Uniwersytet Łódzki

Wydział Matematyki i Informatyki

O topologiach generowanych przez regularne ciągi zbiorów mierzalnych

Mikołaj Widzibor

Rozprawa doktorska przygotowana
w Katedrze Funkcji Rzeczywistych
pod kierunkiem
promotora dra hab. Jacka Hejduka
oraz promotora pomocniczego
dr Renaty Wiertelak

Łódź 2021

Spis treści

Wprowadzenie

Praca jest związana z pewnymi własnościami topologii $\mathcal{S}$-gęstości, stanowiącymi daleko idące uogólnienie topologii gęstości, która odgrywa istotną rolę w badaniach w obszarze funkcji rzeczywistych. Koncepcja topologii $\mathcal{S}$-gęstości, indukowanej przez pewien operator określony na rodzinie zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, który związany jest z ustalonym ciągiem zbiorów mierzalnych zbieżnym do zera, została zapoczątkowana w pracy [SW1]. Jest to naturalne uogólnienie topologii $\mathcal{J}$-gęstości generowanej przez operator związany z ciągiem przedziałów domkniętych zbieżnym do zera, które zostało przedstawione w pracy [HW2].

W rozdziale wstępnym przedstawiona jest krótka historia uogólniania klasycznej topologii gęstości. Zacytowane i przedstawione zostały twierdzenia pozwalające zdefiniować $\mathcal{S}$-gęstość, w szczególności w przypadku, gdy operator $\mathcal{S}$-gęstości jest operatorem dolnej lub prawie dolnej gęstości. Pewne cytowane własności mające znaczenie w dalszej części pracy zawierają dowody. W rozdziale tym uzasadniono, że pewne topologie $\mathcal{S}$-gęstości są regularne, zaś wszystkie topologie $\mathcal{S}$-gęstości nie są normalne.

W rozdziale II spośród rozważnych ciągów zbieżnych do zera wyróżnia się ciągi regularne. Operatory generowane przez te ciągi są operatorami dolnej gęstości, a topologie związane z ciągami regularnymi są bogatsze od topologii gęstości. Istotnym rezultatem tego rozdziału jest pokazanie istnienia regularnego ciągu $\mathcal{S}$, dla którego operator $\mathcal{S}$-gęstości wyznaczony przez ten ciąg nie pokrywa się z żadnym operatorem $\mathcal{S}$-gęstości wyznaczonym przez zbieżny do zera ciąg przedziałów domkniętych. W konsekwencji można stwierdzić istnienie topologii $\mathcal{S}$-gęstości nie pokrywającej się z żadną topologią $\mathcal{S}$-gęstości wyznaczoną przez zbieżny do zera ciąg przedziałów domkniętych. Rezultat ten został w opublikowany pracy [WW].

Treścią III rozdziału jest wynik orzekający, że topologie $\mathcal{S}$-gęstości generowane przez operatory związane z ciągami regularnymi są całkowicie regularne. Dowód angażuje analogon twierdzenia Łuzina-Mienszowa dla $\mathcal{S}$-gęstości, a także równoważność ciągłości względem topologii $\mathcal{S}$-gęstości i $\mathcal{S}$-aproksymatywnej ciągłości z pracy [W1].

Rozdział IV związany jest z badaniami porównywania topologii $\mathcal{S}$-gęstości, które generowane są przez operatory związane z różnymi ciągami zbiorów zbieżnymi do zera będącymi skończonymi sumami przedziałów domkniętych. Do uzyskania porównania został sformułowany warunek $(M*)$, związany z pewną własnością pokryciową ciągu zbiorów. W rozdziale tym został również sformułowany warunek konieczny porównywania $\mathcal{S}$-topologii, który wraz z warunkiem $(M*)$ staje się warunkiem dostatecznym.

Rozdział V przedstawia dyskusję warunku $(M*)$ w odniesieniu do ciągów przedziałów domkniętych, które generują topologię $\mathcal{S}$-gęstości. Zostały również zaprezentowane przykłady ciągów spełniających warunek $(M*)$, jak i ciągów, które tego warunku nie spełniają.

Rozdział VI wprowadza pojęcie ciągów słabo regularnych. Głównym rezultatem tego rozdziału jest konstrukcja ciągu słabo regularnego, który nie jest regularny. Rozdział kończy się twierdzeniem, że topologie $\mathcal{S}$-gęstości związane z ciągami słabo regularnymi są regularne.

Rozdział VII dotyczy zależności między topologiami $\mathcal{S}$-gęstości a topologiami tego typu związanymi z ciągami średnic zbiorów występujących w ciągu generującym topologię $\mathcal{S}$-gęstości.

Oznaczenia

$\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych;

$\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych;

$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych;

λ – miara Lebesgue'a na prostej;

$\mathcal{L}$ – σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a;

$\mathbb{L}$ – σ-ideał zbiorów miary zero Lebesgue'a;

$\mathcal{T}_{\mathrm{nat}}$ – topologia naturalna na prostej;

$\forall_{A,B\subset\mathbb{R}}\ A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

$\mathrm{int}A$ – wnętrze zbioru $A \subset \mathbb{R}$ względem topologii naturalnej na prostej;

$\overline{A}$ – domknięcie zbioru $A \subset \mathbb{R}$ względem topologii naturalnej na prostej;

$\mathrm{Int}_{\mathcal{T}}(A)$ – wnętrze zbioru A względem topologii $\mathcal{T}$;

$\overline{A}^{\mathcal{T}}$ – domknięcie zbioru względem topologii $\mathcal{T}$;

$a + X = \{a + x : x \in X\}$;

$a \cdot X = \{ax : x \in X\}$;

$\mathrm{diam}(X) = \sup\{|x - y| : x, y \in X\}$ – średnica zbioru $X \subset \mathbb{R}$;

$\mathrm{dist}(a, X) = \inf\{|x - a| : x \in X\}$ – odległość punktu a od zbioru $X \subset \mathbb{R}$.

1. Rozdział wstępny

Niech $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ będzie przestrzenią mierzalną, gdzie $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem podzbiorów przestrzeni X, zaś $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}$ właściwym σ-ideałem. Powiemy, że operator $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ (por. [LMZ]), jeśli spełnione są następujące warunki:

1. $\Phi(\emptyset) = \emptyset$, $\Phi(X) = X$,
2. $\forall_{A \in \mathcal{S}} \forall_{B \in \mathcal{S}} \; \Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$,
3. $\forall_{A \in \mathcal{S}} \forall_{B \in \mathcal{S}} \; A \triangle B \in \mathcal{J} \Rightarrow \Phi(A) = \Phi(B)$,
4. $\forall_{A \in \mathcal{S}} \; A \triangle \Phi(A) \in \mathcal{J}$.

W przypadku, gdy warunek 4 zastąpimy własnością, że

$$\forall_{A \in \mathcal{S}} \; \Phi(A) \setminus A \in \mathcal{J},$$

to mówimy, że Φ jest operatorem prawie dolnej gęstości na przestrzeni $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$. Jeśli rodzina $\mathcal{T}_\Phi = \{A \in \mathcal{S} : A \subset \Phi(A)\}$ stanowi topologię na X, to powiemy, że topologia $\mathcal{T}_\Phi$ jest generowana przez operator Φ.

Powiemy, że zbiór $A \in \mathcal{S}$ jest mierzalną otoczką zbioru $B \subset X$, jeśli $B \subset A$ oraz dowolny $\mathcal{S}$-mierzalny zbiór $C \subset A \setminus B$ jest elementem σ-ideału $\mathcal{J}$. Analogicznie mówimy, że że zbiór $C \in \mathcal{S}$ jest mierzalnym jądrem zbioru $B \subset X$, jeśli $C \subset B$ oraz dowolny $\mathcal{S}$-mierzalny zbiór $D \subset B \setminus C$ jest elementem σ-ideału $\mathcal{J}$. Dowolny podzbiór X posiada $\mathcal{S}$-mierzalną otoczkę wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny podzbiór X posiada $\mathcal{S}$-mierzalne jądro. Jeśli dowolny zbiór $B \subset X$ posiada mierzalną otoczkę, to mówimy, że para $\langle \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ posiada własność mierzalnej otoczki. W szczególności każda para $\langle \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ spełniająca warunek przeliczalnego łańcucha, to znaczy, że jeśli dowolna rodzina zbiorów parami rozłącznych zawarta w $\mathcal{S} \setminus \mathcal{J}$ jest co najwyżej przeliczalna, posiada własność mierzalnej otoczki. Oczywiście para $\langle \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$ posiada własność mierzalnej otoczki.

Motywacją do rozważania operatorów prawie dolnej gęstości jest następujące twierdzenie, które przedstawimy z dowodem.

Twierdzenie 1.1 ([HW1], Th.25.3)**.** *Jeśli $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ jest operatorem prawie dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ oraz para $\langle \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ posiada własność mierzalnej otoczki, to rodzina $\mathcal{T}_\Phi = \{A \in \mathcal{S} : A \subset \Phi(A)\}$ stanowi topologię.*

Dowód. Z warunku 1 i 2 definicji operatora prawie dolnej gęstości wynika, że $\emptyset \in \mathcal{T}_\Phi$, $X \in \mathcal{T}_\Phi$ oraz rodzina $\mathcal{T}_\Phi$ jest zamknięta za względu na skończone iloczyny. Udowodnimy, że rodzina $\mathcal{T}_\Phi$ jest zamknięta na dowolne sumy. Niech $\{A_t\}_{t\in T} \subset \mathcal{T}_\Phi$. Wówczas $A_t \in \mathcal{S}$ oraz $A_t \subset \Phi(A_t)$ dla dowolnego $t \in T$. Niech B będzie $\mathcal{S}$-mierzalnym jądrem zbioru $\bigcup_{t\in T} A_t$. Wówczas $(B \cap A_t) \triangle A_t \in \mathcal{J}$ dla każdego $t \in T$. Zatem

$$B \subset \bigcup_{t\in T} A_t \subset \bigcup_{t\in T} \Phi(A_t) = \bigcup_{t\in T} \Phi(B \cap A_t) \subset \Phi(B).$$

Ponieważ $\Phi(B) \setminus B \in \mathcal{J}$ oraz $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}$, więc wnioskujemy, że

$$\bigcup_{t\in T} \Phi(A_t) = B \cup \left((\Phi(B) \setminus B) \cap \bigcup_{t\in T} A_t \right) \in \mathcal{S}.$$

Skoro $\Phi(A_t) \subset \Phi\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)$ oraz $A_t \subset \Phi(A_t)$ dla każdego $t \in T$, to $\bigcup_{t\in T} \Phi(A_t) \in \mathcal{T}_\Phi$. □

W przypadku operatora dolnej gęstości otrzymujemy mocniejszy rezultat.

