1}^2 P(S_t = i | \mathcal{R}_{t-1}) C_i(u, v | \mathcal{R}_{t-1}), \quad (5.2)$$

zatem wystarczy zweryfikować, czy pochodna cząstkowa tej funkcji ma rozkład jednostajny na odcinku  $[0, 1]$ . W równaniu (5.2)  $C_1$  oraz  $C_2$  oznaczają kopule biorące udział w konstrukcji modelu przełącznikowego. Natomiast  $S_t$  oznacza łańcuch Markowa o dwóch stanach.

Najlepsze wyniki uzyskano dla modelu przełącznikowego pomiędzy kopulą Joe-Claytona i t-Studenta oraz pomiędzy dwiema kopulami t-Studenta<sup>29</sup>. Ponieważ parametr kopuli t-Studenta, podobnie jak kopuli Gaussa, ma interesującą nas interpretację, w dalszej części opracowania będzie rozważany przełącznikowy model Copula-GARCH, w którym przełączenie występuje pomiędzy kopulami t-Studenta. Należy jednak nadmienić, że w przypadku, gdy liczba stopni swobody dla tej kopuli była stosunkowo duża, wówczas została użyta kopula Gaussa.

## Metoda grupowania

Prezentowane w tym rozdziale analizy są przeprowadzone na podstawie informacji o dziennych stopach zwrotu w latach 2006–2016. Jako miarę podobieństwa między dwoma rynkami został przyjęty warunkowy współczynnik korelacji Spearmana uzyskany z modelu Copula-GARCH, który został zastosowany do opisu struktury powiązań pomiędzy rozważanymi finansowymi szeregami czasowymi.

<sup>28</sup> W badaniu rozważono kopule występujące w pakiecie „VineCopula” w programie R.

<sup>29</sup> Ze względu na dużą liczbę analizowanych par nie podano wyników testu. Są one podane, gdy w badaniu analizowano tylko kilka par rynków.

Niech  $\rho_1^{ij}$  oraz  $\rho_2^{ij}$  oznaczają współczynniki korelacji Spearmana między  $i$ -tym oraz  $j$ -tym indeksem odpowiednio w pierwszym i drugim stanie. Współczynnik korelacji Spearmana, pod warunkiem poznania całej historii procesu, oznaczona jako  $\mathcal{R}_T$ , przyjmuje postać:

$$\rho_t^{ij} = \rho_1^{ij} P(S_t = 1 | \mathcal{R}_T) + \rho_2^{ij} P(S_t = 2 | \mathcal{R}_T), \quad (5.3)$$

gdzie  $P(S_t = 1 | \mathcal{R}_T)$  oraz  $P(S_t = 2 | \mathcal{R}_T)$  oznaczają odpowiednio prawdopodobieństwo przebywania w pierwszym i drugim stanie, pod warunkiem  $\mathcal{R}_T$ .

Przyjmując jako  $\rho_t^{ij}$  wartość jego estymatora, macierz odległości pomiędzy  $i$ -tym oraz  $j$ -tym szeregiem czasowym, w chwili  $t$ , definiujemy jako:

$$D_t = \begin{bmatrix} d_t^{ij} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$d_t^{ij} = 1 - \hat{\rho}_t^{ij}.$$

W celu zilustrowania zmian grupowania rynków, analizę skupień przeprowadzono w  $K$  podokresach. Jako macierz odległości dla każdego okresu  $k$ , ( $k = 1, \dots, K$ ) przyjęto:

$$D_k = \begin{bmatrix} d_k^{ij} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$d_k^{ij} = 1 - \hat{\rho}_k^{ij}$$

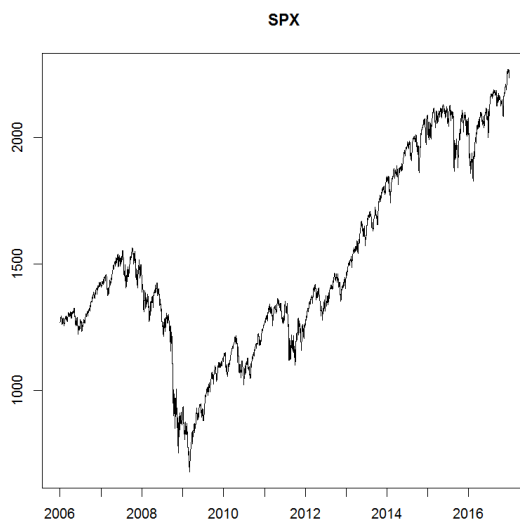
oraz

$$\hat{\rho}_k^{ij} = \frac{1}{n_k} \sum_{t=t_k}^{n_k+t_k} \hat{\rho}_t^{ij}, \quad (5.4)$$

przy czym  $n_k$  oznacza liczbę obserwacji w danym podokresie, natomiast  $t_k$ -pierwszy element należący do  $k$ -tego podokresu.

Przy tak zdefiniowanej mierze podobieństwa skonstruowano macierz odległości, a następnie klasteryzację indeksów giełdowych wykonano metodą Warda (1963). W przeprowadzonym badaniu podokresy zostały wyznaczone na podstawie notowań indeksu SPX (S&P 500), który jest wskaźnikiem nastrojów na giełdzie amerykańskiej. Rysunek 5.1 przedstawia kurs zamknięcia indeksu SPX w okresie 2006–2016.





**Rysunek 5.1.** Wartości indeksu SPX w okresie 2006–2016

Źródło: opracowanie własne

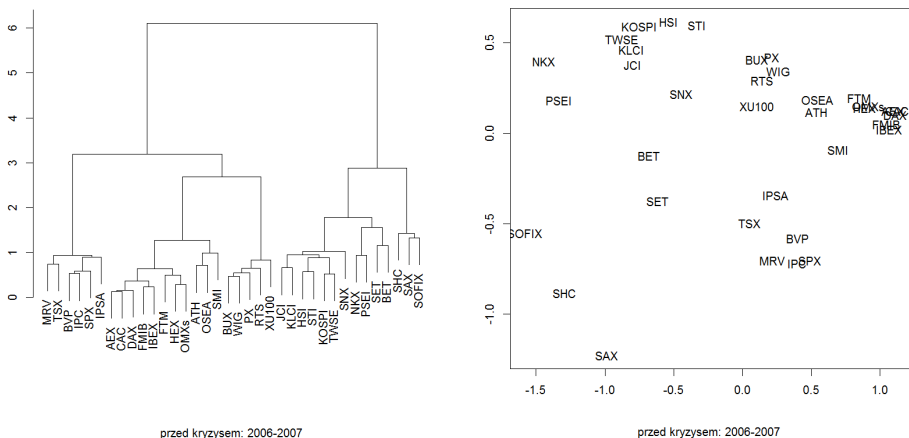
Bazując na analizie wykresu przedstawionego na rysunku 5.1, wydzielono cztery podokresy: (i) okres przed światowym kryzysem finansowym: styczeń 2006 – lipiec 2007, (ii) okres kryzysu: lipiec 2007 – marzec 2009, (iii) okres wychodzenia z kryzysu: marzec 2009 – grudzień 2011, (iv) lata 2012–2016. Dla porównania przeprowadzono również analizę dla całego badanego okresu.

## Wyniki grupowania

W wyniku przeprowadzonych analiz otrzymano główne klasy, których elementami są indeksy giełdowe z krajów leżących blisko siebie pod względem położenia geograficznego. Zatem interesujący wydaje się podział wewnątrz tych klas.

Rysunek 5.2 przedstawia dendrogram oraz mapę skalowania wielowymiarowego dla okresu przed kryzysem finansowym. Zauważamy, że główne klasy stanowią indeksy giełdowe reprezentujące Amerykę, Europę Zachodnią, Europę Wschodnią oraz Azję. Zróżnicowanie nastąpiło dopiero wewnątrz każdej klasy. Jeśli dokonamy odcięcia dendrogramu<sup>30</sup> na wysokości  $h = 1,0$ , to otrzymamy 13 grup, z których aż 7 jest jednoelementowych. W tym okresie jednoelementowe grupy tworzą: indeks giełdowy Indii, Tajlandii, Chin, a w Europie: indeks giełdowy Rumunii, Bułgarii oraz Słowacji.

<sup>30</sup> Uzasadnieniem wyboru odcięcia jest sposób konstrukcji miary odległości, która bazuje na warunkowym współczynniku korelacji Spearmana.



**Rysunek 5.2.** Dendrogram oraz mapa skalowania wielowymiarowego konstruowane dla szeregów stóp zwrotu głównych indeksów giełdowych na świecie w okresie przed kryzysem 2006–2007

Źródło: opracowanie własne

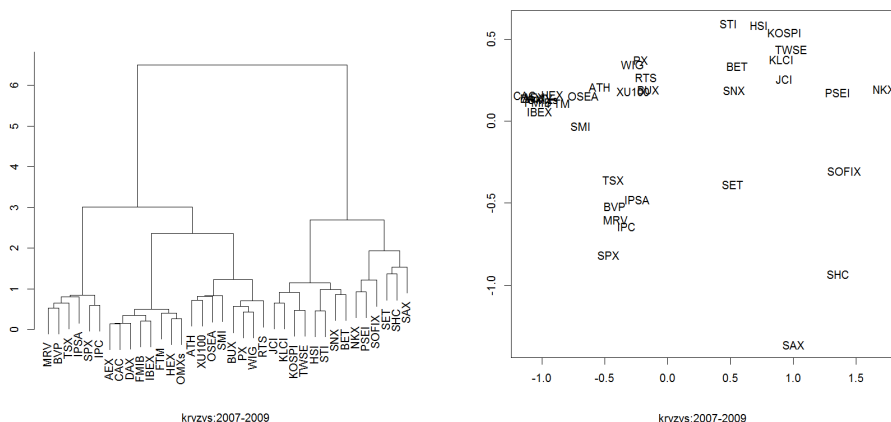
Pozostałe grupy stanowią indeksy giełdowe reprezentujące:

- rynki Ameryki Północnej i Południowej: Argentyny i Kanady, Meksyku i Brazylii, USA oraz Chile,
- rozwinięte rynki Europy Zachodniej, z których utworzyły się dwie podgrupy; pierwszą stanowią rynek Holandii, Francji, Niemiec, Włoch i Hiszpanii, natomiast drugą – rynek Wielkiej Brytanii, Finlandii i Szwecji,
- rynki Europy Zachodniej: Grecji i Norwegii,
- rynki Europy Wschodniej: Węgier, Polski, Czech, Rosji, Turcji; przy czym pierwsze trzy rynki tworzą bardzo zintegrowaną całość,
- rynki azjatyckie: Indonezji i Malezji, Hongkongu i Singapuru, Korei Południowej i Tajwanu,
- rynki Azji Wschodniej: Japonii i Filipin.

Podobne wnioski uzyskujemy analizując mapę skalowania wielowymiarowego.

Następny badany podokres to lata kryzysu światowego. W badaniu jako początek kryzysu przyjęto lipiec 2007 roku, kiedy indeks USA zanotował swoje szczyty (rysunek 5.1). Dendrogram oraz mapę skalowania wielowymiarowego dla danych z tego okresu przedstawia rysunek 5.3. W grupowaniu szeregów stóp zwrotu indeksów giełdowych reprezentujących rynki na świecie zauważamy podobny podział na główne klasy, co poprzednio. Jednak w porównaniu z poprzednim podokresem występuje silniejsza integracja rynków. Efekt ten jest widoczny

zwłaszcza w klasie rynków Ameryki Północnej i Południowej oraz w klasie rynków Europy Zachodniej. W tych klasach wiązania pomiędzy grupami następują na niższych poziomach wysokości dendrogramu niż w okresie przed kryzysem. Jeśli jednak dokonamy odcięcia dendrogramu na wysokości  $h = 1,0$ , to otrzymamy 10 klas, z których tylko 4 są jednoelementowe.



**Rysunek 5.3.** Dendrogram oraz mapa skalowania wielowymiarowego konstruowane dla szeregów stóp zwrotu głównych indeksów giełdowych na świecie w okresie kryzysu lipiec 2007 – marzec 2009

Źródło: opracowanie własne

Do rynków izolowanych należy rynek Tajlandii oraz rynek Chin, a w Europie: rynek Bułgarii oraz rynek Słowacji. Ponadto zostały utworzone następujące grupy rynków:

- rynki Ameryki Północnej i Południowej nadal tworzą jedną grupę,
- rynki Europy Zachodniej są silniej ze sobą związane niż w okresie przed kryzysem, ale nadal są skupione w dwóch tych samych podgrupach co poprzednio: pierwsza podgrupa obejmuje rynki Holandii, Francji, Niemiec, Włoch i Hiszpanii, druga – rynki Wielkiej Brytanii, Finlandii, Szwecji i Norwegii,
- rynki Turcji, Grecji, Norwegii i Szwajcarii,
- rynki Europy Wschodniej: Polski, Węgier, Czech oraz Rosji,
- rynki Azji: Indonezji i Malezji, Hongkongu i Singapuru, Korei Południowej i Tajwanu oraz Indii,
- rynki Japonii i Filipin.

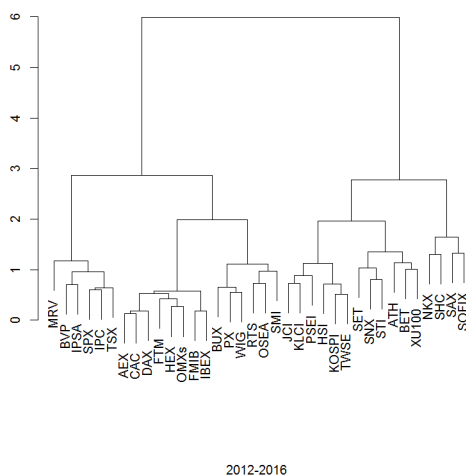
po kryzysie: 2009-2011

Źródło: opracowanie własne

- grupa rynków amerykańskich, wśród których nastąpiło osłabienie wzajemnych powiązań; zauważamy słabo związane ze sobą dwie podgrupy utworzone przez rynek USA i Argentyny oraz rynek Brazylii, Meksyku, Kanady i Chile,
- rynek Grecji i rynek Szwajcarii,
- grupa rynków Europy Wschodniej, które połączyły się w taki sam sposób, jak w okresie przed kryzysem; teraz również w tej grupie zostały utworzone dwie podgrupy rynków; pierwszą tworzą rynek Węgier, Polski i Czech; natomiast drugą – rynek Rosji i rynek Turcji,
- grupa nadal silnie ze sobą powiązanych rynków Europy Zachodniej tworzących te same podgrupy, co poprzednio; do pierwszej należy rynek Holandii, Francji, Niemiec, Włoch i Hiszpanii, do drugiej rynek Wielkiej Brytanii, Finlandii, Szwecji; do tej ostatniej podgrupy dołączył teraz rynek Norwegii,

- grupa rynków azjatyckich, w której utworzyły się podobne podgrupy, jak w okresie przed kryzysem: rynek Indonezji i Malezji, rynek Hongkongu i Singapur, oraz rynek Korei Południowej i Tajwanu,
- rynek Japonii i rynek Filipin.

Ostatni badany podokres to lata 2012–2016, w których obserwujemy wzrost wartości notowań indeksu SPX. Jest to czas względnego spokoju na rynku USA, pomimo że w ostatnich dwóch latach pojawiły się na nim pewne turbulencje. Wyniki grupowania przedstawia rysunek 5.5.



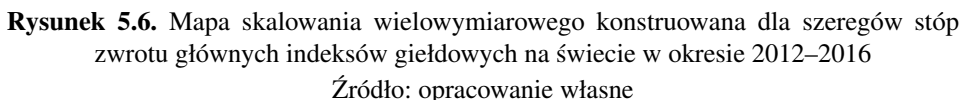
**Rysunek 5.5.** Dendrogram konstruowany dla szeregów stóp zwrotu głównych indeksów giełdowych na świecie w okresie 2012–2016

Źródło: opracowanie własne

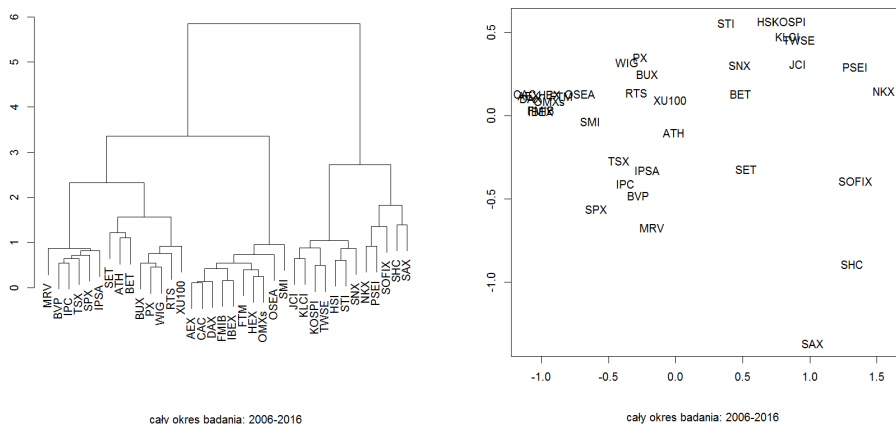
Zauważamy, że rynki nie wykazują już tak silnego zintegrowania, jak w czasie kryzysu i okresach do niego przylegających. Jeśli bowiem dokonamy odcięcia dendrogramu na wysokości  $h = 1,0$ , to otrzymamy aż 15 grup, z których 10 stanowią rynki izolowane, które tym razem pochodzą z Argentyny, Szwajcarii, Tajlandii, Chin, Japonii, Słowacji, Rumunii, Bułgarii, Grecji i Turcji. Utworzone pięć grup stanowią:

- rynki Ameryki, które tworzą dwie podgrupy według ich położenia geograficznego; do pierwszej grupy należy rynek Brazylii, Chile i USA, natomiast do drugiej rynek Kanady i rynek Meksyku,
- rynki Europy Zachodniej, które teraz utworzyły trzy podgrupy: (a) rynek Holandii, Francji i Niemiec, (b) rynek Włoch i rynek Hiszpanii oraz (c) rynek Wielkiej Brytanii, Finlandii oraz Szwecji,

- Podobne skupiska rynków zauważamy na mapie skalowania wielowymiarowego, które przedstawia rysunek 5.6.



110



**Rysunek 5.7.** Dendrogram oraz mapa skalowania wielowymiarowego konstruowane dla szeregów stóp zwrotu głównych indeksów giełdowych na świecie w całym okresie badania  
Źródło: opracowanie własne

Natomiast rynki Europy Zachodniej tworzą skupiska, które w pewnym sensie ilustruje ich położenie na mapie. Zauważamy trzy podgrupy rynków. Do pierwszej należą rynki: Holandii, Francji i Niemiec, do drugiej: rynek Włoch i rynek Hiszpanii, natomiast trzecią utworzyły rynki: Wielkiej Brytanii, Finlandii, Szwecji oraz Norwegii i Szwajcarii. Z kolei rynki azjatyckie połączyły się w dwie podgrupy. Do pierwszej należą rynki: Indonezji, Malezji, Hongkongu, Singapuru, Korei Południowej, Tajwanu oraz Indii, natomiast do drugiej rynek Japonii i rynek Filipin. W wyniku przeprowadzonej analizy wyodrębniono rynki, które przeciętnie są najmniej podobne do pozostałych rynków pod względem ich poziomu współzależności. Są to rynki: Chin, Tajlandii, Grecji, Rumunii, Słowacji oraz Bułgarii.

## Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonej analizy skupień można wywnioskować, że generalnie rynki grupują się według ich położenia geograficznego. Robiąc przegląd podokresów na przestrzeni ostatnich jedenastu lat, zauważamy, że można wyodrębnić główne skupiska rynków, które są niezmiennicze na przestrzeni analizowanych podokresów. Są to: I – grupa rynków amerykańskich, II – grupa rynków Europy Zachodniej, III – grupa rynków Europy Wschodniej, IV – grupa rynków Azji oraz rynki izolowane. Wewnątrz każdego skupiska rynki jednak tworzą pewne grupy i podgrupy, które zmieniają się w zależności od sytuacji ogólnoświatowej.

Przeprowadzone badanie jest również dowodem na to, że w okresie kryzysu rynki są ze sobą silniej powiązane. Efekt ten jest zauważalny w stosunkowo mniejszej liczbie grup wyodrębnionych w trakcie wykonywania tej analizy.

Badanie wykazało również istnienie rynków, które, niezależnie od sytuacji panującej na świecie, są do siebie bardzo podobne pod względem ich poziomu współzależności z innymi rynkami. Są to rynki Europy Zachodniej: Holandii, Francji i Niemiec, rynki Europy Wschodniej: Polski, Czech i Węgier oraz rynki Azji: Indonezji, Malezji, Hongkonku, Korei i Tajwanu.

Świadomość istnienia fluktuacji w grupowaniu się giełd i umiejętność jej prognozowania niewątpliwie jest pomocna w dywersyfikacji ryzyka inwestycji na giełdach papierów wartościowych na świecie.

## **5.2. Analiza zmian jednoczesnych oraz efektów zarażania na wybranych giełdach**

W niniejszym podrozdziale zamieszczone zostaną wyniki badań empirycznych w zakresie zmian jednoczesnych na wybranych giełdach papierów wartościowych. Będą one wyrażone poprzez analizę poziomów współzależności tych giełd.

Natomiast o zarażaniu (*contagion*) giełdy będziemy mówić wówczas, gdy w czasie kryzysu pojawiającego się na innej giełdzie, objawiającym się silnymi spadkami wartości akcji, korelacja pomiędzy stopami zwrotów indeksów giełdowych tych giełd (poziom współzależności) będzie istotnie większa niż w okresie spokoju. Literatura podaje<sup>31</sup>, że okres silniejszej współzależności rynków związany jest zazwyczaj z dużą zmiennością stóp zwrotu akcji, która najczęściej występuje, gdy jest silna przecena akcji na giełdzie.

Jeśli do opisu struktury powiązań pomiędzy stopami zwrotów indeksów giełdowych zastosowany zostanie model Copula-GARCH, to wówczas jako miarę zmian poziomu współzależności giełd wygodnie jest zastosować warunkowy współczynnik korelacji Spearmana, który jest wyrażony wzorem 5.3.

W niniejszym opracowaniu to właśnie warunkowy współczynnik korelacji Spearmanna będzie odzwierciedlał istniejący poziom współzależność giełd.

---

<sup>31</sup> Zagadnienia te poruszali między innymi: Longin i Solnik (1995), Longin i Solnik (2001), Ramchand i Susmel (1998), King i Wadhwani (1990), Chesnay i Jondeau (2001), Ang i Bekaert (2002), Forbes i Chinn (2004), Knif i in. (2005), Boudt i in. (2012), Bauwens i Otranto (2016).



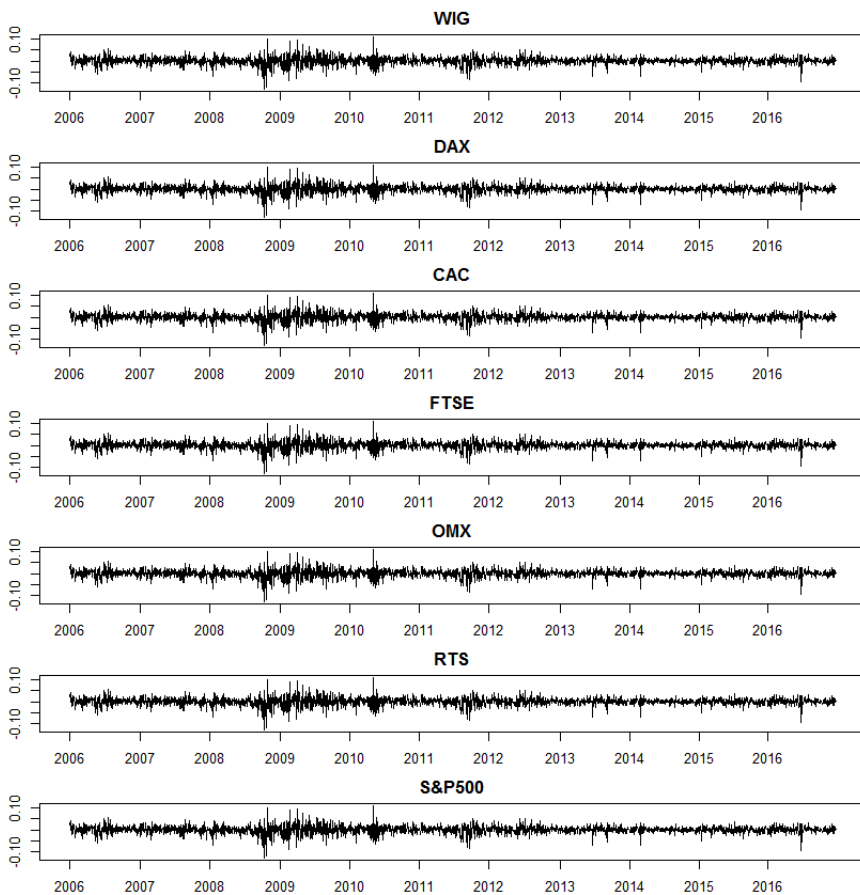
## Dane i ich specyfikacja

Wyniki dotyczące analizy zmian współzależności giełd zostaną przedyskutowane tylko dla relacji giełdy polskiej z innymi giełdami. Pod uwagę wziętoienne kursy zamknięcia indeksów giełdowych z okresu styczeń 2016 – grudzień 2016. Analizowano indeks giełdowy z Polski (indeks WIG), z Niemiec (indeks DAX), z Francji (indeks CAC), z Wielkiej Brytanii (indeks FTSE), ze Szwecji (indeks OMX), z Rosji (indeks RTS) oraz z USA (indeks S&P500).

Giełda USA jest giełdą o największej kapitalizacji na świecie. Niemcy są krajem o najsilniejszej gospodarce w Europie. Francuska gospodarka, na równi z niemiecką, przez lata również starała się pretendować do roli europejskich liderów gospodarczych. Z kolei londyńska giełda papierów wartościowych jest największa w Europie. Natomiast Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie reprezentuje rynki Europy Wschodniej i długo należała do grupy rynków rozwijających się.

Dla porównania w badaniu rozważono również giełdę rosyjską, która należy do rynków rozwijających się, i giełdę szwedzką, która reprezentuje giełdy z rejonu morza Bałtyckiego (OMX Nordic). Rysunek 5.8 przedstawia stopy zwrotów analizowanych indeksów giełdowych. Zauważamy, że szeregi te mają pewne specyficzne własności. Występuje w nich efekt heteroskedastyczności, tj. występują tu skupiska o bardzo wysokiej lub bardzo niskiej zmienności. Szeregi te cechuje również asymetria rozkładu, duża kurtoza oraz istnienie tzw. grubych ogonów.

O istnieniu asymetrii oraz dużej kurtozie świadczą również statystyki opisowe stóp zwrotu, które zostały zaprezentowane w tabeli 5.3. Dla wszystkich analizowanych przypadków mediana jest znacznie większa od średniej arytmetycznej, co może wskazywać na asymetrię rozkładu. W większości przypadków występuje lewostronna asymetria, o czym świadczy ujemna wartość współczynnika skośności. Tylko dla indeksu DAX oraz indeksu OMX współczynnik ten jest dodatni. Tylko dla stóp zwrotu indeksu OMX odnotowano dodatnią wartość tego współczynnika (0,012). Kurtoza jest bardzo duża i waha się od 5,428 (dla giełdy polskiej) do 12,817 (dla giełdy rosyjskiej). Odchylenie standardowe jest stosunkowo duże i waha się od 1,241% (dla giełdy w USA) do 2,781% (dla giełdy w Rosji). GPW w Warszawie zajmuje trzecią pozycję (po Rosji i Szwecji) w zróżnicowaniu dziennych stóp zwrotu (odchylenie standardowe wyniosło tu 1,815%).



**Rysunek 5.8.** Wahania stóp zwrotu wybranych indeksów giełdowych

Źródło: opracowanie własne

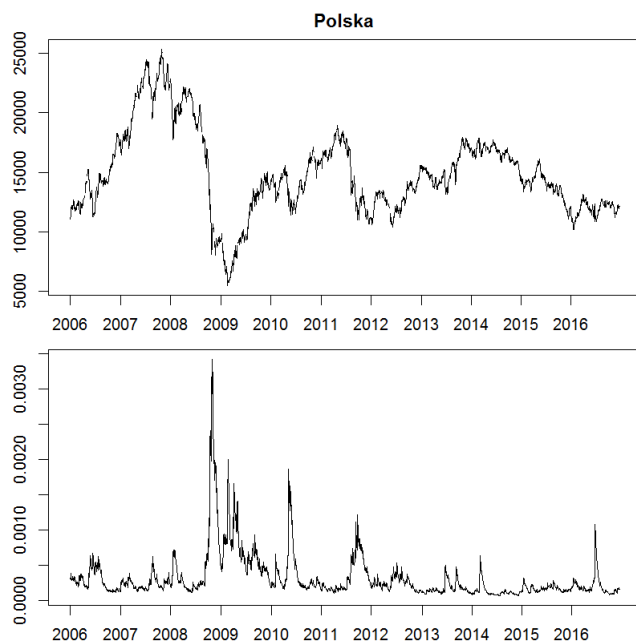
**Tabela 5.3.** Statystyki opisowe dla dziennych stóp zwrotu indeksów giełdowych z danych krajów w latach 2006–2016 (średnia, mediana, odchylenie standardowe i zakres zostały podane w procentach)

| Kraj        | średnia | mediana | odch. stand. | zakres | skośność | kurtoza |
|-------------|---------|---------|--------------|--------|----------|---------|
| Polska      | 0,003   | 0,086   | 1,815        | 24,643 | −0,547   | 5,428   |
| Niemcy      | 0,021   | 0,073   | 1,652        | 23,517 | −0,023   | 7,502   |
| Francja     | −0,004  | 0,038   | 1,706        | 24,044 | −0,102   | 6,875   |
| W. Brytania | 0,013   | 0,061   | 1,448        | 25,295 | −0,995   | 10,765  |
| Szwecja     | 0,011   | 0,045   | 1,854        | 25,066 | 0,012    | 5,938   |
| Rosja       | −0,027  | 0,057   | 2,781        | 55,575 | −0,288   | 12,817  |
| USA         | 0,020   | 0,054   | 1,241        | 20,426 | −0,312   | 11,307  |

W tablicy została podana średnia arytmetyczna, mediana, odchylenie standardowe, skośność i kurtoza obliczona dla dziennych stóp zwrotu indeksów giełdowych reprezentujących giełdę danego kraju

Źródło: opracowanie własne

Zakres dziennych stóp zwrotu jest na podobnym poziomie prawie na wszystkich giełdach. Jedynie na giełdzie rosyjskiej zakres jest bardzo duży i wynosi 55,575%. Najmniejszy zakres dziennych stóp zwrotu odnotowano na giełdzie amerykańskiej (20,425%). Na rysunku 5.9 przedstawiono dzienne notowania kursu zamknięcia indeksu WIG (panel górny) oraz warunkową wariancję stóp zwrotu wyznaczoną z modelu GARCH (1,1) (panel dolny).



**Rysunek 5.9.** Indeks WIG (wyrażony w dolarach) (panel górny) oraz warunkowa wariancja stóp zwrotu dla tego indeksu wyznaczona z modelu GARCH (panel dolny) w okresie 2006–2016

Źródło: opracowanie własne

Analizując rysunek 5.9 zauważamy, że skoki warunkowej wariancji stóp zwrotu związane są najczęściej z okresami silnych spadków indeksu WIG. Na przestrzeni analizowanego czasu istnieje kilka takich okresów, w których warunkowa wariancja była wyjątkowo duża. Do drugiej połowy 2008 roku wahania warunkowej wariancji były dość znaczne, największa zmienność na giełdzie wystąpiła w okresie kryzysu finansowego, od drugiej połowy 2008 roku<sup>32</sup> do początku roku 2009.

<sup>32</sup> W drugiej połowie 2008 roku czwarty co do wielkości bank inwestycyjny Lehman Brothers, po próbie uzyskania pomocy od banku centralnego USA, ogłosił swoją upadłość.

Kolejne okresy bardzo dużej zmienności przypadają na rok 2010, drugą połowę roku 2011 oraz drugą połowę roku 2016. W latach od 2012 do pierwszej połowy 2016 obserwujemy raczej niewielkie i krótkotrwałe wzrosty warunkowej wariancji dziennych stóp zwrotu indeksu WIG.

Do modelowania struktury powiązań pomiędzy dziennymi stopami zwrotu analizowanych indeksów giełdowych wybrano model przełącznikowy Copula-GARCH, w którym przełączenie następowało między kopułami t-Studenta. Celem testowania zgodności rozkładu, procedura opisana w podrozdziale 3.5 została zaadaptowana dla potrzeb testowania modelu dynamicznego. Przeprowadzając stosowne obliczenia, nietrudno pokazać, że dla dwuwymiarowej kopuli warunkowej zadanej równaniem:

$$C(u_t, v_t \mid \mathcal{R}_{t-1}) = \sum_{i=1}^2 P(S_t = i \mid \mathcal{R}_{t-1}) C_i(u, v \mid \mathcal{R}_{t-1}),$$

test zgodności modelu jest równoważny weryfikacji, iż pochodna cząstkowa tej funkcji ma rozkład jednostajny na odcinku  $[0, 1]$ . W podobny sposób model przełącznikowy testowali Changqing i in. (2015). Zatem w badaniu, weryfikując poprawność przyjętego modelu do opisu struktury powiązań pomiędzy rozważanymi indeksami giełdowymi, dla pochodnej cząstkowej odpowiedniej funkcji został przeprowadzony test zgodności z rozkładem jednostajnym na odcinku  $[0, 1]$ . Wyniki testowania przedstawia tablica 5.4.

**Tabela 5.4.** Wartości *p-value* testu weryfikującego model przełącznikowy Copula-GARCH, w którym przełączenie występuje między dwiema kopułami t-Studenta użytego do opisu dziennych stóp zwrotu indeksów giełdowych w latach 2006–2016

| Kraj        | Polska | Niemcy | Francja | W. Brytania | Szwecja | Rosja | USA   |
|-------------|--------|--------|---------|-------------|---------|-------|-------|
| Polska      | –      | 0.283  | 0.503   | 0.170       | 0.261   | 0.782 | 0.052 |
| Niemcy      |        | –      | 0.225   | 0.059       | 0.530   | 0.361 | 0.013 |
| Francja     |        |        | –       | 0.148       | 0.333   | 0.352 | 0.014 |
| W. Brytania |        |        |         | –           | 0.457   | 0.270 | 0.027 |
| Szwecja     |        |        |         |             | –       | 0.679 | 0.097 |
| Rosja       |        |        |         |             |         | –     | 0.074 |
| USA         |        |        |         |             |         |       | –     |

Źródło: opracowanie własne

Uzyskane rezultaty potwierdziły słuszność wyboru modelu przełącznikowego z dwiema kopułami t-Studenta. Prawie dla wszystkich par, zwłaszcza tych, w których występuje indeks z GPW w Warszawie, uzyskane *p-value* było

zdecydowanie wyższe niż zakładane 5%. Tylko dla relacji giełdy amerykańskiej z giełdą niemiecką, francuską i brytyjską testowanie przeprowadzono na poziomie istotności 1%.

### Analiza poziomów współzależności GPW z innymi giełdami

Zmiana w czasie poziomu współzależności giełd jest mierzona warunkowym współczynnikiem korelacji Spearmana, który wyznaczono z przełącznikowego modelu Copula-GARCH zastosowanego do opisu struktury powiązań pomiędzy dwoma finansowymi szeregami czasowymi utworzonymi z dziennych stóp zwrotu analizowanych indeksów. Warunkowy współczynnik korelacji Spearmana jest obliczony według wzoru 5.3. Należy zwrócić uwagę na fakt, że z własności modelu Copula-GARCH wynika, że w ten sposób obliczany warunkowy współczynnik korelacji jest niezależny od zmienności stóp zwrotu.

W użytym przełącznikowym modelu Copula-GARCH przełączenie występuje pomiędzy kopułami t-Studenta. Wartości ocen nieznanymi parametrów tego modelu Copula-GARCH prezentuje tablica 5.5. Pierwsze dwie kolumny przedstawiają oszacowania współczynników korelacji będące parametrami kopuli t-Studenta odpowiednio w pierwszym ( $\rho_1$ ) i drugim ( $\rho_2$ ) stanie. Kolejne dwie kolumny –  $p_{11}$  i  $p_{22}$  – to prawdopodobieństwo pozostania odpowiednio w stanie pierwszym lub drugim.

**Tabela 5.5.** Oszacowania parametrów przełącznikowego modelu Copula-GARCH, w którym przełączeniu podlegają dwie kopule t-Studenta, zastosowanego do opisu struktury powiązań pomiędzy dziennymi stopami zwrotu indeksu WIG a indeksami giełdowymi pochodzącymi z innych krajów

| Kraj            | $\rho_1$ | $\rho_2$ | $p_{11}$ | $p_{22}$ | $d_{11}$ | $d_{22}$ |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Niemcy          | 0,81     | 0,45     | 0,89     | 0,92     | 9        | 12,5     |
| Francja         | 0,78     | 0,46     | 0,88     | 0,89     | 8        | 9        |
| Wielka Brytania | 0,71     | 0,41     | 0,96     | 0,94     | 25       | 16,6     |
| Szwecja         | 0,79     | 0,49     | 0,89     | 0,94     | 9        | 16,6     |
| Rosja           | 0,73     | 0,36     | 0,98     | 0,97     | 50       | 33       |
| USA             | 0,64     | 0,26     | 0,90     | 0,95     | 10       | 20       |

Pierwsze dwie kolumny to wartości ocen współczynników korelacji będące parametrami kopuli t-Studenta, kolejne dwie oznaczają prawdopodobieństwo pozostania w pierwszym i drugim stanie, ostatnie kolumny podają średni czas przebywania w reżimie pierwszym oraz średni czas przebywania w reżimie drugim

Źródło: opracowanie własne

Ostatnie dwie kolumny przedstawiają średni czas (wyrażony w dniach) przebywania w tych stanach (odpowiednio w stanie pierwszym i w stanie drugim). Stan pierwszy będziemy utożsamiać z silną współzależnością analizowanych giełd, natomiast stan drugi – ze słabszą.

Analizując wyniki tabeli 5.5 zauważamy, że w stanie silnej współzależności polska giełda najmocniej jest związana z giełdą niemiecką, dla której współczynnik korelacji<sup>33</sup> pomiędzy stopami zwrotu indeksów WIG i DAX wynosi 0,81 i najslabiej z giełdą amerykańską, gdzie współczynnik korelacji pomiędzy stopami zwrotu indeksów WIG i S&P 500 wynosi 0,64. Z pozostałymi giełdami Europy współczynniki korelacji w tym stanie odpowiednio wynoszą: 0,79 (z giełdą Szwecji), 0,64 (z giełdą Francji), 0,71 (z giełdą Wielkiej Brytanii) oraz 0,73 (z giełdą Rosji).

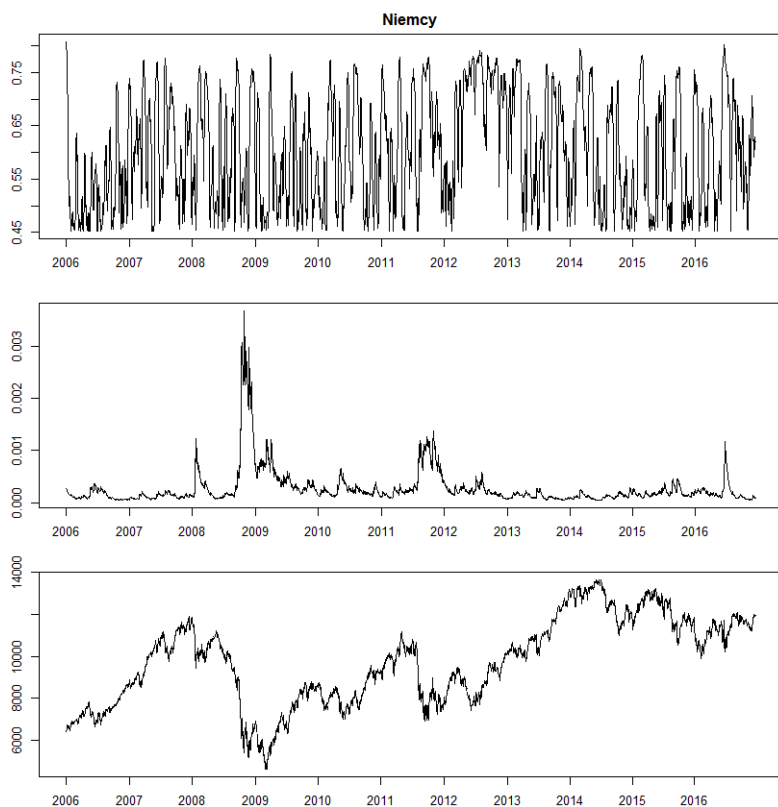
W stanie drugim poziom współzależności giełd jest zdecydowanie niższy. Współczynnik korelacji pomiędzy stopami zwrotu indeksu WIG i indeksu giełdy amerykańskiej wynosi tylko 0,26. Współczynnik ten wyznaczony dla stóp zwrotu WIG-u i stóp zwrotu indeksu giełdy rosyjskiej jest również stosunkowo niski (0,36). Silniejsze związki zauważamy z giełdami Europy Zachodniej. I tak na przykład współczynnik korelacji ze stopami zwrotu indeksu giełdy niemieckiej wynosi 0,45, ze stopami zwrotu indeksu giełdy francuskiej przyjmuje wartość 0,46, ze stopami zwrotu indeksu giełdy brytyjskiej 0,41, natomiast ze stopami zwrotu indeksu giełdy szwedzkiej współczynnik korelacji wynosi 0,49.

Aby zobrazować zmianę w czasie poziomu współzależności giełd, dla każdej chwili  $t$  oszacowano wartość warunkowej korelacji Spearmana, która została wyznaczona z modelu przełącznikowego pomiędzy kopułami t-Studenta (wzór 5.3). Dyskusję rozpoczniemy od analizy wzajemnej relacji pomiędzy giełdą polską i giełdą niemiecką. Rysunek 5.10 przedstawia dzienne wartości warunkowej korelacji Spearmana (panel górny), warunkową wariancję dziennych stóp zwrotu indeksu giełdowego Niemiec wyznaczoną z modelu GARCH (1,1) (panel środkowy) oraz dzienne notowania kursów zamknięcia (skorygowane o wartość dolara amerykańskiego) indeksu DAX (panel dolny).

Analizując wykres warunkowej korelacji Spearmana w czasie zauważamy, że w okresie przed kryzysem w roku 2008 występowały bardzo duże i częste wahania wartości tego współczynnika, trudno jednak w tym okresie zauważyć

<sup>33</sup> W całej monografii, w miejscu w którym podawany jest współczynnik korelacji, mamy na myśli wartość jego estymatora.

występującą prawidłowość pomiędzy zachowaniem dziennych stóp zwrotu indeksów i wartościami warunkowej korelacji Spearmana. Natomiast w drugiej połowie 2008 roku, gdy widoczny jest wzrost zmienności stóp zwrotu na obu rynkach, zauważamy krótkotrwały wzrost poziomu współzależności tych giełd. Najdłużej utrzymujące się wysokie wartości warunkowej korelacji Spearmana przypadają na dwa okresy: drugą połowę 2011 roku i okres od początku do końca roku 2012. W pierwszym okresie możemy odnotować również wzrost warunkowej wariancji stóp zwrotu, nie jest on jednak tak duży, jak po upadku Banku Lehmann. Natomiast w drugim okresie wysoki poziom współzależności giełd niekoniecznie ma odbicie w bardzo dużej zmienności stóp zwrotu, jednak analizując panel dolny, zauważamy w tym czasie spadek notowań indeksu DAX.