Twierdzenie 1.2 ([HW1], Th.25.6)**.** *Jeśli $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$, to para $\langle \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ posiada własność mierzalnej otoczki wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina $\mathcal{T}_\Phi = \{A \in \mathcal{S} : A \subset \Phi(A)\}$ stanowi topologię.*

Pewne własności topologii generowanych przez operatory dolnej i prawie dolnej gęstości z zarysowaniem ich podobieństw i różnic wraz z licznymi przykładami zawiera praca [HW1]. Między innymi warto odnotować, że zbiory o własności Baire'a i zbiory I kategorii dla topologii generowanych przez operatory dolnej gęstości na przestrzeni $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ pokrywają się odpowiednio z rodzinami $\mathcal{S}$ oraz $\mathcal{J}$, co nie musi zachodzić dla topologii generowanych przez operatory prawie dolnej gęstości.

Na początku XX wieku H. Lebesgue, w ślad za koncepcją miary Lebesgue'a, wprowadził pojęcie punktu gęstości. Mówimy, że $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$, jeśli

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(A \cap [x_0 - h, x_0 + h])}{2h} = 1.$$

W przypadku, gdy

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(A \cap [x_0 - h, x_0 + h])}{2h} = 0,$$

to mówimy, że x_0 jest punktem rozrzedzenia zbioru A. Okazuje się, że warunek definiujący gęstość można zapisać w sposób równoważny (por. [W3])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left(A \cap \left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]\right)}{\frac{2}{n}} = 1. \tag{1}$$

Obserwacja ta stanowiła źródło uogólnienia punktu gęstości na przypadek kategorii (por. [PWW], [CLO]).

Jeśli $\Phi_d(A)$ oznacza zbiór wszystkich punktów gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$, to operator $\Phi_d : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ jest operatorem dolnej gęstości na przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$, a więc spełnia warunki:

1. $\Phi_d(\emptyset) = \emptyset$, $\Phi_d(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
2. $\forall_{A \in \mathcal{L}} \forall_{B \in \mathcal{L}} \, \Phi_d(A \cap B) = \Phi_d(A) \cap \Phi_d(B)$,
3. $\forall_{A \in \mathcal{L}} \forall_{B \in \mathcal{L}} \, \lambda(A \triangle B) = 0 \Rightarrow \Phi_d(A) = \Phi_d(B)$,
4. $\forall_{A \in \mathcal{L}} \, \lambda(A \triangle \Phi_d(A)) = 0$.

Własność 4 jest treścią głębokiego twierdzenia Lebesgue'a, afirmowanego w analizie rzeczywistej, że prawie każdy punkt zbioru mierzalnego jest jego punktem gęstości oraz prawie każdy punkt jego dopełnienia jest jego punktem rozrzedzenia. Na mocy twierdzenia 1.2 wnioskujemy, że rodzina

$$\mathcal{T}_d = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_d(A)\} \tag{2}$$

stanowi topologię, zwaną topologią gęstości, która jest zgodna z miarą Lebesgue'a, to znaczy taka, że zbiory pierwszej kategorii pokrywają się z σ-ideałem $\mathbb{L}$, zaś zbiory o własności Baire'a z rodziną $\mathcal{L}$ (por. [O]). Obserwacja, że rodzina $\mathcal{T}_d$ stanowi topologię jest zawarta w pracy [HP]. Przestrzeń topologiczna $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_d \rangle$ jest całkowicie regularna, a funkcje ciągłe względem topologii $\mathcal{T}_d$ pokrywają się z funkcjami aproksymatywnie ciągłymi (por. [GW], [GNN]). Własności topologii gęstości zostały zebrane w pracy przeglądowej [W3].

Obserwacja (1) doprowadziła autorów pracy [FH] do określenia punktu $\langle s \rangle$-gęstości. Niech $\langle s \rangle = \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie niemalejącym i nieograniczonym ciągiem liczb dodatnich. Mówimy, że $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem $\langle s \rangle$-gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$, jeśli

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda\left(A \cap \left[x_0 - \frac{1}{s_n}, x_0 + \frac{1}{s_n}\right]\right)}{\frac{2}{s_n}} = 1.$$

Jeśli $\Phi_{\langle s \rangle}(A)$ jest zbiorem punktów $\langle s \rangle$-gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$, to $\Phi_{\langle s \rangle}(A) : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ jest operatorem dolnej gęstości na przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$, przy czym rodzina

$$\mathcal{T}_{\langle s \rangle} = \left\{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_{\langle s \rangle}(A)\right\}. \tag{3}$$

stanowi topologię zgodną z miarą Lebesgue'a oraz $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\langle s\rangle}$, natomiast równość charakteryzuje następujące twierdzenie, sformułowane na podstawie twierdzenia 3 w pracy [FH].

Twierdzenie 1.3. *Niech $\langle s\rangle = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie niemalejącym i nieograniczonym ciągiem liczb dodatnich. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. $\liminf_{n\to\infty} \frac{s_n}{s_{n+1}} > 0$;
2. $\forall_{A\in\mathcal{L}}\ \Phi_{\langle s\rangle}(A) = \Phi_d(A)$;
3. $\mathcal{T}_{\langle s\rangle} = \mathcal{T}_d$.

W definicji punktu $\langle s\rangle$-gęstości badana jest miara zbioru $A \in \mathcal{L}$ w otoczeniu $\left[x_0 - \frac{1}{s_n}, x_0 + \frac{1}{s_n}\right]$ w stosunku do miary tego otoczenia. Kolejne uogólnienie pozwala oderwać się od przynależności punktu x_0 do określonego symetrycznego otoczenia.

Niech $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezdegenerowanych przedziałów domkniętych zbieżnym do zera, co oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\{0\} \cup J_n) = 0.$$

Powiemy, że punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem $\mathcal{J}$-gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left(A \cap (J_n + x_0)\right)}{\lambda(J_n)} = 1.$$

Jeśli $\Phi_{\mathcal{J}}(A)$ oznacza zbiór punktów $\mathcal{J}$-gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$, to operator $\Phi_{\mathcal{J}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ jest operatorem prawie dolnej gęstości na przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L}\rangle$ (por. [HW2]). Zatem na mocy twierdzenia 1.1 rodzina

$$\mathcal{T}_{\mathcal{J}} = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_{\mathcal{J}}(A)\}.$$

stanowi topologię na $\mathbb{R}$. Wiele własności tej topologii zawierają prace [HW1], [HW2], [HLW1], [HLW2]. Pomimo, że operator $\Phi_{\mathcal{J}}$ nie spełnia analogonu twierdzenia Lebesgue'a (por. [C]), to można wyróżnić pewne ciągi niezdegenerowanych przedziałów domkniętych zbieżne do zera, dla których spełniony jest odpowiednik (por. [HW2], Property 3) twierdzenia Lebesgue'a (por. [HW2], a więc własność, że

$$\forall_{A\in\mathcal{L}}\ \lambda\left(A \triangle \Phi(A)\right) = 0.$$

Dla ciągu $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niezdegenerowanych przedziałów domkniętych zbieżnego do zera połóżmy

$$\alpha(\mathcal{J}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{diam}(\{0\}\cup J_n)}{\lambda(J_n)}.$$

Wówczas zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.4 ([HW2], Th. 7)**.** *Następujące warunki są równoważne:*

1. $\alpha(\mathcal{J}) < \infty$;
2. $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$.

Jak dalece można jeszcze uogólnić pojęcie punktu gęstości w myśl warunku (1) przedstawia praca [SW1]. Niech $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem mierzalnych ograniczonych podzbiorów prostej o dodatniej mierze Lebesgue'a zbieżnym do zera to znaczy, takim że

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\{0\}\cup S_n) = 0.$$

Oznaczmy przez $\mathbb{S}$ rodzinę wszystkich ciągów o powyższej własności. Niech $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$. Mówimy, że $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem $\mathcal{S}$-gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A\cap(S_n+x_0))}{\lambda(S_n)} = 1. \tag{4}$$

W przypadku, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A\cap(S_n+x_0))}{\lambda(S_n)} = 0,$$

powiemy, że x_0 jest punktem $\mathcal{S}$-rozrzedzenia zbioru A.

Niech $\Phi_{\mathcal{S}}(A)$ oznacza zbiór punktów $\mathcal{S}$-gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$. Pokażemy teraz, że zbiór $\Phi_{\mathcal{S}}(A)$ jest mierzalny dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$. Dowód poprzedzimy lematami.

Lemat 1.5. *Niech $A \in \mathcal{L}$ i $F = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, gdzie I_i jest przedziałem domkniętym, $I_i \cap I_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ oraz $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Wówczas funkcja*

$$f(x) = \lambda(A\cap(F+x))$$

spełnia warunek Lipschitza ze stałą n.

Dowód. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, zaś $I \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym przedziałem domkniętym. Wówczas

$$\lambda((A\cap(I+x)-(y-x)) \leqslant \lambda((A\cap(I+x)+(y-x)).$$

Stąd wnioskujemy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\lambda(A \cap (I + y)) - \lambda(A \cap (I + x))| \leqslant |y - x|.$$

Niech $F = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, gdzie I_i jest przedziałem domkniętym, $I_i \cap I_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ oraz $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Wówczas dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |\lambda(A \cap (F + x)) - \lambda(A \cap (F + y))| \\
&= \left|\lambda\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n}(I_i + x)\right)\right) - \lambda\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n}(I_i + y)\right)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n}\lambda(A \cap (I_i + x)) - \sum_{i=1}^{n}\lambda(A \cap (I_i + y))\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}|\lambda(A \cap (I_i + x)) - \lambda(A \cap (I_i + y))| \leqslant n|y - x|
\end{aligned}$$

□

Lemat 1.6. *Niech $A, B \in \mathcal{L}$ i $\lambda(B) < \infty$. Wówczas funkcja*

$$f(x) = \lambda(A \cap (B + x))$$

jest jednostajnie ciągła.