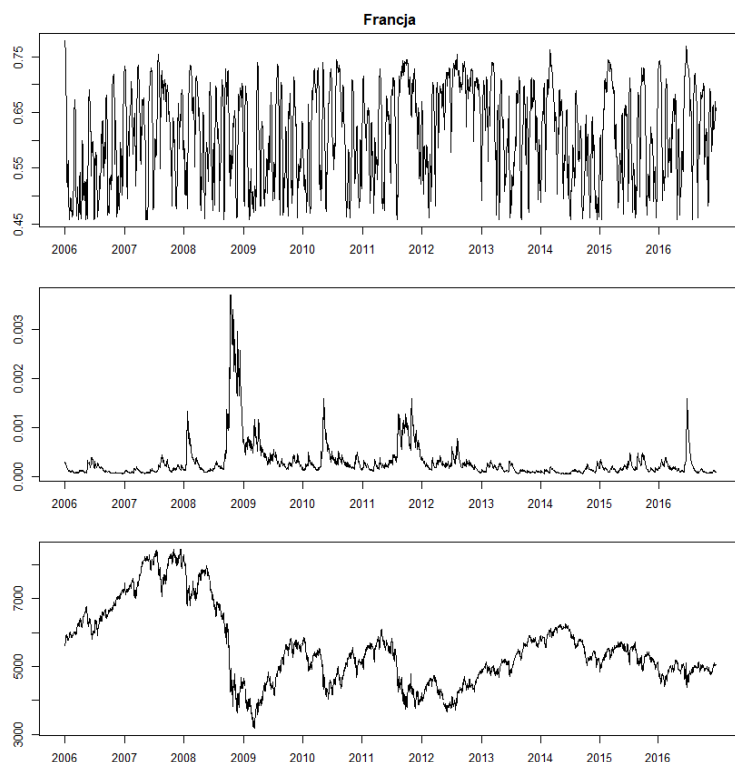
**Rysunek 5.10.** Oszacowania warunkowej korelacji Spearmana pomiędzy stopami zwrotu indeksu WIG i indeksu giełdy niemieckiej (panel górny), warunkowa wariancja dziennych stóp zwrotu indeksu DAX wyznaczona z modelu GARCH (panel środkowy), indeks DAX wyrażony w dolarach (panel dolny)

Źródło: opracowanie własne

Kolejny duży skok warunkowej wariancji przypada na drugą połowę 2016 roku, czyli okres związany z „Brexit”-em. W tym czasie również obserwujemy wzrost wartości warunkowej korelacji Spearmana.

Wydaje się zatem, że na wzrost poziomu współzależności polskiej giełdy z giełdą niemiecką mniejsze znaczenie miał światowy kryzys finansowy, który się rozpoczął po upadku Banku Lehmann, niż kryzys fiskalny w strefie euro. W pierwszym przypadku bowiem zanotowano jedynie niewielki i krótkotrwały wzrost warunkowego współczynnika korelacji Spearmana, natomiast w drugim przypadku – stan silnej współzależności utrzymywał się przez dłuższy czas. Efekt referendum w sprawie „Brexit”-u utrzymywał się też raczej krótko.

Podobny rezultat uzyskano analizując wyniki uzyskane z badania relacji giełdy polskiej z giełdą Francji, który przedstawia rysunek 5.11.



**Rysunek 5.11.** Oszacowania warunkowej korelacji Spearmana pomiędzy stopami zwrotu indeksu WIG i indeksu giełdy francuskiej (panel górny), warunkowa wariancja dziennych stóp zwrotu indeksu CAC wyznaczona z modelu GARCH (panel środkowy), indeks CAC wyrażony w dolarach (panel dolny)

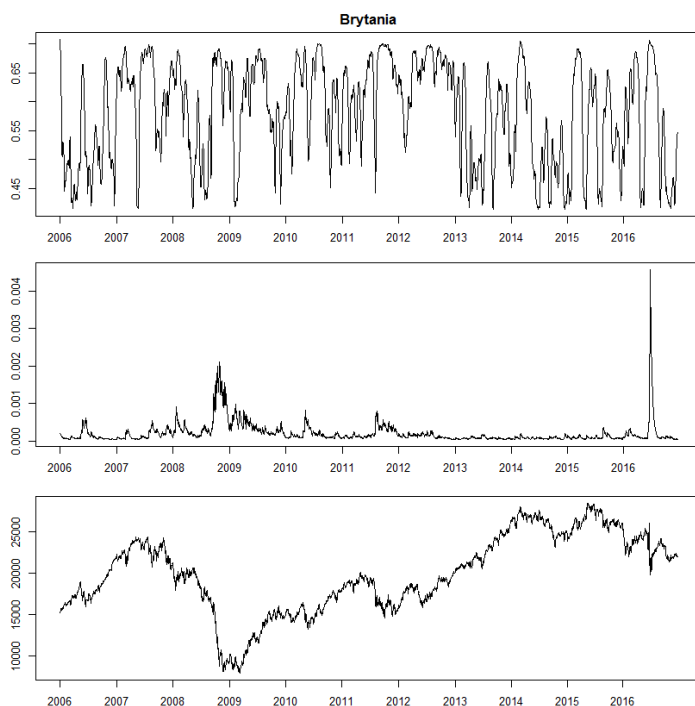
Źródło: opracowanie własne



W przeciwieństwie jednak do poprzedniego przypadku, w okresie, który przyjmuje się za początek kryzysu (druga połowa 2007 roku), nastąpił wzrost warunkowej korelacji Spearmana, przy czym odnotowano również nieznaczny skok w zmienności stóp zwrotu indeksu CAC odpowiadającej za spadki na giełdzie. Na początku roku 2008 zaobserwowany został skok warunkowej wariancji, który miał swoje odzwierciedlenie w wyższych wartościach warunkowego współczynnika Spearmana. Natomiast bardzo duża zmienność stóp zwrotu przypadająca na okres światowego kryzysu finansowego nie wpłynęła znacząco na wzrost poziomu współzależności tych dwóch giełd. Podobnie jak dla relacji z Niemcami zauważamy tylko krótkotrwały wzrost wartości warunkowej korelacji Spearmana pomiędzy stopami zwrotu rozpatrywanych indeksów giełdowych.

W kolejnych latach skoki warunkowej wariancji stóp zwrotu indeksu giełdowego Francji miały swoje odbicie również w wysokich wartościach warunkowego współczynnika korelacji Spearmana. Długo utrzymujące się wysokie poziomy współzależności tych giełd, podobnie jak w poprzednim przypadku, przypadają na te same dwa okresy, co poprzednio: drugą połowę 2011 roku i prawie cały rok 2012. W pierwszym okresie nastąpił wzrost warunkowej wariancji stóp zwrotu, natomiast w drugim okresie wysoki poziom współzależności giełd odpowiada bardzo niewielkiemu wzrostowi warunkowej wariancji stóp zwrotu. Wzrosty warunkowego współczynnika korelacji Spearmana, przypadające na początek roku 2014 i początek roku 2015, również nie mają odbicia w dużej zmienności stóp zwrotu w tych okresach. Wyraźny wzrost poziomu współzależności giełd w drugiej połowie 2016 roku nastąpił równocześnie ze skokiem warunkowej wariancji stóp zwrotu wywołanym efektem referendum w sprawie „Brexit”-u. Analizując współzależność giełdy polskiej z giełdą brytyjską (rysunek 5.12), zauważamy nieco inny jej charakter niż w poprzednio analizowanych dwóch przypadkach. Różnica dotyczy przede wszystkim przeciętnego czasu przebywania w danym reżimie. (dla relacji z giełdą niemiecką średni czas przebywania w reżimie pierwszym wynosi 9 dni, z giełdą francuską – 8 dni, natomiast w przypadku relacji z giełdą brytyjską czas ten wynosi przeciętnie aż 25 dni.) Jednak same momenty przejścia na wyższy poziom współzależności giełdy polskiej i brytyjskiej pokrywają się mniej więcej z tymi samymi momentami, co w poprzednio analizowanych przypadkach. Zauważamy również, że wzrostowi warunkowej wariancji stóp zwrotu rozważanych indeksów giełdowych towarzyszy wyższa wartość warunkowego współczynnika korelacji Spearmana. Spadki na giełdzie brytyjskiej również mają

odbicie we wzroście poziomu współzależności giełdy polskiej i giełdy brytyjskiej. Jednak istnieją takie okresy, jak na przykład czas od drugiej połowy 2013 do pierwszej połowy 2014 roku czy rok 2015, dla których wysoka wartość warunkowego współczynnika korelacji Spearmana nie odpowiada ani dużej zmienności, ani spadkom akcji na giełdzie.

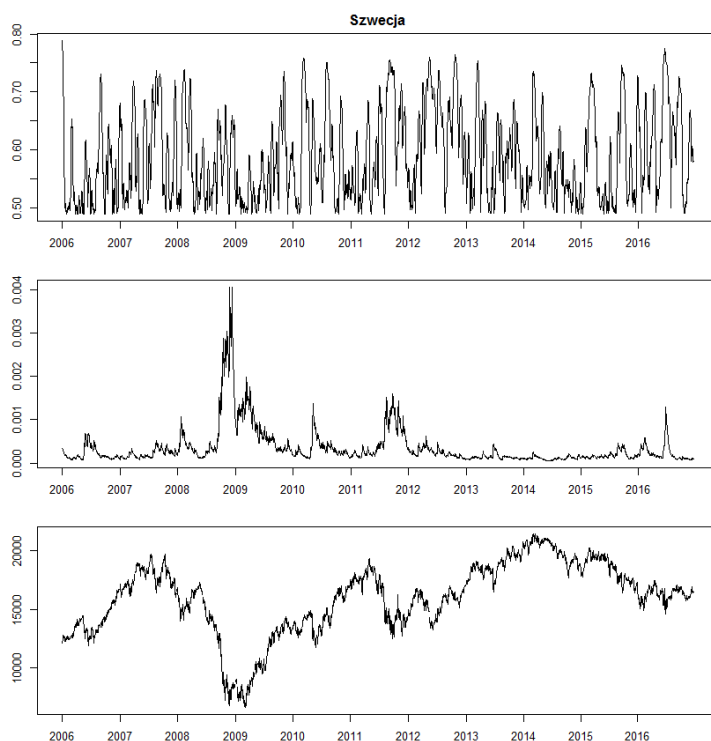


**Rysunek 5.12.** Oszacowania warunkowej korelacji Spearmana pomiędzy stopami zwrotu indeksu WIG i indeksu giełdy Wielkiej Brytanii (panel górny), warunkowa wariancja dziennych stóp zwrotu indeksu FTSE wyznaczona z modelu GARCH (panel środkowy), indeks FTSE wyrażony w dolarach (panel dolny)

Źródło: opracowanie własne

Analizując relację GPW w Warszawie z giełdą szwedzką (rysunek 5.13), zauważamy pewne podobieństwo do jej relacji z giełdą francuską. Widzimy krótkotrwały wzrost warunkowego współczynnika korelacji w czasie kryzysu w 2007 przy stosunkowo niewielkiej zmienności stóp zwrotu obu indeksów w tym okresie oraz jego wzrost początkiem roku 2008, któremu towarzyszy większa zmienność stóp zwrotu na giełdzie szwedzkiej. W okresie po upadku Banku Lehmann również nie zauważamy spektakularnie wysokiego poziomu współzależności obu tych giełd, pomimo istniejącej bardzo dużej zmienności stóp zwrotu

na obu giełdach. W okresie od drugiej połowy 2011 do końca roku 2012 obserwujemy wysokie wartości warunkowego współczynnika korelacji Spearmana, jednak podobnie jak w omawianych wcześniej relacjach, dla wysokiego poziomu współzależności tych giełd w roku 2012 odnotowany został bardzo nieznaczny wzrost warunkowej wariancji. Istnieją również inne takie okresy (początek 2014 roku i początek roku 2015), dla których wysoka wartość warunkowego współczynnika korelacji Spearmana nie odpowiada ani okresom dużej zmienności stóp zwrotu, ani okresom spadków akcji na giełdach.



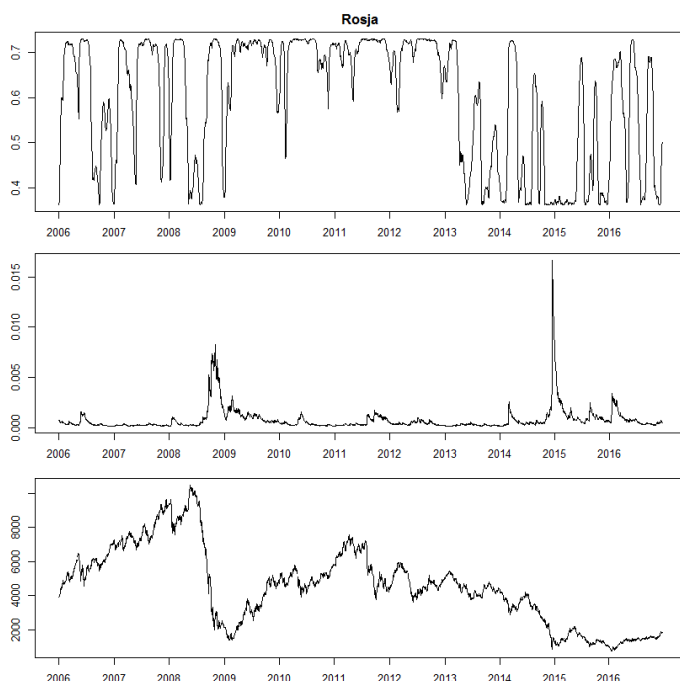
**Rysunek 5.13.** Oszacowania warunkowej korelacji Spearmana pomiędzy stopami zwrotu indeksu WIG i indeksu giełdy Szwecji (panel górny), warunkowa wariancja dziennych stóp zwrotu indeksu OMX wyznaczona z modelu GARCH (panel środkowy), indeks OMX wyrażony w dolarach (panel dolny)

Źródło: opracowanie własne

Do nieco innych wniosków dochodzimy analizując relację GPW w Warszawie z giełdą rosyjską. Wartości warunkowej korelacji Spearmana, wartości warunkowej wariancji dziennych stóp zwrotu indeksu RTS wyznaczonej z modelu GARCH oraz dzienne notowania indeksu RTS (wyrażone w dolarach) przedstawia rysunek 5.14.

Analizując wykres warunkowej korelacji Spearmana, zauważamy na nim wyraźne dwa stany, w których rynki pozostają przez stosunkowo długi okres. Pierwszy stan, charakteryzujący się wyższym poziomem współzależności analizowanych giełd, trwał od 2008 roku aż do 2013 roku. Później nastąpiły okresy osłabienia siły powiązań pomiędzy tymi giełdami, mimo to w ostatnich latach zauważamy powrót do stanu silnej współzależności.

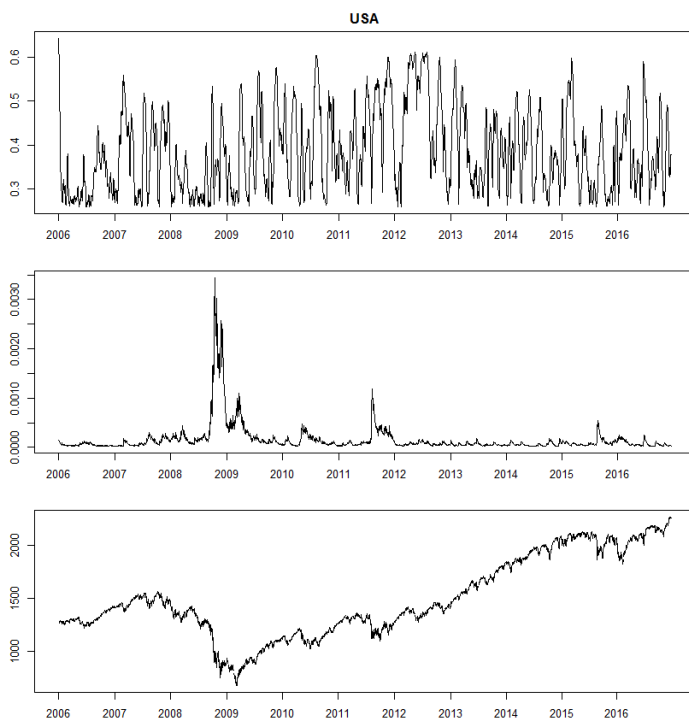
Jednak wysokie poziomy współzależności obu giełd nie mają swojego odbicia ani w wysokiej zmienności stóp zwrotu, ani w spadkach akcji na giełdzie. Co więcej, bardzo dużej warunkowej wariancji stóp zwrotu na giełdzie rosyjskiej, która miała miejsce na przełomie 2015 roku, towarzyszą wyjątkowo niskie wartości warunkowego współczynnika korelacji Spearmana. Zatem w przypadku tych giełd nie zauważamy tej prawidłowości, którą zaobserwowaliśmy na rynkach rozwiniętych, tj. duża zmienność stóp zwrotu ma swoje odbicie w wyższym poziomie współzależności analizowanych giełd.



**Rysunek 5.14.** Oszacowania warunkowej korelacji Spearmana pomiędzy stopami zwrotu indeksu WIG i indeksu giełdy Rosji (panel górny), warunkowa wariancja dziennych stóp zwrotu indeksu RTS wyznaczona z modelu GARCH (panel środkowy), indeks RTS wyrażony w dolarach (panel dolny)

Źródło: opracowanie własne

Na zakończenie zostanie omówiona relacja GPW w Warszawie z giełdą amerykańską (rysunek 5.15). Zauważamy, że zakres wahań warunkowej korelacji Spearmana jest tu nieco niższy, niż dla relacji giełdy polskiej z giełdami Europy Zachodniej. Jednak wiele wniosków uzyskanych z badania dynamiki poziomu współzależności pomiędzy giełdą polską a rozwiniętymi rynkami Europy Zachodniej jest aktualnych również dla tego przypadku. Na przykład dla okresów charakteryzujących się dużą zmiennością stóp zwrotu amerykańskiego indeksu widać wyższe wartości warunkowego współczynnika korelacji Spearmana. W czasie dużej zmienności stóp zwrotu przypadającej na okres drugiej połowy 2008 roku zauważamy bardzo niewielki i krótkotrwały wzrost warunkowego współczynnika korelacji Spearmana.



**Rysunek 5.15.** Oszacowania warunkowej korelacji Spearmana pomiędzy stopami zwrotu indeksu WIG i indeksu giełdy USA (panel górny), warunkowa wariancja dziennych stóp zwrotu indeksu S&P 500 wyznaczona z modelu GARCH (panel środkowy), indeks S&P 500 (panel dolny)

Źródło: opracowanie własne

Okresy: druga połowa 2011 roku i prawie cały rok 2012, podobnie jak w pozostałych analizowanych przykładach, również charakteryzują się wysokimi

wartościami tego współczynnika. Jednak, podobnie jak w przypadku relacji z Europą Zachodnią, w roku 2012 obserwujemy wysokie wartości warunkowego współczynnika korelacji Spearmana oraz jednocześnie niewielką zmienność stóp zwrotu na giełdzie. Wysokie wartości warunkowego współczynnika korelacji Spearmana przypadające na okres przełomu roku 2015/2016 i 2016/2017 nie mają odzwierciedlenia ani w dużej wariancji stóp zwrotu, ani w spadkach na giełdzie amerykańskiej. Badanie było wykonane rozważając stopy zwrotu indeksu WIG oraz indeksu S&P500 z tego samego dnia. Ze względu na istniejące różnice czasowe pomiędzy aktywnością obu tych giełd dodatkowo wykonano analizę, biorąc pod uwagę notowania indeksu WIG z dnia bieżącego oraz notowania indeksu S&P500 z dnia poprzedniego. Okazało się jednak, że wówczas nie utworzyły się dwa reżimy.

## **Podsumowanie**

Analizując powiązania rynku polskiego z rozwiniętymi rynkami Europy Zachodniej i USA zauważamy, że wzrost warunkowej korelacji Spearmana pomiędzy stopami zwrotu rozpatrywanych indeksów giełdowych jest związany między innymi ze skokiem ich warunkowej wariancji. Duża zmienność stóp zwrotu indeksów giełdowych najczęściej jest spowodowana spadkami na giełdzie.

Można zatem przypuszczać, że duża zmienność stóp zwrotu implikuje silną współzależność giełd. Jednak zdarzają się sytuacje, w których silna i długo utrzymująca się wysoka wartość warunkowego współczynnika korelacji Spearmana niekoniecznie związana jest z dużą zmiennością stóp zwrotu lub ze spadkami notowań indeksów giełdowych. Spostrzeżenie to było poczynione dla relacji GPW w Warszawie z giełdami rozwiniętymi. W relacji giełdy polskiej z giełdą rosyjską (rynku rozwijającego się) zauważamy, że duża zmienność akcji lub spadek cen akcji na giełdzie rosyjskiej nie wpływa na poziom współzależności tych giełd.

W relacji giełdy polskiej z rozwiniętymi rynkami Europy Zachodniej i USA co prawda duża zmienność stóp zwrotu implikuje wyższy poziom współzależności, jednak nie są to jedyne jego determinanty. Jak już wcześniej wspomniano, istnieją okresy, w których wysoki poziom współzależności pomiędzy giełdami nie ma swojego odzwierciedlenia ani we wzroście zmienności stóp zwrotu, ani w spadkach na giełdach. Wydaje się zatem zasadne szukanie innych determinantów, które mają znaczenie dla określenia poziomu współzależności giełd. Tematyka ta będzie poruszona w rozdziale 6.

## Zjawisko zarażania na GPW w Warszawie

Obok analizy zmian jednoczesnych szczególną uwagę zwraca się na efekt zarażania się rynków (*contagion*). Jak zostało pokazane w poprzednim punkcie, w okresie kryzysu giełdy przechodzą na wyższy poziom współzależności. W skutek kryzysu na rynkach finansowych zanikają korzyści z międzynarodowej dywersyfikacji aktywów (Fiszeder 2009). Może się zdarzyć również taka sytuacja, iż giełdy, które zazwyczaj nie są ze sobą ściśle powiązane, w okresie kryzysu stają się bardzo mocno ze sobą skorelowane. Świadomość istnienia tego efektu pozwala na jeszcze lepszą dywersyfikację ryzyka. Dlatego też tematyka zarażania się giełd jest bardzo chętnie podejmowana przez badaczy.

Sam termin „zarażanie” ma wiele definicji. Zazwyczaj przyjmuje się, że zjawisko to dotyczy transmisji kryzysów na rynkach<sup>34</sup>. Zasadniczo jednak pojęcie zarażania odnosi się do rozprzestrzeniania się zaburzeń finansowych z jednego kraju do drugiego. Szeroka definicja zarażania podana przez Bank Światowy (zob: Burzała 2014) mówi, że jest to międzynarodowa transmisja szoków lub ogólnie są to międzynarodowe skutki przepływów kapitałowych, więc może dotyczyć dobrych i złych okresów. Jednak bardzo wąska definicja podana przez Bank Światowy mówi, że z zarażaniem mamy do czynienia tylko wtedy, gdy w czasie kryzysu skorelowanie jest istotnie silniejsze niż w okresie spokoju. Klasyfikację metod badania efektów zarażania podali Cheung i in. (2009). Przegląd wybranych metod zamieszczony jest również w monografii Burzały (2014).

Forbes i Rigobon (2002) wprowadzili pojęcie zarażania jako „znaczący wzrost korelacji pomiędzy giełdami po szoku w jednym kraju (lub grupie krajów)”. W przeciwnym wypadku kontynuacja wysokich poziomów korelacji rynkowej powinna być raczej związana z istniejącą współzależnością rynków.

Przez długi czas podstawą wnioskowania o zjawisku zarażania był współczynnik korelacji liniowej Pearsona (Lee, Kim 1993). Forbes i Rigobon (2002) zwrócili jednak uwagę na fakt, że współczynnik ten jest dodatnią funkcją zmienności i może być przeszacowany w okresie kryzysu. Do badania efektów zarażania zaproponowali więc korektę współczynnika korelacji, która jest niezależna od występowania współzależności czy dużej zmienności na rynkach w okresie kryzysu. Ponadto Forbes i Rigobon (2002) odróżniają efekt zarażania od efektu

---

<sup>34</sup> Dornbusch i in. (2000), Pericoli i Sbracia (2003).

występującej współzależności. Zwrócili uwagę na fakt, że zarażanie jest „znaczącym wzrostem w powiązaniach między rynkami po szoku w jednym kraju (lub grupie krajów)”. W przeciwnym razie kontynuacja wysokich poziomów korelacji rynkowej powinna być raczej uważana za istniejącą współzależność rynków<sup>35</sup>. Do badania efektu zarażania wykorzystywane są również przełącznikowe modele Copula-GARCH, w których dynamikę warunkowego współczynnika korelacji uzyskuje się przez narzucenie autoregresyjnego warunku na parametr, który odpowiada za korelację pomiędzy szeregami czasowymi (Rodriquez 2007, Kenourgios i in. 2011, Changqing i in. 2015).

W poprzednim badaniu przedstawiona została ilustracja zmian jednoczesnych (*comovement*) na badanych giełdach. Pomimo że zauważamy okresy, w których poziom współzależności pomiędzy rynkami był znacznie wyższy, to jednak nie można tu jeszcze mówić o zarażaniu się rynków, a jedynie o zmianach poziomów współzależności.

Celem badania, którego wyniki są zaprezentowane w tej części monografii, jest ilustracja występowania efektów zarażania warszawskiej GPW na skutek wystąpienia szoku na innej giełdzie.

Przeanalizowano cztery przypadki:

1. Upadek banku Lehmann we wrześniu 2008 roku, który rozpoczął kryzys finansowy na świecie.
2. Kryzys finansowy związany z długiem publicznym w państwach członkowskich strefy euro, spowodowany między innymi sytuacją w Grecji, Irlandii, Portugalii i ponownie w Grecji.
3. Kryzys w Rosji spowodowany między innymi wojną na Ukrainie, której początek datuje się na pierwszą połowę 2014 roku.
4. Szok na giełdzie londyńskiej spowodowany wynikiem referendum przeprowadzonym w czerwcu 2016 roku referendum w sprawie wyjścia Wielkiej Brytanii z Unii europejskiej, tzw. „Brexit”.

Analizując zmienność stóp zwrotu indeksów giełdowych FTSE, DAX, CAC, RTS oraz SPX, wyrażoną warunkową wariancją uzyskaną z modelu GARCH (zaprezentowaną na rysunkach od 5.10 do 5.15), zauważamy bardzo duże skoki

---

<sup>35</sup> Durante i Jaworski (2010) skonstruowali metodę pomiaru zarażania wykorzystując własności kopuli. Podejście to było rozwijane w pracach Durante i in. (2013), Durante i Foscolo (2013), Durante i in. (2014). Metodę tę przyjęli Czapkiewicz i Wójtowicz (2017) do badania efektów zarażania pomiędzy rynkami Polski, Niemiec i Austrii.



jej wartości w okresach, w których wystąpiła sytuacja kryzysowa. Jak już wspomniano w poprzednim podrozdziale duża zmienność stóp zwrotu jest wynikiem dużych spadków cen akcji<sup>36</sup>.

Dla każdego kraju wszystkie wartości warunkowej wariancji zostały uporządkowane rosnąco. Za wartość progową przyjęto odpowiedni kwartył uporządkowanych rosnąco wartości warunkowej wariancji. Jako okres, w którym wystąpił szok na giełdzie, przyjmujemy ten przedział czasowy, w którym warunkowa wariancja przyjmowała wartości większe od progowej.

Aby uniezależnić się od innych zdarzeń, rozważono okresy, w których wystąpił tylko jeden szok. Analizowane okresy obejmowały dane z dwóch lub trzech lat. Dla USA pod uwagę wzięto okres od stycznia 2007 do grudnia 2009, dla Niemiec i Francji rozważono dwa okresy: od stycznia 2010 do grudnia 2012 oraz od stycznia 2012 do końca roku 2014, dla Rosji analizowano okres od stycznia 2014 do końca roku 2015, natomiast dla Wielkiej Brytanii – okres od stycznia 2015 do końca roku 2016<sup>37</sup>. Następnie zbadano relację GPW w Warszawie z tą giełdą, na której wystąpił kryzys. Celem była weryfikacja, czy w okresie gwałtownych spadków cen wywołanych kryzysem korelacja stóp zwrotu indeksów z obu tych giełd jest istotnie większa niż w okresie spokoju na rynkach akcji.

W celu zbadania efektu zarażania wykorzystano model przełącznikowy Copula-GARCH, w którym przełączeniu podlegają dwie kopule t-Studenta ze współczynnikami korelacji równymi odpowiednio  $\rho_1$  oraz  $\rho_2$ . W tym modelu przełącznikowym przyjęto dwa stany Markowa. Jeden stan był utożsamiany z okresem kryzysu, natomiast drugi – z okresem równowagi na giełdach.

Efekt zarażania weryfikowano porównując dwa modele: ze stałym współczynnikiem korelacji, tj. modelu, w którym  $\rho_1 = \rho_2$  oraz modelu, w którym istnieją dwa różne współczynniki korelacji liniowej. Do testowania hipotezy zerowej zakładającej, że te dwa modele są porównywalne, użyto statystyki:

$$LM = 2(\ell_1(\theta_1) - \ell_2(\theta_2)). \quad (5.5)$$

Występujące we wzorze wyrażenia  $\ell_1(\theta_1)$  oraz  $\ell_2(\theta_2)$  oznaczają wartości funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z dwoma współczynnikami

<sup>36</sup> Rozkład stóp zwrotu charakteryzuje lewostronna skośność, zatem duża zmienność jest bardziej prawdopodobna przy silnych spadkach niż przy silnych wzrostach.

<sup>37</sup> Zamierzeniem autorki był dobór okresów o zbliżonej długości, tak aby wnioski z badania uniezależnić od rozmiaru próby.

korelacji oraz dla modelu z jednym współczynnikiem korelacji. Dyskusja dotycząca zasad i własności tego testu była przedstawiona w podrozdziale 4.6. Wyniki przeprowadzonego badania ilustruje tablica 5.6.

**Tabela 5.6.** Oceny parametrów przełącznikowego modelu Copula-GARCH, w którym przełączeniu podlegają dwie kopule t-Studenta, zastosowanego do opisu struktury powiązań pomiędzy stopą zwrotu indeksu WIG, a stopą zwrotu indeksu giełdy, na której wystąpił szok oraz wartość statystyki LM i odpowiadająca jej wartość *p-value*.

|                                                 | $\rho_1$ | $\rho_2$ | <i>LM</i> | <i>p-value</i> |
|-------------------------------------------------|----------|----------|-----------|----------------|
| USA<br>styczeń 2007 – styczeń 2010              | 0,614    | 0,290    | 2.611     | 0.106          |
| Niemcy<br>czerwiec 2009 – styczeń 2012          | 0,769    | 0,504    | 4.420     | 0.036          |
| styczeń 2012 – grudzień 2014                    | 0,807    | 0,334    | 32.058    | 0.000          |
| Francja<br>czerwiec 2009 – styczeń 2012         | 0,699    | 0,425    | 3.635     | 0.057          |
| styczeń 2012 – grudzień 2014                    | 0,776    | 0,180    | 31.183    | 0.000          |
| Wielka Brytania<br>styczeń 2015 – grudzień 2016 | 0,762    | 0,381    | 12.689    | 0.000          |
| Rosja<br>styczeń 2014 – grudzień 2015           | 0,746    | 0,245    | 15.476    | 0.000          |

Kraj, z którego pochodzi giełda, na której wystąpił szok jest podany w tytule każdego panelu; statystyka do testowania hipotezy zerowej, że model z dwoma współczynnikami korelacji jest porównywalny z modelem z jednym współczynnikiem korelacji, to LM opisana wzorem 5.5

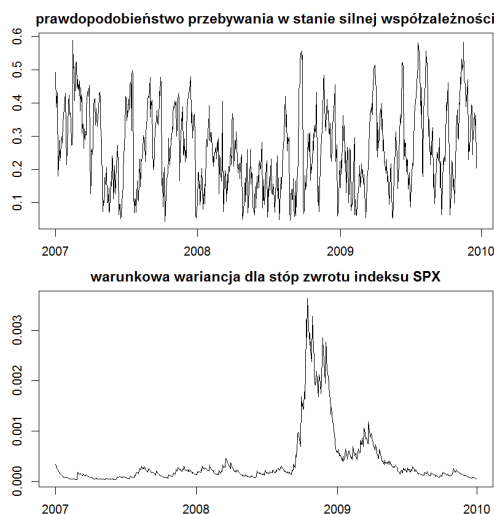
Źródło: opracowanie własne

Analizując wyniki przedstawione w tablicy, zauważamy, że w okresie kryzysu finansowego spowodowanego upadkiem banku Lehmann nie wystąpiło zjawisko zarażania pomiędzy giełdą amerykańską a GPW w Warszawie. Wartość statystyki LM wynosi  $LM = 2,611$  oraz  $p\text{-value} = 0,106$ . Zatem nie wykazano istotnie większej korelacji w okresie kryzysu.

Rysunek 5.16 przedstawia prawdopodobieństwo przebywania w stanie silniejszej współzależności (panel górny) oraz wykres warunkowej wariancji dla stóp zwrotu indeksu SPX (panel dolny). Można zauważyć wzrost prawdopodobieństwa w okresie dużych zawirowań na rynku amerykańskim, jednak jest on zbyt mały, by stwierdzić występowanie efektu zarażania.

Analizując wyniki w tablicy 5.6 zauważamy, że efekt zarażenia polskiej giełdy występuje wówczas, gdy szok i towarzysząca temu zjawisku duża zmienność pojawia się na rozwiniętej giełdzie w Europie. Niemniej nie każda duża

zmienność na tej giełdzie jest jednakowo odczuwalna przez naszą giełdę. Przykładem jest okres przypadający na drugą połowę roku 2011. Na giełdzie niemieckiej oraz francuskiej zauważamy bardzo duże wartości warunkowej wariancji stóp zwrotu indeksów giełdowych. Przeprowadzając test porównujący dwa modele, uzyskujemy stosunkowo niskie wartości statystyk LM oraz odpowiadające im wartości  $p\text{-value} > 0.01$  (dla Niemiec  $LM = 4.420$  oraz  $p\text{-value} = 0,036$ ; dla Francji  $LM = 3.635$  oraz  $p\text{-value} = 0.057$ ). Zatem na poziomie istotności 1% nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku efektu zarażania. Z drugiej strony efekt ten jest mocno zauważalny, jeśli rozważymy okres od stycznia 2012 roku do grudnia 2014. Wówczas wysokie statystyki LM oraz  $p\text{-value} = 0.000$  są dowodem na wystąpienia efektu zarażania na skutek dużej zmienności stóp zwrotu około roku 2012.

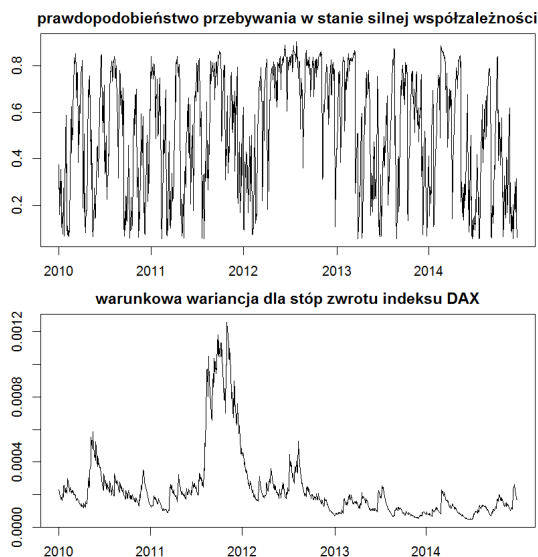


**Rysunek 5.16.** Prawdopodobieństwo przebywania w stanie dużej korelacji stóp zwrotu indeksów S&P 500 oraz WIG (panel górny) oraz wykres warunkowej wariancji dla stóp zwrotu indeksu S&P 500 (panel dolny)

Źródło: opracowanie własne

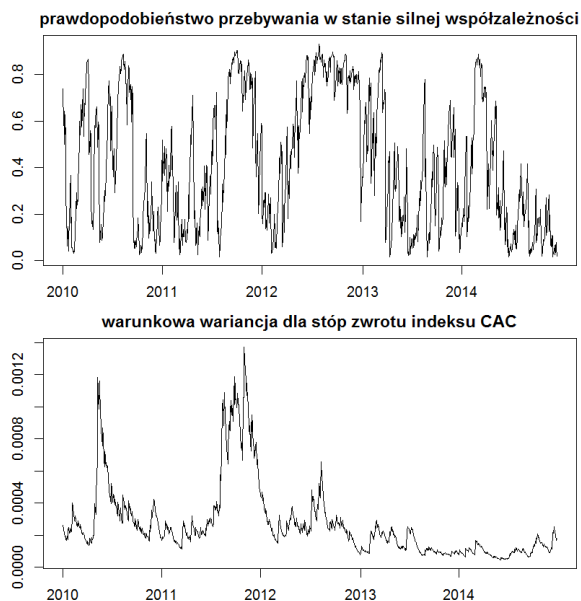
Analizując wykresy 5.17 oraz 5.18 zauważamy, że w tym okresie wysokie wartości prawdopodobieństwa przebywania w stanie dużej korelacji odpowiadają dużej zmienności stóp zwrotu indeksów giełdowych Niemiec i Francji.

Kolejno analizując wyniki w tablicy 5.6 zauważamy, że również dla relacji giełdy polskiej z giełdą rosyjską uzyskano wysoką wartość statystyki LM ( $LM = 15.476$  oraz  $p\text{-value} = 0.000$ ). Fakt ten może sugerować zarażenie giełdy polskiej negatywnym bodźcem pojawiającym się na giełdzie rosyjskiej.



**Rysunek 5.17.** Prawdopodobieństwo przebywania w stanie dużej korelacji stóp zwrotu indeksów DAX i WIG (panel górny) oraz wykres warunkowej wariancji dla stóp zwrotu indeksu DAX (panel dolny)

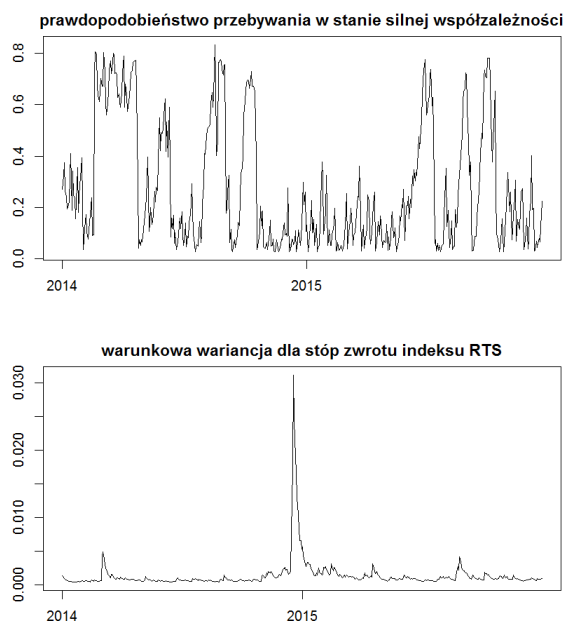
Źródło: opracowanie własne



**Rysunek 5.18.** Prawdopodobieństwo przebywania w stanie dużej korelacji stóp zwrotu indeksów CAC i WIG (panel górny) oraz wykres warunkowej wariancji dla stóp zwrotu indeksu CAC (panel dolny)

Źródło: opracowanie własne

Jednak analizując rysunek 5.19, zauważamy, że w okresie bardzo dużej zmienności na rynku rosyjskim prawdopodobieństwo przebywania w stanie z dużą korelacją jest bardzo małe. Zatem dla tej relacji nie zauważono efektu zarażania, jeśli jako jego definicję przyjmiemy istotny wzrost korelacji pomiędzy stopami zwrotu indeksów giełdowych. Ten istotny spadek poziomu współzależności pomiędzy tymi giełdami może być tłumaczony faktem, iż w czasie kryzysu na giełdzie rosyjskiej są wycofywane pieniądze z giełdy rosyjskiej przez inwestorów, którzy inwestują również na GPW w Warszawie.

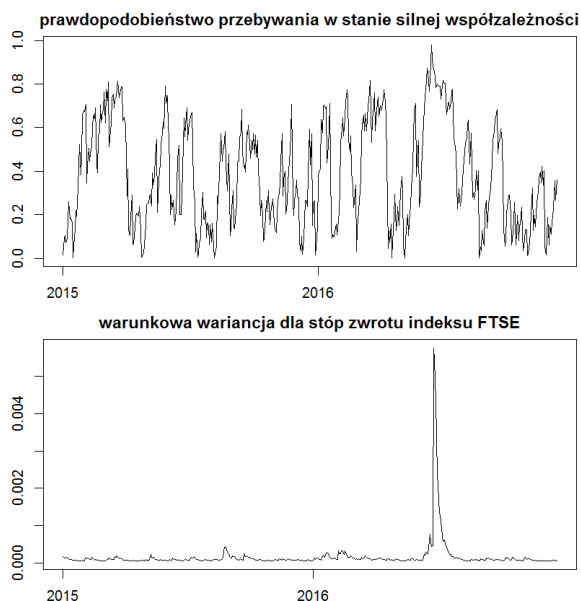


**Rysunek 5.19.** Prawdopodobieństwo przebywania w stanie dużej korelacji stóp zwrotu indeksów RTS i WIG (panel górny) oraz wykres warunkowej wariancji dla stóp zwrotu indeksu RTS (panel dolny)

Źródło: opracowanie własne

Na zakończenie dyskusji przeanalizowana zostanie korelacja pomiędzy giełdą polską oraz giełdą brytyjską. Wartość statystyki  $LM = 12.689$  oraz  $p\text{-value} = 0.000$ , które prezentuje tablica 5.6, sugerują, że giełda polska została zarażona w wyniku zawirowań na giełdzie brytyjskiej.

Analizując wykresy przedstawione na rysunku 5.20, zauważamy, że w czasie zawirowań na giełdzie brytyjskiej na skutek referendum dotyczącego „Brexit’-u, znacząco rośnie prawdopodobieństwo przebywania w stanie z dużą korelacją.



**Rysunek 5.20.** Prawdopodobieństwo przebywania w stanie dużej korelacji stóp zwrotu indeksów FTSE i WIG w Warszawie (panel górny) oraz wykres warunkowej wariancji dla stóp zwrotu indeksu FTSE (panel dolny)

Źródło: opracowanie własne

## Podsumowanie

Reasumując, na GPW w Warszawie są odczuwalne gwałtowne zawirowania występujące na europejskich rynkach rozwiniętych. W sytuacji gdy na danej giełdzie występują bardzo silne spadki, którym towarzyszy bardzo duża zmienność stóp zwrotu, istotnie wzrasta korelacja pomiędzy stopami zwrotu indeksu giełdy warszawskiej z indeksem giełdy, na której wystąpił negatywny bodziec.

Efektu tego możemy nie odczuwać w relacji giełdy polskiej i innej giełdy, która również należy do grupy rynków rozwijających się. Na przykład w relacji giełdy polskiej i rosyjskiej zauważono odwrotną prawidłowość, czyli spadek poziomu współzależności na skutek zawirowań na giełdzie rosyjskiej. Nie odnotowano również efektu zarażenia na skutek kryzysu finansowego między giełdą amerykańską a giełdą polską.

Na uwagę zasługuje fakt, że w przypadku relacji giełdy polskiej z giełdami niemiecką oraz francuską nie każdy negatywny bodziec, który pojawił się na rynku niemieckim lub francuskim, miał swoje odbicie w istotnym wzroście współczynnika korelacji pomiędzy stopami zwrotu indeksu WIG a indeksu DAX lub CAC.

### 5.3. Analiza zmiany struktury powiązań GPW z innymi giełdami

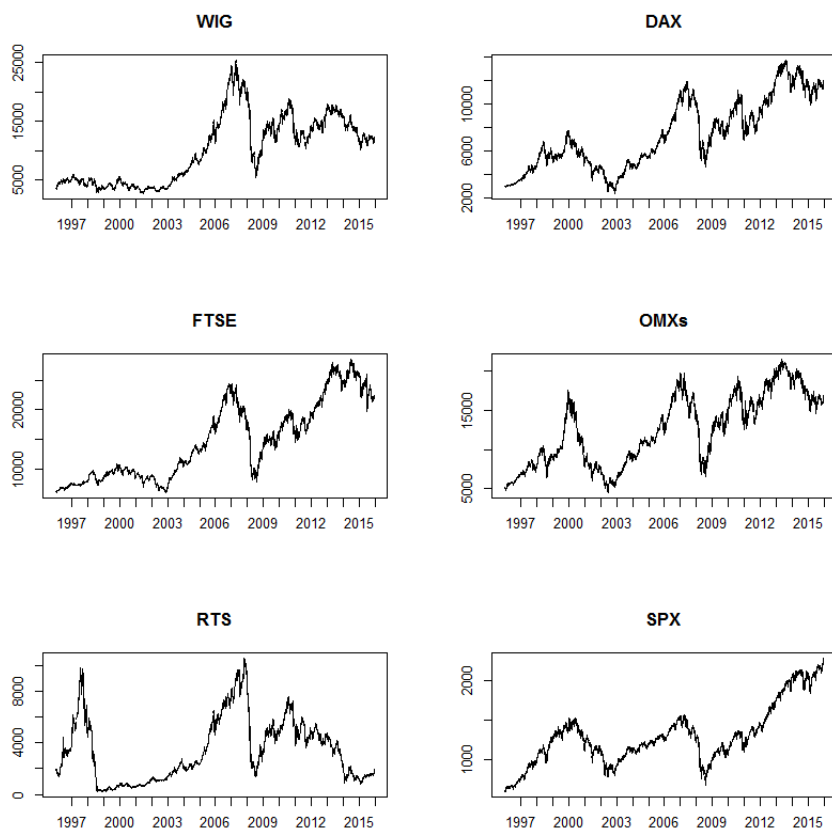
W podrozdziale tym zostaną przedstawione wyniki badań ilustrujące zmiany struktury powiązań GPW z rozwiniętymi giełdami Europy Zachodniej, USA i Rosji. Tym razem pod uwagę wzięto dłuższy czas niż w poprzednim badaniu, czyli od stycznia 1997 do grudnia 2006 roku. Rysunek 5.21 przedstawia dzienne kursy zamknięcia rozpatrywanych indeksów giełdowych w okresie od stycznia 1997 roku do końca roku 2016<sup>38</sup>. Można jednak zauważyć, że w pewnych okresach notowania rozpatrywanych indeksów są do siebie podobne. W okolicach 2008 roku uwidacznia się silny spadek tych notowań spowodowany kryzysem finansowym, po czym od roku 2009, na giełdach Europy Zachodniej oraz na giełdzie USA, widzimy mocne odbicie w wartościach notowań rozważanych indeksów giełdowych. Natomiast na giełdzie rosyjskiej, po krótkotrwałym trendzie wzrostowym w roku 2009, poziom notowań indeksu RTS powrócił do poziomu z okresu kryzysu finansowego. Również na warszawskiej giełdzie papierów wartościowych odbicie po kryzysie finansowym jest dużo słabsze niż w Niemczech, w Wielkiej Brytanii, w Szwecji i w USA.

Kolejnym etapem prowadzonych badań była analiza struktury powiązań pomiędzy warszawską giełdą, reprezentowaną przez indeks WIG, a innymi giełdami reprezentowanymi przez indeksy, których notowania zawiera rysunek 5.21 (oraz indeks CAC).

Do opisu struktury powiązań pomiędzy indeksami giełdowymi ponownie zastosowano przełącznikowy model Copula-GARCH. Ze względu na inny okres badania ponownie przeprowadzono analizę wyboru kopuli, które były uwzględnione w konstrukcji modelu przełącznikowego. Pod uwagę wzięto model, w którym przełączeniu podlegają dwie kopule normalne, dwie kopule t-Studenta oraz kopule normalna i Joe-Claytona. Wybór modelu zweryfikowano odpowiednimi testami, analogicznymi jak w przypadku analiz w krótszym horyzoncie czasowym. To znaczy, że do testowania rozkładów brzegowych zastosowano procedurę Diebolda (1998), natomiast dobór kopul do modelu zweryfikowano testem, który jest modyfikacją procedury testowania opisanej w podrozdziale 3.5.

---

<sup>38</sup> Na rysunku 5.21 nie uwzględniono notowań indeksu giełdy francuskiej, gdyż wahania tych notowań są prawie identyczne jak na giełdzie niemieckiej.



**Rysunek 5.21.** Dienne notowania indeksów giełdowych w okresie od 1996 do 2016 roku, kolejno dla giełdy: z Polski, z Niemiec, z Wielkiej Brytanii, ze Szwecji, z Rosji i z USA; indeksy te zostały wyrażone w dolarach

Źródło: opracowanie własne

Ponieważ przeprowadzony test zgodności nie dał jednoznacznego wyniku, zastosowano test porównujący modele z różnymi kopulami. W tym celu użyto testu Vuonga, który został opisany w podrozdziale 4.6. W konstrukcji modelu z dwoma reżimami brały udział różne kopule (które występują w pakiecie „VineCopula” w programie R).

W następnym kroku rozważono model, w którym przełączeniu podlegają trzy kopule Gaussa. W celu estymacji nieznanymi parametrów modelu zastosowano algorytm EM opisany w podrozdziale 4.2. Następnie najlepszy model z dwoma reżimami porównano z modelem z trzema reżimami, w tym celu stosując statystykę Vuonga, dla modeli niezagnieżdżonych (lub modeli częściowo pokrywających się), opisaną w podrozdziale 4.6.



Tabela 5.7 przedstawia wartości estymatorów nieznanych parametrów modelu kopul Gaussa dla modelu przełącznikowego Copula-GARCH sterowanego ukrytym procesem Markowa z trzema reżimami konstruowanego dla relacji GPW w Warszawie z innymi giełdami.

**Tabela 5.7.** Wartości estymatorów parametrów kopul Gaussa dla modelu przełącznikowego Copula-GARCH sterowanego ukrytym procesem Markowa z trzema reżimami, konstruowanego dla relacji giełdy polskiej z giełdami z innych krajów

| Kraj       | $\rho_1$ | $\rho_2$ | $\rho_3$ | $p\text{-value}$ |
|------------|----------|----------|----------|------------------|
| USA        | 0,141    | 0,251    | 0,670    | 0,000            |
| Rosja      | 0,234    | 0,437    | 0,743    | 0,000            |
| Szwecja    | 0,272    | 0,508    | 0,804    | 0,000            |
| W.Brytania | 0,278    | 0,391    | 0,705    | 0,000            |
| Niemcy     | 0,279    | 0,485    | 0,815    | 0,000            |
| Francja    | 0,277    | 0,484    | 0,783    | 0,000            |

Parametry  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  oznaczają współczynniki korelacji kopuli Gaussa, z których budowano model przełącznikowy; do testowania hipotezy zerowej, że model z trzema stanami Markowa jest porównywalny z modelem z dwoma stanami, zastosowano statystykę *LM* opisaną wzorem (4.39); obliczone wartości  $p\text{-value}$  są przedstawione w ostatniej kolumnie tabeli

Źródło: opracowanie własne

Druga, trzecia i czwarta kolumna w tablicy 5.7 to wartości estymatorów współczynników korelacji będących jednocześnie parametrami kopuli Gaussa, odpowiednio w pierwszym ( $\rho_1$ ), drugim ( $\rho_2$ ) i trzecim ( $\rho_3$ ) reżimie. W ostatniej kolumnie przedstawiono wartości  $p\text{-value}$  dla testu hipotezy zerowej, mówiącej o tym, że model z trzema reżimami jest porównywalny z modelem z dwoma reżimami, przeciwko hipotezie, że model z trzema reżimami jest lepszy. Można zauważyć, że wszystkie wartości  $p\text{-value}$  zdecydowanie przemawiają na korzyść hipotezy alternatywnej.

W okresie badanym relacja giełdy polskiej z innymi giełdami występuje zatem w trzech stanach, reprezentowanych przez słabą, umiarkowaną oraz stosunkowo silną współzależność. W tym badaniu miarą poziomu współzależności w danym reżimie jest współczynnik kopuli Gaussa. Analizując wyniki zamieszczone w tablicy 5.7, zauważamy, że w stanie słabej współzależności, dla wzajemnej relacji giełdy polskiej z giełdą USA, współczynnik ten wynosi 0,141. Dla relacji z giełdami europejskimi waha się on od 0,234 (dla relacji z giełdą Rosji) do 0,279 (dla relacji z giełdą Niemiec).

W drugim reżimie, który charakteryzuje stan umiarkowanej współzależności, współczynnik korelacji wyznaczony dla relacji z giełdą USA wynosi 0,251, natomiast dla relacji z Europą przyjmuje wartości od 0,391 (dla relacji z giełdą Wielkiej Brytanii) do 0,508 (dla relacji z giełdą Szwecji). Natomiast w stanie silnej współzależności współczynnik korelacji jest stosunkowo duży. Najniższy – dla relacji z giełdą USA, wynosi 0,670, natomiast najwyższy – dla relacji z giełdą Niemiec – 0,815. Można zauważyć, że giełda polska jest najmocniej związana z giełdą niemiecką.

W celu zilustrowania dynamiki zmian poziomu współzależności warszawskiej GPW z badanymi rynkami na rysunku 5.22 przedstawiono wykresy zmieniającej się w czasie warunkowej korelacji Spearmana pomiędzy stopami zwrotu indeksu giełdy polskiej i indeksu z giełdy niemieckiej, francuskiej, brytyjskiej, szwedzkiej, rosyjskiej oraz amerykańskiej. Dla porównania przedstawiono również wykres warunkowej korelacji liniowej uzyskanej z modelu DCC (rysunek 5.23).

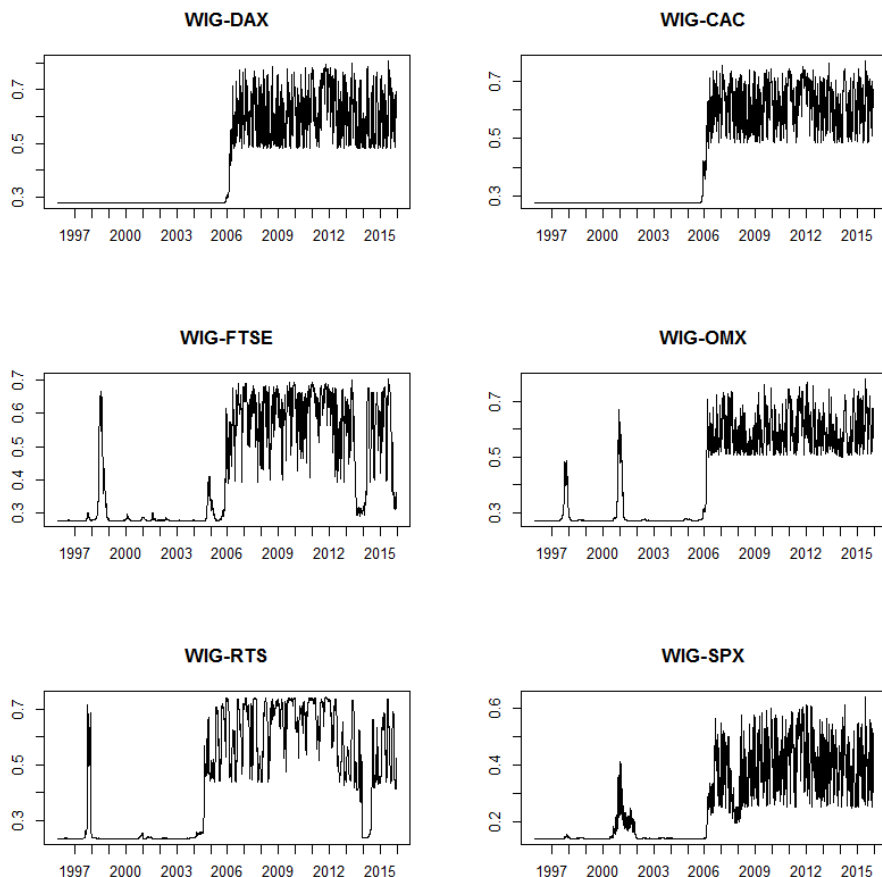
Analizując wykres warunkowej korelacji przedstawiony na rysunku 5.23, zauważamy co prawda jej wzrost około roku 2006, jednak trudno jest jednoznacznie stwierdzić, że w tym okresie nastąpiła zmiana struktury współzależności GPW z innymi giełdami.

Natomiast analizując rysunek 5.22, zauważamy, że po roku 2006 następuje zdecydowany skok wartości warunkowej korelacji Spearmana pomiędzy stopami zwrotu indeksów z giełdy polskiej i z giełdy rozwiniętej z Europy Zachodniej. Zastosowanie modelu z trzema reżimami wyraźnie wskazuje, że przed rokiem 2006 giełda polska była stosunkowo słabiej związana z innymi giełdami<sup>39</sup>.

Analizując współzależność giełdy polskiej z innymi giełdami, wydaje się zatem zasadne przyjąć rok 2006 jako początek bardziej wnikliwych badań. Wówczas, analizując dane po 2006 roku, można rozważyć model tylko z dwoma reżimami.

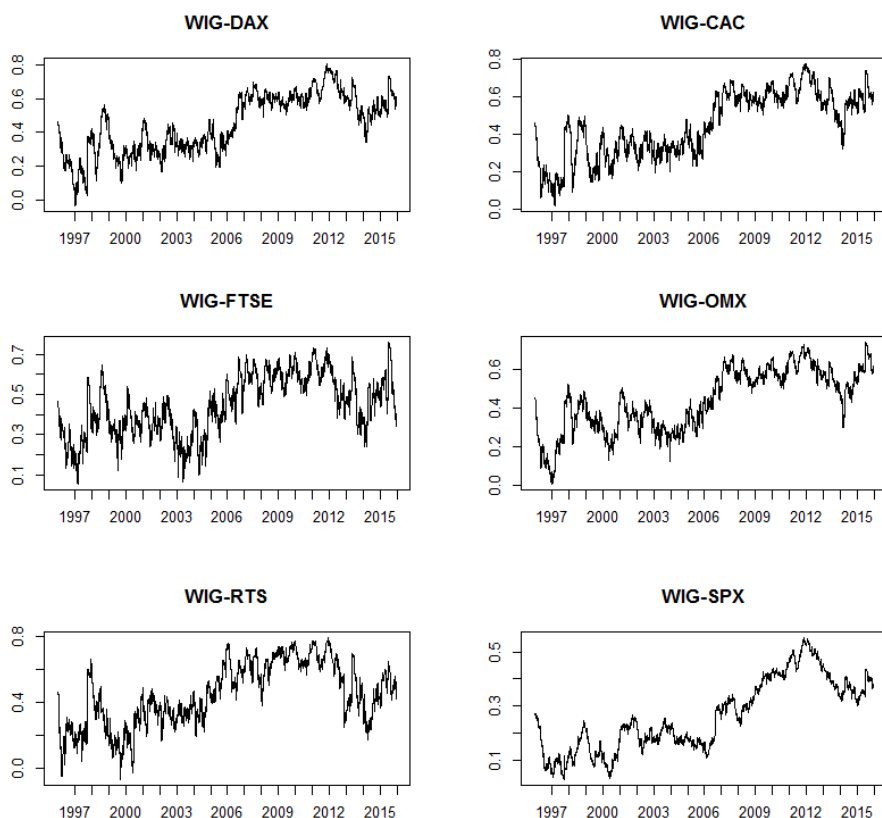
---

<sup>39</sup> Dla Rosji przejście na wyższy stany zależności jest już zauważalny około roku 2005.



**Rysunek 5.22.** Warunkowy współczynnik korelacji Spearmana wyznaczający poziom współzależności warszawskiej GPW z giełdą niemiecką (lewy, górny panel), z giełdą francuską (prawy, górny panel), z giełdą brytyjską (lewy, środkowy panel), z giełdą szwedzką (prawy, środkowy panel), z giełdą rosyjską (lewy, dolny panel), z giełdą amerykańską (prawy, dolny panel), uzyskany z modelu przełącznikowego Copula-GARCH z trzema reżimami w okresie od stycznia 1996 do grudnia 2016 roku

Źródło: opracowanie własne



**Rysunek 5.23.** Warunkowy współczynnik korelacji uzyskany z modelu DCC-GARCH wyznaczający poziom współzależności warszawskiej GPW z giełdą niemiecką (lewy, górny panel), z giełdą francuską (prawy, górny panel), z giełdą brytyjską (lewy, środkowy panel), z giełdą szwedzką (prawy, środkowy panel), z giełdą rosyjską (lewy, dolny panel), z giełdą amerykańską (prawy, dolny panel) w okresie od stycznia 1996 do grudnia 2016 roku

Źródło: opracowanie własne

## Podsumowanie

Zastosowanie modelu z trzema reżimami wykazało jego przydatność do wyznaczenia przybliżonego okresu, po którym warszawska GPW przeszła na wyższy poziom współzależności z rynkami rozwiniętymi. Pomimo że wyniki przeprowadzonych analiz były przedstawione dla kilku losowo wybranych rynków, to w przypadku analizy relacji z innymi rynkami zauważono podobny efekt. Można zatem zdefiniować następujące trzy stany relacji warszawskiej GPW z rynkami rozwiniętymi: pierwszy – stan, w którym rynki finansowe były najslabiej ze sobą powiązane, drugi stan – okres dobrej koniunktury i trzeci stan – okres kryzysu, w którym rynki finansowe są bardzo silnie ze sobą powiązane.

## **6. Determinanty zmian jednoczesnych na wybranych giełdach papierów wartościowych**

Po światowym kryzysie finansowym teoretycy i praktycy zaczęli zwracać większą uwagę nie tylko na istnienie zmian jednoczesnych na międzynarodowych rynkach akcji, ale również na szukanie czynników, które mogą determinować te zmiany. Obszar szukania czynników obejmował nie tylko sfery związane bezpośrednio z finansami, ale również sfery związane z gospodarką.

Von Furstenberg i Jeon (1989), na podstawie danych dziennych stóp zwrotu indeksów giełdowych w latach 1986-1988, analizowali powiązania pomiędzy giełdą USA, Japonii, Wielkiej Brytanii i Niemiec. Biorąc pod uwagę stopy procentowe, kursy wymiany walut oraz ceny ropy i złota badali ich wpływ na wzajemne powiązanie tych giełd. King, Sentana i Wadhwani (1994), analizując finansowe szeregi czasowe utworzone ze stóp zwrotu indeksów giełdowych z szesnastu światowych giełd, doszli do wniosku, że tylko niewielka część zmienności kowariancji pomiędzy nimi może być wyjaśniona poprzez obserwowalne zmienne ekonomiczne. Zmiany struktury powiązań tych rynków są raczej wywołane zmianami zmiennych, które nie są obserwowalne. Karolyi i Stulz (1996) wykryli znaczenie ogłoszeń zmiennych makroekonomicznych na zmiany korelacji liniowej pomiędzy stopami zwrotu japońskich i amerykańskich spółek.

Didier i in. (2010) analizując giełdy USA i 83 innych krajów w czasie kryzysu 2007–2008, stwierdzili, że dla poziomu współzależności (mierzonej współczynnikiem korelacji liniowej pomiędzy stopami zwrotu indeksów giełdowych)

tych giełd ważne były tylko czynniki związane bezpośrednio z finansami, podczas gdy wybrane wskaźniki makroekonomiczne nie miały znaczenia w kontekście tego kryzysu. Mobarek i in. (2016) badając rynki rozwinięte (Australia, Kanada, Francja, Niemcy, Hongkong, Włochy, Japonia, Szwecja, Wielka Brytania i Stany Zjednoczone) oraz rynki wschodzące (Argentyna, Brazylia, Chile, Chiny, Indie, Indonezja, Korea, Malezja, Rosja i Południowa Afryka) w okresach kryzysu i poza nimi zauważyli, że w czasie kryzysu stopa wzrostu PKB, inflacja i stopy procentowe są istotne dla współzależności rynku rozwijającego się z rynkiem rozwiniętym. Nie wykryli natomiast czynników transmisji kryzysu między rynkami rozwiniętymi.

Znaczenie amerykańskich doniesień o makroekonomicznych danych na relację pomiędzy stopami zwrotu, zmiennością i obrotem na trzech europejskich rynkach akcji, we Frankfurcie, w Wiedniu i w Warszawie, były pokazane w pracy Gurgula, Lacha i Wójtowicza (2016).

Gomes i Taamouti (2016) dla Stanów Zjednoczonych oraz Francji, Niemiec, Włoch i Hiszpanii, opierając się na wybranych informacjach z Google Trends związanych z działalnością gospodarczą, skonstruowali czynniki, które reprezentują pewne wskaźniki makroekonomiczne. Tak skonstruowane zmienne wpływają istotnie na kowariancję pomiędzy stopami zwrotu indeksów analizowanych giełd. Czapkiewicz i in. (2018) badali wpływ zmiennych makroekonomicznych, takich jak stopa bezrobocia, indeks CPI, indeks produkcji przemysłowej oraz rentowność 10-letnich obligacji na współzależność giełd z krajów grupy G6.

W wielu pracach pojawia się wątek zmienności na rynkach akcji i jej wpływu na wzajemne powiązania pomiędzy giełdami. Longin i Solnik (1995), badając miesięczne nadwyżkowe stopy zwrotu z wybranych rynków rozwiniętych (od 1960 do 1990 roku) stwierdzili, że korelacja liniowa między tymi stopami zwrotu wzrasta wraz ze wzrostem ich warunkowej zmienności. Jednocześnie informacje o przyszłej zmienności stóp zwrotu mogą zawierać zmienne ekonomiczne, takie jak stopa dywidendy i stopy procentowe.

Ramchand i Susmel (1998) stwierdzili, że związek rynku USA z innymi rynkami jest dwa, trzy razy silniejszy, gdy na rynku amerykańskim panuje duża zmienność. Natomiast między innymi King i Wadhwani (1990), Chesnay i Jondeau (2001), Longin i Solnik (2001), Ang i Bekaert (2002), Forbes i Chinn (2004) i Knif i in. (2005) wykazali, że wzrost poziomów współzależności giełd następuje przede wszystkim w wyniku gwałtownych spadków na tych giełdach.

Autorzy w swoich badaniach analizowali również znaczenie zmienności implikowanej, takiej jak VIX (*volatility index*) na zachowanie się cen akcji na giełdach. Boudt i in. (2012) zbadali znaczenie indeksu zmienności (VIX) w zmienności stóp zwrotu oraz dynamice korelacji największych banków depozytowych USA z okresu 1994–2011. Do swoich badań autorzy wykorzystali przełącznikowy model Copula-GARCH sterowany ukrytym łańcuchem Markowa, w którym macierz przejścia uzależnili od indeksu VIX.

Wpływ indeksu VIX na współzależność pomiędzy wybranymi spółkami należącymi do indeksu S&P 500 (Ford, Hewlett-Packard, IBM) był rozważany w pracy Bauwens, Otranto (2016). Do zbadania tej zależności autorzy wykorzystali kilka modeli, między innymi modyfikację modelu DCC oraz RSDC (Random Switching for Dynamic Correlation<sup>40</sup>). Efekt zmienności rynku amerykańskiego w zachowaniu się stóp zwrotu rynków azjatyckich był badany w pracy Aloy i in. (2013). Rola indeksu VIX w poziomie współzależności kilku wybranych giełd europejskich oraz giełdy amerykańskiej była również badana w pracy Czapkiewicz i Jamera (2016).

Oprócz indeksu VIX, Boudt i in. (2012) zbadali znaczenie indeksu TED spread w zmienności stóp zwrotu oraz dynamice korelacji analizowanych spółek na giełdzie w USA z okresu 1994–2011. Jak podaje literatura przedmiotu, indeks ten ma bardzo duże znaczenie w kształtowaniu się cen na rynkach akcji. Zagadnienie to poruszali w swoich pracach między innymi: Luttmer (1996), Bernardo i Welch (2003), Ashcraft i in. (2010).

W literaturze jest wiele prac również na temat oddziaływania cen surowców na giełdy. Badaniem istnienia relacji długookresowych pomiędzy ceną ropy a cenami akcji w krajach będących głównymi importerami ropy zajmowali się między innymi Sadorsky (1999), Cong i in. (2008), Park i Ratti (2008). Okazało się, że zmiany ceny ropy wywołują tylko krótkotrwały wpływ na zachowanie się akcji na giełdzie. Efekt gwałtownych zmian ceny ropy na rynkach finansowych krajów uzależnionych od ceny tego surowca zauważyli również Miller i Ratti (2009), Cunado i Perez de Garcia (2005). Istnienie dodatnich zależności pomiędzy ceną ropy i ceną akcji wykazali Ferson i Harvey (1994), Huang i in. (1996), Kilian i Park (2009), Apergis i Miller (2009), Narayan i Narayan (2010). Dodatnia zależność występuje głównie w krajach będących

---

<sup>40</sup> Model RSDC opisał w swojej pracy Pelletier (2006).

eksporterami ropy<sup>41</sup>. Temat dotyczący znaczenia ceny miedzi w zachowaniu się cen akcji na giełdzie również był podejmowany w literaturze. Zagadnieniem tym zajmowali się między innymi Jaunky (2103), Sadorsky (2014), Creti i in. (2013), Liu i An (2011) oraz Lee (2013). Ceny surowców, jako czynnik determinujący współzależność giełd, rozważyli między innymi Von Furstenberg i Jeon (1989).

W rozdziale tym przedstawiono wyniki badań na temat determinantów współzależności wybranych giełd. Zostały one podzielone na cztery grupy:

- 1) czynniki reprezentujące zmienność: VIX oraz VSTOXX;
- 2) stopy procentowe, wskaźnik TED oraz rentowność 10-letnich obligacji;
- 3) ceny kontraktów terminowych na wybrane surowce: ropę i miedź;
- 4) wybrane zmienne makroekonomiczne.

Analogicznie jak w podrozdziale 5.2, pod uwagę wziętoienne kursy zamknięcia indeksów giełdowych z okresu od stycznia 2016 do grudnia 2016 roku. Analizowane indeksy giełdowe pochodziły z Polski (indeks WIG), z Niemiec (indeks DAX), z Francji (indeks CAC), z Wielkiej Brytanii (indeks FTSE), ze Szwecji (indeks OMX), z Rosji (indeks RTS) oraz z USA (indeks S&P500). Statystyczny opis tych danych był przedstawiony w podrozdziale 5.2.

W badaniu, w którym analizowano znaczenie rentowności 10-letnich obligacji na poziom współzależności pomiędzy giełdami nie brano pod uwagę Rosji. Natomiast w badaniu dotyczącym roli zmiennych makroekonomicznych, takich jak indeks produkcji, inflacja czy bezrobocie, objęto tylko cztery rynki europejskie: Niemcy, Francję, Wielką Brytanię oraz Polskę. Dane makroekonomiczne pochodzą z bazy Eurostatu, której wytyczne dotyczące metodologii ich opracowywania zapewniają ich porównywalność między krajami.

Wyniki badań dotyczących wpływu indeksu VIX (oraz dla porównania indeksu VSTOXX) na współzależność pomiędzy rynkami Europy jest rozszerzeniem i uzupełnieniem wyników, które zostały opublikowane w pracy Czapkiewicz i Jamera (2016). Również wyniki badań dotyczących roli wybranych zmiennych makroekonomicznych są rozszerzeniem i uzupełnieniem wyników, które zostały opublikowane w pracy Czapkiewicz i in. (2018). Pozostałe wyniki badań są zamieszczone wyłącznie w tej monografii i są wkładem własnym autorki.

---

<sup>41</sup> Problemem zależności pomiędzy ceną ropy oraz cenami akcji zajmowali się również Jones i Kaul (1996), Mohanty i in. (2011), Fayyad i Daly (2011), Hammoudeh i Li (2005), Masih i in. (2011), Ciner (2001), Sadorsky (2001), El Sharif i in. (2005), Malik i Ewing (2009), Akoum i in. (2012), Basher i in. (2012), Rafailidis i Katrakilidis (2014).



## Model i jego weryfikacja

Model dla jednowymiarowych szeregów stóp zwrotu został już przedyskutowany w ostatnim rozdziale. Do opisu stóp zwrotu, które uwzględniają zmiany kursu dolara model AR (1)-GARCH (1,1) z warunkowym rozkładem skośnym t-Studenta okazał się wystarczająco skuteczny. W wyniku poddania go procedurze testowania, która szczegółowo została opisana w podrozdziale 2.5, uzyskano wyniki, które są zaprezentowane w tabelicy 5.2. Natomiast w badaniu, w którym zanalizowano znaczenie zmiennych makroekonomicznych, takich jak indeks produkcji, inflacja czy bezrobocie dla rynków z Europy, stopy zwrotu odpowiednich indeksów giełdowych zostały skorygowane o zmiany kursu euro. Wówczas do opisu takich finansowych szeregów czasowych skuteczniejszy okazał się model AR (1)-GJR-GARCH (1,1) z warunkowym rozkładem t-Studenta. W wyniku poddania go procedurze testowania<sup>42</sup> uzyskano wyniki, które przedstawiono w tabelicy 6.1.

**Tabela 6.1.** Wyniki dla procedury testowania modelu AR (1)-GJR-GARCH (1,1)

| Indeks      | $p(1)$ | $p(2)$ | $p(3)$ | $p(4)$ | $p$   |
|-------------|--------|--------|--------|--------|-------|
| Francja     | 0,269  | 0,999  | 0,147  | 0,996  | 0,223 |
| Niemcy      | 0,405  | 0,97   | 0,436  | 0,976  | 0,153 |
| W. Brytania | 0,359  | 0,011  | 0,53   | 0,035  | 0,524 |
| Polska      | 0,493  | 0,441  | 0,687  | 0,361  | 0,765 |

$p(k)$  – wartości  $p$ -value dla statystyki testującej hipotezę zerową o braku autokorelacji momentów rzędu  $k$  dla przekształconych przez dystrybuantę rozkładu warunkowego reszt modelu;  $p$  – wartość  $p$ -value dla testu Kołmogorowa-Smirnowa dotyczącego zgodności z rozkładem jednostajnym na przedziale  $[0, 1]$

Źródło: opracowanie własne

Na początek, do opisu struktury powiązań pomiędzy stopami zwrotu, został zastosowany przełącznikowy model Copula-GARCH ze stałą macierzą przejścia  $\mathbf{P}$ , gdzie:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{22} & p_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Tak jak w poprzednich badaniach (rozdział 5), użyto modelu przełącznikowego Copula-GARCH, w którym przełączeniu podlegały dwie kopule t-Studenta.

<sup>42</sup> Procedura jest opisana w podrozdziale 2.4.

Następnie zbudowano przełącznikowy model Copula-GARCH z mechanizmem TVPMS, co oznacza, że przełączenie w modelu sterowane jest według ukrytego łańcucha Markowa, w którym macierz przejścia ma postać:

$$\mathbf{P}_t = \begin{bmatrix} \frac{\exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_1)} & 1 - \frac{\exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_1)} \\ 1 - \frac{\exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_2)} & \frac{\exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_2)} \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

gdzie  $\mathbf{x}_{t-1} = [1, f_{1,t-1}, \dots, f_{K,t-1}]^T$  jest wektorem analizowanych czynników obserwowanych w chwili  $t - 1$ . Odpowiednie elementy macierzy  $\mathbf{P}_t$  będą oznaczane symbolem  $p_{ij}(t)$ .

W celu weryfikacji, czy dany czynnik ma znaczenie dla struktury powiązań pomiędzy stopami zwrotów indeksów giełdowych, zostanie wykonany test porównania modelu z mechanizmem TVPMS i modelu ze stałą macierzą przejścia (model MS). Do testowania hipotezy zerowej zakładającej, że dwa modele: przełącznikowy model Copula-GARCH z dynamiczną macierzą przejścia  $\mathbf{P}_t$  oraz przełącznikowy model Copula-GARCH ze stałą macierzą przejścia  $\mathbf{P}$  są porównywalne, użyto statystyki:

$$LM = 2(\ell_1(\boldsymbol{\theta}_1) - \ell_2(\boldsymbol{\theta}_2)). \quad (6.3)$$

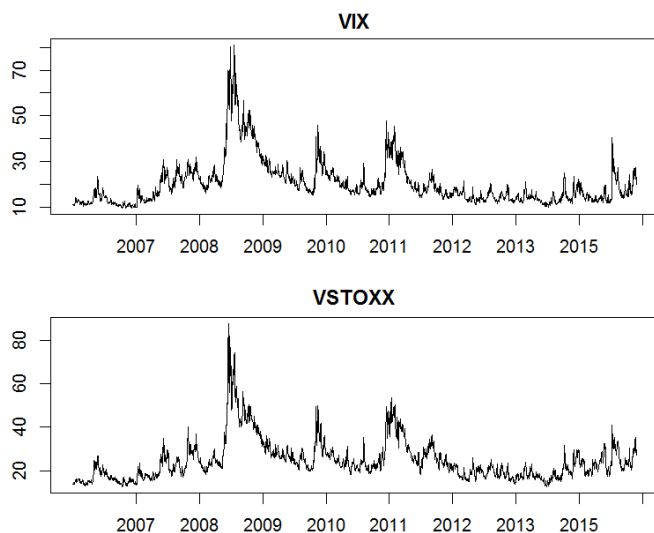
Występujące we wzorze wyrażenia  $\ell_1(\boldsymbol{\theta}_1)$  oraz  $\ell_2(\boldsymbol{\theta}_2)$  oznaczają wartości funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z dynamiczną macierzą przejścia oraz dla modelu ze stałą macierzą przejścia. Dyskusja dotycząca zasad i własności tego testu była przedstawiona w podrozdziale 4.6. Jeśli hipoteza zerowa zostanie odrzucona, wówczas wnioskujemy, że czynniki  $f_1, \dots, f_K$  mają wpływ na prawdopodobieństwa macierzy przejścia  $\mathbf{P}_t$ , a w konsekwencji na strukturę wzajemnych powiązań pomiędzy giełdami. Jeśli teraz jako miarę poziomu współzależności pomiędzy giełdami przyjmiemy warunkowy współczynnik korelacji Spearmana opisany równaniem 5.3, to kierunek wpływu rozważanych czynników na poziom tej współzależności określają odpowiednie składowe wektorów  $\boldsymbol{\beta}_1$  oraz  $\boldsymbol{\beta}_2$ .

## 6.1. Zmienność implikowana

„Indeks zmienności”, zwany również „indeksem strachu”, jest miarą niepewności, która wiąże się z ryzykiem podejmowania działań na danym rynku. Istnieje kilka koncepcji obliczania takiej zmienności. Często wykorzystywana jest

metoda zmienności implikowanej wyznaczonej dla opcji na podstawie ich cen, które są ustalane przez rynek<sup>43</sup>. Mając cenę opcji wycenioną przez rynek, można oszacować zmienność (czyli warunkową wariancję), która odzwierciedla niepewność odczuwaną przez uczestników rynku. Indeksy zmienności oparte na cenie opcji są tworzone na rynkach rozwiniętych, gdzie płynność na rynku opcji jest stosunkowo duża. Najbardziej znanymi indeksami tego typu są VIX oraz VSTOXX.

Indeks VIX został wprowadzony na Chicago Board Option Exchange w 1993 roku. Mierzy on 30-dniową oczekiwaną zmienność implikowaną opcji na indeks S&P500 (SPX) i wskazuje na zmienność generowaną faktycznie przez rynek i jego uczestników. Indeks VIX bardzo szybko stał się główną miarą zmienności całego amerykańskiego rynku. Na podobnej zasadzie jest konstruowany indeks VSTOXX (od roku 2005). Indeks ten bazuje na cenach opcji na Euro STOXX 50. Rysunek 6.1 przedstawia wykres dziennych notowań wartości indeksów VIX oraz VSTOXX w latach 2006–2016.



**Rysunek 6.1.** Wartości indeksu VIX oraz VSTOXX w latach 2006–2016

Źródło: obliczenia własne

Analizując wykresy zauważamy, że okresy, w których występuje bardzo duża zmienność, są takie same na obu rynkach: amerykańskim i europejskim. Jest to dodatkowy argument wskazujący na silne powiązanie nastrojów inwestorów na wszystkich rynkach akcji. Gwałtowne wzrosty tych indeksów pokrywają się z okresami kolejnych fal kryzysu finansowego, który został zapoczątkowany w roku 2008.

<sup>43</sup> Można też zastosować model Blacka-Scholesa (lub bardziej rozbudowany model wyceny opcji).

## Wyniki badań

Przed przystąpieniem do dalszych badań, testem Dickeya-Fullera zweryfikowano stacjonarność szeregów VIX oraz VSTOXX. Po zastosowaniu tego testu otrzymano:  $p\text{-value} = 0,038$  dla zmiennej VIX oraz  $p\text{-value} = 0,022$  dla zmiennej VSTOXX, co w obu przypadkach świadczy o odrzuceniu hipotezy zerowej, zakładającej niestacjonarność analizowanych szeregów czasowych.

Do opisu struktury powiązań pomiędzy szeregami stóp zwrotu wykorzystany został przełącznikowy model Copula-GARCH z dynamiczną macierzą przejścia  $P_t$ , przedstawioną zależnością (6.2), w której wyrażenie  $\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_i$  przyjmuje postać:

$$\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_i = \beta_0^i + \beta_1^i \text{VIX}_{(t-1)}, \quad i = 1, 2. \quad (6.4)$$

Podobne badanie przeprowadzono również dla indeksu VSTOXX, tj.:

$$\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_i = \beta_0^i + \beta_1^i \text{VSTOXX}_{(t-1)}, \quad i = 1, 2. \quad (6.5)$$

Wyniki oszacowania parametrów modelu prezentuje tablica 6.2. Pierwsze dwie kolumny przedstawiają współczynniki korelacji będące parametrem kopuli t-Studenta odpowiednio w pierwszym i drugim stanie. Zakładamy, że stan pierwszy odpowiada za silniejszą korelację, natomiast stan drugi – za słabszą. Kolejne kolumny przedstawiają parametry zależności (6.4), odpowiednio w pierwszym i w drugim stanie.

Wartości  $p\text{-value}$  dla testu istotności składowych wektorów  $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$  zostały wyznaczone numerycznie<sup>44</sup> i są podane w nawiasie pod oceną nieznanymi parametrów. Ostatnia kolumna w tablicy 6.2 podaje wartość statystyki testowej opisanej wzorem (6.3), pod którą zamieszczona została (również w nawiasie) odpowiadająca jej wartość  $p\text{-value}$ .

---

<sup>44</sup> W celu wyznaczenia wariancji estymatorów nieznanymi parametrów obliczono odpowiedni hesjan.

**Tabela 6.2.** Oceny parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od VIX, zastosowanego do opisu struktury powiązań pomiędzy giełdami (w nawiasie podano wartość *p-value*)

| Kraj        | $\rho_1$         | $\rho_2$         | $\beta_0^1$       | $\beta_1^1$       | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$       | <i>LM</i>         |
|-------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| USA         |                  |                  |                   |                   |                  |                   |                   |
| Polska      | 0,628<br>(0,000) | 0,245<br>(0,000) | 2,885<br>(0,001)  | -0,026<br>(0,464) | 3,761<br>(0,000) | -0,04<br>(0,224)  | 1,698<br>(0,428)  |
| Niemcy      | 0,762<br>(0,000) | 0,451<br>(0,000) | -1,334<br>(0,28)  | 0,258<br>(0,002)  | 1,500<br>(0,502) | 0,075<br>(0,392)  | 23,854<br>(0,000) |
| Francja     | 0,776<br>(0,000) | 0,496<br>(0,000) | -2,376<br>(0,108) | 0,321<br>(0,001)  | 1,792<br>(0,229) | 0,077<br>(0,217)  | 29,331<br>(0,000) |
| W. Brytania | 0,686<br>(0,000) | 0,443<br>(0,000) | -4,544<br>(0,218) | 0,592<br>(0,019)  | 4,621<br>(0,016) | 0,004<br>(0,964)  | 18,08<br>(0,000)  |
| Szwecja     | 0,715<br>(0,000) | 0,452<br>(0,000) | -6,144<br>(0,061) | 0,640<br>(0,006)  | 4,257<br>(0,000) | -0,003<br>(0,951) | 19,411<br>(0,000) |
| Rosja       | 0,626<br>(0,000) | 0,267<br>(0,000) | -5,110<br>(0,233) | 0,633<br>(0,021)  | 3,930<br>(0,264) | 0,067<br>(0,595)  | 14,874<br>(0,001) |
| Niemcy      |                  |                  |                   |                   |                  |                   |                   |
| Polska      | 0,807<br>(0,000) | 0,451<br>(0,000) | 2,121<br>(0,004)  | -0,003<br>(0,937) | 2,487<br>(0,000) | -0,005<br>(0,861) | 0,046<br>(0,977)  |
| Francja     | 0,975<br>(0,000) | 0,908<br>(0,000) | 1,990<br>(0,002)  | 0,037<br>(0,137)  | 3,239<br>(0,000) | -0,036<br>(0,078) | 11,926<br>(0,003) |
| W. Brytania | 0,863<br>(0,000) | 0,665<br>(0,000) | 3,236<br>(0,002)  | 0,031<br>(0,999)  | 4,976<br>(0,000) | -0,126<br>(0,023) | 15,326<br>(0,000) |
| Szwecja     | 0,917<br>(0,000) | 0,789<br>(0,000) | 3,176<br>(0,001)  | 0,023<br>(0,575)  | 5,301<br>(0,000) | -0,068<br>(0,042) | 12,977<br>(0,000) |
| Rosja       | 0,646<br>(0,000) | 0,225<br>(0,001) | 4,887<br>(0,000)  | -0,042<br>(0,239) | 3,965<br>(0,000) | -0,056<br>(0,284) | 2,387<br>(0,303)  |
| USA         | 0,762<br>(0,000) | 0,451<br>(0,000) | -1,333<br>(0,281) | 0,258<br>(0,002)  | 1,501<br>(0,502) | 0,075<br>(0,392)  | 23,854<br>(0,000) |
| W. Brytania |                  |                  |                   |                   |                  |                   |                   |
| Polska      | 0,717<br>(0,000) | 0,374<br>(0,000) | 2,902<br>(0,000)  | -0,033<br>(0,273) | 6,333<br>(0,000) | -0,187<br>(0,000) | 17,787<br>(0,000) |
| Niemcy      | 0,864<br>(0,000) | 0,672<br>(0,000) | 3,212<br>(0,001)  | 0,002<br>(0,986)  | 4,439<br>(0,000) | -0,126<br>(0,023) | 15,326<br>(0,000) |
| Francja     | 0,864<br>(0,000) | 0,636<br>(0,000) | -0,044<br>(0,983) | 0,216<br>(0,049)  | 4,797<br>(0,009) | -0,144<br>(0,142) | 27,894<br>(0,000) |
| Szwecja     | 0,837<br>(0,000) | 0,547<br>(0,000) | 0,005<br>(0,997)  | 0,166<br>(0,056)  | 3,463<br>(0,006) | -0,113<br>(0,142) | 27,338<br>(0,000) |
| Rosja       | 0,735<br>(0,000) | 0,369<br>(0,000) | 2,906<br>(0,014)  | 0,032<br>(0,619)  | 4,102<br>(0,000) | -0,033<br>(0,350) | 4,629<br>(0,099)  |
| USA         | 0,686<br>(0,000) | 0,443<br>(0,000) | -4,544<br>(0,218) | 0,592<br>(0,019)  | 4,621<br>(0,016) | 0,004<br>(0,964)  | 18,08<br>(0,000)  |

Tabela 6.2. (cd.)

| Kraj        | $\rho_1$         | $\rho_2$         | $\beta_0^1$       | $\beta_1^1$       | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$       | $LM$              |
|-------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| Polska      |                  |                  |                   |                   |                  |                   |                   |
| Niemcy      | 0,807<br>(0,000) | 0,451<br>(0,000) | 2,121<br>(0,004)  | -0,003<br>(0,937) | 2,487<br>(0,000) | -0,005<br>(0,861) | 0,046<br>(0,977)  |
| Francja     | 0,780<br>(0,000) | 0,458<br>(0,000) | 1,747<br>(0,029)  | 0,011<br>(0,708)  | 2,042<br>(0,017) | 0,001<br>(0,975)  | 0,311<br>(0,856)  |
| W. Brytania | 0,717<br>(0,000) | 0,374<br>(0,000) | 2,902<br>(0,000)  | -0,033<br>(0,273) | 6,333<br>(0,000) | -0,187<br>(0,000) | 17,787<br>(0,000) |
| Szwecja     | 0,785<br>(0,000) | 0,501<br>(0,000) | -0,475<br>(0,684) | 0,155<br>(0,014)  | 1,631<br>(0,11)  | 0,083<br>(0,152)  | 4,308<br>(0,116)  |
| Rosja       | 0,716<br>(0,000) | 0,346<br>(0,000) | 0,285<br>(0,912)  | 0,243<br>(0,192)  | 3,923<br>(0,040) | -0,019<br>(0,871) | 9,699<br>(0,008)  |
| USA         | 0,628<br>(0,000) | 0,245<br>(0,000) | 2,885<br>(0,001)  | -0,026<br>(0,464) | 3,761<br>(0,000) | -0,040<br>(0,224) | 1,697<br>(0,428)  |

Parametry  $\rho_1, \rho_2$  oznaczają współczynniki korelacji kopuli t-Studenta, z których budowano model przełącznikowy; parametry  $\beta_i^j$ , gdzie  $i = 0, 1$ ;  $j = 1, 2$  to współczynniki zależności (6.4) dla prawdopodobieństw pozostania w  $j$ -tym stanie; statystyka dla testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), to:  $LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia

Źródło: opracowanie własne

Na początek przedyskutowane zostaną wyniki dotyczące struktury powiązań giełdy USA z innymi giełdami. W wyniku porównania modelu przełącznikowego z mechanizmem TVPMS i modelem przełącznikowym ze stałą macierzą przejścia, zastosowanych do opisu dwuwymiarowego szeregu czasowego utworzonego ze stóp zwrotu indeksu S&P500 oraz indeksu giełdy europejskiej, otrzymana wartość statystyki testowej LM i odpowiadająca jej wartość  $p$ -value wyraźnie wskazują na odrzucenie hipotezy zerowej mówiącej o tym, że dwa modele są ze sobą porównywalne. W ten sposób został wykazany wpływ indeksu VIX na współzależność pomiędzy badanymi giełdami. Nie został wykazany jedynie wpływ zmienności implikowanej VIX na współzależność giełdy amerykańskiej z giełdą polską. Aby odpowiedzieć na pytanie, jaki jest kierunek wpływu tego indeksu na poziom analizowanej współzależności, należy wziąć pod uwagę istotność parametrów  $\beta_i^j$  ( $i = 1, 2$ ). Jak należało się spodziewać – mając na względzie wcześniejsze dyskusje-wzrost indeksu VIX zwiększa prawdopodobieństwo pozostania w stanie dużej korelacji pomiędzy stopami zwrotów analizowanych indeksów giełdowych.