Dowód. Weźmy dowolne $\epsilon > 0$. Z własności miary Lebesgue'a wynika istnienie zbioru $F = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, gdzie I_i jest przedziałem domkniętym oraz $I_i \cap I_j = \emptyset$ dla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ takiego, że $\lambda(B \triangle F) < \frac{\epsilon}{3}$. Niech $x, y \in \mathbb{R}$ będą takie, że $|x - y| < \frac{\epsilon}{3n}$. Wówczas

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |\lambda(A \cap (B + x)) - \lambda(A \cap (B + y))| \\
&\leqslant |\lambda(A \cap (B + x)) - \lambda(A \cap (F + x))| + |\lambda(A \cap (F + x)) - \lambda(A \cap (F + y))| \\
&\quad + |\lambda(A \cap (F + y)) - \lambda(A \cap (B + y))| \\
&\leqslant \lambda((A \cap (B + x)) \triangle (A \cap (F + x))) + \lambda((A \cap (F + x)) \triangle (A \cap (F + y))) \\
&\quad + \lambda(A \cap (F + y)) \triangle (A \cap (B + y)) \\
&= \lambda(A \cap ((B + x) \triangle (F + x))) + \lambda(A \cap ((F + x) \triangle (F + y))) \\
&\quad + \lambda(A \cap ((F + y) \triangle (B + y))) \\
&\leqslant \lambda((B \triangle F) + x) + \lambda(A \cap ((F + x) \triangle (F + y))) \\
&\quad + \lambda((F \triangle B) + y) \leqslant \lambda(B \triangle F) + n|x - y| + \lambda(F \triangle B) \\
&< \frac{\epsilon}{3} + n\frac{\epsilon}{3n} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Zatem funkcja f jest jednostajnie ciągła. $\square$

Własność 1.7. *Dla każdego ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ otrzymujemy, że $\Phi_{\mathcal{S}}(A) \in \mathcal{L}$ dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}$.*

Dowód. Zauważmy, że

$$\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{\lambda\left(A \cap (S_n + x)\right)}{\lambda\left(S_n\right)} \geqslant 1 - \frac{1}{k}\right\}$$

i wobec wynikającej z poprzedniego lematu ciągłości funkcji $f(x) = \lambda\left(A \cap (S_n + x)\right)$ dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ wnioskujemy, że $\Phi_{\mathcal{S}}(A) \in F_{\delta\sigma}$, a więc $\Phi_{\mathcal{S}}(A) \in \mathcal{L}$. $\square$

Niech $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór borelowski S'_n taki, że $S'_n \subset S_n$ i $\lambda\left(S_n\right) = \lambda\left(S'_n\right)$, to możemy sformułować następującą własność.

Własność 1.8. *Niech $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$. Wówczas istnieje ciąg zbiorów borelowskich $\mathcal{S}' \in \mathbb{S}$ taki, że $\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}'}(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{L}$.*

Praca [SW1] zawiera własność, którą ze względu na istotną rolę w dalszych rozważaniach podajemy z dowodem.

Własność 1.9. *Niech ciągi $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ spełniają warunek*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left(S_n \triangle K_n\right)}{\min\left\{\lambda\left(S_n\right), \lambda\left(K_n\right)\right\}} = 0. \tag{5}$$

Wówczas $\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{K}}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$.

Dowód. Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{\lambda(S_n\triangle K_n)}{\min\{\lambda(S_n),\lambda(K_n)\}}} \leqslant \frac{1}{1 + \frac{\lambda(S_n\triangle K_n)}{\lambda(S_n)}} &= \frac{\lambda\left(S_n\right)}{\lambda\left(S_n\right) + \lambda\left(S_n\triangle K_n\right)} \\ \leqslant \frac{\lambda\left(S_n\right)}{\lambda\left(K_n\right)} \leqslant \frac{\lambda\left(K_n\right) + \lambda\left(S_n\triangle K_n\right)}{\lambda\left(K_n\right)} &\leqslant 1 + \frac{\lambda\left(S_n\triangle K_n\right)}{\min\left\{\lambda\left(S_n\right), \lambda\left(K_n\right)\right\}} \end{aligned}$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left(S_n\right)}{\lambda\left(K_n\right)} = 1. \tag{6}$$

Niech $A \in \mathcal{L}$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{\lambda\left(A \cap S_n\right)}{\lambda\left(S_n\right)} \leqslant \frac{\lambda\left(A \cap K_n\right)}{\lambda\left(S_n\right)} + \frac{\lambda\left(S_n\triangle K_n\right)}{\lambda\left(K_n\right)} \leqslant \frac{\lambda\left(A \cap K_n\right)}{\lambda\left(K_n\right)} \cdot \frac{\lambda\left(K_n\right)}{\lambda\left(S_n\right)} + \frac{\lambda\left(S_n\triangle K_n\right)}{\min\left\{\lambda\left(S_n\right), \lambda\left(K_n\right)\right\}}.$$

Stąd i z (6) możemy wywnioskować, że jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A\cap S_n)}{\lambda(S_n)} = 1$, to również $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda(A\cap K_n)}{\lambda(K_n)} = 1$. Analogicznie dowodzimy implikacji odwrotnej. $\square$

Własność 1.8 można jeszcze bardziej wzmocnić. Oznaczmy przez $\mathcal{I}_{<\omega}$ podrodzinę rodziny $\mathbb{S}$, której elementami są ciągi $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o tej własności, że każdy element I_n ciągu $\mathcal{I}$ jest skończoną sumą przedziałów domkniętych parami rozłącznych.

Twierdzenie 1.10 ([SW1], Proposition 1.4)**.** *Dla każdego ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ istnieje ciąg $\mathcal{I} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ taki, że $\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{I}}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$.*

Dowód. Niech $A \in \mathcal{L}$ będzie dowolnym zbiorem miary dodatniej i skończonej. Pokażemy, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje zbiór K będący skończoną sumą przedziałów domkniętych parami rozłącznych o tej własności, że

$$\frac{\lambda\left(A \triangle K\right)}{\min\left\{\lambda(A), \lambda(K)\right\}} < \epsilon.$$

Niech $\epsilon > 0$. Z własności miary Lebesgue'a wynika istnienie zbioru będącego skończoną sumą przedziałów domkniętych parami rozłącznych takiego, że $\lambda\left(A \triangle K\right) < \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\lambda(A)$. Rozważmy przypadki:

1. Załóżmy, że $\min\left\{\lambda(A), \lambda(K)\right\} = \lambda(A)$. Wtedy

$$\frac{\lambda\left(A \triangle K\right)}{\min\left\{\lambda(A), \lambda(K)\right\}} = \frac{\lambda\left(A \triangle K\right)}{\lambda(A)} < \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)\lambda(A)}\lambda(A) < \epsilon.$$

2. Niech teraz $\min\left\{\lambda(A), \lambda(K)\right\} = \lambda(K)$. Ponieważ

$$\lambda(A) \leqslant \lambda\left(A \triangle K\right) + \lambda(K) < \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\lambda(A) + \lambda(K),$$

więc otrzymujemy, że $\lambda(K) > \frac{\lambda(A)}{1+\epsilon}$. Zatem

$$\frac{\lambda\left(A \triangle K\right)}{\min\left\{\lambda(A), \lambda(K)\right\}} = \frac{\lambda\left(A \triangle K\right)}{\lambda(K)} < \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\lambda(A) \cdot \frac{1+\epsilon}{\lambda(A)} = \epsilon.$$

Niech $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór K_n będący skończoną sumą przedziałów domkniętych parami rozłącznych taki, że

$$\frac{\lambda\left(S_n \triangle K_n\right)}{\min\left\{\lambda\left(S_n\right), \lambda\left(K_n\right)\right\}} < \frac{1}{2^n}.$$

Zatem teza wynika z własności 1.9. □

Bezpośrednio z definicji punktu $\mathcal{S}$-gęstości wynika następująca własność.

Własność 1.11. *Niech $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$. Wówczas*

1. $\Phi_{\mathcal{S}}(\emptyset) = \emptyset$, $\Phi_{\mathcal{S}}(X) = X$,

2. $\forall_{A\in\mathcal{L}}\ \forall_{B\in\mathcal{L}}\ \Phi_{\mathcal{S}}(A\cap B) = \Phi_{\mathcal{S}(A)} \cap \Phi_{\mathcal{S}}(B)$,

3. $\forall_{A\in\mathcal{L}}\ \forall_{B\in\mathcal{L}}\ \lambda\,(A\triangle B) = 0 \Rightarrow \Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}}(B)$.

Praca [SW1] zawiera pewne warunki dotyczące ciągu $\mathcal{S}\in\mathbb{S}$, dla którego $\lambda\,(\Phi_{\mathcal{S}}(A)\setminus A) = 0$ dla każdego zbioru $A\in\mathcal{L}$, a więc wówczas operator $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem prawie dolnej gęstości na przestrzeni $\langle\mathbb{R},\mathcal{L},\mathbb{L}\rangle$. Jednakże dopiero w pracy [BSW] przygotowywanej do druku został przedstawiony dowód w języku grup topologicznych, z którego wynika, że operator $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem prawie dolnej gęstości dla każdego ciągu $\mathcal{S}\in\mathbb{S}$. Przytaczamy ten dowód w języku miary Lebesgue'a na prostej. Opierając się na wymienionej pracy, pokażemy, że $\lambda\,(\Phi_{\mathcal{S}}(A)\setminus A) = 0$ dla dowolnego zbioru $A\in\mathcal{L}$.

Twierdzenie 1.12. *Niech $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$. Wówczas $\lambda\,(\Phi_{\mathcal{S}}(A)\setminus A) = 0$ dla dowolnego zbioru $A\in\mathcal{L}$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że zbiór A jest ograniczony. Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć, że $A\subset[0,1]$. Załóżmy, że $\lambda\,(\Phi_{\mathcal{S}}(A)\setminus A) > 0$. Wówczas istnieje zbiór zwarty $K\subset\Phi_{\mathcal{S}}(A)\setminus A$ taki, że $\lambda(K) > 0$. Dla dowolnego $0<\epsilon<\frac{1}{2}\lambda(K)$ i dowolnego $n\in\mathbb{N}$ położmy

$$X_{n,\epsilon} = \left\{x\in[0,1] : \frac{\lambda\,((S_n+x)\cap K)}{\lambda\,(S_n)} \geqslant \epsilon\right\}.$$

Zauważmy, że

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geqslant n} X_{k,\epsilon} \subset \left\{x\in[0,1] : \limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda\,((S_n+x)\cap K)}{\lambda\,(S_n)} > 0\right\} \subset K\setminus\Phi_{\mathcal{S}}(A). \qquad (7)$$

Pierwsza inkluzja jest oczywista. Aby wykazać drugą załóżmy, że $y\notin K\setminus\Phi_{\mathcal{S}}(A)$. Oznacza to, że $y\notin K$ lub $y\in\Phi_{\mathcal{S}}(A)$. Załóżmy, że $y\in\mathbb{R}\setminus K$ oraz $y\in\left\{x\in[0,1] : \limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda((S_n+x)\cap K)}{\lambda(S_n)} > 0\right\}$. Istnieje zatem $n_0\in\mathbb{N}$ takie, że dla $n\geqslant n_0$ mamy $S_n+y\subset\mathbb{R}\setminus K$, co oznacza, że $\lambda\,((S_n+y)\cap K) = 0$. Stanowi to sprzeczność z faktem, że

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda\,((S_n+y)\cap K)}{\lambda\,(S_n)} > 0.$$

Załóżmy teraz, że $y\in\Phi_{\mathcal{S}}(A)$. Skoro $K\cap A=\emptyset$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda\,((S_n+y)\cap(\mathbb{R}\setminus A))}{\lambda\,(S_n)} = 0,$$

więc
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda\left((S_n+y)\cap K\right)}{\lambda\left(S_n\right)} = 0.$$
Otrzymane sprzeczności dowodzą, że $y \in K \setminus \Phi_{\mathcal{S}}(A)$. Otrzymujemy zatem (7), skąd w szczególności wynika, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} X_{n,\epsilon} = \emptyset$, więc $\lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} X_{n,\epsilon}\right) = 0$.

Pokażemy, że odwzorowanie $[0,1]\times[0,1] \ni (x,y) \to \chi_K(y)\chi_{S_n}(y-x)$ jest mierzalne. Na mocy własności 1.8 możemy założyć, że wszystkie zbiory ciągu $\mathcal{S}$ są borelowskie. Niech funkcja $g : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ będzie dana wzorem $g(x,y) = y - x$. Oznaczmy $f = \chi_{S_n} \circ g$. Dla dowolnego zbioru otwartego $V \subset [0,1]$ zachodzi równość
$$f^{-1}(V) = g^{-1}\left(\chi_{S_n}^{-1}(V)\right).$$
Jeśli $\{0,1\} \subset V$ lub $\{0,1\} \cap V = \emptyset$, to oczywiście $f^{-1}(V)$ jest zbiorem mierzalnym. Załóżmy, że $1 \in V$ i $0 \notin V$. Wtedy $f^{-1}(V) = g^{-1}(S_n)$. Funkcja g jest ciągła, zaś każdy ze zbiorów S_n jest borelowski, co oznacza, że zbiór $f^{-1}(V)$ jest mierzalny. Przypadek, gdy $1 \notin V$ i $0 \in V$ rozważamy analogicznie. Zatem odwzorowanie $[0,1]\times[0,1] \ni (x,y) \to \chi_K(y)\chi_{S_n}(y-x)$ jest mierzalne jako iloczyn dwóch funkcji mierzalnych.

Dla każdych $x, y \in [0,1]$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą następujące równości:
$$\chi_{K\cap(S_n+x)}(y) = \chi_K(y)\chi_{S_n}(y-x)$$
oraz
$$\chi_{S_n}(y-x) = \chi_{(-S_n+y)}(x),$$
gdzie $-S_n = \{-x : x \in S_n\}$.

Z lematu 1.6 wynika, że funkcja $\lambda\left((S_n+x)\cap K\right)$ jest ciągła, a więc mierzalna każdego $n \in \mathbb{N}$. Korzystając z twierdzenia Fubiniego otrzymujemy, że
$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} \lambda\left((S_n+x)\cap K\right) dx &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_{(S_n+x)\cap K}(y)dy\right) dx \\
&= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_K(y)\chi_{S_n}(y-x)dy\right) dx = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_K(y)\chi_{S_n}(y-x)dx\right) dy \\
&= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_K(y)\chi_{(-S_n+y)}(x)dx\right) dy = \int_{[0,1]} \chi_K(y)\lambda\left(-S_n\right) dy \\
&= \int_{[0,1]} \chi_K(y)\lambda\left(S_n\right) dy = \lambda\left(K\right)\lambda\left(S_n\right). \quad (8)
\end{aligned}$$

Z drugiej strony, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy, że

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]} \lambda\left(\left(S_n + x\right) \cap K\right) dx \\
&\qquad = \int_{X_{n,\epsilon}} \lambda\left(\left(S_n + x\right) \cap K\right) dx + \int_{[0,1] \setminus X_{n,\epsilon}} \lambda\left(\left(S_n + x\right) \cap K\right) dx \\
&\qquad\qquad \leqslant \lambda\left(X_{n,\epsilon}\right) \lambda\left(S_n\right) + \left(1 - \lambda\left(X_{n,\epsilon}\right)\right) \epsilon \lambda\left(S_n\right) \\
&\qquad\qquad\qquad = \lambda\left(S_n\right)\left(\lambda\left(X_{n,\epsilon}\right) + \epsilon - \epsilon \lambda\left(X_{n,\epsilon}\right)\right). \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Zatem z 8 i 9 otrzymujemy, że

$$
\lambda(K)\,\lambda\left(S_n\right) \leqslant \lambda\left(S_n\right)\left(\lambda\left(X_{n,\epsilon}\right) + \epsilon - \epsilon\lambda\left(X_{n,\epsilon}\right)\right),
$$

a skoro $\lambda\left(S_n\right) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to otrzymujemy że

$$
\lambda\left(X_{n,\epsilon}\right) \geqslant \frac{1}{2}\lambda(K).
$$

Z ciągłości miary Lebesgue'a mamy

$$
\lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} X_{k,\epsilon}\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{k\geqslant n} X_{k,\epsilon}\right) \geqslant \lambda\left(X_{n,\epsilon}\right) \geqslant \frac{1}{2}\lambda(K) > \epsilon,
$$

co prowadzi do sprzeczności.

Niech teraz $A \in \mathcal{L}$ będzie dowolnym zbiorem mierzalnym, zaś $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takim ciągiem ograniczonych zbiorów otwartych, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = \mathbb{R}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ określmy zbiór

$$
A_n = V_n \cap A.
$$

Wówczas $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$. Pokażemy, że

$$
\Phi_{\mathcal{S}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_{\mathcal{S}}\left(A_n\right).
$$

Inkluzja

$$
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_{\mathcal{S}}\left(A_n\right) \subset \Phi_{\mathcal{S}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)
$$

jest oczywista. Pokażemy, że

$$
\Phi_{\mathcal{S}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_{\mathcal{S}}\left(A_n\right).
$$

Rozważmy dowolny $x \in \Phi_{\mathcal{S}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. Istnieje takie $\delta > 0$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$, że $x \in (x-\delta, x+\delta) \subset V_{n_0}$. Zatem

$$\begin{aligned} x \in \Phi_{\mathcal{S}}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap (x-\delta, x+\delta)\right) &\subset \Phi_{\mathcal{S}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap \Phi_{\mathcal{S}}\left(V_{n_0}\right) \\ = \Phi_{\mathcal{S}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap V_{n_0}\right) = \Phi_{\mathcal{S}}\left(A \cap V_{n_0}\right) &= \Phi_{\mathcal{S}}\left(A_{n_0}\right) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_{\mathcal{S}}\left(A_n\right). \end{aligned}$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór A_n jest ograniczony, więc zachodzi równość $\lambda\left(\Phi_{\mathcal{S}}\left(A_n\right) \setminus A_n\right) = 0$. Ostatecznie otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \lambda\left(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A\right) = \lambda\left(\Phi_{\mathcal{S}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \setminus A\right) &= \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_{\mathcal{S}}\left(A_n\right) \setminus A\right) \\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda\left(\Phi_{\mathcal{S}}\left(A_n\right) \setminus A\right) = 0. \end{aligned}$$

□

Z powyższego twierdzenia, własności 1.11 oraz twierdzenia 1.1 wynikają następujące wnioski.

Wniosek 1.13. *Dla dowolnego ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ operator $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem prawie dolnej gęstości na przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$.*

Wniosek 1.14. *Rodzina*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \left\{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)\right\}.$$

dla dowolnego ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ stanowi topologię na prostej.

Uwaga 1.15. Zbiór liczb niewymiernych jest $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-otwarty, więc topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest istotnie bogatsza od topologii naturalnej.

Skoro każdy zbiór otwarty w topologii naturalnej jest $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-otwarty, to otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.16. *Dla każdego ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ przestrzeń topologiczna $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rangle$ jest przestrzenią Hausdorffa.*

Twierdzenie 1.17. *Dla dowolnego ciągu $\mathcal{S} = \{S_n\} \in \mathbb{S}$ takiego, że operator $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem dolnej gęstości, przestrzeń topologiczna $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rangle$ jest regularna.*

Dowód. Niech $\mathcal{S} = \{S_n\} \in \mathbb{S}$ będzie ciągiem takim, że operator $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem dolnej gęstości. Niech $V \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ i $x \in V$. Pokażemy, że istnieje zbiór $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-domknięty K taki, że $x \in K \subset V$. Skoro $V \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, to $x \in \Phi_{\mathcal{S}}(V)$. Możemy założyć, że $\lambda\left(V \cap (x + S_n)\right) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór domknięty $F_n \subset V \cap (x + S_n)$ taki, że

$$\lambda\left(F_n\right) > \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \lambda\left(V \cap (x + S_n)\right).$$

Niech $F = \{x\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Pokażemy, że zbiór F jest domknięty. Niech $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset F$ oraz $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$. Jeśli nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ pokrywa się z x_0, to $x_0 \in F$. Załóżmy przeciwnie. Wówczas mamy dwa przypadki:

1. Istnieje takie n_0, że nieskończenie wiele elementów ciągu $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ należy do zbioru F_{n_0}. Wówczas $x_0 \in F$.

2. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ do zbioru F_n należy co najwyżej skończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Niech $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ oraz $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ będą takimi ciągami, że $x_{k_j} \in F_{n_j}$. Skoro $x_{k_j} \in S_{n_j} + x$ oraz $\lim_{j \to \infty} \operatorname{diam}\left(\{0\} \cup S_{n_j}\right) = 0$, to $\lim_{j \to \infty} x_{k_j} = x$ i w rezultacie $x_0 = x \in F$.

Pokażemy, że $x \in \Phi_{\mathcal{S}}(F)$. Istotnie

$$1 \geqslant \frac{\lambda\left(F \cap (x + S_n)\right)}{\lambda\left(S_n\right)} \geqslant \frac{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \lambda\left(V \cap (x + S_n)\right)}{\lambda\left(S_n\right)}.$$

Skoro $x \in \Phi_{\mathcal{S}}(V)$, to otrzymujemy, że $\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(F \cap (x + S_n))}{\lambda(S_n)} = 1$, a więc $x \in \Phi_{\mathcal{S}}(F)$. Ponadto

$$\Phi_{\mathcal{S}}\left(F \cap \Phi_{\mathcal{S}}(F)\right) = \Phi_{\mathcal{S}}(F) \cap \Phi_{\mathcal{S}}\left(\Phi_{\mathcal{S}}(F)\right) = \Phi_{\mathcal{S}}(F).$$

Jako, że $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem dolnej gęstości, to $\lambda\left(\Phi_{\mathcal{S}}(F) \triangle F\right) = 0$. Zatem $F \cap \Phi_{\mathcal{S}}(F) \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ oraz $x \in F \cap \Phi_{\mathcal{S}}(F)$. Jednocześnie $F \cap \Phi_{\mathcal{S}}(F) \subset \overline{F \cap \Phi_{\mathcal{S}}(F)}$ oraz $\overline{F} = F$. Ponieważ $F \subset V$, więc $\overline{F \cap \Phi_{\mathcal{S}}(F)} \subset V$. Niech $K = \overline{F \cap \Phi_{\mathcal{S}}(F)}$. Wówczas zbiór K jest $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-domknięty i $x \in K$, skąd wynika regularność przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rangle$. $\square$

Zagadnienie regularności przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rangle$, dla dowolnego ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ pozostaje nierozstrzygnięte.

Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.18. *Dla dowolnego ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ przestrzeń $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rangle$ nie jest normalna.*

Dowód. Idea dowodu jest analogiczna do udowodnienia braku normalności topologii gęstości w pracy [F]. Załóżmy, że przestrzeń $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rangle$ jest normalna. Niech $\mathcal{F} = \{C \cap \Phi_{\mathcal{S}}(A) : A \in \mathcal{L}\}$, gdzie C jest zbiorem Cantora. Ponieważ dla dowolnego $A \in \mathcal{L}$ istnieje taki zbiór borelowski B, że $\lambda\left(A \triangle B\right) = 0$, czyli $\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}}(B)$, to, $\operatorname{card}\left\{\Phi_{\mathcal{S}}(A) : A \in \mathcal{L}\right\} \leqslant \mathfrak{c}$. Stąd istnieje zbiór $D \subset C$ taki, że $D \notin \mathcal{F}$. Zbiory D i $E = C \setminus D$ są $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-domknięte i rozłączne. Załóżmy, że istnieją zbiory $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-otwarte V_D i V_E takie, że $D \subset V_D$, $E \subset V_E$ i $V_D \cap V_E = \emptyset$. jako, że

$$\Phi_{\mathcal{S}}(V_D) \cap \Phi_{\mathcal{S}}(V_E) = \Phi_{\mathcal{S}}(V_D \cap V_E) = \Phi_{\mathcal{S}}(\emptyset) = \emptyset,$$

to

$$D \subset C \cap V_D \subset C \cap \Phi_{\mathcal{S}}(V_D) \subset C \setminus \Phi_{\mathcal{S}}(V_E) \subset C \setminus V_E \subset C \setminus E = D,$$

skąd wynika, że $D = C \cap \Phi_{\mathcal{S}}(V_D)$, co prowadzi do sprzeczności z faktem, że $C \cap \Phi_{\mathcal{S}}(V_D) \in \mathcal{F}$. □

Pewne własności funkcji ciągłych względem topologii $\mathcal{S}$-gęstości są zawarte w pracach [W1] i [SW2]. Poniżej podamy własność, która związana jest z porównywaniem topologii $\mathcal{S}$-gęstości

Własność 1.19. *Jeśli $\mathcal{S}_1 \in \mathbb{S}$ jest takim ciągiem, że $\Phi_{\mathcal{S}_1}$ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$, zaś $\mathcal{S}_2 \in \mathbb{S}$ jest dowolnym ciągiem, to następujące warunki są równoważne:*

1. $\forall_{A \in \mathcal{L}}\ \Phi_{\mathcal{S}_1}(A) \subset \Phi_{\mathcal{S}_2}(A)$;
2. $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}$.

Dowód. Implikacja $1 \Rightarrow 2$ jest oczywista. Pokażemy, że $2 \Rightarrow 1$. Niech $A \in \mathcal{L}$. Skoro $\Phi_{\mathcal{S}_1}$ jest operatorem dolnej gęstości, to $\Phi_{\mathcal{S}_1}\left(\Phi_{\mathcal{S}_1}(A)\right) = \Phi_{\mathcal{S}_1}(A)$, więc $\Phi_{\mathcal{S}_1}(A) \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}_1}$, a zatem $\Phi_{\mathcal{S}_1}(A) \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}$. Stąd

$$\Phi_{\mathcal{S}_1}(A) \subset \Phi_{\mathcal{S}_2}\left(\Phi_{\mathcal{S}_1}(A)\right) = \Phi_{\mathcal{S}_2}(A),$$

bo $\lambda\left(\Phi_{\mathcal{S}_1}(A) \triangle A\right) = 0$. □

Wniosek 1.20. *Jeśli $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathbb{S}$ oraz $\Phi_{\mathcal{S}_1}, \Phi_{\mathcal{S}_2}$ są operatorami dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$, to następujące warunki są równoważne:*

1. $\forall_{A \in \mathcal{L}}\ \Phi_{\mathcal{S}_1}(A) = \Phi_{\mathcal{S}_2}(A)$;

2. $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}$.

Następująca własność dotyczy permutacji ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$.

Własność 1.21. *Niech* $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ *oraz* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *będzie dowolną permutacją zbioru* $\mathbb{N}$. *Wówczas ciąg* $\mathcal{S}^\pi = \{S_n^\pi\}_{n\in\mathbb{N}}$, *gdzie* $S_n^\pi = S_{\pi(n)}$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *jest elementem rodziny* $\mathcal{S}$ *oraz* $\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}^\pi}(A)$ *dla każdego* $A \in \mathcal{L}$.

Dowód. Niech $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie dowolną permutacją zbioru $\mathbb{N}$. Oczywiście ciąg $\mathcal{S}^\pi$ jest ciągiem zbiorów mierzalnych i ograniczonych o miarach dodatnich. Za względu na własność, że permutacja zbieżnego ciągu liczbowego nie zmienia jego granicy otrzymujemy, że $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}\left(\{0\} \cup S_{\pi(n)}\right) = 0$. Zatem $\mathcal{S}^\pi \in \mathcal{S}$. Ponadto, $\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}^\pi}(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{L}$. Istotnie, jeśli $x_0 \in \Phi_{\mathcal{S}}(A)$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left(A \cap (S_n + x_0)\right)}{\lambda\left(S_n\right)} = 1, \tag{10}$$

a więc na na mocy wspomnianej wcześniej własności otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left(A \cap (S_n^\pi + x_0)\right)}{\lambda\left(S_n\right)} = 1, \tag{11}$$

Niech teraz $x_0 \in \Phi_{\mathcal{S}^\pi}(A)$. Rozważmy taką permutację $\pi' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $\pi'\left(\pi(n)\right) = n$. Wówczas, analogicznie jak wyżej, otrzymujemy, że $x_0 \in \Phi_{\mathcal{S}^{\pi'(\pi)}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}}(A)$, bo

$$\mathcal{S}^{\pi'(\pi)} = \left\{S_{\pi'(\pi(n))}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

□

Wniosek 1.22. *Dla dowolnego ciągu* $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ *istnieje permutacja* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *taka, że* $\mathcal{S}^\pi = \{S_n^\pi\}_{n\in\mathbb{N}}$, *gdzie* $S_n^\pi = S_{\pi(n)}$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *oraz ciąg* $\{\operatorname{diam}(\{0\} \cup S_n^\pi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest nierosnący.*

Z niezmienniczości miary Lebesgue'a otrzymujemy, że dla dowolnego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ i dowolnego $A \in \mathcal{L}$, warunek $x_0 \in \Phi_{\mathcal{S}}(A)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \in \Phi_{\mathcal{S}}(A - x_0)$. Zatem rozumowania w wielu dowodach będziemy ograniczać do przypadku, kiedy $0 \in \Phi_{\mathcal{S}}(A)$.

Fakt, że dla dowolnych operatorów $\Phi_{\mathcal{S}_1}$ i $\Phi_{\mathcal{S}_2}$ zachodzi równość $\Phi_{\mathcal{S}_1}(A) = \Phi_{\mathcal{S}_2}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$ niekiedy będziemy oznaczać krótko $\Phi_{\mathcal{S}_1} = \Phi_{\mathcal{S}_2}$. Zamiast pisać, że dla dowolnego ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ operator $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem dolnej lub prawie dolnej gęstości na przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$, będziemy pisać krótko, że $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem dolnej lub prawie dolnej gęstości, bez wyszczególniania przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$.

2. Topologia $\mathcal{S}$-gęstości w kontekście ciągów regularnych

W rozdziale tym wyróżnimy ciągi rodziny $\mathbb{S}$, które nazwiemy ciągami regularnymi i zbadamy pewne ich własności.

Dla dowolnego ciągu $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ zdefiniujmy

$$\alpha(\mathcal{S}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{diam}(\{0\} \cup S_n)}{\lambda(S_n)}.$$

W artykule [HW2] autorzy pokazali, że jeśli $\alpha(\mathcal{S})$ jest skończona, gdzie $\mathcal{S} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ jest ciągiem przedziałów domkniętych, to $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem dolnej gęstości.

Poniższy przykład pokazuje, że może istnieć ciąg $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ mający analogiczną własność i taki, że $\alpha(\mathcal{S}) = \infty$.

Przykład 2.1. Określmy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ następujące ciągi zbiorów

$$J_n = \left[0, \frac{1}{4^n}\right] \cup \left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{16^n}, \frac{1}{2^n}\right]$$

oraz

$$I_n = \left[0, \frac{1}{4^n}\right].$$

Oznaczmy $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Łatwo zauważyć, że

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\{0\} \cup J_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\{0\} \cup I_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0.$$

Oznacza to, że $\mathcal{J}, \mathcal{I} \in \mathbb{S}$. Łatwo obliczamy, że

$$\lambda(J_n) = \frac{1}{4^n} + \frac{1}{16^n}$$

oraz

$$\lambda(I_n) = \frac{1}{4^n}.$$

Otrzymujemy stąd, że

$$\alpha(\mathcal{J}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{diam}(\{0\} \cup J_n)}{\lambda(J_n)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{4^n} + \frac{1}{16^n}} = \infty,$$

podczas gdy

$$\alpha(\mathcal{I}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{diam}(\{0\} \cup I_n)}{\lambda(I_n)} = 1 < \infty.$$

Z drugiej strony zachodzi następująca równość

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left(J_n \triangle I_n\right)}{\min\left\{\lambda\left(J_n\right), \lambda\left(I_n\right)\right\}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{16^n}}{\frac{1}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0,$$

która wraz z własnością 1.9 pociąga za sobą równość operatorów $\Phi_{\mathcal{J}} = \Phi_{\mathcal{I}}$. Zatem $\Phi_{\mathcal{J}}$, dla którego $\alpha(\mathcal{J}) = \infty$, pokrywa się z operatorem $\Phi_{\mathcal{I}}$, dla którego $\alpha(\mathcal{I}) < \infty$. W szczególności wynika stąd, że $\Phi_{\mathcal{J}}$ jest operatorem dolnej gęstości.

Powyższy przykład pokazuje, że niewielka modyfikacja ciągu zbiorów może znacząco wpłynąć na wartość α. W związku z tym wprowadzimy pojęcie regularnego ciągu zbiorów.

Niech $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$. Twierdzenie 1.10 implikuje istnienie ciągu $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$, takiego, że $\Phi_{\mathcal{S}} = \Phi_{\mathcal{I}}$, gdzie rodzina $\mathcal{I}_{<\omega}$ została zdefiniowana jako rodzina wszystkich ciągów zbiorów $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o tej własności, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór I_n jest skończoną sumą przedziałów domkniętych parami rozłącznych.