Dodatknie, statystycznie istotne wartości parametru  $\beta_1^1$  wskazują na fakt, że jeżeli rośnie indeks VIX, to również wzrasta prawdopodobieństwo  $p_{11}(t)$ , a to oznacza wzrost warunkowego współczynnika korelacji Spearmana. Natomiast nie uzyskano statystycznej istotności wpływu tego indeksu na prawdopodobieństwo  $p_{22}(t)$  (parametr  $\beta_1^2$  jest nieistotny), co oznacza, że jeżeli rynki są w stanie równowagi, to zmiana indeksu VIX nie wpływa na rozważaną współzależność. Zatem w relacji giełdy amerykańskiej z rynkami Europy Zachodniej i Rosji indeks zmienności VIX odgrywa znaczącą rolę tylko wówczas, gdy rynki już są w stanie silniejszej współzależności. Niewątpliwie na taki wynik ma wpływ istniejąca różnica czasowa pomiędzy giełdą amerykańską i giełdą europejską.

Inaczej przedstawia się sytuacja, gdy zostaną rozważone dwa rozwinięte rynki pochodzące z Europy Zachodniej. Zauważamy, że dla tych par rynków, dla których statystyka LM i odpowiadająca jej wartość *p-value* wykazały znaczący wpływ indeksu zmienności na badaną współzależność, to zmiana indeksu VIX ma znaczenie wtedy, gdy rynki przebywają w stanie drugim. Badając relację giełdy niemieckiej z rynkami Europy Zachodniej, dla których statystyka LM przyjmuje stosunkowo duże wartości (*p-value* = 0,00), zauważamy występowanie dodatnich wartości estymatorów parametrów  $\beta_1^1$  (parametry okazały się jednak statystycznie nieistotne) oraz ujemne, statystycznie istotne, parametry  $\beta_1^2$ . Natomiast nie odnotowano statystycznie istotnego wpływu wskaźnika VIX na poziom współzależności giełdy niemieckiej z giełdą polską oraz z giełdą rosyjską.

Uzyskane wyniki testu LM dla relacji giełdy w Londynie z giełdami Europy Zachodniej również potwierdzają znaczenie indeksu VIX w poziomie ich współzależności. Zauważamy tu jednak istotne oddziaływania indeksu VIX zarówno na prawdopodobieństwo  $p_{11}(t)$ , jak i  $p_{22}(t)$ . Na przykład dla relacji giełdy brytyjskiej z giełdą niemiecką uzyskano statystycznie istotny parametr  $\beta_1^2$  ( $\beta_1^2 = -0,126$ ), podczas gdy dla relacji giełdy brytyjskiej z giełdą francuską uzyskano statystycznie istotny parametr  $\beta_1^1$  ( $\beta_1^1 = 0,216$ ). Na poziomie istotności 10% istotny również okazał się parametr  $\beta_1^1$  ( $\beta_1^1 = 0,166$ ) w relacji giełdy brytyjskiej z giełdą szwedzką.

Przechodząc teraz do dyskusji na temat wzajemnej relacji GPW w Warszawie z innymi analizowanymi giełdami, zauważamy, że oprócz relacji z giełdą Wielkiej Brytanii, gdzie dla testu LM uzyskano *p-value*  $\leq 0,05$ , nie wykazano znaczenia tego indeksu w relacjach z innymi giełdami. Dla relacji tej istotny okazał się parametr  $\beta_1^2$  ( $\beta_1^2 = -0,187$ ).

W relacji z giełdą rosyjską, pomimo iż odnotowano wartość statystyki  $LM = 4.629$  oraz towarzyszący jej poziom istotności  $p\text{-value} = 0.099$ , parametry  $\beta_1^1$  i  $\beta_1^2$  okazały się nieistotne.

Badanie zostało również przeprowadzone dla indeksu VSTOXX. Wyniki oszacowania parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uwarunkowaną od indeksu VSTOXX, zastosowanego do opisu struktury powiązań pomiędzy stopami zwrotu analizowanych indeksów giełdowych, przedstawione zostały w tablicy 6.3.

**Tabela 6.3.** Oceny parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od VSTOXX, zastosowanego do opisu struktury powiązań pomiędzy giełdami (w nawiasie podano wartość  $p\text{-value}$ )

| Kraj        | $\rho_1$         | $\rho_2$         | $\beta_0^1$       | $\beta_1^1$       | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$       | $LM$              |
|-------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| USA         |                  |                  |                   |                   |                  |                   |                   |
| Polska      | 0,628<br>(0,000) | 0,239<br>(0,000) | 2,510<br>(0,032)  | -0,010<br>(0,816) | 3,948<br>(0,000) | -0,045<br>(0,23)  | 3,245<br>(0,197)  |
| Niemcy      | 0,762<br>(0,000) | 0,491<br>(0,000) | -1,840<br>(0,295) | 0,245<br>(0,013)  | 4,258<br>(0,024) | -0,027<br>(0,584) | 23,486<br>(0,000) |
| Francja     | 0,772<br>(0,000) | 0,496<br>(0,000) | -2,833<br>(0,097) | 0,271<br>(0,001)  | 1,970<br>(0,238) | 0,054<br>(0,319)  | 25,817<br>(0,000) |
| W. Brytania | 0,683<br>(0,000) | 0,409<br>(0,000) | -4,168<br>(0,328) | 0,375<br>(0,089)  | 4,474<br>(0,034) | -0,037<br>(0,522) | 19,14<br>(0,000)  |
| Szwecja     | 0,707<br>(0,000) | 0,449<br>(0,000) | -3,988<br>(0,960) | 0,367<br>(0,003)  | 3,978<br>(0,020) | -0,001<br>(0,983) | 22,371<br>(0,000) |
| Rosja       | 0,623<br>(0,000) | 0,27<br>(0,000)  | -4,987<br>(0,210) | 0,444<br>(0,014)  | 3,399<br>(0,159) | 0,062<br>(0,447)  | 13,531<br>(0,001) |
| Niemcy      |                  |                  |                   |                   |                  |                   |                   |
| Polska      | 0,812<br>(0,000) | 0,458<br>(0,000) | 1,001<br>(0,236)  | 0,043<br>(0,173)  | 2,092<br>(0,003) | 0,014<br>(0,519)  | 2,026<br>(0,363)  |
| Francja     | 0,973<br>(0,000) | 0,890<br>(0,000) | 0,104<br>(0,892)  | 0,090<br>(0,004)  | 1,314<br>(0,111) | 0,006<br>(0,831)  | 58,963<br>(0,000) |
| W. Brytania | 0,866<br>(0,000) | 0,675<br>(0,000) | 2,736<br>(0,087)  | 0,019<br>(0,797)  | 5,719<br>(0,001) | -0,128<br>(0,049) | 17,030<br>(0,000) |
| Szwecja     | 0,916<br>(0,000) | 0,786<br>(0,000) | 1,779<br>(0,129)  | 0,072<br>(0,125)  | 5,153<br>(0,000) | -0,056<br>(0,040) | 14,187<br>(0,001) |
| Rosja       | 0,675<br>(0,000) | 0,256<br>(0,000) | 2,857<br>(0,065)  | 0,052<br>(0,421)  | 3,297<br>(0,000) | -0,008<br>(0,803) | 1,690<br>(0,431)  |
| USA         | 0,761<br>(0,000) | 0,491<br>(0,000) | -1,839<br>(0,295) | 0,245<br>(0,013)  | 4,259<br>(0,023) | -0,027<br>(0,583) | 23,486<br>(0,000) |



Tabela 6.3. (cd.)

|             |                  |                  |                   |                  |                  |                   |                   |
|-------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| W. Brytania |                  |                  |                   |                  |                  |                   |                   |
| Polska      | 0,709<br>(0,000) | 0,380<br>(0,000) | 0,204<br>(0,885)  | 0,106<br>(0,044) | 2,605<br>(0,058) | −0,018<br>(0,690) | 14,219<br>(0,001) |
| Niemcy      | 0,865<br>(0,000) | 0,669<br>(0,000) | 2,251<br>(0,098)  | 0,039<br>(0,523) | 4,987<br>(0,000) | −0,103<br>(0,049) | 16,828<br>(0,000) |
| Francja     | 0,875<br>(0,000) | 0,658<br>(0,000) | 1,178<br>(0,371)  | 0,085<br>(0,144) | 4,675<br>(0,002) | −0,122<br>(0,058) | 26,593<br>(0,000) |
| Szwecja     | 0,843<br>(0,000) | 0,553<br>(0,000) | −0,06<br>(0,963)  | 0,121<br>(0,069) | 2,854<br>(0,024) | −0,062<br>(0,296) | 25,206<br>(0,000) |
| Rosja       | 0,725<br>(0,000) | 0,353<br>(0,000) | 0,894<br>(0,633)  | 0,117<br>(0,203) | 3,841<br>(0,001) | −0,019<br>(0,689) | 9,879<br>(0,007)  |
| USA         | 0,683<br>(0,000) | 0,410<br>(0,000) | −4,177<br>(0,329) | 0,376<br>(0,089) | 4,480<br>(0,034) | −0,037<br>(0,520) | 19,140<br>(0,000) |
| Polska      |                  |                  |                   |                  |                  |                   |                   |
| Niemcy      | 0,813<br>(0,000) | 0,458<br>(0,000) | 1,001<br>(0,236)  | 0,043<br>(0,173) | 2,093<br>(0,003) | 0,014<br>(0,519)  | 2,026<br>(0,363)  |
| Francja     | 0,784<br>(0,000) | 0,462<br>(0,000) | 1,029<br>(0,332)  | 0,037<br>(0,311) | 1,989<br>(0,037) | 0,003<br>(0,915)  | 2,630<br>(0,269)  |
| W. Brytania | 0,709<br>(0,000) | 0,380<br>(0,000) | 0,212<br>(0,880)  | 0,106<br>(0,044) | 2,607<br>(0,058) | −0,018<br>(0,689) | 14,219<br>(0,001) |
| Szwecja     | 0,783<br>(0,000) | 0,501<br>(0,000) | −1,713<br>(0,215) | 0,179<br>(0,004) | 1,468<br>(0,203) | 0,074<br>(0,173)  | 9,505<br>(0,009)  |
| Rosja       | 0,728<br>(0,000) | 0,352<br>(0,000) | 1,551<br>(0,414)  | 0,107<br>(0,256) | 4,440<br>(0,005) | −0,049<br>(0,451) | 9,807<br>(0,007)  |
| USA         | 0,633<br>(0,000) | 0,305<br>(0,000) | −1,991<br>(0,409) | 0,202<br>(0,056) | 2,534<br>(0,125) | 0,056<br>(0,326)  | 3,557<br>(0,169)  |

Parametry  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  oznaczają współczynniki korelacji kopuli t-Studenta, z których budowano model przełącznikowy; parametry  $\beta_i^j$ , gdzie  $i = 0, 1$ ;  $j = 1, 2$  to współczynniki zależności (6.5) dla prawdopodobieństw pozostania w  $j$ -tym stanie; statystyka dla testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), to:  $LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia

Źródło: opracowanie własne

Jeśli porównamy rezultaty przeprowadzonych badań dla indeksu VIX oraz VSTOXX, to uzyskujemy te same wnioski. Oba indeksy w równym stopniu wpływają na współzależność analizowanych giełd. Wyniki dotyczące wpływu indeksu VSTOXX na strukturę powiązań giełdy USA z innymi giełdami obrazują ten sam kierunek wpływu co indeks VIX. Również indeks VSTOXX nie ma istotnego znaczenia dla poziomu współzależności giełdy amerykańskiej z giełdą polską.

Podobne wnioski, co w poprzednim badaniu, uzyskujemy analizując wyniki dotyczące relacji giełdy niemieckiej z rynkami Europy Zachodniej. Dla relacji z giełdą Wielkiej Brytanii i z giełdą Szwecji uzyskano statystycznie nieistotne parametry  $\beta_1^1$  (wartości estymatorów tych parametrów są dodatnie) oraz ujemne, statystycznie istotne, parametry  $\beta_1^2$ . Jedynie dla relacji z giełdą Francji statystycznie istotny okazał się parametr  $\beta_1^1$  ( $\beta_1^1 = 0,090$ ). Nie odnotowano statystycznie istotnego wpływu wskaźnika VSTOXX na poziom współzależności giełdy niemieckiej z giełdą polską oraz z giełdą rosyjską.

Również uzyskane wyniki dotyczące relacji giełdy Wielkiej Brytanii z giełdami Europy Zachodniej niewiele się różnią od wyników z poprzedniego badania. Dla relacji z giełdą niemiecką uzyskano statystycznie istotny parametr  $\beta_1^2$ . Na poziomie istotności 10% również istotny okazał się parametr  $\beta_1^1$  ( $\beta_1^1 = 0,21$ ) w relacji z giełdą szwedzką. W relacji z giełdą rosyjską parametry  $\beta_1^1$  i  $\beta_1^2$  okazały się nieistotne. Jednak – w przeciwieństwie do wcześniejszych rezultatów – dla relacji giełdy brytyjskiej z giełdą francuską uzyskano statystycznie istotny parametr  $\beta_1^2$  ( $\beta_1^1 = -0.122$ ). Ponadto indeks VSTOXX ma istotne znaczenie dla poziomu współzależności giełdy brytyjskiej z giełdą polską, kiedy oba rynki znajdują się w stanie silnej współzależności. Istotny bowiem okazał się parametr  $\beta_1^1$  ( $\beta_1^1 = 0.106$ ).

Indeks VSTOXX, podobnie jak VIX, ma znaczenie dla wzajemnej relacji giełdy polskiej z giełdą brytyjską. Istotny okazał się parametr  $\beta_1^1$  ( $\beta_1^1 = 0.106$ ). Ponadto, wykazano znaczenie indeksu VSTOXX dla wzajemnych relacji giełdy polskiej z giełdą szwedzką, gdzie uzyskana została odpowiednio duża wartość statystyki *LM*. W tej relacji również statystycznie istotny okazał się parametr  $\beta_1^1$ . W relacji z giełdą rosyjską, podobnie jak we wcześniejszym badaniu, pomimo wysokiej wartości statystyki *LM* parametry  $\beta_1^1$  i  $\beta_1^2$  okazały się nieistotne.

Indeksy VIX oraz VSTOXX są silnie ze sobą skorelowane. Współczynnik korelacji liniowej wynosi 0.942. Aby uzyskać jednak odpowiedź na pytanie, który indeks zmienności implikowanej ma większe znaczenie we wzajemnych relacjach rynków, przeprowadzono analizę, w której zarówno indeks VIX, jak i indeks VSTOXX są uwzględnione w modelowaniu struktury powiązań pomiędzy rynkami. Uzyskane wyniki przedstawione zostały w tablicy 6.4). Oba wskaźniki mają porównywalne znaczenie, czego można się było spodziewać ze względu na silną korelację między nimi. Jednakże uwzględnienie w macierzy przejścia obu zmiennych istotnie poprawia model struktury powiązań pomiędzy giełdami dla wszystkich analizowanych par rynków.

**Tabela 6.4.** Oceny parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od VIX oraz VSTOXX, zastosowanego do opisu struktury powiązań pomiędzy giełdami (w nawiasie podano wartość *p-value*)

| Kraj        | $\beta_0^1$       | $\beta_1^1$       | $\beta_2^1$       | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$       | $\beta_2^2$       | <i>LM</i>         |
|-------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| USA         |                   |                   |                   |                  |                   |                   |                   |
| Polska      | 1,354<br>(0,549)  | -0,352<br>(0,029) | 0,303<br>(0,071)  | 4,488<br>(0,079) | -0,143<br>(0,198) | -0,006<br>(0,965) | 10,879<br>(0,028) |
| Niemcy      | -0,001<br>(0,999) | 0,454<br>(0,004)  | -0,206<br>(0,075) | 3,911<br>(0,000) | 0,358<br>(0,006)  | -0,322<br>(0,003) | 31,318<br>(0,000) |
| Francja     | -0,805<br>(0,595) | 0,416<br>(0,018)  | -0,127<br>(0,364) | 4,371<br>(0,001) | 0,158<br>(0,070)  | -0,154<br>(0,063) | 29,771<br>(0,000) |
| W. Brytania | 2,062<br>(0,044)  | -0,242<br>(0,300) | 0,207<br>(0,277)  | 5,24<br>(0,015)  | -0,116<br>(0,421) | -0,035<br>(0,674) | 14,025<br>(0,007) |
| Szwecja     | -6,395<br>(0,373) | 1,629<br>(0,065)  | -0,660<br>(0,11)  | 6,741<br>(0,000) | 0,315<br>(0,462)  | -0,342<br>(0,337) | 20,735<br>(0,000) |
| Rosja       | -5,807<br>(0,334) | 0,604<br>(0,198)  | 0,013<br>(0,968)  | 4,263<br>(0,531) | 0,372<br>(0,209)  | -0,295<br>(0,084) | 16,505<br>(0,002) |
| Niemcy      |                   |                   |                   |                  |                   |                   |                   |
| Polska      | -0,363<br>(0,76)  | -0,255<br>(0,033) | 0,317<br>(0,018)  | 1,477<br>(0,18)  | -0,113<br>(0,373) | 0,143<br>(0,321)  | 10,225<br>(0,037) |
| Francja     | 2,401<br>(0,043)  | 0,142<br>(0,165)  | -0,102<br>(0,368) | 4,258<br>(0,001) | 0,15<br>(0,153)   | -0,193<br>(0,086) | 19,619<br>(0,001) |
| W. Brytania | 1,283<br>(0,256)  | -0,329<br>(0,005) | 0,357<br>(0,008)  | 4,038<br>(0,005) | -0,234<br>(0,081) | 0,147<br>(0,336)  | 23,889<br>(0,000) |
| Szwecja     | -0,911<br>(0,479) | -0,478<br>(0,000) | 0,580<br>(0,000)  | 1,986<br>(0,173) | -0,681<br>(0,002) | 0,649<br>(0,005)  | 25,86<br>(0,000)  |
| Rosja       | 1,057<br>(0,441)  | -0,602<br>(0,002) | 0,618<br>(0,004)  | 2,533<br>(0,003) | -0,681<br>(0,001) | 0,567<br>(0,004)  | 13,112<br>(0,011) |
| USA         | -0,082<br>(0,945) | 0,468<br>(0,004)  | -0,211<br>(0,071) | 3,753<br>(0,000) | 0,367<br>(0,006)  | -0,323<br>(0,004) | 31,38<br>(0,000)  |
| W. Brytania |                   |                   |                   |                  |                   |                   |                   |
| Polska      | 0,653<br>(0,673)  | -0,37<br>(0,013)  | 0,364<br>(0,036)  | 4,511<br>(0,016) | -0,356<br>(0,013) | 0,166<br>(0,313)  | 28,643<br>(0,000) |
| Niemcy      | 1,186<br>(0,3)    | -0,333<br>(0,005) | 0,365<br>(0,008)  | 4,061<br>(0,006) | -0,230<br>(0,087) | 0,142<br>(0,356)  | 23,890<br>(0,000) |
| Francja     | 0,625<br>(0,758)  | -0,151<br>(0,445) | 0,229<br>(0,225)  | 5,194<br>(0,204) | -0,29<br>(0,245)  | 0,093<br>(0,652)  | 28,393<br>(0,000) |
| Szwecja     | 0,717<br>(0,555)  | -0,058<br>(0,664) | 0,124<br>(0,21)   | 4,25<br>(0,016)  | -0,252<br>(0,082) | 0,073<br>(0,519)  | 30,859<br>(0,000) |
| Rosja       | 0,997<br>(0,396)  | -0,248<br>(0,043) | 0,311<br>(0,028)  | 4,56<br>(0,000)  | 0,006<br>(0,953)  | -0,055<br>(0,614) | 16,189<br>(0,003) |
| USA         | 1,700<br>(0,144)  | -0,206<br>(0,108) | 0,194<br>(0,113)  | 4,464<br>(0,029) | -0,079<br>(0,49)  | -0,036<br>(0,64)  | 13,875<br>(0,008) |

**Tabela 6.4.** (cd.)

| Kraj        | $\beta_0^1$       | $\beta_1^1$       | $\beta_2^1$      | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$       | $\beta_2^2$      | $LM$              |
|-------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| Polska      |                   |                   |                  |                  |                   |                  |                   |
| Niemcy      | -0,262<br>(0,827) | -0,243<br>(0,05)  | 0,302<br>(0,031) | 1,553<br>(0,17)  | -0,102<br>(0,444) | 0,13<br>(0,39)   | 10,257<br>(0,036) |
| Francja     | 0,217<br>(0,857)  | -0,137<br>(0,212) | 0,175<br>(0,118) | 2,498<br>(0,023) | 0,067<br>(0,494)  | -0,07<br>(0,492) | 10,784<br>(0,029) |
| W. Brytania | 0,611<br>(0,701)  | -0,373<br>(0,015) | 0,367<br>(0,039) | 4,59<br>(0,016)  | -0,356<br>(0,014) | 0,163<br>(0,33)  | 28,645<br>(0,000) |
| Szwecja     | 0,657<br>(0,558)  | -0,518<br>(0,004) | 0,477<br>(0,01)  | 3,913<br>(0,023) | -0,38<br>(0,074)  | 0,207<br>(0,201) | 16,181<br>(0,003) |
| Rosja       | -1,168<br>(0,825) | -0,008<br>(0,974) | 0,246<br>(0,205) | 0,836<br>(0,893) | -0,182<br>(0,124) | 0,258<br>(0,438) | 12,438<br>(0,014) |
| USA         | 1,445<br>(0,461)  | -0,358<br>(0,016) | 0,305<br>(0,077) | 4,397<br>(0,049) | -0,16<br>(0,156)  | 0,012<br>(0,925) | 10,898<br>(0,028) |

Parametry  $\beta_i^j$ ,  $i = 0, 1, 2$ ;  $j = 1, 2$  to współczynniki zależności dla prawdopodobieństw pozostania w  $j$ -tym stanie;  $\beta_0^j$  – wyraz wolny,  $\beta_1^j$  odpowiada za zmiany indeksu VIX,  $\beta_2^j$  – za zmiany indeksu VSTOXX; statystyka dla testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), to:

$LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia

Źródło: opracowanie własne

## Podsumowanie

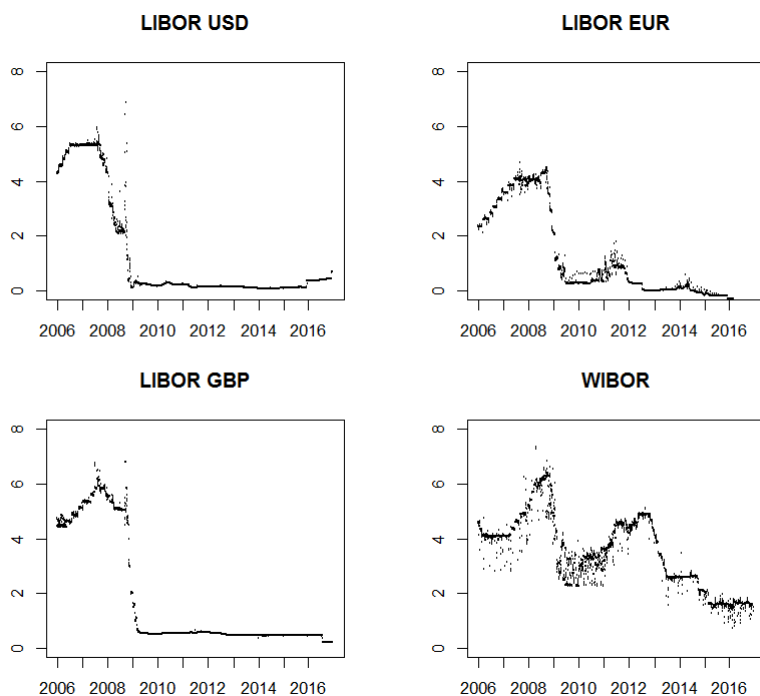
Badanie potwierdziło istniejący w literaturze fakt, że zmienność na rynku odgrywa dużą rolę w poziomie współzależności giełd. W badaniu tym zweryfikowano przypuszczenie, że indeks zmienności implikowanej VIX lub VSTOXX ma znaczenie dla poziomu współzależności pomiędzy rozwiniętymi giełdami. Wraz ze wzrostem tego indeksu następuje wzrost siły powiązań pomiędzy rynkami. Natomiast w przypadku relacji rynku polskiego z innymi rozwiniętymi rynkami Europy Zachodniej i USA, tylko dla relacji z rynkiem Wielkiej Brytanii (indeks VIX oraz indeks VSTOXX) oraz z rynkiem Szwecji (indeks VSTOXX) indeks zmienności implikowanej ma istotne znaczenie dla poziomu współzależności tych rynków. Odnotowano również znaczenie indeksów zmienności implikowanej dla relacji giełdy rosyjskiej z giełdą amerykańską.

Można zauważyć, że dla wszystkich analizowanych par finansowych szeregów czasowych utworzonych ze stóp zwrotu indeksów giełdowych uwzględnienie obu wskaźników zmienności implikowanej w modelowaniu struktury ich wzajemnych powiązań definiuje nam model istotnie lepszy od tego, w którym te wielkości nie są brane pod uwagę.

## 6.2. Stopa procentowa LIBOR oraz TED spread

W tym podrozdziale przedstawione zostaną wyniki badań weryfikujące przypuszczenie, że duże zmiany wartości LIBOR mogą mieć znaczenie dla wzajemnych relacji pomiędzy giełdami. Pod uwagę wzięto stawki LIBOR overnight, czyli wysokości oprocentowania jednodniowych kredytów na rynku międzybankowym.

Rysunek 6.2 przedstawia wartości dziennych stóp procentowych LIBOR dla USD (lewy panel górny), dziennych stóp procentowych LIBOR dla EUR (prawy panel górny), dziennych stóp procentowych LIBOR dla GDB (lewy panel dolny) oraz – dla porównania – wartości dziennych stóp procentowych WIBOR (prawy panel dolny), w latach 2006–2016.



**Rysunek 6.2.** Dienne stopy procentowe LIBOR USD (lewy panel górny), LIBOR EUR (prawy panel górny), LIBOR GBP (lewy panel dolny), WIBOR (prawy panel dolny) w latach 2006–2016

Źródło: opracowanie własne

Wysokie wartości stóp procentowych przypadały na okres przełomu roku 2007/2008, po czym zauważamy ich gwałtowny spadek. Od około 2009 roku stawki LIBOR USD oraz LIBOR GBP utrzymywały się prawie na stałym,

stosunkowo niskim poziomie, natomiast stawki LIBOR EUR odnotowały krótkotrwały wzrost przypadający na lata 2011–2012. W tym okresie notowania WIBOR również miały tendencję wzrostową, po której, podobnie jak dla europejskich stawek LIBOR, wystąpił trend malejący.

## Wyniki badań

Wyniki testu Dickeya–Fullera przeprowadzonego dla tych analizowanych szeregów czasowych wykazały brak ich stacjonarności. Do dalszych obliczeń wzięto więc pod uwagę stacjonarne przyrosty pierwszego rzędu zlogarytmowanych wartości stawek LIBOR. Do opisu struktury powiązań stóp zwrotu analizowanych par rynków, podobnie jak w poprzednim podrozdziale, zastosowany został przełącznikowy model Coopula-GARCH z dynamiczną macierzą przejścia  $P_t$ , opisaną zależnością (6.2), w której wyrażenie  $\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_i$  przyjmuje postać:

$$\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_i = \beta_0^i + \beta_1^i \Delta \log \text{LIBOR}_{(t-1)}, \quad i = 1, 2, \quad (6.6)$$

gdzie  $\Delta \log \text{LIBOR}_t = \log \text{LIBOR}_t - \log \text{LIBOR}_{(t-1)}$  oraz  $\log \text{LIBOR}_t$  jest wartością odpowiedniej stawki LIBOR w chwili  $t$ .

Na początek jako zmienna LIBOR rozważona zostanie stawka LIBOR USD, ze względu na to, iż wszystkie stopy zwrotu indeksów giełdowych zostały skorygowane o zmianę kursu dolara amerykańskiego. Tablica 6.5 przedstawia wyniki estymacji parametrów modelu.

Podobnie jak we wcześniejszym badaniu, na początek przedyskutowane zostaną wyniki dotyczące struktury powiązań giełdy USA z innymi giełdami. Okazuje się, że tylko dla relacji giełdy amerykańskiej z GPW w Warszawie notowania LIBOR USD miały istotne znaczenie dla zmian poziomu ich współzależności. Uzyskano odpowiednio dużą wartość statystyki  $LM$ , dla której  $p\text{-value} = 0.004$ . Oba współczynniki  $\beta_1^1$  oraz  $\beta_1^2$  okazały się statystycznie istotne, przy czym ocena współczynnika  $\beta_1^1 = -25,622$  oraz dodatnia ocena współczynnika  $\beta_1^2 = 7.413$  świadczą o wzroście warunkowej korelacji Spearmanna na skutek spadku wartości LIBOR USD. Dla relacji giełdy amerykańskiej z pozostałymi rynkami Europy notowania LIBOR USD nie miały istotnego wpływu na zmiany poziomu ich współzależności. Tylko dla relacji giełdy amerykańskiej z giełdą szwedzką wartość  $p\text{-value}$  testu  $LM$  była niższa niż 10%, jednak współczynniki  $\beta_1^1$  oraz  $\beta_1^2$  okazały się statystycznie nieistotne.

Dla relacji giełdy niemieckiej z innymi giełdami istotne znaczenie stawek LIBOR USD wykazano tylko dla relacji z giełdą brytyjską oraz z giełdą szwedzką. W obu przypadkach odpowiadająca wartości statystyki LM wartość  $p\text{-value} < 0.10$ . Analizując relację giełdy niemieckiej z giełdą brytyjską i giełdą szwedzką, zauważamy nieistotny statystycznie parametr  $\beta_1^1$  (wartość estymatora jest ujemna) oraz istotny statystycznie, dodatni parametr  $\beta_1^2$ . Zatem obniżka stawki LIBOR USD znacząco wpływa na spadek prawdopodobieństwa pozostania w stanie umiarkowanej współzależności, co jest równoważne ze stwierdzeniem, że efektem znaczącej zmiany stawek LIBOR może być wzrost siły powiązań pomiędzy tymi giełdami.

**Tabela 6.5.** Oceny parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od LIBOR USD, zastosowanego do opisu struktury powiązań pomiędzy giełdami (w nawiasie podano wartość  $p\text{-value}$ )

| Kraj        | $\rho_1$         | $\rho_2$         | $\beta_0^1$      | $\beta_1^1$        | $\beta_0^2$       | $\beta_1^2$       | $LM$              |
|-------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| USA         |                  |                  |                  |                    |                   |                   |                   |
| Polska      | 0,612<br>(0,000) | 0,25<br>(0,000)  | 3,088<br>(0,000) | -25,622<br>(0,005) | 3,278<br>(0,000)  | 7,413<br>(0,012)  | 10,923<br>(0,004) |
| Niemcy      | 0,787<br>(0,000) | 0,449<br>(0,000) | 2,464<br>(0,000) | -6,074<br>(0,523)  | 2,345<br>(0,000)  | 0,663<br>(0,831)  | 0,662<br>(0,718)  |
| Francja     | 0,786<br>(0,000) | 0,471<br>(0,000) | 2,564<br>(0,000) | -3,642<br>(0,542)  | 2,527<br>(0,002)  | 1,978<br>(0,472)  | 0,770<br>(0,681)  |
| W. Brytania | 0,708<br>(0,000) | 0,334<br>(0,000) | 2,659<br>(0,000) | -5,754<br>(0,323)  | 2,14<br>(0,000)   | 3,187<br>(0,536)  | 1,216<br>(0,544)  |
| Szwecja     | 0,699<br>(0,000) | 0,485<br>(0,000) | 6,168<br>(0,000) | -2,575<br>(0,824)  | 24,377<br>(0,645) | 37,611<br>(0,633) | 6,394<br>(0,041)  |
| Rosja       | 0,612<br>(0,000) | 0,281<br>(0,000) | 5,713<br>(0,000) | 0,142<br>(0,998)   | 6,893<br>(0,000)  | -6,954<br>(0,001) | 3,446<br>(0,178)  |
| Niemcy      |                  |                  |                  |                    |                   |                   |                   |
| Polska      | 0,806<br>(0,000) | 0,446<br>(0,000) | 2,043<br>(0,000) | -2,339<br>(0,435)  | 2,327<br>(0,000)  | 2,695<br>(0,478)  | 0,959<br>(0,619)  |
| Francja     | 0,975<br>(0,000) | 0,913<br>(0,000) | 3,132<br>(0,000) | -0,003<br>(0,999)  | 3,111<br>(0,000)  | 0,002<br>(0,999)  | 0,312<br>(0,999)  |
| W. Brytania | 0,865<br>(0,000) | 0,676<br>(0,000) | 3,549<br>(0,000) | -3,649<br>(0,429)  | 3,163<br>(0,000)  | 7,356<br>(0,015)  | 4,898<br>(0,086)  |
| Szwecja     | 0,916<br>(0,000) | 0,790<br>(0,000) | 3,911<br>(0,000) | -2,546<br>(0,696)  | 4,443<br>(0,000)  | 16,257<br>(0,016) | 6,928<br>(0,031)  |
| Rosja       | 0,673<br>(0,000) | 0,257<br>(0,000) | 4,285<br>(0,000) | -3,649<br>(0,098)  | 3,265<br>(0,000)  | 1,587<br>(0,77)   | 1,059<br>(0,589)  |
| USA         | 0,786<br>(0,000) | 0,448<br>(0,000) | 2,481<br>(0,000) | -5,446<br>(0,516)  | 2,35<br>(0,000)   | 0,407<br>(0,889)  | 0,647<br>(0,724)  |

Tabela 6.5. (cd.)

| Kraj        | $\rho_1$         | $\rho_2$         | $\beta_0^1$      | $\beta_1^1$        | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$      | $LM$              |
|-------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|------------------|------------------|-------------------|
| W. Brytania |                  |                  |                  |                    |                  |                  |                   |
| Polska      | 0,725<br>(0,000) | 0,448<br>(0,000) | 3,111<br>(0,000) | -18,307<br>(0,055) | 3,12<br>(0,000)  | 8,634<br>(0,039) | 5,305<br>(0,069)  |
| Niemcy      | 0,865<br>(0,000) | 0,676<br>(0,000) | 3,549<br>(0,000) | -3,649<br>(0,429)  | 3,163<br>(0,000) | 7,356<br>(0,015) | 4,898<br>(0,086)  |
| Francja     | 0,866<br>(0,000) | 0,655<br>(0,000) | 3,991<br>(0,000) | -3,128<br>(0,423)  | 3,122<br>(0,000) | 9,469<br>(0,227) | 1,665<br>(0,435)  |
| Szwecja     | 0,839<br>(0,000) | 0,558<br>(0,000) | 3,154<br>(0,000) | -1,584<br>(0,614)  | 2,037<br>(0,000) | 4,755<br>(0,312) | 0,852<br>(0,653)  |
| Rosja       | 0,749<br>(0,000) | 0,402<br>(0,000) | 3,704<br>(0,000) | -11,406<br>(0,044) | 3,835<br>(0,000) | 9,353<br>(0,006) | 4,357<br>(0,113)  |
| USA         | 0,708<br>(0,000) | 0,334<br>(0,000) | 2,677<br>(0,000) | -5,907<br>(0,315)  | 2,156<br>(0,000) | 3,516<br>(0,508) | 1,220<br>(0,543)  |
| Polska      |                  |                  |                  |                    |                  |                  |                   |
| Niemcy      | 0,807<br>(0,000) | 0,447<br>(0,000) | 2,05<br>(0,000)  | -2,234<br>(0,461)  | 2,35<br>(0,000)  | 2,909<br>(0,442) | 0,969<br>(0,616)  |
| Francja     | 0,767<br>(0,000) | 0,435<br>(0,000) | 2,049<br>(0,000) | -3,285<br>(0,42)   | 1,905<br>(0,001) | 5,463<br>(0,457) | 1,557<br>(0,459)  |
| W. Brytania | 0,725<br>(0,000) | 0,448<br>(0,000) | 3,142<br>(0,000) | -18,973<br>(0,051) | 3,139<br>(0,000) | 9,055<br>(0,042) | 5,305<br>(0,069)  |
| Szwecja     | 0,779<br>(0,000) | 0,475<br>(0,000) | 2,137<br>(0,000) | -10,044<br>(0,284) | 2,725<br>(0,000) | 8,117<br>(0,321) | 4,485<br>(0,106)  |
| Rosja       | 0,734<br>(0,000) | 0,371<br>(0,000) | 4,163<br>(0,000) | -9,453<br>(0,041)  | 3,609<br>(0,000) | 9,695<br>(0,008) | 2,440<br>(0,295)  |
| USA         | 0,613<br>(0,000) | 0,253<br>(0,000) | 3,092<br>(0,000) | -25,471<br>(0,005) | 3,354<br>(0,000) | 9,246<br>(0,009) | 10,651<br>(0,005) |

Parametry  $\rho_1, \rho_2$  oznaczają współczynniki korelacji kopuli t-Studenta, z których budowano model przełącznikowy; parametry  $\beta_i^j$ , gdzie  $i = 0, 1$ ;  $j = 1, 2$  to współczynniki zależności (6.4) dla prawdopodobieństw pozostania w  $j$ -tym stanie; statystyka dla testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), to:  $LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia

Źródło: opracowanie własne

Znaczenie stawek LIBOR USD dla struktury powiązań pomiędzy giełdami udało się jeszcze tylko wykazać dla relacji GPW w Warszawie z giełdą w Londynie ( $LM = 5.309$  oraz  $p\text{-value} = 0.069$ ). Zauważamy istotne oddziaływania stawki LIBOR zarówno na prawdopodobieństwo  $p_{11}(t)$ , jak i na prawdopodobieństwo  $p_{22}(t)$ . Ujemny, statystycznie istotny parametr  $\beta_1^1$ , oraz dodatni, statystycznie istotny parametr  $\beta_1^2$  informują nas o wzroście poziomu współzależności na skutek odpowiednio dużego spadku stopy procentowej LIBOR USD.



Dla pozostałych przypadków nie udało się wykazać znaczenia notowań LIBOR USD na współzależność giełd. Nie udało się też uzyskać statystycznie istotnego wpływu LIBOR EUR, LIBOR GBP oraz WIBOR-u. W badaniu empirycznym przeprowadzono analizę współzależności pozostałych par rynków uwzględniając LIBOR EUR, LIBOR GBP oraz WIBOR. Ponieważ nie zauważono znaczącej zmiany w wynikach, pominięto ich prezentację w niniejszej monografii.

Jak już wspomniano we wstępie do tego podrozdziału, w literaturze przedmiotu jako czynnik mający znaczenie dla rynków akcji rekomendowany jest wskaźnik TED spread. Zatem w dalszej części monografii przedstawione zostaną wyniki badań, w których zamiast stawki LIBOR wzięto pod uwagę TED spread, czyli wskaźnik obrazujący zaufanie instytucji finansowych do wypłacalności banków. TED spread jest różnicą pomiędzy 3-miesięcznym oprocentowaniem LIBOR i 3-miesięcznym oprocentowaniem bonów skarbowych.

Ze względu na niestacjonarność tego szeregu czasowego, do opisu struktury powiązań stóp zwrotu analizowanych par rynków, podobnie jak w poprzednim podrozdziale, zastosowany został przełącznikowy model Copula-GARCH z dynamiczną macierzą przejścia  $P_t$ , opisaną zależnością (6.2), w której wyrażenie  $\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_i$  przyjmuje postać:

$$\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_i = \beta_0^i + \beta_1^i \Delta \log(TED)_{(t-1)}, \quad i = 1, 2. \quad (6.7)$$

Wyniki przeprowadzonych analiz przedstawione zostały w tabeli 6.6. Analizując wyniki zauważamy, że istotne znaczenie tego wskaźnika dla poziomu współzależności giełd udało się wykazać tylko dla kilku par analizowanych rynków. Podobnie jak dla LIBOR USD, został wykazany wpływ wskaźnika TED spread na poziom współzależności giełdy niemieckiej z giełdą brytyjską. W przeciwieństwie jednak do wskaźnika LIBOR USD, nie potwierdzono wpływu TED spread na relację giełdy niemieckiej z giełdą szwedzką oraz relację giełdy brytyjskiej i giełdy amerykańskiej z GPW w Warszawie.

Natomiast dla giełdy brytyjskiej, oprócz wspomnianej wcześniej jej relacji z giełdą niemiecką, TED spread ma znaczenie dla jej współzależności również z giełdą francuską oraz rosyjską. Dla tych relacji uzyskano wysoką wartość statystyki  $LM$  wraz z  $p\text{-value} \leq 0,10$ . Statystycznie istotny okazał się ujemny parametr  $\beta_1^2$ . Parametr  $\beta_1^1$  okazał się istotny tylko dla relacji z giełdą rosyjską, jednak dla wszystkich przypadków uzyskano dodatnią jego ocenę.

**Tabela 6.6.** Oceny parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od TED spread, zastosowanego do opisu struktury powiązań pomiędzy giełdami (w nawiasie podano wartość *p-value*)

| Kraj        | $\rho_1$         | $\rho_2$         | $\beta_0^1$      | $\beta_1^1$        | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$        | <i>LM</i>        |
|-------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|------------------|--------------------|------------------|
| USA         |                  |                  |                  |                    |                  |                    |                  |
| Polska      | 0,651<br>(0,000) | 0,261<br>(0,000) | 2,302<br>(0,000) | 5,597<br>(0,897)   | 3,125<br>(0,000) | -5,331<br>(0,477)  | 0,197<br>(0,906) |
| Niemcy      | 0,787<br>(0,000) | 0,427<br>(0,000) | 2,417<br>(0,000) | 13,075<br>(0,031)  | 2,007<br>(0,000) | 4,9<br>(0,279)     | 2,704<br>(0,259) |
| Francja     | 0,792<br>(0,000) | 0,482<br>(0,000) | 2,566<br>(0,008) | 0,448<br>(0,949)   | 2,673<br>(0,041) | -2,24<br>(0,765)   | 0,106<br>(0,948) |
| W. Brytania | 0,719<br>(0,000) | 0,334<br>(0,000) | 2,384<br>(0,000) | 3,316<br>(0,702)   | 1,967<br>(0,001) | -4,778<br>(0,284)  | 1,277<br>(0,528) |
| Szwecja     | 0,697<br>(0,000) | 0,48<br>(0,000)  | 6,157<br>(0,000) | 0,034<br>(0,876)   | 6,561<br>(0,000) | -0,231<br>(0,912)  | 1,035<br>(0,596) |
| Rosja       | 0,612<br>(0,000) | 0,283<br>(0,000) | 5,772<br>(0,033) | 9,583<br>(0,944)   | 6,656<br>(0,000) | -10,635<br>(0,264) | 0,611<br>(0,737) |
| Niemcy      |                  |                  |                  |                    |                  |                    |                  |
| Polska      | 0,81<br>(0,000)  | 0,453<br>(0,000) | 2,069<br>(0,000) | -2,89<br>(0,644)   | 2,408<br>(0,000) | -0,841<br>(0,9)    | 0,166<br>(0,921) |
| Francja     | 0,975<br>(0,000) | 0,913<br>(0,000) | 3,132<br>(0,000) | 0,000<br>(0,999)   | 3,111<br>(0,000) | 0,000<br>(0,999)   | 0,000<br>(0,999) |
| W. Brytania | 0,856<br>(0,000) | 0,646<br>(0,000) | 3,708<br>(0,000) | 10,57<br>(0,989)   | 3,002<br>(0,000) | -14,961<br>(0,020) | 5,020<br>(0,082) |
| Szwecja     | 0,916<br>(0,000) | 0,788<br>(0,000) | 3,819<br>(0,000) | 0,000<br>(0,999)   | 4,089<br>(0,000) | 0,000<br>(0,999)   | 0,000<br>(0,999) |
| Rosja       | 0,677<br>(0,000) | 0,257<br>(0,000) | 4,158<br>(0,000) | 6,682<br>(0,327)   | 3,135<br>(0,000) | -1,066<br>(0,678)  | 0,844<br>(0,656) |
| USA         | 0,787<br>(0,000) | 0,428<br>(0,000) | 2,409<br>(0,000) | 12,291<br>(0,046)  | 2,03<br>(0,000)  | 4,639<br>(0,314)   | 2,684<br>(0,261) |
| W. Brytania |                  |                  |                  |                    |                  |                    |                  |
| Polska      | 0,715<br>(0,000) | 0,422<br>(0,000) | 3,098<br>(0,000) | 2,157<br>(0,806)   | 3,056<br>(0,000) | 10,662<br>(0,116)  | 1,251<br>(0,535) |
| Niemcy      | 0,856<br>(0,000) | 0,646<br>(0,000) | 3,708<br>(0,000) | 10,57<br>(0,0,989) | 3,002<br>(0,000) | -14,961<br>(0,020) | 5,020<br>(0,082) |
| Francja     | 0,866<br>(0,000) | 0,663<br>(0,000) | 4,212<br>(0,000) | 10,539<br>(0,202)  | 3,292<br>(0,000) | -15,019<br>(0,049) | 5,342<br>(0,069) |
| Szwecja     | 0,837<br>(0,000) | 0,55<br>(0,000)  | 3,222<br>(0,000) | 0,696<br>(0,845)   | 2,024<br>(0,000) | -0,138<br>(0,985)  | 0,039<br>(0,981) |
| Rosja       | 0,746<br>(0,000) | 0,389<br>(0,000) | 3,874<br>(0,000) | 15,798<br>(0,028)  | 4,041<br>(0,000) | -18,117<br>(0,008) | 6,455<br>(0,040) |
| USA         | 0,719<br>(0,000) | 0,334<br>(0,000) | 2,384<br>(0,000) | 3,316<br>(0,702)   | 1,967<br>(0,001) | -4,779<br>(0,283)  | 1,277<br>(0,528) |

Tabela 6.6. (cd.)

| Polska      |                  |                  |                  |                   |                  |                   |                  |
|-------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|-------------------|------------------|
| Niemcy      | 0,81<br>(0,000)  | 0,453<br>(0,000) | 2,069<br>(0,000) | -2,887<br>(0,644) | 2,408<br>(0,000) | -0,84<br>(0,9)    | 0,166<br>(0,921) |
| Francja     | 0,78<br>(0,000)  | 0,457<br>(0,000) | 1,997<br>(0,000) | 1,755<br>(0,778)  | 2,074<br>(0,001) | -0,815<br>(0,894) | 0,148<br>(0,929) |
| W. Brytania | 0,716<br>(0,000) | 0,425<br>(0,000) | 3,068<br>(0,000) | 3,129<br>(0,703)  | 3,022<br>(0,001) | 9,628<br>(0,187)  | 1,221<br>(0,543) |
| Szwecja     | 0,782<br>(0,000) | 0,492<br>(0,000) | 2,343<br>(0,000) | 2,614<br>(0,691)  | 3,205<br>(0,000) | -9,343<br>(0,086) | 2,574<br>(0,276) |
| Rosja       | 0,733<br>(0,000) | 0,367<br>(0,000) | 4,164<br>(0,000) | 3,746<br>(0,692)  | 3,654<br>(0,000) | -6,536<br>(0,305) | 0,653<br>(0,721) |
| USA         | 0,651<br>(0,000) | 0,261<br>(0,000) | 2,3<br>(0,000)   | 5,57<br>(0,877)   | 3,121<br>(0,000) | -5,306<br>(0,481) | 0,197<br>(0,906) |

Parametry  $\rho_1, \rho_2$  oznaczają współczynniki korelacji kopuli t-Studenta, z których budowano model przełącznikowy; parametry  $\beta_i^j$ , gdzie  $i = 0, 1$ ;  $j = 1, 2$  to współczynniki zależności (6.7) dla prawdopodobieństw pozostania w  $j$ -tym stanie; statystyka dla testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), to:  $LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia

Źródło: opracowanie własne

Zatem możemy przypuszczać, że wzrost wartości TED spread wywołuje wzrost warunkowego współczynnika korelacji Spearmanna, czyli wzrost poziomu współzależności pomiędzy tymi giełdami.

W celu uzupełnienia analizy dotyczącej roli dziennych przyrostów stawek LIBOR USD oraz TED spread przeprowadzono badanie, w którym uwzględniono oba wskaźniki jednocześnie<sup>45</sup>. Wyniki z przeprowadzonej analizy są zaprezentowane w poniższej tabeli 6.7. Jak można zauważyć, wyniki te potwierdziły wcześniejsze wnioski.

<sup>45</sup> Współczynnik korelacji liniowej pomiędzy przyrostami obu wskaźników wynosi 0.035%.

**Tabela 6.7.** Oceny parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od LIBOR USD oraz TED spread, zastosowanego do opisu struktury powiązań pomiędzy giełdami (w nawiasie podano wartość *p-value*)

| Kraj        | $\beta_0^1$      | $\beta_1^1$       | $\beta_2^1$        | $\beta_0^2$       | $\beta_1^2$        | $\beta_2^2$        | <i>LM</i>         |
|-------------|------------------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------|-------------------|
| USA         |                  |                   |                    |                   |                    |                    |                   |
| Polska      | 3,423<br>(0,000) | 7,99<br>(0,571)   | -43,009<br>(0,005) | 3,384<br>(0,000)  | -6,847<br>(0,464)  | 8,045<br>(0,014)   | 13,443<br>(0,009) |
| Niemcy      | 2,431<br>(0,000) | 14,459<br>(0,01)  | -10,27<br>(0,194)  | 2,161<br>(0,000)  | 6,261<br>(0,143)   | -0,091<br>(0,972)  | 4,394<br>(0,355)  |
| Francja     | 5,891<br>(0,000) | -0,181<br>(0,995) | -0,223<br>(0,989)  | 6,98<br>(0,000)   | -0,086<br>(0,897)  | 0,181<br>(0,967)   | 1,876<br>(0,758)  |
| W. Brytania | 2,353<br>(0,000) | 4,543<br>(0,607)  | -4,904<br>(0,461)  | 1,87<br>(0,007)   | -4,817<br>(0,274)  | 1,979<br>(0,572)   | 3,029<br>(0,553)  |
| Szwecja     | 6,622<br>(0,000) | 12,742<br>(0,57)  | -1,437<br>(0,905)  | 95,292<br>(0,952) | 27,579<br>(0,973)  | 150,359<br>(0,955) | 6,788<br>(0,148)  |
| Rosja       | 5,745<br>(0,000) | 1,665<br>(0,947)  | 0,152<br>(0,987)   | 7,006<br>(0,000)  | -0,483<br>(0,962)  | -7,254<br>(0,000)  | 3,381<br>(0,496)  |
| Niemcy      |                  |                   |                    |                   |                    |                    |                   |
| Polska      | 2,052<br>(0,000) | -0,741<br>(0,977) | -2,272<br>(0,508)  | 2,352<br>(0,000)  | -0,339<br>(0,982)  | 3,002<br>(0,441)   | 0,997<br>(0,910)  |
| Francja     | 3,133<br>(0,000) | 0,000<br>(0,999)  | 0,000<br>(1,000)   | 3,111<br>(0,000)  | 0,000<br>(1,000)   | 0,000<br>(0,999)   | 0,000<br>(0,999)  |
| W. Brytania | 3,802<br>(0,000) | 10,001<br>(0,241) | 0,413<br>(0,786)   | 3,656<br>(0,000)  | -19,271<br>(0,029) | 11,399<br>(0,018)  | 10,686<br>(0,030) |
| Szwecja     | 3,969<br>(0,000) | -0,920<br>(0,916) | 0,197<br>(0,991)   | 5,299<br>(0,000)  | -19,742<br>(0,01)  | 17,488<br>(0,025)  | 12,900<br>(0,012) |
| Rosja       | 4,276<br>(0,000) | 6,740<br>(0,265)  | -3,561<br>(0,169)  | 3,231<br>(0,000)  | -2,614<br>(0,512)  | 1,904<br>(0,674)   | 1,877<br>(0,758)  |
| USA         | 2,431<br>(0,000) | 14,459<br>(0,010) | -10,27<br>(0,194)  | 2,161<br>(0,000)  | 6,261<br>(0,143)   | -0,091<br>(0,972)  | 4,394<br>(0,355)  |
| W. Brytania |                  |                   |                    |                   |                    |                    |                   |
| Polska      | 3,111<br>(0,000) | 1,804<br>(0,78)   | -20,422<br>(0,063) | 3,223<br>(0,000)  | 8,167<br>(0,42)    | 8,054<br>(0,044)   | 5,942<br>(0,204)  |
| Niemcy      | 3,732<br>(0,000) | 10,582<br>(0,066) | -2,834<br>(0,897)  | 3,347<br>(0,000)  | -12,542<br>(0,059) | 15,267<br>(0,049)  | 8,243<br>(0,083)  |
| Francja     | 3,763<br>(0,000) | 9,254<br>(0,216)  | -1,306<br>(0,844)  | 3,464<br>(0,000)  | -22,599<br>(0,006) | 12,307<br>(0,12)   | 10,808<br>(0,029) |
| Szwecja     | 3,329<br>(0,000) | 0,652<br>(0,862)  | -1,13<br>(0,684)   | 2,048<br>(0,000)  | -0,781<br>(0,75)   | 1,874<br>(0,853)   | 0,43<br>(0,98)    |
| Rosja       | 3,933<br>(0,000) | 12,569<br>(0,150) | -15,171<br>(0,125) | 4,142<br>(0,000)  | -13,834<br>(0,018) | 10,363<br>(0,005)  | 12,229<br>(0,016) |
| USA         | 2,403<br>(0,000) | 3,114<br>(0,73)   | -3,151<br>(0,574)  | 1,964<br>(0,003)  | -3,759<br>(0,462)  | 1,713<br>(0,632)   | 2,503<br>(0,644)  |

Tabela 6.7. (cd.)

| Polska      |                  |                   |                    |                  |                   |                  |                   |
|-------------|------------------|-------------------|--------------------|------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| Niemcy      | 2,048<br>(0,000) | -0,769<br>(0,975) | -2,273<br>(0,513)  | 2,346<br>(0,000) | -0,355<br>(0,98)  | 3,027<br>(0,439) | 0,997<br>(0,910)  |
| Francja     | 2,058<br>(0,000) | 2,867<br>(0,618)  | -3,52<br>(0,405)   | 1,917<br>(0,002) | 0,629<br>(0,928)  | 4,839<br>(0,488) | 1,797<br>(0,773)  |
| W. Brytania | 3,098<br>(0,000) | 1,683<br>(0,787)  | -18,533<br>(0,059) | 3,297<br>(0,000) | 6,979<br>(0,627)  | 7,965<br>(0,027) | 5,798<br>(0,215)  |
| Szwecja     | 2,434<br>(0,000) | 3,123<br>(0,600)  | -10,859<br>(0,299) | 3,143<br>(0,000) | -9,364<br>(0,078) | 5,584<br>(0,153) | 7,237<br>(0,124)  |
| Rosja       | 4,040<br>(0,000) | 7,203<br>(0,326)  | 1,335<br>(0,853)   | 3,579<br>(0,000) | -7,208<br>(0,158) | 6,883<br>(0,246) | 1,353<br>(0,852)  |
| USA         | 3,305<br>(0,000) | 7,198<br>(0,66)   | -72,924<br>(0,008) | 3,395<br>(0,000) | -6,095<br>(0,585) | 7,537<br>(0,015) | 13,368<br>(0,010) |

Parametry  $\beta_i^j$ ,  $i = 0, 1, 2$ ;  $j = 1, 2$  to współczynniki zależności dla prawdopodobieństw pozostania w  $j$ -tym stanie;  $\beta_0^j$  – wyraz wolny,  $\beta_1^j$  odpowiada za LIBOR USD,  $\beta_2^j$  – za TED spread; statystyka dla testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), to:  $LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia

Źródło: opracowanie własne

## Podsumowanie

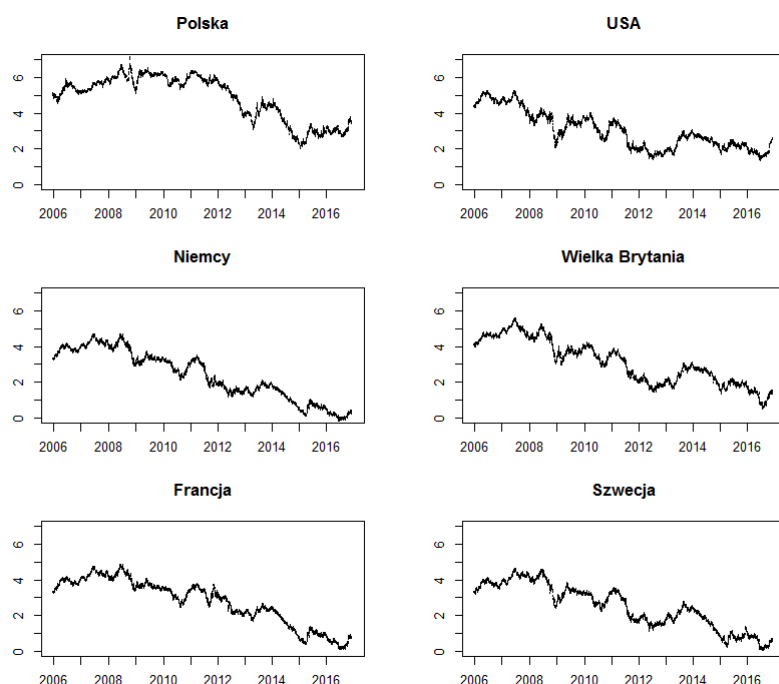
Tylko dla kilku par rynków udało się wykazać znaczenie wskaźnika LIBOR USD lub TED spread w analizie poziomu ich wzajemnych powiązań. Jeśli idzie o relacje pomiędzy giełdami rozwiniętymi, to pierwszy wskaźnik miał istotne znaczenie tylko dla poziomu współzależności giełdy niemieckiej z giełdą brytyjską oraz z giełdą szwedzką. Natomiast zaobserwowano znaczenie tego wskaźnika dla relacji GPW w Warszawie z giełdą w Londynie i Nowym Jorku. We wszystkich tych relacjach wynikiem spadku stopy procentowej LIBOR USD jest wzrost poziomu współzależności.

Nieco inne wnioski otrzymano analizując wskaźnik TED spread. Wskaźnik ten miał znaczenie również dla poziomu współzależności giełdy brytyjskiej z giełdą niemiecką, ale odnotowano też jego znaczenie dla relacji giełdy brytyjskiej z francuską oraz giełdy brytyjskiej z giełdą rosyjską. We wszystkich tych relacjach odpowiednio duży wzrost wskaźnika TED spread sprawia, że giełdy przechodzą do stanu silnej współzależności. Natomiast nigdzie nie zauważono znaczenia tego wskaźnika we wzajemnych relacjach GPW w Warszawie z innymi giełdami.

Z dokładnością do stanu wiedzy autorki w tym temacie, nie było analiz dotyczących wpływu dziennych stawek LIBOR na współzależność giełd. Również tematyka dotycząca wskaźnika TED spread była podejmowana głównie pod kątem kształtowania się cen na samych rynkach akcji, a nie pod kątem jego roli w poziomie współzależności giełd. Przeprowadzone badanie może być zatem wstępem do dalszych analiz.

### 6.3. Rentowność 10-letnich obligacji

Celem kolejnego badania jest pokazanie, w jaki sposób rentowność 10-letnich obligacji wpływa na strukturę powiązań pomiędzy giełdami. Ze względu na brak wiarygodnych danych dotyczących rentowności rosyjskich obligacji, w badaniu tym nie uwzględniono giełdy rosyjskiej. Analiza obejmowała zatem giełdy z Europy Zachodniej (z Niemiec, Francji, Wielkiej Brytanii oraz Szwecji), giełdę amerykańską oraz GPW w Warszawie w tym okresie. Rysunek 6.3 przedstawia rentowność 10-letnich obligacji (dane dzienne) dla analizowanych krajów. Dane pochodzą z lat 2006–2016.



**Rysunek 6.3.** Dzienna rentowność 10-letnich obligacji w latach 2006–2016

Źródło: opracowanie własne

Na wszystkich wykresach zauważalna jest tendencja spadkowa analizowanych wartości, która jest korygowana tylko krótkotrwałymi okresami wzrostu. Najwyższa przeciętna rentowność 10-letnich obligacji występowała w Polsce (średnia arytmetyczna wyniosła 4,83%). Dla porównania średnia arytmetyczna dla USA wyniosła 2,99%, dla Niemiec: 2,35%, dla Wielkiej Brytanii: 3,08%, dla Francji: 2,74% oraz dla Szwecji: 2,48%. Największe rozproszenie notowań rentowności badanych obligacji było w Niemczech (odchylenie standardowe wyniosło 1,38%), a najniższe w USA (odchylenie standardowe wyniosło 1,05%). W pozostałych krajach fluktuacja rentowności była na podobnym poziomie. Wartość odchylenia standardowego wahała się od 1,23% do 1,28%.

## Wyniki badań

Rysunek 6.3 sugeruje brak stacjonarności rozważanych szeregów czasowych. Zastosowanie testu Dickeya-Fullera potwierdziło to przypuszczenie. Zatem w celu uzyskania stacjonarności zastosowano różnicowanie pierwszego rzędu. W tablicy 6.8 zaprezentowano oceny współczynników korelacji liniowej Pearsona (wraz z *p-value* dla testu istotności współczynnika korelacji liniowej Pearsona) dla przyrostów pierwszego rzędu. Jeśli pod uwagę weźmiemy dane z Polski, to są one najsilniej skorelowane z przyrostami rentowności obligacji Francji (ocena współczynnika korelacji liniowej Pearsona wynosi 0,189), a najsłabiej z przyrostami rentowności obligacji USA (ocena współczynnika korelacji wynosi 0,029). Ocena współczynnika korelacji przyrostów obligacji Polski z przyrostami obligacji Niemiec, podobnie jak z przyrostami obligacji Wielkiej Brytanii i Szwecji, wynosi około 10%. Można zatem stwierdzić, że korelacja zmian rentowności 10-letnich obligacji Polski ze zmianą rentowności obligacji krajów rozwiniętych występuje na stosunkowo niskich poziomach.

**Tabela 6.8.** Oceny współczynników korelacji między przyrostami rentowności 10-letnich obligacji

|             | Polska | Niemcy | Francja | W. Brytania | Szwecja | USA   |
|-------------|--------|--------|---------|-------------|---------|-------|
| Polska      | 1      | 0,093  | 0,189   | 0,098       | 0,099   | 0,029 |
| Niemcy      | 0,093  | 1      | 0,786   | 0,797       | 0,735   | 0,616 |
| Francja     | 0,189  | 0,786  | 1       | 0,651       | 0,599   | 0,490 |
| W. Brytania | 0,099  | 0,797  | 0,651   | 1           | 0,638   | 0,581 |
| Szwecja     | 0,199  | 0,735  | 0,599   | 0,638       | 1       | 0,477 |
| USA         | 0,029  | 0,616  | 0,490   | 0,581       | 0,477   | 1     |

Źródło: opracowanie własne

Dla danych z krajów Europy Zachodniej oceny współczynników korelacji liniowej Pearsona są jednak inne. Jak należało się spodziewać, są one zdecydowanie wyższe. Ich zakres waha się od 0,599 (między przyrostami rentowności obligacji Szwecji i Francji) do 0,797 (między przyrostami rentowności obligacji Niemiec i Wielkiej Brytanii). Również korelacja pomiędzy zmianami rentowności 10-letnich obligacji USA i krajów Europy Zachodniej jest wyższa niż dla USA i Polski. Poza Polską najniższą wartość oceny współczynnika korelacji liniowej zanotowano dla Szwecji (0,477), a najwyższą dla Niemiec (0,616).

Do opisu struktury powiązań stóp zwrotu indeksów giełdowych zastosowano przełącznikowy model Copula-GARCH z mechanizmem TVPMS, w którym przełączeniu podlegają dwie kopule t-Studenta. W zmieniającej się w czasie macierzy przejścia  $P_t$ , którą przedstawia zależność (6.2) wyrażenie  $\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_i$  przyjmuje postać:

$$\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_i = \beta_0^i + \sum_{j=1}^2 \beta_j^i \Delta L_{j,t-1}. \quad (6.8)$$

Wielkości  $\Delta L_{1,t-1}$ ,  $\Delta L_{2,t-1}$  oznaczają przyrosty rentowności 10-letnich obligacji krajów, dla których giełd badana jest struktura powiązań.

Wyniki oszacowania parametrów modelu Copula-GARCH z mechanizmem TVPMS przedstawia tablica 6.9. Ze względu na rozmiar tablicy nie podano w niej oszacowania współczynników korelacji.

Parametry  $\beta_k^1$  ( $k = 0, 1, 2$ ) zamieszczone w tablicy 6.9 informują nas o znaczeniu zmiany rentowności obligacji kolejno pierwszego i drugiego kraju w zmianach prawdopodobieństwa  $p_{11}(t)$  w stanie pierwszym, w którym występuje silna współzależność pomiędzy analizowanymi rynkami. Natomiast parametry  $\beta_k^2$ , ( $k = 0, 1, 2$ ) informują nas o znaczeniu zmiany rentowności obligacji kolejno pierwszego i drugiego kraju w zmianach prawdopodobieństwa  $p_{22}(t)$  w stanie drugim, w którym występuje umiarkowana współzależność. Parametr  $\beta_1^i$  ( $i = 1, 2$ ) odpowiada za rentowność obligacji kraju podanego w tytule każdego panelu, natomiast parametr  $\beta_2^i$  ( $i = 1, 2$ ) odpowiada za rentowność obligacji kraju, który jest przedstawiony w panelu.

Dyskusję rozpoczniemy od relacji giełdy amerykańskiej z innymi giełdami. Tylko dla jej relacji z giełdą brytyjską wartość statystyki  $LM$  jest stosunkowo wysoka oraz odpowiadająca jej wartość  $p$ -value odpowiednio mała ( $p$ -value = 0,049). Jednak analiza istotności współczynników  $\beta_k^i$ , ( $k, i = 1, 2$ ) nie wykazała istotnego



wpływu rentowności obligacji na poziom współzależności tych rynków. Natomiast gdy weźmiemy pod uwagę wyłącznie rentowność obligacji amerykańskich, wówczas otrzymamy następujące wyniki (w nawiasie podano wartość *p-value*):  $\rho_1 = 0.703$  (0.000) ,  $\rho_2 = 0.326$  (0.000),  $\beta_0^1 = 2.725$  (0.000),  $\beta_1^1 = -6.3821$  (0.298),  $\beta_0^2 = 2.986$  (0.000),  $\beta_1^2 = -32.247$  (0.011),  $LM = 10.060$  (0.007). Znak przy ocenie parametru  $\beta_1^2$  wskazuje na wzrost poziomu współzależności pomiędzy tymi giełdami, gdy spada rentowność tych obligacji.

**Tabela 6.9.** Oceny parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od rentowności 10-letnich obligacji, zastosowanych do opisu struktury powiązań między giełdami (w nawiasie podano wartość *p-value*)

| Kraj        | $\beta_0^1$      | $\beta_1^1$       | $\beta_2^1$        | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$        | $\beta_2^2$        | $LM$              |
|-------------|------------------|-------------------|--------------------|------------------|--------------------|--------------------|-------------------|
| USA         |                  |                   |                    |                  |                    |                    |                   |
| Polska      | 2,332<br>(0,000) | -2,971<br>(0,871) | -13,374<br>(0,087) | 2,626<br>(0,000) | 0,982<br>(0,939)   | 1,010<br>(0,871)   | 4,676<br>(0,322)  |
| Niemcy      | 2,387<br>(0,000) | 5,285<br>(0,361)  | -4,468<br>(0,487)  | 2,144<br>(0,000) | -10,767<br>(0,32)  | 1,192<br>(0,944)   | 4,298<br>(0,367)  |
| Francja     | 2,333<br>(0,000) | 9,161<br>(0,044)  | -5,709<br>(0,328)  | 2,260<br>(0,000) | -15,777<br>(0,117) | 6,751<br>(0,472)   | 4,440<br>(0,350)  |
| W. Brytania | 2,748<br>(0,000) | 3,014<br>(0,858)  | -8,71<br>(0,509)   | 2,641<br>(0,000) | -22,459<br>(0,333) | -6,88<br>(0,650)   | 9,561<br>(0,049)  |
| Szwecja     | 6,162<br>(0,000) | 0,000<br>(1,000)  | 0,000<br>(1,000)   | 6,555<br>(0,000) | 0,000<br>(0,999)   | 0,000<br>(0,999)   | 0,000<br>(0,999)  |
| Niemcy      |                  |                   |                    |                  |                    |                    |                   |
| Polska      | 2,338<br>(0,000) | -0,963<br>(0,916) | -12,203<br>(0,007) | 2,47<br>(0,000)  | 9,211<br>(0,089)   | 2,123<br>(0,597)   | 9,413<br>(0,042)  |
| Francja     | 3,165<br>(0,000) | 0,071<br>(0,993)  | 0,037<br>(0,996)   | 3,157<br>(0,000) | 0,013<br>(0,989)   | 0,010<br>(0,999)   | 0,006<br>(0,999)  |
| W. Brytania | 3,488<br>(0,000) | -2,759<br>(0,917) | 6,393<br>(0,848)   | 3,814<br>(0,000) | 22,273<br>(0,387)  | 20,96<br>(0,341)   | 11,688<br>(0,020) |
| Szwecja     | 3,807<br>(0,000) | -0,164<br>(0,999) | -0,216<br>(0,986)  | 4,067<br>(0,000) | 0,249<br>(0,999)   | 0,202<br>(0,999)   | 0,034<br>(0,998)  |
| USA         | 2,307<br>(0,000) | -4,836<br>(0,462) | 4,505<br>(0,451)   | 2,062<br>(0,000) | 0,705<br>(0,961)   | -10,756<br>(0,298) | 4,161<br>(0,385)  |
| W. Brytania |                  |                   |                    |                  |                    |                    |                   |
| Polska      | 3,605<br>(0,000) | -2,775<br>(0,807) | -22,638<br>(0,037) | 3,599<br>(0,000) | 28,957<br>(0,009)  | -9,269<br>(0,405)  | 11,059<br>(0,026) |
| Niemcy      | 3,531<br>(0,027) | 7,934<br>(0,966)  | 0,508<br>(0,998)   | 3,82<br>(0,000)  | 22,46<br>(0,84)    | 20,332<br>(0,869)  | 11,146<br>(0,025) |
| Francja     | 3,815<br>(0,000) | 2,805<br>(0,688)  | -0,564<br>(0,941)  | 3,682<br>(0,000) | 23,686<br>(0,344)  | 13,848<br>(0,678)  | 6,703<br>(0,152)  |
| Szwecja     | 3,152<br>(0,000) | 15,587<br>(0,042) | -12,069<br>(0,083) | 1,867<br>(0,003) | 2,108<br>(0,902)   | 14,771<br>(0,543)  | 7,162<br>(0,128)  |
| USA         | 2,833<br>(0,000) | -3,464<br>(0,880) | 3,717<br>(0,890)   | 2,906<br>(0,000) | -8,812<br>(0,574)  | -22,63<br>(0,279)  | 9,721<br>(0,045)  |

Tabela 6.9. (cd.)

| Kraj        | $\beta_0^1$      | $\beta_1^1$        | $\beta_2^1$       | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$       | $\beta_2^2$       | $LM$              |
|-------------|------------------|--------------------|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Polska      |                  |                    |                   |                  |                   |                   |                   |
| Niemcy      | 2,21<br>(0,000)  | -12,899<br>(0,005) | -0,932<br>(0,949) | 2,352<br>(0,004) | 3,357<br>(0,483)  | 9,858<br>(0,042)  | 9,412<br>(0,043)  |
| Francja     | 2,136<br>(0,000) | -11,114<br>(0,017) | 3,107<br>(0,557)  | 1,982<br>(0,000) | 2,643<br>(0,629)  | 8,650<br>(0,096)  | 8,490<br>(0,075)  |
| W. Brytania | 3,59<br>(0,000)  | -22,749<br>(0,033) | -4,466<br>(0,656) | 3,46<br>(0,000)  | -5,642<br>(0,548) | 27,187<br>(0,009) | 11,002<br>(0,027) |
| Szwecja     | 2,962<br>(0,000) | -18,138<br>(0,032) | -5,143<br>(0,538) | 3,861<br>(0,000) | 14,949<br>(0,063) | 15,347<br>(0,097) | 12,328<br>(0,015) |
| USA         | 2,286<br>(0,000) | -13,577<br>(0,048) | -0,845<br>(0,000) | 2,642<br>(0,000) | 1,882<br>(0,751)  | 0,550<br>(0,999)  | 4,582<br>(0,333)  |

Parametry  $\beta_i^j$ ,  $i = 0, 1, 2$ ;  $j = 1, 2$  to współczynniki zależności dla prawdopodobieństw pozostania w  $j$ -tym stanie;  $\beta_0^j$  – wyraz wolny,  $\beta_1^j$  odpowiada za rentowność obligacji kraju podanego w tytule każdego panelu,  $\beta_2^j$  odpowiada za rentowność obligacji kraju, który jest przedstawiony w panelu; statystyka dla testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), to:  $LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia

Źródło: opracowanie własne

Jeśli zbadamy wpływ obligacji na strukturę powiązań pomiędzy rozwiniętymi giełdami Europy (tablica 6.9), udało się wykazać znaczenie tego czynnika tylko dla poziomu współzależności giełdy brytyjskiej z giełdą Niemiec ( $LM = 11.688$ ,  $p\text{-value} = 0,020$ ). Podobnie jak w relacji giełdy brytyjskiej z giełdą amerykańską, parametry  $\beta_k^1$  oraz  $\beta_k^2$  okazały się statystycznie nieistotne. Natomiast, gdy weźmiemy pod uwagę wyłącznie rentowność obligacji brytyjskich, to otrzymamy następujące wyniki (w nawiasie podano wartość  $p\text{-value}$ ):  $\rho_1 = 0.858$  (0.000),  $\rho_2 = 0.645$  (0.000),  $\beta_0^1 = 3.593$  (0.000),  $\beta_1^1 = 9.601$  (0.121),  $\beta_0^2 = 3.285$  (0.000),  $\beta_1^2 = 26.897$  (0.006),  $LM = 6.488$  (0.039). Zatem zmiany rentowności obligacji brytyjskich mają znaczenie dla pozostania rynków w stanie umiarkowanej współzależności. Jednak znak przy ocenie parametru  $\beta_1^2$  wskazuje na spadek poziomu współzależności pomiędzy tymi giełdami, gdy spada rentowność obligacji.

Spośród wszystkich analizowanych w tym badaniu relacji wydaje się, że rentowność obligacji ma największe znaczenie dla relacji GPW w Warszawie z giełdami Europy Zachodniej. Dla wszystkich analizowanych par otrzymano odpowiednio duże wartości statystyki  $LM$  oraz odpowiadające jej odpowiednio małe wartości  $p\text{-value}$  ( $< 0,10$ ). Uzyskano ujemne, statystycznie istotne parametry  $\beta_1^1$ ,

które odpowiadają za wpływ zmian rentowności obligacji Polski na wartość prawdopodobieństwa  $p_{11}(t)$ . Dla wzajemnej relacji giełdy polskiej z giełdą niemiecką ocena tego parametru wynosi:  $\beta_1^1 = -12,899$ , z giełdą niemiecką:  $\beta_1^1 = -11,114$ , z giełdą brytyjską:  $\beta_2^1 = -22,749$  oraz z giełdą szwedzką:  $\beta_1^1 = -18,138$ . Jeśli zatem rynki znajdują się w stanie pierwszym, to wzrost rentowności polskich obligacji wpływa na obniżenie wartości warunkowej korelacji Spearmana. Parametry  $\beta_1^2$  i  $\beta_2^2$  są odpowiedzialne za zmiany siły powiązań pomiędzy giełdami w odpowiedzi na zmiany rentowności 10-letnich obligacji, gdy giełdy są w stanie umiarkowanej współzależności. Dla relacji z giełdą niemiecką istotny statystycznie okazał się parametr  $\beta_2^2$ , co oznacza, że dla tej relacji wzrost rentowności niemieckich obligacji osłabia współzależność pomiędzy giełdami. Podobne wnioski uzyskano analizując relację giełdy polskiej z giełdą francuską oraz relację giełdy polskiej z giełdą brytyjską. Dla pierwszej relacji ocena tego parametru wyniosła  $\beta_2^2 = 8.650$ , natomiast dla drugiej:  $\beta_2^2 = 27.187$ . Dla wzajemnych relacji giełdy polskiej z giełdą szwedzką oba parametry okazały się statystycznie istotne. Zatem wzrost rentowności 10-letnich obligacji wpływa na wzrost prawdopodobieństwa  $p_{22}(t)$ , co oznacza spadek poziomu współzależności analizowanych giełd. I odwrotnie, jeśli rentowność obligacji spada, to rośnie wówczas wartość warunkowej korelacji Spearmana pomiędzy stopami zwrotu analizowanych indeksów giełdowych.

W analizach uwzględniono rentowność obligacji z obu krajów. Jeśli natomiast rozważymy rentowność obligacji tylko jednego kraju, to może się okazać, że uzyskane wyniki będą inne. Poniżej zaprezentowano więc wyniki badań, w których jako zmienną objaśniającą w macierzy przejścia  $P_t$  rozważono tylko rentowność obligacji kraju będącego w tytule panelu w tablicy 6.10. Analizując wyniki, można zauważyć kierunek wpływu zmian rentowności obligacji amerykańskich na poziom współzależności giełdy brytyjskiej z giełdą amerykańską. Spadek rentowności zwiększa prawdopodobieństwo pozostania w stanie umiarkowanej współzależności. Inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku badania kierunku wpływu zmian rentowności niemieckich obligacji na współzależność pomiędzy giełdą brytyjską i niemiecką. Tutaj również obserwujemy ich znaczenie tylko dla prawdopodobieństwa przebywania w drugim reżimie, lecz kierunek tego wpływu jest inny niż poprzednio. Wzrost rentowności niemieckich obligacji zwiększa prawdopodobieństwo pozostania w stanie umiarkowanej współzależności pomiędzy tymi giełdami.

**Tabela 6.10.** Oceny parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od rentowności 10-letnich obligacji, zastosowanego do opisu struktury powiązań pomiędzy giełdami (w nawiasie podano wartość *p-value*)

| Kraj        | $\rho_1$         | $\rho_2$         | $\beta_0^1$      | $\beta_1^1$        | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$        | <i>LM</i>         |
|-------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|------------------|--------------------|-------------------|
| USA         |                  |                  |                  |                    |                  |                    |                   |
| Polska      | 0,653<br>(0,000) | 0,258<br>(0,000) | 2,206<br>(0,000) | 0,052<br>(0,987)   | 3,015<br>(0,000) | −0,316<br>(0,999)  | 0,012<br>(0,999)  |
| Niemcy      | 0,782<br>(0,000) | 0,424<br>(0,000) | 2,366<br>(0,000) | 3,413<br>(0,497)   | 2,146<br>(0,000) | −9,029<br>(0,147)  | 3,593<br>(0,166)  |
| Francja     | 0,793<br>(0,000) | 0,459<br>(0,000) | 2,271<br>(0,000) | 3,932<br>(0,367)   | 2,28<br>(0,000)  | −8,173<br>(0,221)  | 3,094<br>(0,213)  |
| W. Brytania | 0,698<br>(0,000) | 0,325<br>(0,000) | 2,967<br>(0,000) | 2,713<br>(0,819)   | 2,92<br>(0,000)  | −23,903<br>(0,019) | 8,520<br>(0,014)  |
| Szwecja     | 0,697<br>(0,000) | 0,478<br>(0,000) | 6,164<br>(0,000) | 0,825<br>(0,947)   | 6,552<br>(0,000) | −1,011<br>(0,998)  | 0,011<br>(0,998)  |
| Niemcy      |                  |                  |                  |                    |                  |                    |                   |
| Polska      | 0,802<br>(0,000) | 0,444<br>(0,000) | 2,211<br>(0,000) | 8,017<br>(0,303)   | 2,752<br>(0,000) | 21,136<br>(0,019)  | 3,634<br>(0,163)  |
| Francja     | 0,975<br>(0,000) | 0,913<br>(0,000) | 3,166<br>(0,000) | 0,000<br>(1,000)   | 3,156<br>(0,000) | 0,000<br>(1,000)   | 0,000<br>(1,000)  |
| W. Brytania | 0,861<br>(0,000) | 0,657<br>(0,000) | 3,368<br>(0,000) | 5,25<br>(0,428)    | 4,05<br>(0,000)  | 50,97<br>(0,000)   | 14,533<br>(0,001) |
| Szwecja     | 0,916<br>(0,000) | 0,788<br>(0,000) | 3,808<br>(0,000) | 0,000<br>(0,999)   | 4,067<br>(0,000) | 0,000<br>(0,999)   | 0,000<br>(0,999)  |
| USA         | 0,784<br>(0,000) | 0,45<br>(0,000)  | 2,592<br>(0,000) | −0,722<br>(0,891)  | 2,546<br>(0,000) | −9,193<br>(0,291)  | 0,862<br>(0,650)  |
| W. Brytania |                  |                  |                  |                    |                  |                    |                   |
| Polska      | 0,707<br>(0,000) | 0,409<br>(0,000) | 3,244<br>(0,000) | −11,118<br>(0,177) | 3,487<br>(0,000) | 27,395<br>(0,01)   | 6,267<br>(0,044)  |
| Niemcy      | 0,858<br>(0,000) | 0,649<br>(0,000) | 3,591<br>(0,000) | 9,209<br>(0,146)   | 3,378<br>(0,000) | 27,695<br>(0,007)  | 6,592<br>(0,037)  |
| Francja     | 0,866<br>(0,000) | 0,649<br>(0,000) | 3,856<br>(0,000) | −3,003<br>(0,632)  | 3,656<br>(0,000) | 29,92<br>(0,008)   | 6,437<br>(0,040)  |
| Szwecja     | 0,836<br>(0,000) | 0,542<br>(0,000) | 3,266<br>(0,000) | 4,411<br>(0,443)   | 1,983<br>(0,000) | 1,974<br>(0,820)   | 0,501<br>(0,778)  |
| USA         | 0,712<br>(0,000) | 0,357<br>(0,000) | 2,779<br>(0,000) | −4,964<br>(0,455)  | 2,71<br>(0,000)  | −16,689<br>(0,028) | 3,812<br>(0,149)  |

Tabela 6.10. (cd.)

| Polska      |                  |                  |                  |                    |                  |                   |                  |
|-------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|------------------|-------------------|------------------|
| Niemcy      | 0,806<br>(0,000) | 0,442<br>(0,000) | 2,061<br>(0,000) | -8,835<br>(0,048)  | 2,303<br>(0,000) | 6,944<br>(0,395)  | 7,309<br>(0,026) |
| Francja     | 0,778<br>(0,000) | 0,449<br>(0,000) | 2,078<br>(0,000) | -8,792<br>(0,056)  | 2,035<br>(0,000) | 4,594<br>(0,467)  | 6,199<br>(0,045) |
| W. Brytania | 0,704<br>(0,000) | 0,382<br>(0,000) | 3,043<br>(0,000) | -11,024<br>(0,108) | 2,438<br>(0,000) | 6,181<br>(0,294)  | 2,570<br>(0,277) |
| Szwecja     | 0,784<br>(0,000) | 0,48<br>(0,000)  | 2,233<br>(0,000) | -13,289<br>(0,078) | 2,918<br>(0,000) | 13,123<br>(0,060) | 9,382<br>(0,009) |
| USA         | 0,637<br>(0,000) | 0,232<br>(0,000) | 2,229<br>(0,000) | -12,936<br>(0,064) | 2,653<br>(0,000) | 2,491<br>(0,670)  | 4,502<br>(0,105) |

Parametry  $\rho_1, \rho_2$  oznaczają współczynniki korelacji kopuli t-Studenta, z których budowano model przełącznikowy; parametry  $\beta_i^j$ , gdzie  $i = 0, 1$ ;  $j = 1, 2$  to współczynniki zależności dla prawdopodobieństw pozostania w  $j$ -tym stanie;  $\beta_0^j$  – wyraz wolny,  $\beta_1^j$  odpowiada za rentowność obligacji kraju podanego w tytule każdego panelu; statystyka dla testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), to:  $LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia

Źródło: opracowanie własne

Zmiana rentowności brytyjskich obligacji wpływa na  $p_{22}(t)$  dla wzajemnej relacji giełdy londyńskiej z giełdami Polski, Francji i Niemiec. Należy zwrócić uwagę, że w relacji giełdy Wielkiej Brytanii z giełdą USA większe znaczenie mają obligacje amerykańskie niż brytyjskie.

Natomiast zmiana rentowności polskich obligacji wpływa na poziom współzależności GPW w Warszawie z giełdą niemiecką, francuską oraz szwedzką. Wzrost rentowności tych obligacji zmniejsza prawdopodobieństwo  $p_{22}(t)$ , zatem obniża się poziom współzależności pomiędzy tymi giełdami. Natomiast nie obserwujemy znaczącego wpływu zmian rentowności obligacji polskich na poziom współzależności warszawskiej GPW z giełdą w Londynie, dla której znaczenie ma tylko rentowność obligacji brytyjskich.

Znaczenie rentowności 10-letnich obligacji (nieco w innym ujęciu) będzie jeszcze analizowane w ostatnim podrozdziale niniejszej monografii.

## Podsumowanie

Podsumowując tę część badań empirycznych, możemy stwierdzić, że rentowność 10-letnich obligacji pochodząca z kraju z rozwiniętą gospodarką ma znaczenie dla wzajemnych relacji giełdy polskiej z rozwiniętymi giełdami Europy Zachodniej. Wzrost rentowności 10-letnich obligacji obniża poziom współzależności tych giełd. Prawidłowość ta została zauważona w badaniu struktury powiązań pomiędzy GPW w Warszawie a giełdą Wielkiej Brytanii, Niemiec, Francji oraz Szwecji. Znaczenie rentowności 10-letnich obligacji zauważono również w poziomie współzależności giełdy brytyjskiej i niemieckiej oraz giełdy brytyjskiej i giełdy amerykańskiej.