Definicja 2.2. Powiemy, że ciąg $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ jest regularny, gdy istnieje ciąg $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ taki, że $\alpha(\mathcal{I}) < \infty$ oraz $\Phi_{\mathcal{S}} = \Phi_{\mathcal{I}}$. W przeciwnym przypadku ciąg $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazwiemy nieregularnym.

Następujące twierdzenie pokazuje, że ciąg skonstruowany w poprzednim przykładzie nie jest wyjątkowy .

Twierdzenie 2.3. *Dla każdego ciągu zbiorów $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ takiego, że $\alpha(\mathcal{I}) < \infty$, istnieje ciąg zbiorów $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ o tej własności, że $\alpha(\mathcal{K}) = \infty$ oraz $\Phi_{\mathcal{I}} = \Phi_{\mathcal{K}}$.*

Dowód. Niech $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ będzie takim ciągiem zbiorów, że $\alpha(\mathcal{I}) < \infty$. Skoro ciąg $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do zera, to zawiera on podciąg $\{I_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$\operatorname{diam}\left(\{0\} \cup I_{n_k}\right) < \frac{1}{4^k}.$$

Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ określmy zbiory

$$K_m = \begin{cases} I_{n_k} \cup \left[\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k}\lambda(I_{n_k}), \frac{1}{2^k}\right] & \text{dla } m = n_k \\ I_k & \text{dla } m \neq n_k \end{cases}.$$

Zauważmy, że jeśli $n \neq n_k$, to $I_n = K_n$. Oznacza to, że $K_n \triangle I_n = \emptyset$, więc $\lambda\left(I_n \triangle K_n\right) = 0$. Jeśli zaś $n = n_k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to $I_n \triangle K_n = \left[\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k}\lambda(I_{n_k})), \frac{1}{2^k}\right]$ oraz

$\lambda\left(J_n \triangle K_n\right) = \frac{1}{2^k}\lambda(I_{n_k})$. Zatem

$$\frac{\lambda\left(I_{n_k} \triangle K_{n_k}\right)}{\min\left\{\lambda(I_{n_k}), \lambda(K_{n_k})\right\}} = \frac{\frac{1}{2^k}\lambda(I_{n_k})}{\lambda(I_{n_k})} = \frac{1}{2^k}.$$

Wynika stąd, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left(I_n \triangle K_n\right)}{\min\left\{\lambda(I_n), \lambda(K_n)\right\}} = 0.$$

Powyższa równość oraz własność 1.21 dają równość $\Phi_{\mathcal{I}} = \Phi_{\mathcal{K}}$.

Pokażemy teraz, że $\alpha(\mathcal{K}) = \infty$. Mamy

$$\frac{\operatorname{diam}\left(\{0\} \cup K_{n_k}\right)}{\lambda(K_{n_k})} = \frac{\frac{1}{2^k}}{\lambda(I_{n_k})\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} \geqslant \frac{\frac{1}{2^k}}{\operatorname{diam}\left(\{0\} \cup I_{n_k}\right)\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} \geqslant$$
$$\frac{\frac{1}{2^k}}{\frac{1}{4^k}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} = \frac{2^k}{1+\frac{1}{2^k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty.$$

Stąd

$$\alpha(\mathcal{K}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{diam}\left(\{0\} \cup K_n\right)}{\lambda(K_n)} = \infty.$$

$\square$

Zatem z każdym ciągiem $\mathcal{I} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ takim, że $\alpha(\mathcal{I}) < \infty$ można związać ciąg $\mathcal{K} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ taki, że $\alpha(\mathcal{K}) = \infty$.

Udowodnimy teraz warunek konieczny regularności ciągów rodziny $\mathbb{S}$. Dowód poprzedzimy następującym lematem.

Lemat 2.4. *Dla każdego $\epsilon > 0$ i każdego zbioru ograniczonego $F \in \mathcal{L}$ miary dodatniej istnieje zbiór A, będący skończoną sumą przedziałów domkniętych parami rozłącznych, o tej własności, że $\lambda(A \triangle F) < \epsilon$ oraz* $\operatorname{diam}\left(\{0\} \cup A\right) \leqslant \operatorname{diam}\left(\{0\} \cup F\right)$.

Dowód. Niech $F \in \mathcal{L}$ będzie ograniczonym zbiorem miary dodatniej oraz $0 < \epsilon < \lambda(F)$. Istnieje wówczas zbiór otwarty $G \supset F$ taki, że $\lambda(G \setminus F) < \epsilon$. Oczywiście $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_i, b_i)$, gdzie $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ dla $i \in \mathbb{N}$ oraz przedziały tworzące zbiór G są parami rozłączne. Istnieje ciąg $\{[a_i^*, b_i^*]\}_{i\in\mathbb{N}}$ przedziałów domkniętych parami rozłącznych taki, że $[a_i^*, b_i^*] \subset (a_i, b_i)$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$ oraz $\lambda(G \setminus B) < \frac{\epsilon}{3}$, gdzie $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}[a_i^*, b_i^*]$. Niech

$$A^* = \bigcup_{i=1}^{i_0}[a_i^*, b_i^*],$$

gdzie

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \lambda([a_i^*, b_i^*]) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\lambda(F\triangle A^*) &\leqslant \lambda(F\triangle G)+\lambda(G\triangle B)+\lambda(B\triangle A^*)\\ &\leqslant \lambda(G\setminus F)+\lambda(G\setminus B)+\lambda(B\setminus A^*) < \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon.\end{aligned}$$

Niech

$$A = A*\cap[\inf F, \sup F].$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\lambda(F\triangle A) &= \lambda(F\setminus A)+\lambda(A\setminus F)=\lambda(F\setminus A^*)+\lambda(A\setminus F)\\ &\leqslant \lambda(F\setminus A^*)+\lambda(A^*\setminus F)=\lambda(F\triangle A^*)<\epsilon\end{aligned}$$

oraz

$$\operatorname{diam}(\{0\}\cup A)\leqslant \operatorname{diam}(\{0\}\cup F).$$

□

Twierdzenie 2.5. *Niech $\mathcal{S}=\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{S}$. Jeśli $\alpha(\mathcal{S})<\infty$, to ciąg $\mathcal{S}$ jest regularny.*

Dowód. Na mocy lematu 2.4 dla każdego S_n istnieje zbiór I_n będący skończoną sumą niezdegenerowanych przedziałów domkniętych parami rozłącznych takich, że $\lambda(I_n\triangle S_n)<\frac{1}{n}\lambda(S_n)$ oraz $\operatorname{diam}(\{0\}\cup I_n)\leqslant\operatorname{diam}(\{0\}\cup S_n)$. Oznaczmy $\mathcal{I}=\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Oczywiście $\mathcal{I}\in\mathcal{I}_{<\omega}$. Dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ mamy

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\lambda(S_n)\leqslant\lambda(I_n)\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\lambda(S_n).$$

Stąd

$$\frac{\lambda(I_n\triangle S_n)}{\min(\lambda(I_n),\lambda(S_n))}\leqslant\frac{\frac{1}{n}\lambda(S_n)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\lambda(S_n)}\leqslant\frac{1}{n-1}\xrightarrow[n\to\infty]{}=0.$$

Otrzymujemy więc na mocy własności 1.3, że $\Phi_{\mathcal{S}}=\Phi_{\mathcal{I}}$.

Co więcej

$$\alpha(\mathcal{I})=\limsup_{n\to\infty}\frac{\operatorname{diam}(\{0\}\cup I_n)}{\lambda(I_n)}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{\operatorname{diam}(\{0\}\cup S_n)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\lambda(S_n)}=\alpha(\mathcal{S}).$$

Zatem $\alpha(\mathcal{I})<\infty$, co oznacza regularność ciągu $\mathcal{S}$. □

Twierdzenie 2.6. *Jeśli ciąg $\mathcal{S}=\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{S}$ jest regularny, to dla każdego zbioru $A\in\mathcal{L}$ zachodzi inkluzja $\Phi_d(A)\subset\Phi_{\mathcal{S}}(A)$.*

Dowód. Ponieważ ciąg zbiorów $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest regularny, to istnieje taki ciąg zbiorów $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$, że $\alpha(\mathcal{I}) < \infty$ oraz $\Phi_{\mathcal{S}} = \Phi_{\mathcal{I}}$. Istnieje zatem liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że dla $n > n_0$ mamy

$$a_n := \operatorname{diam}(\{0\} \cup I_n) < 2\alpha(\mathcal{I})\lambda(I_n).$$

Załóżmy, że 0 jest punktem gęstości zbioru $\mathbb{R} \setminus A$. Wtedy dla każdego zbieżnego do zera ciągu $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach dodatnich zachodzi poniższa równość

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A \cap [-h_n, h_n])}{2h_n} = 0.$$

Dla każdego $n > n_0$ prawdziwe są następujące nierówności

$$\frac{\lambda(A \cap I_n)}{\lambda(I_n)} \leqslant \frac{\lambda(A \cap [-a_n, a_n])}{\lambda(I_n)} \leqslant \frac{\lambda(A \cap [-a_n, a_n])}{2a_n} \cdot 4\alpha(\mathcal{I}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Oznacza to, że 0 jest punktem $\mathcal{I}$-gęstości zbioru $\mathbb{R} \setminus A$ i w konsekwencji punktem $\mathcal{S}$-gęstości zbioru $\mathbb{R} \setminus A$. Otrzymujemy stąd, że dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$ zachodzi inkluzja $\Phi_d(A) \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)$. □

Wniosek 2.7. *Dla dowolnego regularnego ciągu zbiorów $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ otrzymujemy, że $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.*

Z powyższego twierdzenia i twierdzenia 1.4 oraz własności 1.19 wynika, że dla każdego zbieżnego do zera ciągu $\mathcal{J}$ przedziałów domkniętych prawdziwa jest równoważność:

$$\alpha(\mathcal{J}) < \infty \Leftrightarrow \forall_{A\in\mathcal{L}}\ \Phi_d(A) \subset \Phi_{\mathcal{J}}(A).$$

W świetle tej równoważności oraz twierdzenia 2.6 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.8. *Każdy ciąg $\mathcal{J} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ przedziałów domkniętych taki, że $\alpha(\mathcal{J}) = \infty$ jest nieregularny.*

Twierdzenie 2.9. *Jeśli ciąg zbiorów $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ jest taki, że $\Phi_d(A) \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$, to*

$$\lambda(A \triangle \Phi_{\mathcal{S}}(A)) = 0.$$

Dowód. Niech $\Phi_d(A) \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$. Stąd

$$A \setminus \Phi_{\mathcal{S}}(A) \subset A \setminus \Phi_d(A).$$

Z twierdzenia Lebesgue'a wynika, że $\lambda\left(A \setminus \Phi_d(A)\right) = 0$, więc

$$\lambda\left(A \setminus \Phi_{\mathcal{S}}(A)\right) = 0$$

dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$. Pokażemy, że

$$\lambda\left(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A\right) = 0.$$

dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$.