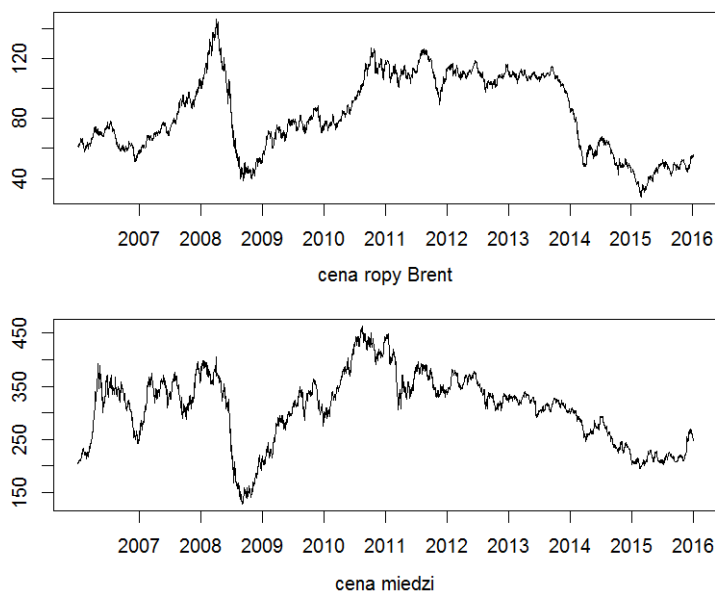
## 6.4. Ceny kontraktów terminowych na wybrane surowce

Kolejna część badań empirycznych dotyczy znaczenia cen wybranych surowców na poziom współzależności giełd. Pod uwagę wziętoienne stopy zwrotu indeksów giełdowych z Polski, Niemiec, Francji, Wielkiej Brytanii, Szwecji, Rosji oraz USA z okresu 2006–2016. Rozważono również ceny kontraktów terminowych na ropę typu Brent oraz na miedź.

Rysunek 6.4 przedstawia ceny kontraktów terminowych na ropę typu Brent (górny panel) oraz na miedź (dolny panel)<sup>46</sup> w latach 2006–2016. Analizując wykres na panelu górnym, zauważamy, że około roku 2008 cena kontraktu na ropę mocno spadła. Jednak od 2009 roku obserwujemy jej systematyczny wzrost. W latach 2011–2014 cena ta stabilizuje się na stosunkowo wysokim poziomie, a następnie w drugiej połowie 2014 roku następuje ponowny jej spadek. Końcem roku 2016 cena kształtuje się na poziomie około 50 USD za baryłkę. Podobne wahania cen kontraktów terminowych obserwujemy dla miedzi. Analizując wykres przedstawiony w panelu dolnym, zauważamy duży ich spadek również około roku 2008. W latach 2009–2010 następuje odbicie i wzrost do poziomu około 450 centów/funt. Po roku 2011 widać jednak trend spadkowy cen kontraktów terminowych na ten surowiec, który utrzymuje się aż do 2016 roku. Pod koniec roku 2016 cena ta kształtuje się na poziomie 260 centów/funt, czyli około 5700 dolarów za tonę.

---

<sup>46</sup> Dane pochodzą ze strony [www.stooq.pl](http://www.stooq.pl) [5.01.2017].



**Rysunek 6.4.** Cena kontraktów terminowych na ropę typu Brent oraz na miedź w latach 2006–2016

Źródło: opracowanie własne

Konsumentami ropy naftowej i miedzi są głównie kraje wysoko rozwinięte, których gospodarki wymagają ciągłej dostawy tych surowców. Największym konsumentem ropy naftowej są Stany Zjednoczone. W Europie największymi odbiorcami ropy są Niemcy, Francja i Wielka Brytania. Ameryka oraz kraje Europy Zachodniej należą również do największych konsumentów miedzi.

## Wyniki badań

Do opisu struktury powiązań pomiędzy giełdami ponownie zastosowany został przełącznikowy model Copula-GARCH z mechanizmem TVPMS, w którym przełączeniu podlegały dwie kopule t-Studenta. W dynamicznej macierzy przejścia  $P_t$  opisanej zależnością (6.2) wyrażenie  $\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_t$  ma postać:

$$\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_t = \beta_0^i + \beta_1^i \Delta \log C_{(t-1)}, \quad (6.9)$$

gdzie  $\Delta \log C_t = \log C_t - \log C_{(t-1)}$  oraz  $C_t$  oznacza cenę kontraktów terminowych na dany surowiec w chwili  $t$ .

Omówienie wyników rozpoczniemy od znaczenia cen kontraktów terminowych na ropę typu Brent w strukturze powiązań pomiędzy giełdami. W tabelicy 6.11 przedstawiono oszacowania parametrów modelu.

**Tabela 6.11.** Oceny parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od cen kontraktów terminowych na ropę typu Brent, zastosowanego do opisu struktury powiązań pomiędzy giełdami (w nawiasie podano wartość *p-value*)

| Kraj        | $\rho_1$         | $\rho_2$         | $\beta_0^1$      | $\beta_1^1$        | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$        | <i>LM</i>         |
|-------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|------------------|--------------------|-------------------|
| USA         |                  |                  |                  |                    |                  |                    |                   |
| Polska      | 0,617<br>(0,000) | 0,218<br>(0,000) | 2,504<br>(0,000) | 34,786<br>(0,043)  | 2,875<br>(0,000) | -36,712<br>(0,051) | 8,959<br>(0,011)  |
| Niemcy      | 0,780<br>(0,000) | 0,460<br>(0,000) | 2,938<br>(0,000) | 19,491<br>(0,019)  | 2,981<br>(0,001) | -34,434<br>(0,071) | 6,177<br>(0,046)  |
| Francja     | 0,777<br>(0,000) | 0,443<br>(0,000) | 2,667<br>(0,000) | 28,722<br>(0,011)  | 2,508<br>(0,000) | -41,559<br>(0,006) | 13,109<br>(0,001) |
| W. Brytania | 0,688<br>(0,000) | 0,298<br>(0,000) | 3,132<br>(0,000) | 30,753<br>(0,041)  | 2,323<br>(0,000) | -41,752<br>(0,024) | 8,390<br>(0,015)  |
| Szwecja     | 0,697<br>(0,000) | 0,480<br>(0,000) | 6,157<br>(0,000) | 0,002<br>(0,998)   | 6,562<br>(0,000) | -0,003<br>(0,898)  | 0,156<br>(0,925)  |
| Rosja       | 0,609<br>(0,000) | 0,281<br>(0,000) | 5,806<br>(0,000) | -33,226<br>(0,395) | 6,342<br>(0,000) | -18,966<br>(0,989) | 0,169<br>(0,919)  |
| Niemcy      |                  |                  |                  |                    |                  |                    |                   |
| Polska      | 0,808<br>(0,000) | 0,453<br>(0,000) | 2,151<br>(0,000) | 14,109<br>(0,437)  | 2,498<br>(0,000) | -16,443<br>(0,174) | 3,191<br>(0,203)  |
| Francja     | 0,975<br>(0,000) | 0,913<br>(0,000) | 3,133<br>(0,000) | 0,003<br>(1)       | 3,111<br>(0,989) | -0,002<br>(0,998)  | 0,232<br>(0,890)  |
| W. Brytania | 0,859<br>(0,000) | 0,659<br>(0,000) | 3,551<br>(0,000) | 0,002<br>(0,998)   | 2,879<br>(0,000) | -0,003<br>(0,978)  | 0,132<br>(0,936)  |
| Szwecja     | 0,916<br>(0,000) | 0,788<br>(0,000) | 3,820<br>(0,000) | 0,004<br>(0,995)   | 4,089<br>(0,000) | -0,005<br>(0,996)  | 0,188<br>(0,910)  |
| Rosja       | 0,673<br>(0,000) | 0,251<br>(0,000) | 4,345<br>(0,000) | 23,632<br>(0,250)  | 3,302<br>(0,000) | -20,449<br>(0,278) | 2,082<br>(0,353)  |
| USA         | 0,780<br>(0,000) | 0,460<br>(0,000) | 2,938<br>(0,000) | 19,491<br>(0,019)  | 2,981<br>(0,001) | -34,434<br>(0,071) | 6,177<br>(0,046)  |
| W. Brytania |                  |                  |                  |                    |                  |                    |                   |
| Polska      | 0,705<br>(0,000) | 0,415<br>(0,000) | 3,308<br>(0,000) | 1,57<br>(0,96)     | 3,333<br>(0,000) | -45,121<br>(0,058) | 2,663<br>(0,264)  |
| Niemcy      | 0,859<br>(0,000) | 0,659<br>(0,000) | 3,552<br>(0,000) | -0,059<br>(0,999)  | 2,88<br>(0,000)  | 0,059<br>(0,999)   | 0,006<br>(0,997)  |
| Francja     | 0,865<br>(0,000) | 0,645<br>(0,000) | 3,902<br>(0,000) | -0,022<br>(0,999)  | 2,899<br>(0,000) | 0,036<br>(0,999)   | 0,003<br>(0,999)  |
| Szwecja     | 0,836<br>(0,000) | 0,544<br>(0,000) | 3,526<br>(0,000) | -37,51<br>(0,004)  | 2,153<br>(0,000) | 35,714<br>(0,159)  | 9,311<br>(0,010)  |
| Rosja       | 0,736<br>(0,000) | 0,386<br>(0,000) | 4,117<br>(0,000) | -43,525<br>(0,037) | 4,413<br>(0,000) | 59,588<br>(0,062)  | 4,822<br>(0,090)  |
| USA         | 0,695<br>(0,000) | 0,318<br>(0,000) | 3,049<br>(0,000) | 28,966<br>(0,044)  | 2,388<br>(0,000) | -35,466<br>(0,056) | 8,198<br>(0,017)  |



Tabela 6.11. (cd.)

| Polska      |                  |                  |                  |                   |                  |                    |                  |
|-------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|--------------------|------------------|
| Niemcy      | 0,808<br>(0,000) | 0,453<br>(0,000) | 2,152<br>(0,000) | 14,133<br>(0,437) | 2,498<br>(0,000) | −16,45<br>(0,174)  | 3,191<br>(0,203) |
| Francja     | 0,772<br>(0,000) | 0,448<br>(0,000) | 2,118<br>(0,000) | 13,703<br>(0,448) | 2,084<br>(0,001) | −17,413<br>(0,263) | 2,913<br>(0,233) |
| W. Brytania | 0,705<br>(0,000) | 0,415<br>(0,000) | 3,308<br>(0,000) | 1,58<br>(0,959)   | 3,332<br>(0,000) | −45,022<br>(0,058) | 2,663<br>(0,264) |
| Szwecja     | 0,803<br>(0,000) | 0,491<br>(0,000) | 1,947<br>(0,000) | 21,552<br>(0,201) | 2,814<br>(0,000) | −20,95<br>(0,231)  | 3,219<br>(0,200) |
| Rosja       | 0,730<br>(0,000) | 0,360<br>(0,000) | 4,182<br>(0,000) | 9,599<br>(0,616)  | 3,602<br>(0,000) | −17,33<br>(0,521)  | 0,446<br>(0,801) |
| USA         | 0,615<br>(0,000) | 0,217<br>(0,000) | 2,594<br>(0,000) | 41,842<br>(0,038) | 2,844<br>(0,000) | −34,489<br>(0,142) | 9,096<br>(0,011) |

Parametry  $\rho_1, \rho_2$  oznaczają współczynniki korelacji kopuli t-Studenta, z których budowano model przełącznikowy; parametry  $\beta_i^j$ , gdzie  $i = 0, 1$ ;  $j = 1, 2$  to współczynniki zależności (6.9) dla prawdopodobieństw pozostania w  $j$ -tym stanie; statystyka dla testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), to:  $LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia

Źródło: opracowanie własne

Analizując wyniki zamieszczone w tablicy, zauważamy, że tylko dla niewielu przypadków model z mechanizmem TVPMS, w którym uwzględnione zostały ceny kontraktów na ropę, jest istotnie lepszy od modelu ze stałą macierzą przejścia. W wyniku przeprowadzonego testu porównującego te dwa modele, tylko dla relacji giełdy amerykańskiej z wybranymi giełdami Europy uzyskano stosunkowo dużą wartość statystyki  $LM$  oraz odpowiadającą jej wartość  $p\text{-value} \leq 0,10$ . Wniosek ten dotyczy relacji giełdy USA z GPW w Warszawie oraz z giełdami Europy Zachodniej. Nie wykazano istnienia tego efektu dla relacji giełdy amerykańskiej z giełdą szwedzką oraz z giełdą rosyjską.

Być może przyczyną tego, że cena ropy nie wpływa na współzależność giełdy amerykańskiej z giełdą szwedzką lub z giełdą rosyjską, jest fakt, że w Rosji występują wystarczająco bogate złoża ropy naftowej, by zaspokoić jej potrzeby, natomiast wykorzystywana w Szwecji energia w większości pochodzi z innych źródeł niż ropa. Zatem zawirowania na rynku cen surowców mogą mieć mniejszy wpływ na ryzyko inwestycji na giełdach tych krajów.

Dla par rynków, dla których  $p\text{-value} \leq 0,05$ , zauważamy, że zmiana ceny kontraktów na ropę wpływa na poziom współzależności giełd niezależnie od stanu Markowa, w którym rynki się znajdują w chwili  $(t - 1)$ . Jeśli rynki przebywają w stanie pierwszym, dodatnia wartość współczynnika  $\beta_1^1$  wskazuje na wzrost prawdopodobieństwa pozostania w stanie silniejszej współzależności, gdy cena ropy rośnie. Gdy natomiast rynki przebywają w stanie umiarkowanej współzależności, ujemna wartość współczynnika  $\beta_1^2$  oznacza spadek prawdopodobieństwa pozostawania rynków w tym stanie. Dla relacji giełdy amerykańskiej z giełdą polską oszacowania tych współczynników wynoszą:  $\beta_1^1 = 34,789$  oraz  $\beta_1^2 = -36,712$ , z giełdą niemiecką:  $\beta_1^1 = 19,491$  i  $\beta_1^2 = -34,434$ , z giełdą francuską:  $\beta_1^1 = 28,722$  i  $\beta_1^2 = -41,559$ , natomiast z giełdą brytyjską:  $\beta_1^1 = 30,753$  i  $\beta_1^2 = -41,752$ . Uzyskane wyniki pokazują, iż wzrost ceny kontraktu na ropę typu Brent skutkuje wzrostem warunkowego współczynnika korelacji Spearmana, który określa nam poziom współzależności giełd w danej chwili  $t$ . Z drugiej strony spadek cen kontraktów osłabia siły wzajemnych powiązań pomiędzy giełdami.

Jeśli przeanalizujemy wyniki dotyczące relacji giełdy niemieckiej z innymi europejskimi giełdami, zauważymy, że kierunek oddziaływania ceny kontraktów na ropę na prawdopodobieństwo pozostania w danym stanie jest taki sam, jak w przypadku analizy współzależności giełdy amerykańskiej z giełdami Europy. Jednak znaczenie tych cen jest na tyle małe, że nigdzie nie uzyskano odpowiednio dużej wartości statystyki  $LM$ .

Podobny kierunek oddziaływania zmian cen kontraktów terminowych na poziom współzależności giełd jest obserwowany w relacji GPW w Warszawie z innymi giełdami. Znaki ocen parametrów  $\beta_1^1$  oraz  $\beta_1^2$  sugerują, iż wzrost ceny ropy wywołuje niewielki wzrost warunkowej korelacji Spearmana. Jednakże również nie udało się wykazać statystycznej istotności tego oddziaływania.

Znaczenie ceny kontraktów na ropę wykazano jeszcze dla relacji giełdy brytyjskiej z giełdami Szwecji i Rosji. Należy zwrócić uwagę na fakt, że dla tych relacji znaki ocen parametrów  $\beta_1^1$  i  $\beta_1^2$  są przeciwne niż w poprzednich analizach. Możemy zatem wnioskować, że wzrost ceny kontraktów osłabia siłę powiązań giełdy brytyjskiej z giełdą rosyjską oraz z giełdą szwedzką.

Kolejnym etapem przeprowadzonych badań była analiza roli ceny kontraktów terminowych na miedź. Wyniki ilustruje tablica 6.12. Analizując wyniki dotyczące znaczenia cen tego surowca na poziom współzależności badanych giełd,

zauważamy, że cena kontraktów terminowych na miedź ma takie samo znaczenie, jak cena kontraktów terminowych na ropę typu Brent. Badając strukturę powiązań giełdy amerykańskiej z giełdami Europy, tylko dla Rosji oraz Szwecji nie wykazano znaczenia tego surowca we wzajemnych relacjach z giełdą amerykańską. Kierunek oddziaływania zmian rozważanych cen na prawdopodobieństwa  $p_{11}$  oraz  $p_{22}$  jest taki sam, jak w przypadku zmian ceny kontraktów terminowych na ropę. Dodatnia wartość oceny współczynnika  $\beta_1^1$  oraz ujemna wartość oceny współczynnika  $\beta_1^2$  świadczą o tym, że wzrost ceny skutkuje wzrostem warunkowej korelacji Spearmana.

**Tabela 6.12.** Oceny parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od cen kontraktów na miedź, zastosowaną do opisu struktury powiązań pomiędzy giełdami (w nawiasie podano wartość  $p$ -value)

| Kraj        | $\rho_1$         | $\rho_2$         | $\beta_0^1$      | $\beta_1^1$       | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$        | $LM$             |
|-------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|--------------------|------------------|
| USA         |                  |                  |                  |                   |                  |                    |                  |
| Polska      | 0,624<br>(0,000) | 0,22<br>(0,000)  | 2,699<br>(0,000) | 78,691<br>(0,008) | 2,566<br>(0,000) | 19,456<br>(0,55)   | 7,109<br>(0,029) |
| Niemcy      | 0,789<br>(0,000) | 0,452<br>(0,000) | 2,408<br>(0,000) | 16,204<br>(0,249) | 2,521<br>(0,000) | -42,467<br>(0,024) | 5,131<br>(0,077) |
| Francja     | 0,805<br>(0,000) | 0,467<br>(0,000) | 2,108<br>(0,000) | 21,705<br>(0,117) | 2,227<br>(0,000) | -27,842<br>(0,058) | 6,596<br>(0,037) |
| W. Brytania | 0,73<br>(0,000)  | 0,357<br>(0,000) | 2,465<br>(0,000) | 33,544<br>(0,077) | 2,198<br>(0,000) | -31,08<br>(0,089)  | 7,221<br>(0,027) |
| Szwecja     | 0,697<br>(0,000) | 0,480<br>(0,000) | 6,157<br>(0,000) | 0,000<br>(1,000)  | 6,562<br>(0,000) | 0,000<br>(1,000)   | 0,000<br>(1,000) |
| Rosja       | 0,61<br>(0,000)  | 0,282<br>(0,000) | 5,634<br>(0,000) | -3,478<br>(0,951) | 6,328<br>(0,000) | -11,851<br>(0,775) | 0,077<br>(0,962) |
| Niemcy      |                  |                  |                  |                   |                  |                    |                  |
| Polska      | 0,795<br>(0,000) | 0,427<br>(0,000) | 2,365<br>(0,000) | 65,902<br>(0,005) | 2,067<br>(0,000) | 10,968<br>(0,467)  | 5,347<br>(0,069) |
| Francja     | 0,975<br>(0,000) | 0,913<br>(0,000) | 3,132<br>(0,000) | 0,000<br>(1,000)  | 3,111<br>(0,000) | 0,000<br>(0,999)   | 0,002<br>(0,999) |
| W. Brytania | 0,859<br>(0,000) | 0,659<br>(0,000) | 3,551<br>(0,000) | 0,000<br>(1,000)  | 2,879<br>(0,000) | 0,000<br>(0,999)   | 0,002<br>(0,999) |
| Szwecja     | 0,916<br>(0,000) | 0,788<br>(0,000) | 3,819<br>(0,000) | 0,000<br>(1,000)  | 4,089<br>(0,000) | 0,000<br>(1,000)   | 0,000<br>(1,000) |
| Rosja       | 0,674<br>(0,000) | 0,254<br>(0,001) | 4,185<br>(0,000) | 0,000<br>(1)      | 3,189<br>(0,000) | 0,000<br>(1,000)   | 0,000<br>(1,000) |
| USA         | 0,789<br>(0,000) | 0,452<br>(0,000) | 2,408<br>(0,000) | 16,204<br>(0,249) | 2,521<br>(0,000) | -42,467<br>(0,024) | 5,131<br>(0,077) |

Tabela 6.12. (cd.)

| Kraj        | $\rho_1$         | $\rho_2$         | $\beta_0^1$      | $\beta_1^1$        | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$        | $LM$             |
|-------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|------------------|--------------------|------------------|
| W. Brytania |                  |                  |                  |                    |                  |                    |                  |
| Polska      | 0,711<br>(0,000) | 0,415<br>(0,000) | 3,083<br>(0,000) | 0,141<br>(0,994)   | 2,818<br>(0,001) | -0,005<br>(0,993)  | 0,005<br>(0,997) |
| Niemcy      | 0,859<br>(0,000) | 0,659<br>(0,000) | 3,551<br>(0,000) | 0,000<br>(1,000)   | 2,879<br>(0,000) | 0,000<br>(0,999)   | 0,002<br>(0,999) |
| Francja     | 0,865<br>(0,000) | 0,645<br>(0,000) | 3,903<br>(0,000) | 0,005<br>(0,999)   | 2,899<br>(0,000) | 0,016<br>(0,998)   | 0,001<br>(0,997) |
| Szwecja     | 0,837<br>(0,000) | 0,55<br>(0,000)  | 3,221<br>(0,000) | -0,043<br>(0,997)  | 2,023<br>(0,000) | 0,02<br>(0,999)    | 0,006<br>(0,997) |
| Rosja       | 0,735<br>(0,000) | 0,379<br>(0,000) | 3,753<br>(0,000) | -12,367<br>(0,515) | 3,672<br>(0,000) | -5,645<br>(0,876)  | 0,239<br>(0,887) |
| USA         | 0,73<br>(0,000)  | 0,357<br>(0,000) | 2,465<br>(0,000) | 33,539<br>(0,077)  | 2,197<br>(0,000) | -31,051<br>(0,089) | 7,22<br>(0,027)  |
| Polska      |                  |                  |                  |                    |                  |                    |                  |
| Niemcy      | 0,795<br>(0,000) | 0,427<br>(0,000) | 2,365<br>(0,000) | 65,902<br>(0,005)  | 2,067<br>(0,000) | 10,968<br>(0,467)  | 5,347<br>(0,069) |
| Francja     | 0,78<br>(0,000)  | 0,456<br>(0,000) | 1,979<br>(0,000) | 0,029<br>(0,987)   | 2,045<br>(0,000) | -0,057<br>(0,996)  | 0,005<br>(0,997) |
| W. Brytania | 0,711<br>(0,000) | 0,415<br>(0,000) | 3,083<br>(0,000) | 0,141<br>(0,994)   | 2,818<br>(0,001) | -0,005<br>(0,993)  | 0,005<br>(0,997) |
| Szwecja     | 0,808<br>(0,000) | 0,491<br>(0,000) | 1,788<br>(0,004) | 20,162<br>(0,602)  | 2,669<br>(0,000) | -15,641<br>(0,383) | 1,428<br>(0,490) |
| Rosja       | 0,731<br>(0,000) | 0,36<br>(0,000)  | 4,196<br>(0,000) | 18,003<br>(0,207)  | 3,59<br>(0,000)  | -21,009<br>(0,675) | 0,544<br>(0,762) |
| USA         | 0,623<br>(0,000) | 0,211<br>(0,000) | 2,526<br>(0,000) | 75,781<br>(0,007)  | 2,376<br>(0,000) | 18,827<br>(0,484)  | 6,969<br>(0,031) |

Parametry  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  oznaczają współczynniki korelacji kopuli t-Studenta, z których budowano model przełącznikowy; parametry  $\beta_i^j$ , gdzie  $i = 0, 1$ ;  $j = 1, 2$  to współczynniki zależności (6.9) dla prawdopodobieństw pozostania w  $j$ -tym stanie; statystyka dla testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), to:  $LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia

Źródło: opracowanie własne

W samej Europie natomiast udało się wskazać tylko jedną parę, dla której cena miedzi ma istotne znaczenie w strukturze wzajemnych powiązań. Jest to para utworzona z giełdy niemieckiej i GPW w Warszawie ( $LM = 5.347$ ,  $p\text{-value} = 0,069$ ). W tej relacji istotny statystycznie, dodatni parametr  $\beta_1^1$  ( $\beta_1^1 = 65.902$ ) świadczy o wzroście warunkowej korelacji Spearmana na skutek wzrostu cen kontraktów terminowych miedzi, ale tylko wówczas, gdy rynki są już w stanie silnej współzależności. Natomiast parametr  $\beta_1^2$  okazał się statystycznie nieistotny.

Wykonano również badanie, w którym pod uwagę wzięto oba wskaźniki razem. Uwzględnienie w macierzy przejścia cen kontraktów terminowych na oba surowce może skuteczniej poprawić model opisu współzależności giełd. Wyniki są prezentowane w tabeli 6.13.

**Tabela 6.13.** Oceny parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od zmian cen kontraktów terminowych na surowce, zastosowanego do opisu struktury powiązań między giełdami (w nawiasie podano wartość *p-value*)

| Kraj        | $\beta_0^1$      | $\beta_1^1$       | $\beta_2^1$       | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$        | $\beta_2^2$       | <i>LM</i>         |
|-------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| USA         |                  |                   |                   |                  |                    |                   |                   |
| Polska      | 2,802<br>(0,000) | 33,037<br>(0,201) | 39,711<br>(0,208) | 3,174<br>(0,000) | −35,802<br>(0,037) | 5,400<br>(0,748)  | 8,057<br>(0,090)  |
| Niemcy      | 2,537<br>(0,000) | 7,919<br>(0,525)  | 13,591<br>(0,295) | 2,323<br>(0,000) | −36,012<br>(0,041) | −14,69<br>(0,607) | 9,616<br>(0,047)  |
| Francja     | 2,409<br>(0,000) | 13,153<br>(0,299) | 15,225<br>(0,292) | 2,397<br>(0,000) | −37,945<br>(0,012) | −25,79<br>(0,154) | 14,949<br>(0,005) |
| W. Brytania | 2,963<br>(0,000) | 15,993<br>(0,351) | 26,854<br>(0,171) | 2,76<br>(0,000)  | −35,832<br>(0,109) | −39,53<br>(0,036) | 10,098<br>(0,039) |
| Szwecja     | 6,157<br>(0,000) | 0,000<br>(0,472)  | 0,000<br>(0,839)  | 6,561<br>(0,000) | 0,000<br>(0,999)   | 0,000<br>(0,999)  | 0,001<br>(0,999)  |
| Rosja       | 5,642<br>(0,000) | 0,228<br>(0,998)  | 0,599<br>(0,991)  | 6,316<br>(0,000) | −0,394<br>(0,998)  | −0,332<br>(0,994) | 0,002<br>(0,999)  |

Parametry  $\beta_i^j$ ,  $i = 0, 1, 2$ ;  $j = 1, 2$  to współczynniki zależności dla prawdopodobieństw pozostania w  $j$ -tym stanie;  $\beta_0^j$  – wyraz wolny,  $\beta_1^j$  odpowiada za cenę kontraktu na ropę typu Brent,  $\beta_2^j$  odpowiada za cenę kontraktu na miedź; statystyka dla testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), to:  $LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia

Źródło: opracowanie własne

Widać, że dla relacji giełdy amerykańskiej z giełdą Polski, Niemiec oraz Francji większe znaczenie ma cena kontraktów terminowych na ropę. Ich wzrost osłabia prawdopodobieństwo pozostawania w reżimie umiarkowanej współzależności. W przypadku relacji z Wielką Brytanią istotny okazał się tylko parametr  $\beta_2^2$ , który jest związany ze zmianą cen kontraktów terminowych na miedź.

Dla relacji giełdy niemieckiej, giełdy brytyjskiej oraz giełdy polskiej z analizowanymi pozostałymi giełdami Europy nigdzie nie uzyskano odpowiednio dużej statystyki *LM*. Wyników zatem nie zamieszczono w monografii.

## **Podsumowanie**

W tej części badań testowano wpływ ceny kontraktów terminowych na ropę typu Brent i miedź na wzajemną współzależność stóp zwrotu analizowanych indeksów giełdowych. Pomimo że nie udało się wykazać istotnego wpływu cen tych surowców na współzależność między wszystkimi analizowanymi tu giełdami, to jednak można zauważyć pewne prawidłowości. Dla relacji giełdy amerykańskiej z wybranymi giełdami Europy duże znaczenie miały oba surowce. W Europie cena kontraktów na ropę miała znaczenie dla relacji giełdy brytyjskiej z giełdą szwedzką i rosyjską, natomiast cena kontraktów na miedź – dla relacji giełdy niemieckiej z giełdą polską. Jeśli natomiast w modelu uwzględnimy ceny kontraktów na oba surowce, to tylko dla relacji giełdy amerykańskiej z pozostałymi miały one statystycznie istotne znaczenie.

## **6.5. Rola innych czynników makroekonomicznych w strukturze powiązań giełd**

Rynek finansowy odzwierciedla ogólną kondycję ekonomiczną danego kraju. To sprawia, że również inne sektory gospodarki są powiązane z giełdą papierów wartościowych.

W rozdziale tym przedstawiona zostanie empiryczna weryfikacja wpływu zmiennych makroekonomicznych na współzależność wybranych giełd. Jest to kontynuacja badania, którego wyniki zostały opublikowane w pracy Czapkiewicz i in. (2018).

### **Dane**

Tym razem pod uwagę wzięto tylko cztery giełdy: Polski, Niemiec, Wielkiej Brytanii oraz Francji. Dane obejmują okres od stycznia 2006 roku do końca roku 2016. W tym badaniu wszystkie stopy zwrotu zostały wyznaczone w euro (a nie tak jak poprzednio w dolarach). Pod uwagę wzięto następujące wskaźniki makroekonomiczne: rentowność 10-letnich obligacji (LTI), indeks cen konsumpcyjnych (CPI), indeks cen produkcji przemysłowej (IP) i stopę bezrobocia (UNEMP). Wszystkie te wskaźniki są notowane na koniec miesiąca. Indeks cen konsumpcyjnych i indeks cen produkcji przemysłowej jest podany jako procentowa zmiana w porównaniu z tym samym okresem w roku poprzednim. Rentowność obligacji

jest wyznaczona na podstawie długoterminowych obligacji rządowych lub porównywalnych papierów wartościowych (według kryterium konwergencji traktatu z Maastricht). Stopa bezrobocia jest wyrażona w procentach i wskazuje liczbę bezrobotnych jako odsetek siły roboczej (łączna liczba osób zatrudnionych i bezrobotnych). Z wszystkich danych, zwłaszcza dotyczących bezrobocia, została usunięta sezonowość.

W tabelicy 6.14 przedstawione zostały średnie i odchylenia standardowe analizowanych wskaźników makroekonomicznych. Analizując zestawienia wyników zawarte w tej tabelicy, zauważamy, że najwyższe średnie LTI występują w Polsce (5,168%), a najniższe w Niemczech (2,751%). Przeciętna wartość LTI w Wielkiej Brytanii jest zbliżona do przeciętnej wartości LTI we Francji (około 3%). We wszystkich jednak przypadkach standardowe odchylenie jest na tym samym poziomie i wynosi około jednego procenta.

**Tabela 6.14.** Średnia arytmetyczna oraz odchylenie standardowe dla zmiennych makroekonomicznych

|       |              | Francja | Niemcy | W. Brytania | Polska |
|-------|--------------|---------|--------|-------------|--------|
| LTI   | średnia      | 3,16    | 2,751  | 3,344       | 5,168  |
|       | odch. stand. | 0,950   | 1,139  | 1,204       | 1,009  |
| CPI   | średnia      | 1,606   | 1,672  | 2,651       | 2,452  |
|       | odch. stand. | 0,975   | 0,899  | 1,032       | 1,578  |
| IP    | średnia      | 1,545   | 1,591  | 4,006       | 1,908  |
|       | odch. stand. | 2,945   | 2,618  | 6,406       | 2,921  |
| UNEMP | średnia      | 9,311   | 6,642  | 6,247       | 9,635  |
|       | odch. stand. | 0,892   | 2,176  | 1,329       | 3,248  |

Indeks cen konsumpcyjnych i wskaźnik cen producenta przemysłowego mierzą zmianę procentową w porównaniu z tym samym okresem w roku poprzednim; Długoterminowa stopa procentowa jest obliczana na podstawie długoterminowych obligacji rządowych lub porównywalnych papierów wartościowych (według kryterium konwergencji traktatu z Maastricht); miesięczna stopa bezrobocia jest wyrażona w procentach

Źródło: opracowanie własne

Analizując zestawienie wyników dotyczące inflacji, widzimy, że średni indeks CPI jest najwyższy w Wielkiej Brytanii (średnia wynosi tu 2,651% z odchyleniem standardowym równym 1,032%), a najniższy w Niemczech (średnia 1,672% z odchyleniem standardowym 0,899%). W Polsce średnia indeksu CPI wynosi 2,452% (przy odchyleniu standardowym równym 1,578%) i jest ona podobna do średniej inflacji w Wielkiej Brytanii (średnie CPI wynosi 2,651%, natomiast odchylenie standardowe równe jest 1,039%).

Kolejny analizowany wskaźnik dotyczy produkcji przemysłowej. Przeciętny IP jest najwyższy w Wielkiej Brytanii (średnia wynosi 4,006%), ale jednocześnie wskaźnik ten jest tutaj najbardziej zróżnicowany (odchylenie standardowe wynosi 6,406%). Dla Francji i Niemiec jest on prawie taki sam (średnie wynoszą tu około 1,545 i 1,591%) przy równocześnie bardzo podobnym zróżnicowaniu (około 2,945 i 2,618%). Natomiast dla Polski wskaźnik IP przeciętnie wynosi około 1,908% z odchyleniem standardowym 2,921%.

Stopa bezrobocia przeciętnie jest najwyższa w Polsce (średnia 9,635 z odchyleniem standardowym 3,248%), a najniższa w Niemczech (średnia 4,642% z odchyleniem standardowym wynoszącym 2,17%). Można również zauważyć, że przeciętna stopa bezrobocia we Francji jest podobna do tej w Polsce, przy czym w Polsce odchylenie standardowe jest dużo większe niż we Francji (wynosi ono 3,248 %, podczas gdy we Francji tylko 0,892%).

W wyniku zastosowania testu Dickeya-Fullera nie mamy podstaw do przyjęcia założenia o stacjonarności szeregów czasowych utworzonych dla rozpatrywanych wskaźników. W celu uzyskania stacjonarności dla wszystkich danych zastosowano różnicowanie pierwszego rzędu.

Tablica 6.15 przedstawia macierze ocen współczynników korelacji liniowej utworzone dla przyrostów analizowanych zmiennych makroekonomicznych. Dla par przyrostów LTI Europy Zachodniej oceny współczynników korelacji liniowej Pearsona są większe niż 0,70. Natomiast przyrosty LTI z Polski są stosunkowo słabo skorelowane z pozostałymi.

Największy współczynnik korelacji liniowej Pearsona wynosi 0,556 (z przyrostami LTI Francji). Wartości ocen współczynników korelacji pomiędzy przyrostami CPI są relatywnie niskie. Najwyższy współczynnik jest pomiędzy danymi Francji i Niemiec, gdzie ocena współczynnika korelacji liniowej Pearsona wynosi 0,607. Najniższą wartość oceny tego parametru odnotowano dla przyrostów CPI z Polski i z Wielkiej Brytanii (0,106).

Jeśli teraz przeanalizujemy wartości ocen współczynników korelacji między przyrostami IP, to zauważymy, że tylko przyrosty indeksów produkcji przemysłowej pochodzące z Francji i z Niemiec są stosunkowo mocno ze sobą skorelowane (0,754). Dla pozostałych par z krajów Europy Zachodniej wartości ocen współczynników korelacji utrzymują się na umiarkowanym poziomie. Natomiast ocena współczynnika korelacji między przyrostami IP z Polski i z innego kraju jest bardzo niska (najwyższa to 0,186).



**Tabela 6.15.** Oceny współczynników korelacji liniowej pomiędzy przyrostami indeksów makroekonomicznych

|             | Francja | Niemcy | W. Brytania | Polska |
|-------------|---------|--------|-------------|--------|
| LTI         |         |        |             |        |
| Francja     | 1       |        |             |        |
| Niemcy      | 0,854   | 1      |             |        |
| W. Brytania | 0,709   | 0,804  | 1           |        |
| Polska      | 0,556   | 0,45   | 0,418       | 1      |
| CPI         |         |        |             |        |
| Francja     | 1       |        |             |        |
| Niemcy      | 0,607   | 1      |             |        |
| W. Brytania | 0,397   | 0,371  | 1           |        |
| Polska      | 0,319   | 0,163  | 0,106       | 1      |
| IP          |         |        |             |        |
| Francja     | 1       |        |             |        |
| Niemcy      | 0,754   | 1      |             |        |
| W. Brytania | 0,610   | 0,552  | 1           |        |
| Polska      | 0,130   | 0,186  | 0,105       | 1      |
| UNEMP       |         |        |             |        |
| Francja     | 1       |        |             |        |
| Niemcy      | 0,432   | 1      |             |        |
| W. Brytania | 0,396   | 0,148  | 1           |        |
| Polska      | 0,424   | 0,449  | 0,222       | 1      |

Źródło: opracowanie własne

Na koniec przeanalizowana zostanie korelacja pomiędzy przyrostami stopy bezrobocia. Okazuje się, że przyrosty stóp bezrobocia są bardzo słabo ze sobą skorelowane. Najwyższy współczynnik korelacji uzyskano dla przyrostów bezrobocia w Polsce i Wielkiej Brytanii (0,449).

## Wyniki badań

Do opisu stóp zwrotu tym razem najlepszy okazał się model AR(1)-GJR-GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem t-Studenta.

Do opisu struktury powiązań pomiędzy stopami zwrotu, tak jak w poprzednich badaniach, użyto przełącznikowego modelu Copula-GARCH, w którym przełączeniu podlegały dwie kopule t-Studenta. W macierzy przejścia  $P_t$ , opisaną równością (6.2), wyrażenie  $\mathbf{x}_{t-1}^T$  przyjmuje postać:

$$\mathbf{x}_{t-1}^T \boldsymbol{\beta}_i = \beta_0^i + \sum_{k=1}^2 \beta_{L_k}^i L_{k,t-1} + \sum_{k=1}^2 \beta_{C_i}^i C_{k,t-1} + \sum_{k=1}^2 \beta_{I_i}^i I_{k,t-1} + \sum_{k=1}^2 \beta_{U_i}^i U_{k,t-1}, \quad (6.10)$$

gdzie  $L_{k,t-1}$ ,  $C_{k,t-1}$ ,  $I_{k,t-1}$  oraz  $U_{k,t-1}$ , ( $k = 1, 2$ ) są oznaczone odpowiednio miesięczne przyrosty wskaźników: rentowności 10-letnich obligacji (LTI), indeksu CPI, indeksu produkcji (IP) oraz stopy bezrobocia (UNEMP), rozpatrywanych w  $k$ -tym kraju.

W badaniu rozważamy dzienne stopy zwrotów indeksów giełdowych, podczas gdy dane makroekonomiczne mają częstotliwość miesięczną. Ponieważ publikacje danych makroekonomicznych odbywają się pod koniec każdego miesiąca, w badaniu zostały rozważone dwa przypadki. W I przypadku zbadano, czy na współzależność giełd w danym miesiącu mają wpływ informacje o wskaźnikach ekonomicznych opublikowane w poprzednim miesiącu, natomiast w II przypadku testujemy znaczenie aktualnej sytuacji ekonomicznej danego kraju, dla której benchmarkiem będą wartości wskaźników opublikowane pod koniec bieżącego miesiąca. Zatem w ostatnim przypadku mówimy raczej o „zmianach jednoczesnych” poziomów współzależności pomiędzy giełdami papierów wartościowych a kondycją gospodarczą krajów, z których te giełdy pochodzą.

Tablica 6.16 zawiera wartości  $p$ -value (dla wartości statystyki  $LM$ ) uzyskane w wyniku zastosowania testu porównującego dwa modele: model przełącznikowy ze stałą macierzą przejścia (MS) oraz model przełącznikowy z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) w obu przypadkach.

**Tabela 6.16.** Wartości  $p$ -value dla testu porównującego model TVPMS z modelem MS

|                     | Francja | Niemcy | W. Brytania | Polska |
|---------------------|---------|--------|-------------|--------|
| <b>PRZYPADEK I</b>  |         |        |             |        |
| Francja             | –       | 0,966  | 0,593       | 0,75   |
| Niemcy              | 0,966   | –      | 0,168       | 0,508  |
| Wielka Brytania     | 0,593   | 0,168  | –           | 0,308  |
| Polska              | 0,750   | 0,508  | 0,308       | –      |
| <b>PRZYPADEK II</b> |         |        |             |        |
| Francja             | –       | 0,984  | 0,036       | 0,076  |
| Niemcy              | 0,984   | –      | 0,356       | 0,001  |
| Wielka Brytania     | 0,036   | 0,356  | –           | 0,087  |
| Polska              | 0,076   | 0,001  | 0,087       | –      |

Do testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), zastosowano statystykę postaci:  $LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia

Źródło: Czapkiewicz i in. (2018)

Porównując wyniki uzyskane dla przypadku I i dla przypadku II, dochodzimy do wniosku, że tylko aktualna sytuacja ekonomiczna ma znaczący wpływ na strukturę powiązań pomiędzy rynkami. Przeszłe informacje dotyczące wskaźników makroekonomicznych nie odgrywają większego znaczenia we wzajemnych relacjach giełd papierów wartościowych. Dla przypadku I nie odnotowano bowiem ani jednej pary, dla której  $p$ -value byłoby mniejsze od 0,10. Natomiast dla przypadku II zauważamy, że parametr  $p$ -value jest mniejszy od 0,10 dla wszystkich par z udziałem giełdy polskiej oraz dla par z udziałem giełdy brytyjskiej (oprócz pary Wielka Brytania–Niemcy).

Dalsze analizy zatem są prowadzone tylko dla przypadku II. Wartości estymatorów parametrów przełącznikowego modelu Copula-GARCH i zależności (6.10) zestawiono w tabeli 6.17<sup>47</sup>. Istotność parametrów wyznaczono metodą Monte Carlo, wyłącznie dla par, dla których  $p$ -value  $\leq 0,10$ . Istotność parametrów  $\rho_1$  oraz  $\rho_2$  podano dla wszystkich par (gdy  $p$ -value  $\geq 0,10$  pod uwagę brano model ze stałą macierzą przejścia).

Na początek zostanie przeanalizowana relacja pomiędzy rozwiniętymi giełdami Europy Zachodniej. Analizując wyniki uzyskane dla relacji giełdy niemieckiej z giełdą francuską, można zauważyć bardzo wysokie współczynniki korelacji i to w obu stanach ( $\rho_1 = 0,963$  oraz  $\rho_2 = 0,884$ ). Statystyka  $LM = 6,352$  oraz odpowiadająca jej wartość  $p$ -value  $= 0,984$  nie dają podstaw do przypuszczenia, że wartości indeksów makroekonomicznych mają znaczenie dla poziomu współzależności tych giełd. Do podobnych wniosków dochodzimy, gdy analizujemy wyniki uzyskane dla relacji giełdy niemieckiej z giełdą londyńską, przy czym tutaj współczynniki korelacji w obu stanach są nieco niższe niż w dyskutowanym poprzednio przypadku ( $\rho_1 = 0,827$  oraz  $\rho_2 = 0,622$ ).

Przejdźmy teraz do rozważań na temat powiązań giełdy londyńskiej z giełdą francuską. Wartości współczynników korelacji dla tej relacji są podobne jak w relacji z giełdą niemiecką ( $\rho_1 = 0,844$  oraz  $\rho_2 = 0,638$ ). Jednak dla tej pary uzyskano  $p$ -value  $= 0,036$ , co wskazuje na znaczenie bieżącej sytuacji ekonomicznej na strukturę powiązań pomiędzy tymi giełdami. Dodatkowo parametry  $\beta_{L_1}^2 = 2,129$  i  $\beta_{L_2}^2 = 0,526$  informują nas o roli rentowności obligacji na wartość prawdopodobieństwa  $p_{22}(t)$ , tj. gdy rentowność obligacji rośnie, to wówczas osłabia się

<sup>47</sup> Ze względu na rozmiar tabeli zamiast nazw krajów, z których pochodzą dane giełdy, podano w niej nazwy indeksów giełdowych.

wzajemna relacja między giełdami. Przy czym wydaje się, że rentowność obligacji w Wielkiej Brytanii ma większe znaczenie niż rentowność obligacji we Francji ( $\beta_{L_1}^2 > \beta_{L_2}^2$ ).

**Tabela 6.17.** Oceny parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od wskaźników makroekonomicznych, zastosowanego do opisu struktury powiązań między giełdami

|                 | DAX    |        |        | FTSE   |        |        | WIG    |        |        |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                 | CAC    | FTSE   | WIG    | CAC    | DAX    | WIG    | CAC    | DAX    | FTSE   |
| $\rho_1$        | 0,963* | 0,827* | 0,748* | 0,844* | 0,828* | 0,705* | 0,748* | 0,748* | 0,718* |
| $\rho_2$        | 0,884* | 0,622* | 0,373* | 0,638* | 0,621* | 0,433* | 0,428* | 0,373* | 0,442* |
| $\beta_0^1$     | 3,051* | 3,185* | 3,008* | 3,511* | 3,196* | 4,358* | 3,034* | 3,061* | 4,105* |
| $\beta_{L_1}^1$ | -0,847 | -0,639 | -3,455 | -1,883 | -0,782 | -3,216 | 2,584  | -0,142 | 5,512  |
| $\beta_{L_2}^1$ | -0,14  | -0,686 | -0,165 | 0,126  | -0,685 | 5,732  | -1,904 | -3,383 | -2,855 |
| $\beta_{C_1}^1$ | 0,018  | 0,884  | 0,211  | 4,612  | 2,634  | 4,464  | -0,074 | -0,343 | -1,562 |
| $\beta_{C_2}^1$ | 0,597  | 2,117  | -0,365 | 3,204  | 0,596  | -2,041 | 2,716  | 0,278  | 4,674  |
| $\beta_{I_1}^1$ | -0,112 | 0,592  | 0,956  | -0,478 | -0,498 | -1,128 | 0,816  | -1,303 | -1,044 |
| $\beta_{I_2}^1$ | -0,209 | -0,416 | -1,423 | -2,022 | 0,858  | -1,226 | -0,33  | 0,866  | -0,887 |
| $\beta_{U_1}^1$ | -0,308 | -0,725 | -0,832 | -0,016 | -0,784 | -0,888 | 1,719* | 2,243* | -0,627 |
| $\beta_{U_2}^1$ | -0,006 | -0,605 | 2,210* | -2,565 | -0,776 | -0,783 | -0,228 | -0,798 | -0,838 |
| $\beta_0^2$     | 2,885* | 3,104* | 1,889* | 3,445* | 3,088* | 4,508* | 1,940* | 1,963* | 4,704* |
| $\beta_{L_1}^2$ | 0,279  | 0,66   | 1,074* | 2,129* | 1,207  | 8,446* | -0,922 | -1,134 | -1,588 |
| $\beta_{L_2}^2$ | -0,295 | 1,022  | -1,21  | 0,526* | 0,839  | -1,417 | 2,363* | 1,071* | 7,829* |
| $\beta_{C_1}^2$ | 0,597  | -0,008 | -0,363 | 0,835  | 0,353  | 1,256  | 0,103  | -0,502 | -1,106 |
| $\beta_{C_2}^2$ | -0,544 | 0,418  | -0,48  | -2,855 | 0,204  | -0,791 | 1,01   | -0,392 | 0,793  |
| $\beta_{I_1}^2$ | -0,37  | 0,627  | 1,883  | 0,237  | -0,015 | -0,571 | 1,154  | -1,951 | -0,439 |
| $\beta_{I_2}^2$ | 0,302  | 0,045  | -2,022 | 0,221  | 0,929  | -0,474 | -0,554 | 1,872  | -0,308 |
| $\beta_{U_1}^2$ | 0,107  | 0,269  | 0,406  | -0,748 | 0,477  | 1,352  | -2,928 | -2,758 | -1,577 |
| $\beta_{U_2}^2$ | 0,075  | 0,477  | -2,763 | 2,021  | 0,271  | -1,435 | 0,221  | 0,366  | 1,16   |
| LM              | 6,352  | 16,167 | 39,284 | 27,523 | 17,461 | 23,983 | 24,677 | 39,22  | 23,093 |
| p               | 0,984  | 0,441  | 0,001  | 0,036  | 0,356  | 0,089  | 0,076  | 0,001  | 0,087  |

Parametry  $\rho_1, \rho_2$  oznaczają współczynniki korelacji kopuli t-Studenta, z których budowano model przełącznikowy; Parametry  $\beta_{x_i}^j$ , gdzie  $i = 0, 1$ , to współczynniki zależności (6.10) dla prawdopodobieństw pozostania w  $j$ -tym stanie ( $x_i$  - symbol odpowiedniego wskaźnika makroekonomicznego  $i$ -tego kraju); istotność parametrów wyznaczono symulacyjnie (metodą Monte Carlo); gwiazdką oznaczono parametry istotne na poziomie istotności 10%; statystyka dla testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), to:  $LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia; dla wartości statystyki LM podano wartość  $p$ -value

Źródło: Czapkiewicz i in. (2018)

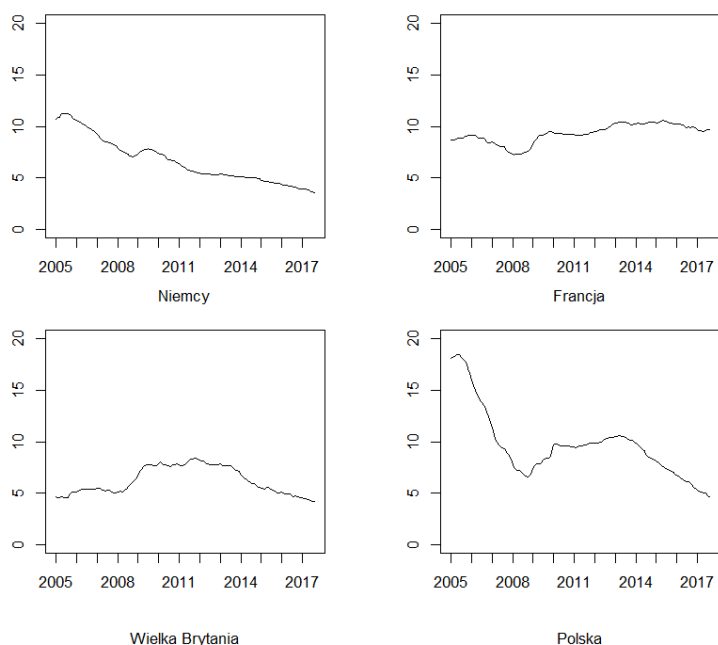
W następnym kroku przeanalizowana zostanie giełda polska i jej relacja z rozwiniętymi giełdami Europy Zachodniej. Dla wszystkich tych relacji uzyskano odpowiednio małą wartość  $p\text{-value} < 0.10$ , co wskazuje na istotne oddziaływanie wskaźników makroekonomicznych na współzależność giełdy polskiej z giełdą niemiecką ( $p\text{-value} = 0.001$ ), z giełdą francuską ( $p\text{-value} = 0.0076$ ) oraz z giełdą brytyjską ( $p\text{-value} = 0.087$ ). Dla wszystkich tych relacji parametry kopuli t-Studenta, zarówno w stanie pierwszym, jak i w stanie drugim, są na podobnym poziomie. W stanie pierwszym obliczony współczynnik korelacji wynosi 0,718 (z giełdą brytyjską) oraz 0,748 (z giełdą niemiecką i z giełdą francuską). Natomiast w stanie drugim współczynnik korelacji waha się od 0,373 (z giełdą niemiecką) do 0,442 (z giełdą brytyjską).

Biorąc pod uwagę istotność parametrów występujących w równaniu (6.10), które są zestawione w tablicy 6.17, zauważamy, że na współzależność giełd w zasadzie wpływają tylko dwa wskaźniki: stopa bezrobocia oraz rentowność obligacji. Na przykład dla relacji giełdy polskiej z giełdą francuską oraz z giełdą niemiecką znaczenie ma stopa bezrobocia w Polsce. Jej zmiany istotnie wpływają na wartość  $p_{11}(t)$ , czyli na prawdopodobieństwo pozostania w stanie silniejszej współzależności. Dla relacji z rynkiem francuskim parametr  $\beta_{U_1}^1 = 1,719$ , natomiast dla relacji z rynkiem niemieckim  $\beta_{U_1}^1 = 1,963$ . Zatem rosnąca stopa bezrobocia może być przyczyną wzrostu prawdopodobieństwa  $p_{11}(t)$ , a co za tym idzie – wzrostu warunkowej korelacji tych giełd. Wynik ten wydaje się być zgodny z intuicją. Bezrobocie jest silnym determinantem kondycji gospodarki, a jego szybki wzrost może wskazywać na spowolnienie gospodarcze kraju. Jeśli teraz założylibyśmy hipotezę, że bezrobocie w Polsce jest również pochodną sytuacji międzynarodowej, wówczas zarówno rynek polski nie jest atrakcyjny dla inwestorów zagranicznych, i może to być przyczyną wycofywania kapitału z naszej giełdy, jak i nastroje na giełdzie macierzystej nie są optymistyczne. Wówczas pojawia się większa zmienność rynków, a co za tym idzie – wyższy poziom ich współzależności.

Na prawdopodobieństwo pozostania w stanie umiarkowanej współzależności duże znaczenie ma rentowność 10-letnich obligacji (podobnie jak dla struktury powiązań pomiędzy rynkami Europy Zachodniej). Na poziom współzależności giełdy polskiej z innymi giełdami znaczenie mają tylko zmiany stóp procentowych krajów Europy Zachodniej. Na przykład badając relację polskiej giełdy z giełdą francuską uzyskano statystycznie istotny parametr  $\beta_{L_2}^2 = 2,363$ , co

oznacza, że wzrost rentowności obligacji we Francji zwiększa prawdopodobieństwo  $p_{22}(t)$  (co jest równoważne z osłabieniem współzależności tych rynków). Podobnie dla relacji z giełdą niemiecką, dla której statystycznie istotny, dodatni parametr  $\beta_{L_2}^2 = 1,071$  świadczy o takim samym kierunku zmian prawdopodobieństwa  $p_{22}(t)$ , gdy rośnie rentowność obligacji w Niemczech. Również dla giełdy brytyjskiej i jej relacji z giełdą polską statystycznie istotny okazał się dodatni parametr  $\beta_{L_2}^2 = 7,829$ . Możemy zatem przypuszczać, że gdy rentowność obligacji w Europie Zachodniej jest wystarczająco duża, to inwestorzy z tych krajów niechętnie inwestują na ryzykownych rynkach akcji, szczególnie na rynku rozwijającym się.

Ponieważ analiza jednoczesnego wpływu wybranych wskaźników makroekonomicznych na strukturę powiązań między giełdami wykazała, że tylko stopa bezrobocia i rentowność 10-letnich obligacji mają znaczenie, w dalszej części opracowania zajmiemy się tylko tymi wskaźnikami i ich znaczeniem dla relacji giełdy polskiej z innymi. Rysunek 6.5 przedstawia dynamikę stopy bezrobocia we wszystkich analizowanych krajach, tj. w Niemczech, we Francji, w Wielkiej Brytanii oraz w Polsce.



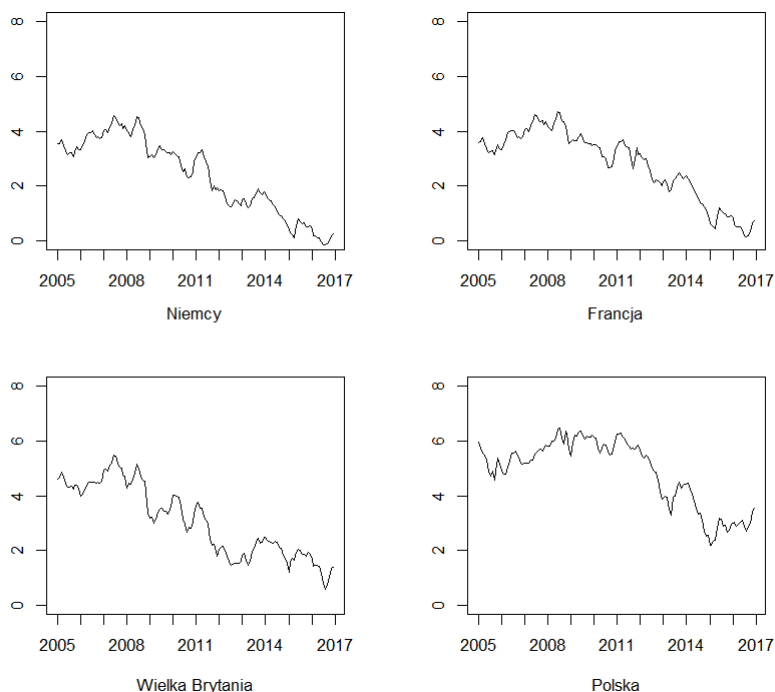
**Rysunek 6.5.** Stopy bezrobocia w Niemczech, Francji, Wielkiej Brytanii oraz w Polsce w latach 2006–2017

Źródło: Czapkiewicz i in. (2018)

Analizując rysunek 6.5, zauważamy wyraźny trend malejący dla stopy bezrobocia w Niemczech, które obecnie jest na najniższym poziomie (w lipcu 2017 wynosiła 3,6%). We Francji stopa bezrobocia utrzymywała się na poziomie około 9% przez cały okres badania. Wielką Brytanię również charakteryzują niewielkie wahania wartości stopy bezrobocia, które przeciętnie utrzymują się na poziomie około 6%.

Największe zróżnicowanie tego wskaźnika występowało jednak w Polsce. Pomimo że w lipcu 2017 roku stopa bezrobocia wyniosła już tylko 4,7%, to były okresy, w których wynosiła ona więcej niż 15%.

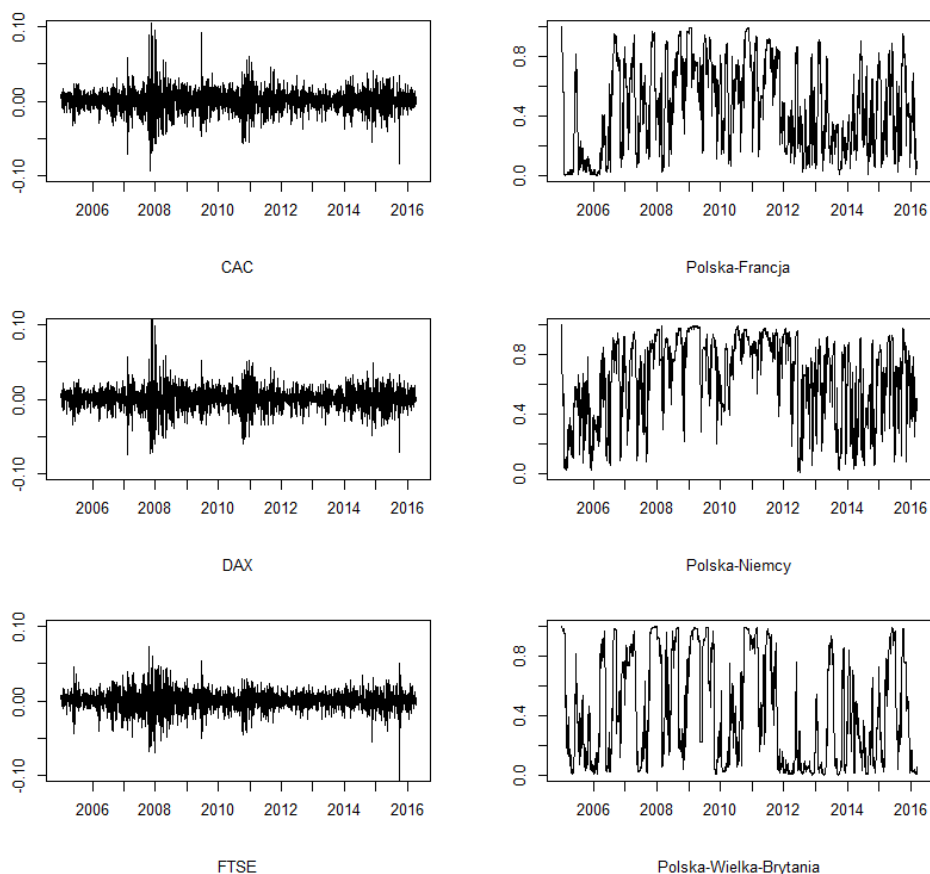
Rysunek 6.6 przedstawia natomiast zmiany rentowności obligacji w Niemczech, we Francji, w Wielkiej Brytanii oraz w Polsce. Najwyższa przeciętna rentowność obserwowana jest w Polsce, a najniższa w Niemczech i we Francji. Miesięczne wartości tego wskaźnika ulegają dużym wahaniom. Wykazują one jednak tendencję spadkową. Jak pokazały przeprowadzone obliczenia, wahania te są jednak istotne dla struktury powiązań między giełdami.



**Rysunek 6.6.** Rentowność 10-letnich obligacji w Niemczech, Francji, Wielkiej Brytanii oraz w Polsce w latach 2006–2017

Źródło: Czapkiewicz i in. (2018)

Rysunek 6.7 przedstawia wahania stóp zwrotu (lewy panel) oraz warunkowe prawdopodobieństwo  $P(S_t = 1 | \mathcal{R}_{t-1})$  przebywania w pierwszym reżimie uzyskane z modelu TVPMS (prawy panel).



**Rysunek 6.7.** Lewy panel: zmienność stóp zwrotu indeksów giełdowych z Francji (CAC), z Niemiec (DAX) oraz z Wielkiej Brytanii (FTSE); prawy panel: warunkowe prawdopodobieństwo przebywania w reżimie z silniejszą współzależnością giełdy polskiej z giełdą francuską, niemiecką oraz z brytyjską

Źródło: Czapkiewicz i in. (2018)

Zauważamy, że okresy, w których występują stosunkowo duże wartości warunkowego prawdopodobieństwa przebywania w pierwszym reżimie pokrywają się z okresami, w których na rynku panuje duża zmienność stóp zwrotu, co jest zgodne z badaniami innych autorów (Longin i Solnik 1995, Ramchand i Susmel 1998, King i Wadhwani 1990, Chesnay i Jondeau 2001, Ang i Bekaert 2002, Forbes i Chinn 2004).



Literatura finansowa sugeruje bowiem, że silna współzależność najczęściej występuje w okresie wysokiej zmienności stóp zwrotu, która wynika głównie z dużej niepewności na giełdzie. Co prawda, jak zostało pokazane również w rozdziale 5.3, okresy silnej korelacji niekoniecznie mają odzwierciedlenie w dużej zmienności na rynku akcji.

Analizując rysunek 6.7, dochodzimy do wniosku, że okresy pozostawania w stanie silniejszej współzależności są podobne dla wszystkich trzech par rynków.

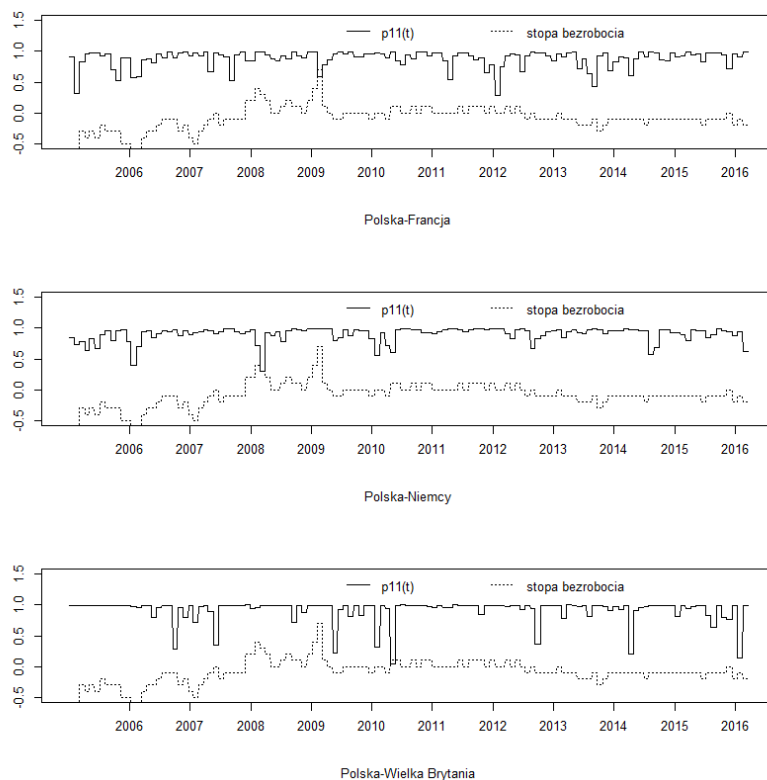
Warunkowe prawdopodobieństwo przebywania w pierwszym reżimie wyraźnie wzrasta około 2007 roku, kiedy rozpoczął się światowy kryzys związany z poważną recesją w gospodarce. Stosunkowo wysokie wartości warunkowego prawdopodobieństwa obserwuje się w 2008 roku, kiedy zmienność stóp zwrotów była wyjątkowo duża, gdyż giełdy bardzo źle zareagowały na bankructwo banku Lehman Bank. Kolejny okres, charakteryzujący się dużą zmiennością stóp zwrotów, przypada na lata 2010–2012 (efekt problemów fiskalnych w UE). W tym czasie również rośnie warunkowe prawdopodobieństwo przebywania w pierwszym reżimie (co jest równoważne z wysokimi wartościami warunkowej korelacji). Zwłaszcza pomiędzy giełdą polską i niemiecką wysokie prawdopodobieństwo utrzymywało się prawie przez cały czas na tym samym poziomie. Po 2012 roku zauważamy osłabienie współzależności między rynkami, jednak w ostatnich dwóch latach znowu widoczny jest jej wzrost.

W celu lepszego zilustrowania efektu zmian stopy bezrobocia oraz rentowności 10-letnich obligacji, dla relacji giełdy polskiej z pozostałymi przedstawiona zostanie graficzna reprezentacja uzyskanych zależności.

Rysunek 6.8 pokazuje porównanie prawdopodobieństwa pozostania w reżimie silnej współzależności, czyli  $p_{11}(t)$ , ze zmianą stopy bezrobocia w Polsce.

Można zauważyć, że wzrost lub spadek stopy bezrobocia w Polsce często wiąże się ze wzrostem lub spadkiem prawdopodobieństwa  $p_{11}(t)$ . Dla relacji z giełdą francuską do 2009 roku spadek bezrobocia w Polsce znajduje odzwierciedlenie w spadku prawdopodobieństwa pozostania w reżimie z silną współzależnością. Jeśli fluktuacja stóp bezrobocia jest niewielka, to prawdopodobieństwo  $p_{11}(t)$  jest również ustabilizowane. W latach 2009–2011 obserwujemy nieduży przyrost stopy bezrobocia, więc również wahania prawdopodobieństwa są stosunkowo niewielkie. Po 2013 roku w Polsce następuje wyraźny spadek bezrobocia, co również znajduje odzwierciedlenie w spadku wartości  $p_{11}(t)$ .

Ten sam wniosek uzyskujemy w badaniu relacji z giełdą niemiecką. Natomiast dla wzajemnej relacji polskiej giełdy z brytyjską istnieje niewielkie podobieństwo między zmianą prawdopodobieństwa  $p_{11}(t)$  a zmianą stopy bezrobocia.



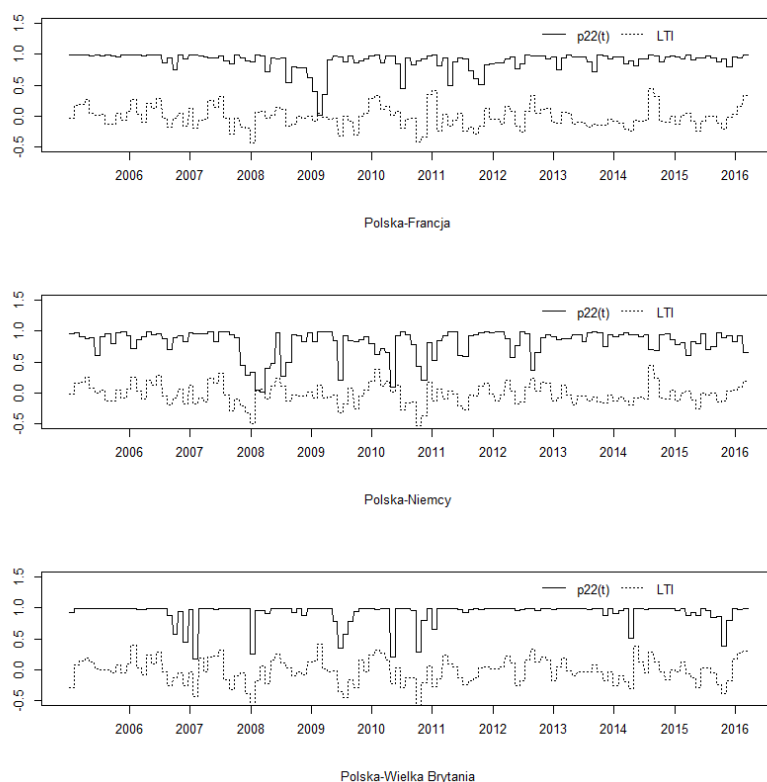
**Rysunek 6.8.** Porównanie prawdopodobieństwa pozostania w reżimie silnej współzależności, czyli  $p_{11}(t)$ , z wartościami zmian stopy bezrobocia w Polsce

Źródło: Czapkiewicz i in. (2018)

Rysunek 6.9 przedstawia natomiast porównanie prawdopodobieństwa pozostania w reżimie umiarkowanej współzależności, czyli  $p_{22}(t)$ , ze zmianami rentowności 10-letnich obligacji. W przypadku relacji giełdy polskiej z giełdą francuską do roku 2008 wpływ zmian długoterminowej stopy procentowej na prawdopodobieństwo  $p_{22}(t)$  jest mało widoczny. Największe podobieństwo między tymi wielkościami występuje po 2010 roku. Natomiast w przypadku relacji giełdy polskiej z giełdą niemiecką zmiana prawdopodobieństwa  $p_{22}(t)$  jest bardzo silnie związana ze zmianą rentowności obligacji. Istnieje bardzo duża zbieżność między tymi wskazaniemi. Efekt ten utrzymuje się właściwie przez cały okres badania. Na szczególną uwagę zasługują dwa podokresy: około roku 2008

oraz około roku 2011. Spadkom rentowności towarzyszy wówczas gwałtowny spadek prawdopodobieństwa pozostania w drugim reżimie.

Dla relacji giełdy polskiej z brytyjską prawdopodobieństwo  $p_{22}(t)$  wydaje się być dość stabilne w porównaniu z pozostałymi. Jednak reaguje ono na gwałtowne spadki rentowności obligacji. Zatem możemy stwierdzić, że gdy maleje rentowność obligacji danego kraju, zagraniczni inwestorzy inwestują w papiery wartościowe na polskiej giełdzie, co przekłada się na wzrost współzależności tych rynków.



**Rysunek 6.9.** Porównanie prawdopodobieństwa pozostania w reżimie umiarkowanej współzależności, czyli  $p_{22}(t)$ , z wartościami zmian rentowności obligacji

Źródło: Czapkiewicz i in. (2018)

W badaniu rozważane zmienne makroekonomiczne były brane pod uwagę równocześnie. Zatem przedstawione zostaną również wyniki analiz, w których rozważane zmienne makroekonomiczne były brane pod uwagę niezależnie. W analizie tej zostaną zbadane relacje giełdy polskiej z giełdą niemiecką, brytyjską oraz francuską (tablica 6.18).

**Tabela 6.18.** Oceny parametrów modelu przełącznikowego z dynamiczną macierzą przejścia uzależnioną od zmiennej makroekonomicznej  
(w nawiasie podano wartość *p-value*)

| Wskaźnik    | $\beta_0^1$      | $\beta_1^1$       | $\beta_2^1$       | $\beta_0^2$      | $\beta_1^2$       | $\beta_2^2$       | <i>LM</i>         |
|-------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| LTI         |                  |                   |                   |                  |                   |                   |                   |
| Niemcy      | 2,941<br>(0,000) | -0,488<br>(0,794) | -3,650<br>(0,089) | 2,404<br>(0,000) | -2,237<br>(0,281) | 1,170<br>(0,769)  | 11,114<br>(0,025) |
| W. Brytania | 3,562<br>(0,000) | 4,741<br>(0,606)  | 0,104<br>(0,985)  | 4,361<br>(0,000) | -0,562<br>(0,942) | 6,520<br>(0,027)  | 11,174<br>(0,025) |
| Francja     | 3,192<br>(0,000) | 3,076<br>(0,154)  | -0,266<br>(0,901) | 3,117<br>(0,000) | -1,306<br>(0,524) | 5,704<br>(0,048)  | 9,766<br>(0,045)  |
| CPI         |                  |                   |                   |                  |                   |                   |                   |
| Niemcy      | 3,545<br>(0,000) | -2,221<br>(0,038) | 0,305<br>(0,755)  | 3,028<br>(0,000) | -3,421<br>(0,049) | 0,858<br>(0,496)  | 3,249<br>(0,517)  |
| W. Brytania | 3,64<br>(0,000)  | -2,564<br>(0,187) | 0,257<br>(0,793)  | 4,070<br>(0,000) | -2,947<br>(0,126) | 0,186<br>(0,909)  | 2,556<br>(0,635)  |
| Francja     | 2,963<br>(0,000) | -1,21<br>(0,290)  | 3,010<br>(0,119)  | 2,619<br>(0,000) | -1,857<br>(0,232) | 2,809<br>(0,192)  | 5,549<br>(0,235)  |
| IP          |                  |                   |                   |                  |                   |                   |                   |
| Niemcy      | 3,126<br>(0,000) | -1,148<br>(0,003) | 0,947<br>(0,062)  | 2,615<br>(0,000) | -1,818<br>(0,005) | 1,964<br>(0,024)  | 11,748<br>(0,019) |
| W. Brytania | 3,468<br>(0,000) | 1,091<br>(0,027)  | -0,23<br>(0,213)  | 4,162<br>(0,000) | 1,438<br>(0,026)  | -0,151<br>(0,513) | 3,780<br>(0,437)  |
| Francja     | 2,472<br>(0,000) | 2,435<br>(0,122)  | -0,589<br>(0,265) | 2,691<br>(0,000) | 3,522<br>(0,044)  | -2,003<br>(0,031) | 7,558<br>(0,109)  |
| UNEMP       |                  |                   |                   |                  |                   |                   |                   |
| Niemcy      | 2,717<br>(0,000) | 1,882<br>(0,414)  | -4,801<br>(0,478) | 1,268<br>(0,108) | -5,27<br>(0,057)  | 3,387<br>(0,609)  | 18,888<br>(0,001) |
| W. Brytania | 3,787<br>(0,000) | 1,037<br>(0,595)  | 3,376<br>(0,445)  | 4,256<br>(0,000) | 0,264<br>(0,916)  | -0,491<br>(0,886) | 2,214<br>(0,697)  |
| Francja     | 3,2<br>(0,000)   | 1,604<br>(0,174)  | -2,846<br>(0,616) | 2,207<br>(0,002) | -3,967<br>(0,098) | 1,739<br>(0,791)  | 11,907<br>(0,018) |

Parametry  $\beta_i^j$ ,  $i = 0, 1, 2$ ;  $j = 1, 2$  to współczynniki zależności dla prawdopodobieństw pozostania w  $j$ -tym stanie;  $\beta_0^j$  – wyraz wolny,  $\beta_i^j$  ( $i = 1, 2$ ) odpowiada za wskaźnik makroekonomiczny podany w tytule każdego panelu,  $\beta_1^j$  – dla Polski,  $\beta_2^j$  – dla kraju który jest przedstawiony w panelu; statystyka dla testowania hipotezy zerowej, że model z dynamiczną macierzą przejścia (TVPMS) jest porównywalny z modelem ze stałą macierzą przejścia (MS), to:  $LM = 2(\ell(\theta_1) - \ell_F(\theta_2))$ , w której  $\ell(\theta_1)$  oraz  $\ell_F(\theta_2)$  są wartościami funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu z mechanizmem TVPMS oraz modelu ze stałą macierzą przejścia

Źródło: opracowanie własne

Analizując uzyskane wyniki, zauważamy, że poziom współzależności giełdy polskiej z pozostałymi giełdami jest związany przede wszystkim z długoterminową stopą procentową (LTI). Kierunek oddziaływania jest taki sam, jak w badaniu, w którym wszystkie zmienne objaśniające są rozważane razem. Dla wszystkich analizowanych par uzyskane *p-value*, które odpowiada statystyce *LM*, jest mniejsze niż 5%. Dla relacji giełdy warszawskiej z giełdą Wielkiej Brytanii oraz Francji otrzymano istotny parametr  $\beta_2^2$  odpowiedzialny za znaczenie rentowności 10-letnich obligacji (odpowiednio w Wielkiej Brytanii i Francji) dla stanu umiarkowanej współzależności. Natomiast dla relacji z giełdą niemiecką statystycznie istotny okazał się parametr  $\beta_2^1$ , który jest odpowiedzialny za znaczenie rentowności 10-letnich obligacji niemieckich dla stanu silnej współzależności.

Istotne znaczenie dla relacji giełdy polskiej z giełdą niemiecką oraz z giełdą francuską ma również bezrobocie. Wzrost stopy bezrobocia skutkuje wzrostem warunkowego współczynnika korelacji Spearmana. Ponadto, dla relacji giełdy polskiej z giełdą niemiecką odnotowano istotne znaczenie wskaźnika produkcji (IP). Kombinacja liniowa obu tych wskaźników: Polski i Niemiec, skutecznie poprawia model współzależności pomiędzy giełdami z tych krajów (*LM* = 11.748, *p-value* = 0,019). Można zauważyć, że dla relacji giełdy polskiej oraz giełdy niemieckiej oprócz CPI znaczenie mają wszystkie dyskutowane zmienne makroekonomiczne.

## Podsumowanie

W wyniku analizy łącznego oddziaływania rozpatrywanych czynników na poziom współzależności giełd można zauważyć, że największe znaczenie ma rentowność 10-letnich obligacji. Spośród par rynków rozwiniętych znaczenie rentowności obligacji odnotowano we wzajemnej relacji giełdy brytyjskiej i francuskiej. Natomiast analizując relację GPW w Warszawie z pozostałymi giełdami, uzyskano wnioski, że największe znaczenie dla poziomu ich współzależności miała zarówno rentowność obligacji, jak i stopa bezrobocia. Wzrost stopy bezrobocia ma odbicie we wzroście poziomu współzależności giełd. Jedynie dla relacji z giełdą brytyjską nie odnotowano tego efektu. Również odbicie we wzroście współzależności analizowanych giełd ma spadek rentowności 10-letnich obligacji Francji, Niemiec i Wielkiej Brytanii. Należy zwrócić uwagę, że w przypadku tego badania nie mówimy o wpływie czynników na poziom współzależności, lecz o zmianach jednoczesnych poziomu współzależności i wskaźników makroekonomicznych.



## Zakończenie

Celem monografii była analiza współzależności rynków kapitałowych w takich aspektach, jak:

- grupowanie giełd podobnych do siebie w strukturze powiązań z innymi giełdami;
- analiza zmian jednoczesnych na wybranych giełdach;
- zarażanie się GPW w Warszawie kryzysem występującym na innej giełdzie;
- analiza potencjalnych determinantów wzrostu lub spadku poziomu współzależności wybranych giełd papierów wartościowych.

W celu wykonania powyższych badań usystematyzowano własności użytych narzędzi statystycznych i metod. Do głównych osiągnięć w tej materii należy:

1. Opracowanie algorytmu EM (*expectation–maximization algorithm*) służącym do estymacji parametrów przełącznikowego modelu Copula-GARCH z mechanizmem TVPMS tj., zmienną w czasie macierzą przejścia zależną od obserwowalnych czynników.
2. Uporządkowanie warunków regularności gwarantujące asymptotyczną normalność estymatora MNW (oraz EM) oraz pożądane własności statystyk w teście Vuonga.

Tematyka ta obejmowała rozdziały części I. W monografii została przedstawiona autorska adaptacja algorytmu EM, który służy do estymacji parametrów przełącznikowego modelu Copula-GARCH z dwoma reżimami dla przypadku, gdy macierz przejścia w ukrytym łańcuchu Markowa nie jest stała i jest zależna od pewnych obserwowalnych czynników.

Kolejnym zagadnieniem, które zostało szczegółowo omówione w części teoretycznej, są własności estymatorów nieznanymi parametrów modelu, wyznaczonych metodą największej wiarygodności lub przy zastosowaniu algorytmu EM.

Klasycznie zakłada się, że zmienne losowe, dla których realizacji tworzymy procedurę estymacji nieznanymi parametrów, są niezależne o tym samym rozkładzie, którego gęstość spełnia pewne warunki regularności. To założenie gwarantuje asymptotyczną normalność rozkładu estymatora. Warunki te nie są jednak spełnione dla próby, na podstawie której estymujemy nieznanne parametry modeli przełącznikowych. Niespełnienie wymaganych warunków regularności uniemożliwia również zastosowanie powszechnie używanych testów służących do porównywania dwóch modeli, na przykład testu Vuonga (1989).

W monografii uporządkowane zostały warunki regularności (podrozdział 4.4) gwarantujące asymptotyczną normalność estymatorów nieznanymi parametrów modelu przełącznikowego, wyznaczonych metodą największej wiarygodności (ML). Punktem wyjścia do tych rozważań było twierdzenie, którego dowód został zamieszczony w pliku Czapkiewicz, Dawidowicz (2018). Jest to dowód centralnego twierdzenia granicznego formułowanego dla ciągu zmiennych losowych o rozkładzie sterowanym według ukrytego łańcucha Markowa. Wykazana została własność, że jeśli łańcuch Markowa jest ergodyczny oraz zmienne losowe dodatkowo spełniają pewien warunek (warunek Lindeberga) to wówczas rozkład średniej arytmetycznej tych zmiennych zmierza (według rozkładu) do rozkładu normalnego. To twierdzenie dało podstawy do dalszych teoretycznych analiz, dotyczących zarówno własności estymatorów EM jak i statystyk w teście Vuonga (1989), które zamieszczone zostały wyłącznie w monografii.

Obok warunków regularności gwarantujących efektywność estymatora największej wiarygodności, wartością dodaną prezentowanej monografii było zdefiniowanie warunków regularności dla modeli przełącznikowych, które uzasadniają możliwość stosowania testu Vuonga (1989) w przypadku porównywania dwóch modeli przełącznikowych sterowanych według ukrytego łańcucha Markowa. Użycie testu Vuonga (1989) jest bowiem przydatne do weryfikacji znaczenia danych czynników w poziomie współzależności giełd. Przy pomocy tego testu można bowiem porównać dwa modele: model przełącznikowy sterowany według ukrytego łańcucha Markowa oraz model przełącznikowy z mechanizmem TVPMS i na tej podstawie ocenić, czy uwzględnienie badanego czynnika w modelu istotnie poprawia jego prognozę. Jednakże założenia dla stosowania testu Vuonga są bardzo restrykcyjne. Dotyczy to głównie założenia o niezależności zmiennych losowych tworzących próbę. Pomimo, że założenia te zostały złagodzone w pracy Riversa, Vuonga (2002), to nadal nie są spełnione dla modeli przełącznikowych.



W podrozdziale 4.6 przedstawiono dowód na skuteczność stosowania statystyk testowych testu Vuonga (1989) przy autorskich warunkach regularności. Autorka w monografii wykazała nie tylko słuszność stosowanych statystyk testu Vuonga (1989), ale również pokazała w jaki sposób jest formułowana hipoteza zerowa dla porównywania modeli przełącznikowych i jakiej korekty wymagają odpowiednie statystyki testowe.

Część II prezentowanej monografii obejmowała wyniki badań empirycznych, które koncentrowały się na wielu aspektach współzależności pomiędzy giełdami. Wykorzystując metody taksonometryczne, dokonano pogrupowania kilkudziesięciu głównych indeksów giełdowych, pokazano dynamikę poziomu współzależności giełdy w Warszawie z innymi giełdami na świecie oraz zbadano efekt zarażania GPW w Warszawie. Jednak głównym celem było zbadanie znaczenia różnych wskaźników, zarówno finansowych, jak i makroekonomicznych, na strukturę powiązań pomiędzy wybranymi giełdami papierów wartościowych.

Reasumując, jedną z hipotez badawczych, którą postawiono w publikacji było stwierdzenie, że:

*W okresie kryzysu giełdy są znacznie mocniej ze sobą powiązane niż w okresach przed i pokryzysowych. Jednak spośród giełd na świecie można wyodrębnić takie grupy giełd, w obrębie których relacje jej elementów z innymi giełdami są niezależne od zmieniającej się sytuacji ekonomicznej. Wpływ globalnej koniunktury ekonomicznej na GPW w Warszawie jest najbardziej podobny do analogicznego wpływu na giełdy Grupy Wyszehradzkiej.*

W monografii zaprezentowano wyniki grupowania 36 indeksów pochodzących z różnych giełd na świecie, bazując na ich dziennych notowaniach z okresu 2006–2016. Szczegółowej analizie poddano cztery podokresy: (i) przed światowym kryzysem finansowym: styczeń 2006 – lipiec 2007, (ii) okres kryzysu: lipiec 2007 – marzec 2009, (iii) okres wychodzenia z kryzysu: marzec 2009 – grudzień 2011, (iv) lata 2012–2016. Jako narzędzie do grupowania giełd zastosowano analizę skupień. W analizie wykorzystano metodę Warda (1963), w której użyto miarę odległości budowaną w oparciu o warunkowy współczynnik korelacji Spearmana uzyskany z przełącznikowego modelu Copula-GARCH.

Przeprowadzone badanie potwierdziło stwierdzenie, że w okresie kryzysu rynki są ze sobą silniej związane niż w okresie przed i po kryzysie. Skutkowało to mniejszą liczbą grup uzyskanych w wyniku zastosowań analizy skupień. Jednak generalnie rynki utworzyły pięć głównych klas: rynki z Europy

Wschodniej, rynki z Europy Zachodniej, rynki z Ameryki Północnej i Południowej, rynki z Azji oraz rynki słabo powiązane z pozostałymi. Zmiany w grupowaniu odbywają się tylko w obrębie tych klas.

Badanie wykazało również istnienie giełd, które bez względu na sytuację panującą na rynkach są do siebie bardzo podobne pod względem powiązań z innymi giełdami. Spośród giełd, które uczestniczyły w badaniu, rezultat ten otrzymano dla rynków z Europy Zachodniej: Holandii, Francji i Niemiec; rynków z Europy Wschodniej: Polski, Czech i Węgier, oraz rynków azjatyckich: Indonezji, Malezji, Hongkongu, Korei i Tajwanu. Zatem, koncentrując uwagę tylko na GPW w Warszawie, w wyniku przeprowadzonych analiz wysnuto wnioski, iż wpływ globalnej koniunktury ekonomicznej na GPW w Warszawie jest najbardziej podobny do analogicznego wpływu na giełdy Grupy Wyszehradzkiej.

Jak już wcześniej wspomniano, głównym celem niniejszej pracy było zbadanie potencjalnych determinantów, które mogą mieć znaczenie w dynamice struktury powiązań pomiędzy wybranymi giełdami. Zagadnieniu temu poświęcony jest w całości rozdział szósty prezentowanej monografii.

Jednym z głównych osiągnięć w tej części badań było częściowe potwierdzenie następującej hipotezy badawczej, iż:

*Czynniki, które mają istotne znaczenie dla wyjaśnienia zmian poziomów współzależności giełd nie są uniwersalne. Dla rozwiniętych rynków Europy Zachodniej i USA większe znaczenie mają ogólnoswiatowe wskaźniki finansowe, natomiast dla relacji GPW w Warszawie z rynkami rozwiniętymi Europy Zachodniej – lokalne wskaźniki finansowe i makroekonomiczne.*

W badaniu pod uwagę wzięto giełdę w Warszawie, w Londynie, we Frankfurcie, w Paryżu oraz w Nowym Yorku. W niektórych przypadkach przedyskutowano również relacje z giełdą w Sztokholmie oraz giełdą w Rosji, jednak te badania miały charakter wyłącznie ilustracyjny. Do globalnych dziennych wskaźników finansowych zaliczono: wartość indeksu VIX oraz VSTOXX, stawki LIBOR USD, wskaźnik TED spread oraz ceny kontraktów na ropę typu Brent i miedź. Natomiast lokalne wskaźniki finansowe i makroekonomiczne to: dzienna i miesięczna rentowność 10-letnich obligacji, stopa bezrobocia, inflacja oraz wskaźnik produkcji przemysłowej.