Z własności operatora $\Phi_{\mathcal{S}}$ wynika, że $\Phi_{\mathcal{S}}(A) \cap \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbb{R} \setminus A) = \emptyset$, a więc $\Phi_{\mathcal{S}}(A) \subset \mathbb{R} \setminus \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbb{R} \setminus A)$. Otrzymujemy stąd

$$\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A \subset (\mathbb{R} \setminus \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbb{R} \setminus A)) \setminus A = (\mathbb{R} \setminus A) \setminus \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbb{R} \setminus A)$$

Z pierwszej części dowodu mamy, że $\lambda\left((\mathbb{R} \setminus A) \setminus \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbb{R} \setminus A)\right) = 0$, a więc również $\lambda\left(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A\right) = 0$. W konsekwencji $\lambda\left(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \triangle A\right) = 0$. Zatem w świetle własności 1.4 otrzymujemy, że $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem dolnej gęstości. □

Wobec powyższego twierdzenia i wniosku 2.7 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.10. *Dla każdego regularnego ciągu zbiorów $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ operator $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem dolnej gęstości.*

Poniższe twierdzenie orzeka, że przy rozważaniu ciągów z rodziny $\mathcal{I}_{<\omega}$ możemy zakładać, ze zbiory tworzące te ciągi nie zawierają zera.

Twierdzenie 2.11. *Dla każdego ciągu zbiorów $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ istnieje ciąg zbiorów $\mathcal{I}' = \{I'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ taki, że $0 \notin I'_n$, $I'_n \subset I_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz zachodzi równość $\Phi_{\mathcal{I}'} = \Phi_{\mathcal{I}}$.*

Dowód. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ określmy następujące zbiory

$$I'_n = I_n \setminus \left(-\frac{\lambda(I_n)}{3n}, \frac{\lambda(I_n)}{3n}\right)$$

i oznaczmy $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$I_n \triangle I'_n = (I_n \cup I'_n) \setminus (I_n \cap I'_n) \subset \left[-\frac{\lambda(I_n)}{3n}, \frac{\lambda(I_n)}{3n}\right].$$

Zatem

$$\lambda(I_n \triangle I'_n) \leqslant \frac{2\lambda(I_n)}{3n}.$$

Prawdziwa jest też poniższa nierówność

$$\lambda(I_n') \geqslant \lambda(I_n) - \frac{2\lambda(I_n)}{3n}.$$

Otrzymujemy stąd, że

$$\frac{\lambda(I_n \triangle I_n')}{\lambda(I_n')} \leqslant \frac{\frac{2\lambda(I_n)}{3n}}{\lambda(I_n) - \frac{2\lambda(I_n)}{3n}} = \frac{2}{3n-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Zatem własność 1.9 pociąga za sobą równość $\Phi_{\mathcal{I}'} = \Phi_{\mathcal{I}}$. □

W dalszej części zbadamy nieporównywalność $\mathcal{S}$-topologii gęstości związanych z ciągami regularnymi.

Lemat 2.12. *Dla każdego regularnego ciągu zbiorów $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ takiego, że $\Phi_{\mathcal{S}} = \Phi_d$ istnieje ciąg regularny $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ oraz zbiór $A \in \mathcal{L}$ takie, że $0 \in \Phi_d(A)$ oraz $0 \notin \Phi_{\mathcal{J}}(A)$.*

Dowód. Niech $\langle s\rangle = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie niemalejącym i nieograniczonym ciągiem liczb dodatnich takim, że $\liminf_{n\to\infty} \frac{s_n}{s_{n+1}} = 0$ i niech $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $J_n = \left[-\frac{1}{s_n}, \frac{1}{s_n}\right]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $\alpha(\mathcal{J}) = 1$, więc ciąg $\mathcal{J}$ jest regularny. Ponieważ dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}$ zachodzi zawieranie $\Phi_d(A) \subset \Phi_{\mathcal{J}}(A)$, więc z twierdzenia 1.3 wnosimy, że istnieje zbiór $A \in \mathcal{L}$ taki, że $0 \in \Phi_{\mathcal{J}}(A) \setminus \Phi_{\mathcal{S}}(A)$. □

Ponieważ w powyższym lemacie $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, więc na mocy twierdzenia 1.3 otrzymujemy, że $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \setminus \mathcal{T}_d \neq \emptyset$. Stąd możemy sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.13. *Dla każdego regularnego ciągu zbiorów $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ takiego, że $\Phi_{\mathcal{S}} = \Phi_d$ istnieje ciąg regularny $\mathcal{J} \in \mathbb{S}$ taki, że $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \setminus \mathcal{T}_d \neq \emptyset$.*

Lemat 2.14. *Dla każdego regularnego ciągu zbiorów $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ takiego, że $\Phi_{\mathcal{S}} \neq \Phi_d$ istnieje ciąg regularny $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ oraz zbiory $A, B \in \mathcal{L}$ o tej własności, że $0 \in \Phi_{\mathcal{S}}(A)$, $0 \notin \Phi_{\mathcal{J}}(A)$, $0 \in \Phi_{\mathcal{J}}(B)$ i $0 \notin \Phi_{\mathcal{S}}(B)$.*

Dowód. Niech $\mathcal{S} = \{S_m\}_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ będzie takim regularnym ciągiem zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, że $\Phi_{\mathcal{S}} \neq \Phi_d$. Istnieje wtedy zbiór $A \in \mathcal{L}$ taki, że $0 \in \Phi_{\mathcal{S}}(A)$ oraz $0 \notin \Phi_d(A)$. Istnieje zatem taki ściśle rosnący ciąg $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych, że

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda\left(A \cap \left[-\frac{1}{n_k}, \frac{1}{n_k}\right]\right)}{\frac{2}{n_k}} = \beta < 1.$$

Na mocy twierdzenia 1.10 możemy założyć, że $\mathcal{S} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ oraz $0 \notin S_m$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$.

Określimy teraz pewien podciąg ciągu $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Niech n_{k_1} będzie dowolnie wybranym wyrazem ciągu $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Istnieje wówczas liczba naturalna m_1 taka, że $S_{m_1} \subset \left(-\frac{1}{n_{k_1}}, \frac{1}{n_{k_1}}\right)$ i $\lambda\left(S_{m_1}\right) < \frac{1}{2n_{k_1}}$. Istnieje wskaźnik $n_{k_2} > n_{k_1}$ o tej własności, że $S_{m_1} \cap \left(-\frac{1}{n_{k_2}}, \frac{1}{n_{k_2}}\right) = \emptyset$.

Załóżmy, że określiliśmy liczby $n_{k_1}, \ldots, n_{k_l}, n_{k_{l+1}}$ oraz $m_1, \ldots, m_l$ takie, że $S_{m_j} \subset \left(-\frac{1}{n_{k_j}}, \frac{1}{n_{k_j}}\right)$, $\lambda\left(S_{m_j}\right) < \frac{1}{2^j n_{k_j}}$ i $S_{m_j} \cap \left(-\frac{1}{n_{k_{j+1}}}, \frac{1}{n_{k_{j+1}}}\right) = \emptyset$ dla $1 \leqslant j \leqslant l$. Definiujemy teraz zbiory $S_{m_{l+1}}$ i liczby $n_{k_{l+2}}$ takie, że $S_{m_{l+1}} \subset \left(-\frac{1}{n_{k_{l+1}}}, \frac{1}{n_{k_{l+1}}}\right)$, $\lambda\left(S_{m_{l+1}}\right) < \frac{1}{2^{l+1} n_{k_{l+1}}}$ oraz $S_{m_{l+1}} \cap \left(-\frac{1}{n_{k_{l+2}}}, \frac{1}{n_{k_{l+2}}}\right) = \emptyset$. Wówczas $0 \notin \Phi_{\mathcal{J}}(A)$.

Niech $C = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{m_j}$, $J_l = \left(-\frac{1}{n_{k_l}} \frac{1}{n_{k_l}}\right)$ oraz $\mathcal{J} = \{J_l\}_{l\in\mathbb{N}}$. Jako, że $\alpha(\mathcal{J}) < \infty$, to na mocy twierdzenia 2.5 ciąg $\mathcal{J}$jest regularny. Ponadto mamy, że

$$\frac{\lambda\left(C \cap \left(-\frac{1}{n_{k_l}}, \frac{1}{n_{k_l}}\right)\right)}{\frac{2}{n_{k_l}}} = \frac{\lambda\left(\bigcup_{i=l}^{\infty} S_{m_i}\right)}{\frac{2}{n_{k_l}}} = \frac{\sum_{i=l}^{\infty} \lambda\left(S_{m_i}\right)}{\frac{2}{n_{k_l}}} \leqslant$$

$$\frac{\sum_{i=l}^{\infty} \frac{1}{2^i n_{k_i}}}{\frac{2}{n_{k_l}}} \leqslant \frac{1}{2^l} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Oznacza to, że $0 \in \Phi_{\mathcal{J}}(\mathbb{R} \setminus C)$. Ponadto zachodzi równość

$$\frac{\lambda\left((\mathbb{R} \setminus C) \cap S_{m_j}\right)}{\lambda\left(S_{m_j}\right)} = 0.$$

Zatem $0 \notin \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbb{R} \setminus C)$. Kładąc $B = \mathbb{R} \setminus C$ otrzymujemy, że $0 \in \Phi_{\mathcal{J}}(B)$ i $0 \notin \Phi_{\mathcal{S}}(B)$. □

Z powyższego lematu i własności 1.5 otrzymujemy twierdzenie.

Twierdzenie 2.15. *Dla każdego regularnego ciągu zbiorów $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ takiego, że $\Phi_{\mathcal{S}} \neq \Phi_d$ istnieje regularny ciąg $\mathcal{J} \in \mathbb{S}$ taki, że topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ and $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ są nieporównywalne.*

Opierając się na pewnych ideach zawartych w artykule [SW1], udowodnimy twierdzenie poprzedzając je lematem 2.13 z pracy [SW1].

Lemat 2.16. *Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych takimi, że $a_n \to \infty$ oraz dla każdego $n > 1$*

1. $0 < a_n < b_n < a_{n-1} < b_{n-1}$,

2. $a_{n-1} - b_n \geqslant b_n - a_n \geqslant a_n - b_{n+1}$,

3. $\frac{b_n - a_n}{a_n - b_{n+1}} \leqslant 2$.