Wychodząc naprzeciw mocno udokumentowanej w literaturze tezie, że zmienność stóp zwrotu na giełdzie ma duże znaczenie w poziomie ich

współzależności, zbadano wpływ aktualnych wartości indeksu zmienności implikowanej VIX oraz VSTOXX na przyszły poziom współzależności wybranych giełd. W ten sposób starano się wykazać podpunkt, iż:

*Notowania indeksu VIX (oraz VSTOXX) mają głównie znaczenie dla poziomu współzależności rynków rozwiniętych. Wraz ze wzrostem tego indeksu występuje wzrost poziomu współzależności.*

W badaniu tym potwierdzono przypuszczenie, że indeks zmienności implikowanej VIX lub VSTOXX ma znaczenie dla przyszłego poziomu współzależności giełd rozwiniętych. Dla wszystkich możliwych par utworzonych dla stóp zwrotu indeksów giełdowych USA, Niemiec, Francji, Wielkiej Brytanii oraz Szwecji indeksy zmienności implikowanej istotnie wpływały na warunkowy współczynnik korelacji Spearmana, którym mierzono poziom współzależności giełd. Wraz ze wzrostem wartości indeksu VIX (lub VSTOXX) następuje wzrost siły powiązań pomiędzy rynkami. Natomiast dla GPW w Warszawie indeks zmienności implikowanej okazał się istotny tylko dla poziomu jej współzależności z giełdą w Londynie (indeks VIX, indeks VSTOXX) oraz z giełdą w Sztokholmie (indeks VSTOXX).

Kolejnym podpunktem hipotezy badawczej było stwierdzenie:

*Notowania stóp procentowych LIBOR oraz TED spread mają znaczenie dla poziomu współzależności rynków rozwiniętych. Obniżka stóp procentowych LIBOR oraz wzrost wartości TED spread skutkuje wzrostem tego poziomu.*

Badając stawki LIBOR USD zauważono, że dzienne zmiany tych stóp procentowych mają stosunkowo niewielkie znaczenie we wzajemnych relacjach giełd. Wśród rozwiniętych giełd Europy Zachodniej udało się wykazać znaczenie tego wskaźnika dla relacji giełdy niemieckiej z giełdą brytyjską oraz giełdy niemieckiej z giełdą szwedzką. Jednak znaczenie tego czynnika zaobserwowano również w relacji GPW w Warszawie z giełdami rozwiniętymi. Wykazano bowiem wpływ zmian stawki LIBOR USD na poziom współzależności GPW w Warszawie z giełdą w Londynie i w Nowym Jorku. We wszystkich tych relacjach wynikiem spadku stopy procentowej LIBOR USD jest wzrost poziomu współzależności.

Nieco inne wnioski otrzymano analizując wskaźnik TED spread. Wskaźnik ten miał znaczenie dla poziomu współzależności giełdy brytyjskiej z giełdą niemiecką, ale odnotowano też jego znaczenie dla relacji giełdy brytyjskiej z giełdą francuską. We wszystkich tych relacjach odpowiednio duży wzrost wskaźnika

TED spread powoduje, że giełdy przechodzą do stanu silnej współzależności. Nigdzie natomiast nie zauważono znaczenia tego wskaźnika we wzajemnych relacjach GPW w Warszawie z innymi giełdami.

Kolejny punkt hipotezy to:

*Ceny surowców mają znaczenie dla wyjaśnienia zmian poziomów współzależności rynków rozwiniętych. wzrost ceny surowca skutkuje wyższym poziomem tej współzależności.*

W celu wykazania tego punktu testowano wpływ cen kontraktów terminowych na ropę typu Brent i miedź na poziom współzależności analizowanych giełd. Generalnie, nie udało się wykazać istotnego znaczenia tego czynnika, we wzajemnych relacjach pomiędzy giełdami, ale jednak zauważalne były pewne prawidłowości. Ceny kontraktów na oba surowce miały znaczenie dla giełdy amerykańskiej i jej relacji z rozwiniętymi giełdami Europy Zachodniej. Zauważono, że wzrost cen istotnie wpływa na wzrost poziomu współzależności pomiędzy giełdą amerykańską a kolejno: giełdą niemiecką, francuską i brytyjską. Jeśli idzie o GPW w Warszawie to cena kontraktów na ropę miała znaczenie tylko dla jej relacji z giełdą w Nowym Yorku, natomiast znaczenie ceny kontraktów na miedź – dla relacji zarówno z giełdą w Nowym Yorku jak i z giełdą we Frankfurcie. Wniosek ten jest bardzo naturalny, gdyż jak wiadomo cena miedzi ma bardzo duże znaczenie dla giełdy polskiej (w której kluczową pozycję zajmuje KGHM-spółka mocno uzależniona od sytuacji na rynku miedzi).

Zatem, reasumując, można co prawda zauważyć, że wskaźniki globalne odgrywają dużą rolę głównie we wzajemnych relacjach giełd rozwiniętych, jednak zdarzają się przypadki, dla których mają one również znaczenie dla GPW w Warszawie. Na przykład, dla jej relacji z giełdą londyńską, która jest największa w Europie, znaczenie ma VIX i LIBOR USD, z giełdą amerykańską, która jest największa na świecie, znaczenie ma LIBOR USD oraz ceny kontraktów na surowce, natomiast relacja GPW w Warszawie z giełdą niemiecką jest determinowana przez cenę miedzi. Ale z drugiej strony należy pamiętać, że giełda w Warszawie była długo uznawana jako giełda rozwijająca się, jednak w roku 2017 agencja FTSE Russell sklasyfikowała Polskę jako rynek rozwinięty.

Przechodząc teraz do omówienia znaczenia czynników lokalnych, jako kolejny determinant zmian poziomu współzależności pomiędzy giełdami pod uwagę została wzięta dzienna rentowność 10 letnich obligacji. W ten sposób starano się wykazać podpunkt:

*Rentowność 10-letnich obligacji rynków rozwiniętych ma znaczenie dla poziomu współzależności rynku rozwiniętego z GPW w Warszawie. Wzrost rentowności obligacji kraju z rozwiniętą gospodarką obniża poziom tej współzależności.*

Podsumowując wnioski z tej części badań empirycznych można stwierdzić, że rentowność 10-letnich obligacji kraju z rozwiniętą gospodarką ma znaczenie dla wzajemnych relacji giełdy tego kraju z GPW w Warszawie. Wzrost rentowności 10-letnich obligacji obniża poziom współzależności giełd. Prawidłowość ta została zauważona w relacji giełdy polskiej z giełdą Wielkiej Brytanii, Niemiec, Francji (oraz Szwecji). Nie wykazano natomiast znaczenia rentowności 10-letnich obligacji w poziomie współzależności giełdy polskiej z giełdą amerykańską. Jednakże jeśli idzie o wzajemne relacje pomiędzy giełdami rozwiniętymi, to tutaj również istnieją pary, dla których czynnik ten odgrywa znaczącą rolę. Takie pary tworzy giełda brytyjska z giełdą amerykańską oraz giełda brytyjska z giełdą niemiecką.

Kolejne badanie dotyczyło analizy znaczenia danych makroekonomicznych: indeksu cen konsumpcyjnych (CPI), indeksu cen produkcji przemysłowej, stopy bezrobocia oraz rentowności dziesięcioletnich obligacji (o częstotliwości miesięcznej) w poziomie współzależności giełd. W ten sposób był weryfikowany ostatni punkt hipotezy badawczej:

*Wielkości makroekonomiczne, takie jak inflacja, stopa bezrobocia czy indeks produkcji przemysłowej mają znaczenie dla relacji GPW w Warszawie z rozwiniętymi giełdami Europy Zachodniej. Wzrost stopy bezrobocia w Polsce ma odbicie we wzroście poziomu współzależności tych giełd.*

Częstotliwość danych stóp zwrotu indeksów giełdowych jest dzienna, podczas gdy dane dotyczące wskaźników makroekonomicznych mają częstotliwość miesięczną. Badanie wykazało, że dane makroekonomiczne nie miały wpływu na przyszły poziom współzależności giełd. W wyniku analizy relacji GPW w Warszawie z pozostałymi giełdami uzyskano wniosek, że największe dla niej znaczenie ma bieżąca miesięczna rentowność obligacji oraz stopa bezrobocia. Rentowność obligacji okazała się istotna dla relacji GPW w Warszawie z giełdą Francji, Niemiec i Wielkiej Brytanii. Wraz ze spadkiem rentowności dziesięcioletnich obligacji krajów rozwiniętych zauważalny był wzrost przeciętnego poziomu współzależności tych giełd. Natomiast zmiana stopy bezrobocia w Polsce miała odbicie w poziomie współzależności GPW w Warszawie z giełdą Francji oraz Niemiec. Wraz ze wzrostem przyrostu stopy bezrobocia zauważalny był

wzrost przeciętnego poziomu współzależności analizowanych par giełd. Dla relacji giełdy niemieckiej z giełdą polską istotny okazał się również wskaźnik produkcji, zarówno z Polski oraz z Niemiec.

Natomiast dla wzajemnej relacji pomiędzy giełdami rozwiniętymi, oprócz miesięcznej rentowności 10-letnich obligacji (giełda brytyjska z giełdą francuską) nie wykryto znaczenia czynników makroekonomicznych. Zatem potwierdziło się przypuszczenie, że lokalne wskaźniki makroekonomiczne mają znaczenie dla relacji GPW w Warszawie z dużymi giełdami Europy Zachodniej.

Przechodzimy teraz do omówienia hipotez pomocniczych, które były wymienione we wstępie do monografii. Pierwszą taką hipotezą było stwierdzenie: *Dla relacji GPW w Warszawie z rozwiniętymi giełdami Europy wyższy poziom współzależności dwóch giełd pokrywa się z okresem dużej zmienności stóp zwrotu indeksów giełdowych.*

W tym celu do modelowania struktury powiązań pomiędzy dziennymi stopami zwrotu indeksów analizowanych giełd zastosowano przełącznikowy model Copula-GARCH z dwoma stanami, które reprezentują dwa różne poziomy współzależności. Analizując warunkowe prawdopodobieństwa przynależności do jednego z tych dwóch stanów można było zauważyć, że w okresie dużej zmienności stóp zwrotu, wzrastało również prawdopodobieństwo przynależności do stanu, w którym stopy zwrotu były bardzo silnie ze sobą skorelowane. Wynikanie w drugą stronę jednak nie było tak oczywiste. W okresach kiedy warunkowa korelacja Spearmana pomiędzy stopami zwrotu rozpatrywanych indeksów giełdowych była stosunkowo bardzo duża, to niekoniecznie był zauważalny znaczący wzrost warunkowej wariancji stóp zwrotu poszczególnych indeksów giełdowych.

W niniejszej publikacji wykazano również, że po roku 2006 nastąpiła zmiana struktury powiązań pomiędzy warszawską giełdą a rozwiniętymi rynkami Europy. W ten sposób została potwierdzona kolejna hipoteza, że:

*Zmiana struktury powiązań pomiędzy rynkami wyrażona jako poziom współzależności dziennych stóp zwrotu indeksów giełdowych może być nie tylko związana z okresami hossy i bessy, ale również może być wywołana przez inne czynniki.*

W badaniu rozważono dzienne stopy zwrotu indeksów giełdowych reprezentujące giełdy: Polski, Niemiec, Wielkiej Brytanii, Francji, Szwecji, Rosji oraz USA. W tym badaniu analizowany był okres od stycznia 1996 do grudnia 2006 roku. Dla danych z tego okresu zbudowano model przełącznikowy z trzema stanami, który poddano procedurze testowania z modelem przełącznikowym

z dwoma stanami. W wyniku przeprowadzonych analiz otrzymano wniosek, że model przełącznikowy, w którym uwzględniono trzeci stan, jest istotnie lepszy niż model z dwoma stanami. Analizując zmiany warunkowych współczynników korelacji Spearmana wyznaczonych dla stóp zwrotu, określających dynamikę poziomu współzależności giełd, zauważono, że istotne przejście ze stanu z bardzo słabą współzależnością do stanów z silniejszymi współzależnościami nastąpiło około 2006 roku. Efekt ten można tłumaczyć osiągnięciem przez GPW pewnej dojrzałości w relacjach z innymi giełdami na świecie.

Na zakończenie omawiania badań empirycznych przedstawionych w monografii, należy nadmienić o wnioskach wynikających z badania efektu zarażania GPW w Warszawie negatywnym bodźcem powstałym na rozwiniętych giełdach Europy Zachodniej i USA. Okazało się, że na GPW w Warszawie są odczuwalne gwałtowne zawirowania występujące na europejskich rynkach rozwiniętych. Gdy tam występują bardzo silne spadki, którym towarzyszy bardzo duża zmienność stóp zwrotu, istotnie wzrasta korelacja pomiędzy stopami zwrotu indeksów giełdowych. Jednak nie każdy negatywny bodziec, który pojawił się na rynku Europy Zachodniej wywoływał zarażenie GPW w Warszawie. Nie odnotowano również efektu zarażenia GPW w Warszawie silnymi spadkami na giełdzie w Nowym Yorku wywołanym kryzysem finansowym.

Przedstawione w pracy badania miały na celu przybliżyć zagadnienie współzależności i wzajemnych powiązań pomiędzy giełdami. Ponieważ jednak temat ten jest bardzo szeroki i w ostatnich latach często poruszany w literaturze przedmiotu, będzie tematem dalszych badań autorki.





## Bibliografia

- Aielli G.P., (2013): *Dynamic Conditional Correlations: On Properties and Estimation*. J. Bus. Econ. Stat. 31, 282-299.
- Akoum I., Graham M., Kivihaho J., Nikkinen J., Omran M., (2012): *Covement of Oil Price and Stock Prices in the GCC Region: A wavelet analysis*, The Quarterly Review of Economic and Finance 52, s. 385–394.
- Aloy M., De Truchis G., Dufrenot G., Keddad B., (2013): *Shift-Volatility Transmission in East Asian Equity Markets: New Indicators*, Market Microstructure and Nonlinear Dynamics, s. 273–291.
- Ang A., Bekaert G., (2002): *International Asset Allocation with Regime Shifts*, Review of Financial Studies 15, s. 1137–1187.
- Apergis N., Miller S.M., (2009): *Do Structural Oil-Market Shocks Affect Stock Prices?*, Energy Economics 31, s. 569–575.
- Baillie R., Bollerslev T., Mikkelsen H., (1996): *Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics 74, s. 3–30.
- Banaszczak-Soroka U., (2014): *Rynki finansowe organizacja, instytucje, uczestnicy*, C.H. Beck.
- Barbic T., Condić-Jurkić I., (2011): *Relationship between Macroeconomic Fundamentals and Stock Market Indices in Selected CEE Countries*, Ekonomski pregled 62, s. 113–133.
- Bartoszewicz J., (1989): *Wykłady ze statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa.
- Bartram S.M., Taylor S.J., Wang Y.H., (2007): *The Euro and European Financial Market Dependence*, Journal of Banking & Finance 31, s. 1461–1481.
- Basher S.A., Haug A.A., Sadorsky P., (2012): *Oil Prices, Exchange Rates and Emerging Stock Markets*, Energy Economics 34, s. 227–240.
- Bastos J.A., Caiado J., (2009): *Clustering Global Equity Markets with Variance Ratio Tests*, CEMAPRE Working paper, no. 0904.

- Bauwens L., Otranto E., (2016): *Modeling the Dependence of Conditional Correlations on Market Volatility*, Journal of Business & Economic Statistics 34(2), s. 254–268.
- Billio M., Caporin M., (2009): *A Generalized Dynamic Conditional Correlation Model for Portfolio Risk Evaluation*, Mathematics and Computers in Simulation 79(8), s. 2566–2578.
- Bernardo A.F., Welch I., (2003): *Liquidity and Financial Market Runs*, Yale ICF Working Paper (2–11), s. 1–33.
- Bollerslev T., (1986): *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of econometrics 31 (3), s. 307–327.
- Bollerslev T., (1990): *Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model*, Review of Economics and Statistics 72, s. 498–505.
- Bollerslev T., (2008): *Glossary to ARCH (GARCH)*, School of Economics and Management University of Aarhus.
- Bollerslev T., Wooldridge J.M., (1992): *Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-Varying Covariances*, Econometric Reviews 11, s. 143–172.
- Bollerslev T., Engle R., Wooldridge J., (1988): *A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariance*, Journal of Political Economy 96(1), s. 116–131.
- Bollerslev T., Engle R., Nelson D., (1994): *ARCH Models. Handbook of Econometrics 4*, Elsevier Science, Amsterdam.
- Bonanno G., Lillo F., Mantegna R., (2001): *Level of Complexity in Financial Markets*, Physica A, 299, s. 16–27.
- Borcuch A., (2009): *Globalny system pieniężny*, Wyd. CeDeWu, Warszawa.
- Boudt K., Danielsson J., Koopman S.J., Lucas A., (2012): *Regime Switches in Volatility and Correlation of Financial Institutions*, Technical report, Working Paper Research, 227, National Bank of Belgium, Brussels.
- Breymann W., Dias A., Embrechtss P., (2003): *Dependence Structures for Multivariate High-Frequency Data in Finance*, Quantitative Finance 3, s. 1–14.
- Brzeszczyński J., Kelm R., (2002): *Ekonometryczne modele rynków finansowych*, WIG-Press, Warszawa.
- Brzeszczyński J., Gajdka J., Schabek T. (2009): *Koniunktura giełdowa a zmiany w realnej sferze gospodarki w Polsce*, Przegląd Organizacji 7–8, 3–9.
- Burzała M., (2014): *Wybrane metody badania efektów zarażania na rynkach kapitałowych*, Wyd. Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.

- Caiado J., Crato N., (2007): *A GARCH-based Method for Clustering of Financial Time Series: International Stock Markets Evidence*, MPRA Paper, no. 2074.
- Caporin M., McAleer M., (2012): *Do We Really Need Both BEKK and DCC? A Tale of Two Multivariate GARCH Models*, J. Econ. Surv. 26, s. 736–751.
- Caporin M., McAleer M., (2013): *Ten Things You Should Know about the Dynamic Conditional Correlation Representation*, Econometrics 1, s. 115–126.
- Cerny A., Koblas M., (2005): *Stock Market Integration and the Speed of Information Transmission: The Role of Data Frequency in Cointegration and Granger Causality Tests*, Journal of International Business and Economics 1, s. 110–120.
- Changqing L., Chi X., Cong Y., Yana X., (2015): *Measuring Financial Market Risk Contagion using Dynamic MRS-Copula Models: The Case of Chinese and other International Stock Markets*, Economic Modelling 51, s. 657–671.
- Chen S.S., (2009): *Predicting the Bear Stock Market: Macroeconomic Variables as Leading Indicators*, Journal of Banking & Finance 33 (2).
- Chesnay F., Jondeau E., (2001): *Does Correlation between Stock Returns Really Increase during Turbulent Periods?* Economic Notes, 30(1), s. 53–80.
- Cheung L., Tam Ch., Szeto J., (2009): *Contagion of Financial Crisis: A Literature Review of Theoretical and Empirical Framework*, Research Note 2, s. 2–18.
- Chollete L., Heinen A., Valdesogo A., (2009): *Modeling International Financial Returns with a Multi-Variate Regime Switching Copula*, Journal of Financial Econometrics 7 (4), s. 437–80.
- Chruściński T., (2016): *Współzależność giełd papierów wartościowych na świecie w aspekcie procesów globalizacyjnych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.
- Clayton D.G., (1978): *A Model for Association in Bivariate Life Tables and its Application in Epidemiological Studies of Familial Tendency in Chronic Disease Incidence*, Biometrika 65, s. 141–151.
- Colacito R., Engle R.F., Ghysels E., (2011): *A Component Model for Dynamic Correlations*, J. Econometrics 164, s. 45–59.
- Cong R.-G., Wei Y.-M., Jiao J.-L., Fan Y., (2008): *Relationships between Oil Price Shocks and Stock Market: an Empirical Analysis from China*, Energy Policy 36, s. 3544–3553.
- Creti A., Joets M., Mignon V., (2013): *On the Links between Stock and Commodity Markets' Volatility*, Energy Economics 37, s. 16–28.
- Cunado J., Perez de Garcia F., (2005): *Oil Prices, Economic Activity and Inflation: Evidence for some Asian Countries*, Quarterly Review of Economics and Finance 45, s. 65–83.

- Czapkiewicz A., Basiura B., (2010): *Clustering Financial Data using Copula-GARCH Model in an Application for Main Market Stock Returns*, *Statistics in Transition* 11 (1), s. 25–45.
- Czapkiewicz A., Machno A., (2013): *Empirical Verification of World's Regions Profitability in Dynamic International Investment Strategy*, *Dynamic Econometric Models* 13, s. 145–162.
- Czapkiewicz A., Basiura B., (2014): *The Position of the WIG Index in Comparison with Selected Market Indices in Boom and Bust Periods*, *Statistics in Transition* 15 (3), s. 427–436.
- Czapkiewicz A., Majdosz P., (2014): *Grouping Stock Markets with Time Varying Copula-GARCH Model*, *Czech Journal of Economics and Finance* 64 (2), 144–152.
- Czapkiewicz A., Jamer P., (2015): *Dynamika współzależności warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych z innymi rynkami finansowymi*, *Ekonometria* 2 (48), s. 100–113.
- Czapkiewicz A., Jamer P., (2016): *Badanie wpływu indeksów zmienności na zmiany współzależności pomiędzy wybranymi rynkami finansowymi*, *Ekonometria* 3 (53), s. 87–101.
- Czapkiewicz A., Stachowicz M., (2016): *The Long-Run Relationship between the Stock Market and Main Macroeconomic Variables in Poland*, *Managerial Economics* 17 (1) 1, s. 7–20.
- Czapkiewicz A., Dawidowicz A., (2018): *On some Limit Theorem for Markov Chain*, <https://arxiv.org/pdf/1810.04466.pdf>.
- Czapkiewicz A., Jamer P., Landmesser J., (2018): *Effects of Macroeconomic Indicators on the Financial Markets Interrelations*, *Czech Journal of Economics and Finance* 68 (3), s. 168–293.
- Dębski W., (2014): *Rynek finansowy i jego mechanizmy*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa.
- Didier T., Love I., Perla M.S.M., (2010): *What Explains Stock Markets Vulnerability to the 2007–08 Crisis?* In: *World Bank Policy Research Working Paper*.
- Diebold F.X., Lee J.H., Weinbach G., (1994): *Regime Switching with Time-Varying Transition Probabilities*, C. Hargreaves (ed.), *Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration*. (Advanced Texts in Econometrics, C.W.J. Granger and G. Mizon, eds.), Oxford: Oxford University Press, s. 283–302.
- Diebold F.X., Gunther T.A., Tay A.S., (1998): *Evaluating Density Forecasts with Applications to Financial Risk Management*, *International Economic Review* 39 (4), s. 863–83.

- Doman R., (2011): *Zastosowania kopuli w modelowaniu dynamiki zależności na rynkach finansowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
- Doman M., Doman R., (2009): *Modelowanie zmienności i ryzyka: metody ekonometrii finansowej*, Wolters Kluwer, Kraków.
- Doman M., Doman R., (2014): *Dynamika zależności na globalnym rynku finansowym*, Wydawnictwo Difin, Warszawa.
- Dorosz A., Puławski M., (1991): *Giełdy pieniężne*, [w:] *Giełdy w gospodarce światowej*, W. Januszkiewicz (red.), PWE, Warszawa.
- Dornbusch R.S., Claessens S., Park Y.C., (2000): *Contagion: Understanding How It Spreads*, The World Bank Research Observer 15(2), s. 177–197.
- Durante F., Jaworski P., (2010): *Spatial Contagion between Financial Markets: A Copula-based Approach*, Applied Stochastic Models in Business and Industry 26(5), s. 551–564.
- Durante F., Foscolo E., (2013): *An Analysis of the Dependence among Financial Markets by Spatial Contagion*, International Journal of Intelligent Systems 28(4), 3 s. 19–331.
- Durante F., Foscolo E., Sabo M., (2013): *A Spatial Contagion Test for Financial Markets*, In: R. Kruse, M. Berthold, C. Moewes, M. Gil, P. Grzegorzewski, O. Hryniewicz (eds.), *Synergies of soft computing and statistics for intelligent data analysis. Advances in intelligent systems and computing 190*, s. 313–320. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Durante F., Foscolo E., Jaworski P., Hao Wang H., (2014): *A Spatial Contagion Measure for Financial Time Series*, Expert Systems with Applications 41(8), s. 4023–4034.
- El-Sharif I., Brown D., Burton B., Nixon B., Russell A., (2005): *Evidence on the Nature and Extent of the Relationship between Oil Prices and Equity Values in the UK*, Energy Economics 27, s. 819–830.
- Embrechts P., McNeil A.J., Straumann D., (1999): *Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls*, Preprint ETH Zurich, <http://www.math.ethz.ch/embrechts>.
- Embrechts P., Lindskog F., McNeil A.J., (2001): *Modelling Dependence with Copulas and Application to Risk Management*, Preprint ETH Zurich, <http://www.math.ethz.ch/finance>.
- Engle R.F., (2002): *Dynamic Conditional Correlation: a Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models*, Journal of Business and Economic Statistics 20, s. 339–50.
- Engle R.F., Ng V.K., (1993): *Measuring and Testing the Impact of News on Volatility*, Journal of Finance 48, s. 1749–1778.

- Engle R.F., Kroner K.F., (1995): *Multivariate Simultaneous Generalized Arch*, Econometric Theory 11(1), s. 122–150.
- Fayyad A., Daly K., (2011): *The Impact of Oil Price Shocks on Stock Market Returns: Comparing GCC Countries with the UK and USA*, Emerging Markets Review 12 (1), s. 61–78.
- Fernandez C., Steel M.F.J., (1998): *On Bayesian Modellling of Fat Tails and Skewness*, Center for Economic Research and Department of Econometrics Tilburg University.
- Ferson W., Harvey C., (1994): *Sources of Risk and Expected Returns in Global Equity Markets*, Journal of Banking and Finance 18, s. 775–803.
- Filardo A.J., (1994): *Business-cycle Phases and their Transitional Dynamics*, Journal of Business and Economic Statistics 12(3), s. 299–308.
- Fiszeder P., (2005): *Modelowanie procesów finansowych z długą pamięcią w średniej i wariancji*, Dynamiczne Modele Ekonometryczne, Materiały w XIX Ogólnopolskim Seminarium Naukowym, s. 233–240.
- Fiszeder P., (2009): *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wyd. Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
- Fiszeder P., Rowiński S., (2012): *Modelowanie zależności pomiędzy wybranymi procesami makroekonomicznymi a Warszawski Indeks Giełdowym*, Ekonomia i Prawo 10(3) s. 153–167.
- Forbes J.K., Rigobon R., (2002): *No Contagion, only Interdependence: Measuring Stock Market Co-movement*, Journal of Finance 57, s. 2223–2261.
- Forbes J.K., Chinn M.D., (2004): *A Decomposition of Global Linkages in Financial Markets over Time*, The Review of Economics and Statistics 86, 705–722.
- Frank M.J., (1979): *On the simultaneous associativity of  $F(x,y)$  and  $x + y - F(x,y)$* , Aequationes Math 19, s. 194–226.
- Fundowicz J., Wyżnikiewicz B., (2006): *Fluktuacje koniunktury gospodarczej i giełdowej – perspektywa makroekonomiczna*, [w:] *Diagnozowanie i prognozowanie koniunktury gospodarczej w Polsce*, red. M. Mocek, wyd. UE Poznań.
- von Furstenberg G., Jeon B.N., (1989): *International Stock Price Movements: Links and Messages*, Brookings papers on economic activity I, s. 125–167.
- Genest C., MacKay J., (1986): *Copules archimediennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont donnees*, The Canadian Journal of Statistics 14, s. 145–159.
- Genest C., MacKay J., (1986): *The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals*, The Canadian Amer Statist 40, s. 280–285.

- Genest C., Rivest L.P., (1993): *Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas*, J. Amer Statist Assoc 88, s. 1034–1043.
- Genest C., Remillard B., (2008): *Validity of the parametric bootstrap for goodness-of-fit testing in semiparametric models*, Annales de l'Institut Henri Poincaré: Probabilités et Statistiques 44, s. 1096–1127.
- Genest C., Remillard B., Beaudoin D., (2009): *Goodness-of-Fit Tests for Copulas: A Review and a Power Study*, Insurance: Mathematics and Economics 44, 199–214.
- Glosten R.T., Jagannathan R., Runkle D., (1993): *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*, Journal of Finance 48 (5), s. 1779–1801.
- Gomes P., Taamouti A., (2016): *In Search of the Determinants of European Asset Market Comovements*, International Review of Economics & Finance 44, 103–117.
- Greene H., (2002): *Econometric Analysis*, Prentice Hall.
- Grubel H.G., (1968): *Internationally Diversified Portfolios Welfare Gains and Capital Flows*, The American Economic Review 58, s. 1299–1314.
- Gumbel E.J., (1960): *Bivariate Exponential Distributions*, J. Amer Statist Assoc 55, s. 698–707.
- Gurgul H., (2006): *Analiza zdarzeń na rynkach akcji. Wpływ informacji na ceny papierów wartościowych*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków.
- Gurgul H., Wójtowicz T., (2008): *Fractionally Integrated GARCH Models versus Long Memory*, Modelling economies in transition 2008 (AMFET Monographs)/ red. Władysław Welfe, Aleksander Welfe, Piotr Wdowiński, AMFET, Łódź, s. 181–205.
- Gurgul H., Lach Ł., Wójtowicz T., (2016): *Impact of US Macroeconomic News Announcements on Intraday Causalities on Selected European Stock Markets*, Czech Journal of Economics and Finance 66(5), s. 405–425.
- Hamilton J.D., (1989): *A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle*, Econometrica 57 (2), s. 357–384.
- Hamilton J.D., (1990): *Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime*, Journal of Econometrics 45, s. 39–70.
- Hamilton J.D., (1994): *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Hammoudeh S., Li H., (2005): *Oil Sensitivity and Systematic Risk in Oil-Sensitive Stock Indices*, Journal of Economics and Business 57, s. 1–21.
- Hanousek J., Kocenda E., Kután A.M., (2009): *The Reaction of Asset Prices to Macroeconomic Announcements in New EU Markets: Evidence from Intraday Data*, Journal of Financial Stability 14(2), s. 199–219.

- Hansen B., (1994): *Autoregressive Conditional Density Estimation*, International Economic Review 35, s. 705–730.
- Hansen C., McDonald J.B., Newey W.K., (2010): *Instrumental Variables Estimation with Flexible Distributions*, Journal of Business and Economic Statistics 28 (1), s. 13–25.
- Henry O.T., (2009): *Regime Switching in the Relationship between Equity Returns and Short-Term Interest Rates in the UK*, Journal of Banking & Finance 33 (2), s. 405–414.
- Huang R.D., Masulis R.W., Stoll H.R., (1996): *Energy Shocks and Financial Markets*, Journal of Futures Markets, 16, s. 1–27.
- Hutchinson T.P., Lai C.D., (1990): *Continuous Bivariate Distributions, Emphasising Applications*, Rumsby Scientific Publishing, Adelaide, South Australia.
- Jajuga K., (2009): *Wprowadzenie do inwestycji finansowych: depozyty i instrumenty rynku pieniężnego*, Wyd. KNF, Warszawa.
- Jajuga K., Jajuga T., (2017): *Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa niefinansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa.
- Jakubowski J., Sztencel R., (2001): *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, SCRIPT, Warszawa.
- Jamer P., (2013): *Estymacja parametrów dynamicznych modeli Copula-GARCH sterowanych procesem Markowa*, praca magisterska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska.  
<http://jamer.pl/resources/matematyka/pracamagisterskav3.0.2.pdf>
- Jaunky V.C., (2013): *A Cointegration and Causality Analysis of Copper Consumption and Economic Growth in Rich Countries*, Resources Policy 38(4), s. 628–639.
- Jaworski P., Durante F., Hardle W.K., Rychlik T., (2010): *Copula Theory and Its Applications*, Proceedings of the Workshop Held in Warsaw, 25–26 September 2009, Springer.
- Joe H., (1993): *Parametric Families of Multivariate Distributions with Given Margins*, J. Multivariate Anal. 46, s. 262–282.
- Joe H., (1997): *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, London.
- Joe H., (2005): *Asymptotic Efficiency of the Two-Stage Estimation Method for Copula-based Models*, Journal of Multivariate Analysis 94, s. 401–419.
- Joe H., Xu J.J., (1996): *The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models*, Technical Report No. 166, Department of Statistics, University of British Columbia.



- Jondeau E., Rockinger M., (2006): *The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: an International Stock Market Application*, Journal of International Money and Finance 25, s. 827–853.
- Jones C.M., Kaul G., (1996): *Oil and the Stock Markets*, The Journal of Finance 51, s. 463–491.
- Karolyi G.A., Stulz R.M., (1996): *Why do Markets Move Together? An Investigation of the U.S.–Japan Stock Return Co-movements*, Journal of Finance 51, s. 951–986.
- Kenourgios D., Samitas A., Paltalidis N., (2011): *Financial Crises and Stock Market Contagion in a Multivariate Time-Varying Asymmetric Framework*, Journal of International Financial Markets, Institutions and Money 21 (1), 92–106.
- Kilian L., Park, C., (2009): *The Impact of Oil Price Shocks on the US Stock Market*, Int. Econ. Rev. 50(4), s. 1267–1287.
- Kim K., (2003): *Dollar Exchange Rate and Stock Price: Evidence from Multivariate Cointegration and Error Correction Model*, Review of Financial Economics 12, s. 301–313.
- Kim C.J., Piger J., Startz, R., (2008): *Estimation of Markov Regime-Switching Regression Models with Endogenous Switching*, Journal of Econometrics 143 (2), s. 263–273.
- King M.A., Wadhwani S., (1990): *Transmission of Volatility between Stock Markets*, The Review of Financial Studies 3, s. 5–33.
- King M.A., Sentana E., Wadhwani S., (1994): *Volatility and Links between National Stock Markets*, Econometrica 62(4), s. 901–933.
- Knif J., Kolari J., Pynnonen S., (2005): *What Drives Correlation between Stock Market Returns? International Evidence*, NBER working paper, No: 8109.
- Lee J., (2013): *Relationships between Commodities and Macro Financial Variables: A Structural VAR Analysis*, praca dyplomowa: Faculty of California State University, Fullerton.
- Lee S.B., Kim K.J., (1993): *Does the October 1987 Crash Strengthen the Comovements among National Stock Markets?*, Review of Financial Economics 3, s. 89–102.
- Liu Q., An Y., (2011): *Information Transmission in Informationally Linked Markets: Evidence from US and Chinese Commodity Futures markets*, Journal of International Money and Finance 30 (5), s. 778–795.
- Longin F., Solnik B., (1995): *Is the Correlation in International Equity Returns Constant 1960–1990?*, Journal of International Money & Finance 14(1), s. 3–23.

- Longin F., Solnik B., (2001): *Extreme Correlation of International Equity Markets*, Journal of Finance 56, s. 649–676.
- Luttmer E.G.J., (1996): *Asset Pricing in Economies with Frictions*, Econometrica 6, s. 1439–1467.
- Łon E., (2006): *Makroekonomiczne uwarunkowania koniunktury na polskim rynku akcji w świetle doświadczeń międzynarodowych*, Wydawnictwo AE w Poznaniu.
- Malik F., Ewing B.T., (2009): *Volatility Transmission between Oil Prices and Equity Sector Returns*, International Review of Financial Analysis 18, s. 95–100.
- Mantegna R.N., (1999): *Hierarchical Structure in Financial Markets*, The European Physical Journal 11, s. 193–197.
- Martinet G.G., McAleer M., (2016): *On the Invertibility of EGARCH (p,q)*, Econometrics Reviews 1, s. 1–26.
- Mashal R., Zeevi A., (2002): *Beyond Correlation: Extreme Co-movements Between Financial Assets*, Mimeo, Columbia Graduate School of Business.
- Masih R., Peters S., De Mello L., (2011): *Oil Price Volatility and Stock Price Fluctuations in an Emerging Market: The Relationship between Oil Prices and Stock Prices – Evidence from South Korea*, Energy Economics 33, s. 75–986.
- McAleer M., Ling S., (2003): *Asymptotic Theory for a New Vector ARMA-GARCH Model*, Econometric Theory 19, s. 280–310.
- McAleer M., Chan F., Hoti S., Lieberman O., (2008): *Generalized Autoregressive Conditional Correlation*, Econometric Theory 24, s. 1554–1583.
- Miller J.I., Ratti R.A., (2009): *Crude Oil and Stock Markets: Stability, Instability, and Bubbles*, Energy Economics 31, s. 559–568.
- Milo W., (2000): *Finansowe rynki kapitałowe*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa.
- Milo W., Malaczewski M., Szafrński G., Ulrichs M., Wośko Z., (2010): *Stabilność rynków kapitałowych*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa.
- Mokrzycka J., Pajor A., (2016): *Formalne porównanie modeli Copula-AR(1)-GARCH(1,1) dla subindeksów indeksu WIG*, Przegląd Statystyczny 63(2), s. 123–148.
- Mobarek A., Muradoglu G., Mollah S., Hou A.J., (2016): *Determinants of Time Varying Co-movements among International Stock Markets during Crisis and non-Crisis Periods*, Journal of Financial Stability 24, s. 1–11.
- Mohanty S.K., Nandha M., Turkistani A.Q., Alaitani M.Y., (2011): *Oil Price Movements and Stock Market Returns: Evidence from Gulf Cooperation Council (GCC) Countries*, Global Finance Journal 22, 42–55.
- Narayan P.K., Narayan S., (2010): *Modelling the Impact of Oil Prices on Vietnams Stock Prices*, Applied Energy 87, s. 356–361.

- Nasseh A., Strauss J., (2000): *Stock Prices and Domestic and International Macroeconomic Activity: a Cointegration Approach*, The Quarterly Review of Economics and Finance 40(2), s. 229–245.
- Nelsen R.B., (1997): *Dependence and Order in Families of Archimedean Copulas*, J. Multivariate Anal. 60, s. 111–121.
- Nelsen R.B., (2006): *An Introduction to Copulas*, Springer.
- Nelson D.B., (1991): *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*, Econometrica 59(2), s. 397–370.
- Osiewalski J., (2001): *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, Wydawnictwo AE w Krakowie.
- Osiewalski J., Pipień M., (2002): *Multivariate Arch-Type Models: A Bayesian Comparison*, [w:] Zieliński Z. (red.), *Dynamic Econometric Models*, Toruń.
- Osiewalski J., Pipień M., (2004): *Bayesian Comparison of Bivariate ARCH-type Models for the Main Exchange Rates in Poland*, Journal of Econometrics 123 (2), s. 371–394.
- Osińska M., (2006): *Ekonometria finansowa*, PWE, Warszawa.
- Otranto E., (2004): *the Markets Volatility with ARMA Distance Measures*, Quaderni di Statistica 6, s. 1–19.
- Rafailidis P., Katrakilidis C., (2014): *The Relationship between Oil Prices and Stock Prices: a Nonlinear Asymmetric Cointegration Approach*, Financial Economics 24 (12), s. 793–800.
- Papla D., (2007): *Wykorzystanie modelu DCC-MGARCH w analizie zmian zależności wybranych akcji GPW w Warszawie*, Dynamiczne Modele Ekonometryczne, X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe w Toruniu.
- Park J., Ratti R., (2008): *Oil Price Shocks and Stock Markets in the US and 13 European Countries*, Energy Economics 30, s. 2587–2608.
- Patton A.J., (2001): *Modelling Time-Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula*, University of California at San Diego, Department of Economics.
- Patton A.J., (2006): *Estimation of Multivariate Models for Time Series of Possibly Different Lengths*, Journal of Applied Econometrics 21(2), s. 147–173.
- Pelletier D., (2006): *Regime-Switching for Dynamic Correlation*, Journal of Econometrics 131, s. 445–473.
- Pericoli M., Sbracia M., (2003): *A Primer on Financial Contagion*, Journal of Economic Surveys 17(4), s. 571–608.
- Pipień M., (2006): *Wnioskowanie bayesowskie w ekonometrii finansowej*, Monograph in Polish (Bayesian Inference in Financial Econometrics), Cracow University of Economics Press.

- Piontek K., (2002): *Modelowanie i prognozowanie zmienności instrumentów finansowych*, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Wrocław (rozprawa doktorska).
- Piontek K., (2003): *Modelowanie długiej pamięci w szeregach zmienności stóp zwrotu*, Konferencja Modelowanie Preferencji a Ryzyko, Ustroń.
- Piontek K., Papla D., (2005): *Wykorzystane wielorównaniowych modeli AR-GARCH w pomiarze ryzyka metodą VaR*, Prace Naukowe Nr 1088 AE we Wrocławiu, s. 126–138.
- Ramchand L., Susmel R., (1998): *Volatility and Cross Correlation across Major Stock Markets*, Journal of Empirical Finance 5, s. 397–416.
- Rapach D.E., Wohar M.E., Rangvid J., (2005): *Macrovariables and International Stock Return Predictability*, International Journal of Forecasting 21 (1), s. 137–166.
- Rivers D., Vuong Q., (2002): *Model Selection Tests for Nonlinear Dynamics Models*, The Econometrics Journal 5(1), s. 1–39.
- Rosenblatt M., (1952): *Remarks on a Multivariate Transformation*, The Annals of Mathematical Statistics 23, s. 470–472.
- Rubaszek M., (2004): *Analiza długookresowej zależności pomiędzy indeksem giełdowym i wzrostem gospodarczym*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego 389, s. 483–492.
- Rybiński K., (2007): *Globalizacja w trzech odstępach*, DIFFIN, Warszawa.
- Sadorsky P., (1999): *Oil Price Shocks and Stock Market Activity*, Energy Economics 21, s. 449–469.
- Sadorsky P., (2014): *Modeling Volatility and Correlations between Emerging Market Stock Prices and the Prices of Copper, Oil and Wheat*, Energy Economics 42, s. 72–81.
- Serfling R.J., (1991): *Twierdzenia graniczne statystyki matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Silva Filho O.C., Ziegelmann F.A., Dueker M.J., (2012): *Modeling Dependence Dynamics Through Copulas with Regime Switching*, Insurance: Mathematics and Economics 50 (3), s. 346–356.
- Sklar A., (1959): *Fonction de Repartition an Dimension et Leur Marges*, Publications de l' Institut de Statistique de L' Universite de Paris 8, s. 229–231.
- Sopoćko A., (2010): *Rynkowe instrumenty finansowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Syriopoulos T., (2007): *Dynamic Linkages between Emerging European and Developed Stock Markets: Has the EMU any Impact?* International Review of Financial Analysis 16 (1), s. 41–60.

- Thiel S., (2010): *Rynek kapitałowy i terminowy*, KNF, Warszawa.
- Tse Y.K., Tsui A.K.C., (2002): *A Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model with Time-Varying Correlations*, *Journal of Business and Economic Statistics* 20, s. 351–361.
- Voronkova S., (2004): *Equity Market Integration in Central European Emerging Markets: A Cointegration Analysis with Shifting Regimes*, *International Review of Financial Analysis* 13(5), s. 633–647.
- Vuong Q.H., (1989): *Likelihood Ratio Tests for Model Selection and non-Nested Hypotheses*, *Econometrica* 57, s. 307–333.
- Wanat S., Papież M., Śmiech S., (2015): *Conditional Dependence Structure between Precious Metals: A Copula-GARCH Approach*, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie* 4(940), s. 19–33.
- Ward J.H.,(1963): *Hierarchical Grouping to Optimize an Objective Function*, *Journal of the American Statistical Association*, 58, s. 236–244.
- Witowska D., Kompa K., Matuszewska-Janica A.,(2012): *Analysis of Linkages between Central and Eastern European Capital Markets*, *Dynamic Econometric Models* 12, s. 19–32.
- White H., (1982): *Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models*, *Econometrica* 50, s. 1–25.



## **Notka o Autorze**

Dr Anna Czapkiewicz ukończyła kierunek Matematyka na Uniwersytecie Jagiellońskim. Tytuł doktora nauk ekonomicznych uzyskała na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym Uniwersytetu Łódzkiego. Obecnie pracuje w Samodzielnej Pracowni Zastosowań Matematyki w Ekonomii Wydziału Zarządzania AGH w Krakowie. Prowadzi wykłady z matematyki, statystyki oraz analizy wielowymiarowej na Informatyce i Ekonometrii WZ AGH w Krakowie. Prowadziła również zajęcia z ekonometrii finansowej na Politechnice Warszawskiej. Jest autorką i współautorką ponad 50 publikacji naukowych o zasięgu krajowym i zagranicznym.