Wówczas dla każdego przedziału $I = [x, y]$ takiego, że dla pewnego $n > 1$, $0 < x \leqslant b_{n+1}$ oraz $a_n \leqslant y$ mamy

$$\lambda\left(I \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]\right) \leqslant \frac{5}{6}\lambda(I).$$

Twierdzenie 2.17. *Istnieje regularny ciąg zbiorów $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ taki, że operator $\Phi_{\mathcal{S}}$ nie pokrywa się z żadnym operatorem $\Phi_{\mathcal{J}}$ generowanym przez ciąg $\mathcal{J} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ przedziałów domkniętych.*

Dowód. Niech $l_i = \frac{1}{2^i}$ oraz $k_i = i$. Dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{N}$ rozważmy sumę

$$x_m = 2\sum_{i\geqslant m} k_i l_i = 2\sum_{i\geqslant m} \frac{i}{2^i}.$$

Można łatwo obliczyć, że $x_1 = 4$. Dla każdego $i = 1, \ldots, m$ zdefiniujmy

$$a_i^m = x_{m+1} + \frac{2i-1}{2^m}, b_i^m = x_{m+1} + \frac{2i}{2^m}.$$

Zauważmy, że ciąg $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest ściśle malejący i zbieżny do zera. Co więcej, dla każdego $m \in \mathbb{N}$ mamy $x_m = b_m^m$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ określmy zbiory

$$S_n = \bigcup_{m\geqslant n} \bigcup_{i=1}^{m} [a_i^m, b_i^m].$$

Oznaczmy $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą równości

$$\lambda(S_n) = \sum_{m\geqslant n} \sum_{i=1}^{m} \lambda\left([a_i^m, b_i^m]\right) = \sum_{m\geqslant n} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^m} = \sum_{m\geqslant n} \frac{m}{2^m} = \frac{x_n}{2}.$$

Ponadto dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\operatorname{diam}\left(\{0\} \cup S_n\right) = x_n,$$

więc $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$. Z powyższych obserwacji wynika, że

$$\alpha(\mathcal{S}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{diam}\left(\{0\} \cup S_n\right)}{\lambda(S_n)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{\frac{x_n}{2}} = 2.$$

Zatem na mocy twierdzenia 2.5 otrzymujemy, że ciąg $\mathcal{S}$ jest regularny.

Załóżmy, że istnieje ciąg $\mathcal{J} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ przedziałów domkniętych taki, że $\Phi_{\mathcal{S}} = \Phi_{\mathcal{J}}$. Rozważmy przypadki:

1. Istnieje ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ taki, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zbiór

$$\{(i,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : J_{p_k} \cap [a_i^n, b_i^n] \neq \emptyset\}$$

ma co najmniej dwa elementy. Połóżmy $A = S_1$.

Niech $I_i^n = [a_i^n, b_i^n]$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $1 \leqslant i \leqslant n$.

Niech $\mathcal{I}'$ będzie następującym ciągiem przedziałów domkniętych:

$$I_1^1, I_2^2, I_1^2, I_3^3, I_2^3, I_1^3, \ldots, I_m^m, I_{m-1}^m, \ldots I_1^m, \ldots$$

Wówczas $\bigcup \mathcal{I}' = S_1$. Na mocy lematu 2.16 wnioskujemy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lambda\left(J_{p_k} \cap A\right) = \lambda\left(J_{p_k} \cap S_1\right) = \lambda\left(J_{p_k} \cap \bigcup \mathcal{I}'\right) = \lambda\left(J_{p_k} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{n} [a_i^n, b_i^n]\right) \leqslant \frac{5}{6}\lambda\left(J_{p_k}\right).$$

Oznacza to, że $0 \notin \Phi_{\mathcal{J}}(A)$. Ponieważ $S_n \subset S_1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, więc $0 \in \Phi_{\mathcal{S}}(A)$.

2. Istnieje $p_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $p > p_0$

$$\{(i,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : J_p \cap [a_i^n, b_i^n] \neq \emptyset\}$$

jest co najwyżej jednoelementowy. Istnieje wtedy podciąg $\mathcal{J}' = \{J_{p_s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ o tej własności, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór

$$\left\{s \in \mathbb{N} : J_{p_s} \cap \bigcup_{i=1}^{n} [a_i^n, b_i^n] \neq \emptyset\right\}$$

zawiera co najwyżej jeden element. Niech

$$A = (0, M) \setminus \bigcup_{s\in\mathbb{N}} J_{p_s},$$

gdzie $M > x_1 = 4$. Łatwo widać, że A jest zbiorem mierzalnym oraz $0 \notin \Phi_{\mathcal{J}}(A)$. Ponadto dla każdego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi następująca nierówność

$$\lambda\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{m} [a_i^m, b_i^m]\right) \geqslant \frac{m-1}{2^m}.$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy, że

$$\frac{\lambda(A \cap I_n)}{\lambda(I_n)} \geqslant \frac{\sum_{m\geqslant n} \frac{m-1}{2^m}}{\sum_{m\geqslant n} \frac{m}{2^m}} = 1 - \frac{\sum_{m\geqslant n} \frac{1}{2^m}}{\sum_{m\geqslant n} \frac{m}{2^m}} \geqslant 1 - \frac{\sum_{m\geqslant n} \frac{1}{2^m}}{n\sum_{m\geqslant n} \frac{1}{2^m}} \geqslant 1 - \frac{1}{n}.$$

Ostatecznie otrzymujemy, że $0 \in \Phi_{\mathcal{I}}(A)$.

$\square$

Poniżej pokażemy, że udowodnione powyżej twierdzenie 2.17 jest równoważne następującemu twierdzeniu.

Twierdzenie 2.18. *Istnieje ciąg regularny $\mathcal{I} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ taki, że dla dowolnego ciągu $\mathcal{J} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ przedziałów domkniętych topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ nie pokrywa się z topologią $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$.*

Dowód. Niech $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ będzie regularnym ciągiem rozważanym w dowodzie twierdzenia 2.17. Z definicji regularności istnieje ciąg $\mathcal{I} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ taki, że $\Phi_{\mathcal{S}} = \Phi_{\mathcal{I}}$ i $\alpha(\mathcal{I}) < \infty$. Na mocy wniosku 2.10 operator $\Phi_{\mathcal{I}}$ jest operatorem dolnej gęstości. Niech $\mathcal{J} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ będzie ciągiem przedziałów domkniętych. Załóżmy, że $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} = \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$. Wówczas z własności 1.19 wynika, że skoro $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, to dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}$ zachodzi warunek $\Phi_{\mathcal{I}}(A) \subset \Phi_{\mathcal{J}}(A)$. Jest to sprzeczne z własnościami ciągów $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ występującymi w dowodzie twierdzenia 2.17. Uzasadnimy, że twierdzenie 2.18 implikuje twierdzenie 2.17 . Na mocy twierdzenia 2.18 istnieje regularny ciąg zbiorów $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ taki, że dla dowolnego ciągu $\mathcal{J} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ przedziałów domkniętych topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ nie pokrywa się z topologią $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$. Zatem operator $\Phi_{\mathcal{S}}$ nie pokrywa się z żadnym operatorem $\Phi_{\mathcal{J}}$ generowanym przez ciąg $\mathcal{J} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ przedziałów domkniętych, bo w przeciwnym przypadku topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ oraz $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ byłyby identyczne.

$\square$

3. Całkowita regularność topologii $\mathcal{S}$-gęstości związanych z ciągami regularnymi

Udowodnimy teraz, że jeśli ciąg $\mathcal{S}$ jest regularny, to przestrzeń $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rangle$ jest całkowicie regularna. Wynik ten został opublikowany w artykule [W]. Dowód oprzemy na analogonie twierdzenia Łuzina-Mienszowa w kontekście $\mathcal{S}$-gęstości (por. [B]), poprzedzając go następującymi lematami.

Lemat 3.1. *Niech $\mathcal{S} = \{S_n\} \in \mathbb{S}$ i niech $B \in \mathcal{L}$. Wówczas dla każdego $x \in B \cap \Phi_{\mathcal{S}}(B)$ istnieje zbiór doskonały K taki, że $x \in K \subset B$.*

Dowód. Niech $B \in \mathcal{L}$, $\mathcal{S} = \{S_n\} \in \mathbb{S}$. Weźmy dowolny $x \in B \cap \Phi_{\mathcal{S}}(B)$. Ponieważ x jest punktem $\mathcal{S}$-gęstości zbioru B, więc równość $\lambda\left(B \cap (S_n + x)\right) = 0$ zachodzi tylko dla skończenie wielu $n \in \mathbb{N}$. Możemy zatem założyć, że $\lambda\left(B \cap (S_n + x)\right) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje niepusty zbiór doskonały K_n taki, że $K_n \subset B \cap (S_n + x)$. Zdefiniujmy zbiór K następująco:

$$K = \{x\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

Wtedy $x \in K \subset B$. Pokażemy, że zbiór K jest domknięty i w sobie gęsty. Niech $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ oraz $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$. Jeśli nieskończenie wiele elementów ciągu $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ pokrywa się z x_0, to $x_0 \in K$. Załóżmy przeciwnie. Wówczas mamy przypadki

1. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ należy do zbioru K_{n_0}. Wówczas $x_0 \in K$.
2. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór K_n zawiera co najwyżej skończoną liczbę wyrazów ciągu $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Niech $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ oraz $\left\{x_{k_j}\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ będą ciągami takimi, że $x_{n_j} \in K_{n_j}$. Ponieważ $x_{k_j} \in S_{n_j} + x$ i $\lim_{j \to \infty} \operatorname{diam}\left(\{0\} \cup S_{n_j}\right) = 0$, więc $\lim_{j \to \infty} x_{k_j} = x$. W rezultacie $x_0 \in K$. Zatem zbiór K jest domknięty.

Pokażemy, że K jest w sobie gęsty. Niech $x_0 \in K$. Jeśli istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $x_0 \in K_{n_0}$, to z doskonałości zbioru K_{n_0} istnieje ciąg elementów zbioru K różnych od x_0 zbieżny do x_0. Jeśli $x_0 \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, to $x_0 = x$. Niech $x_n \neq x_0$ będzie dowolnym elementem zbioru K_n. Wówczas $x_n \in x + S_n$ i stąd wnosimy, że $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ $\square$

Lemat 3.2. *Niech $\mathcal{S} = \{S_n\} \in \mathbb{S}$ oraz $B \in \mathcal{L}$. Wówczas dla każdego zbioru przeliczalnego C takiego, że $\overline{C} \subset B$ oraz $C \subset \Phi_{\mathcal{S}}(B)$ istnieje zbiór doskonały K o tej własności, że $C \subset K \subset B$.*

Dowód. Niech $\mathcal{S} = \{S_n\} \in \mathbb{S}$, zaś $B \in \mathcal{L}$. Ponadto, niech $C = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ będzie takim zbiorem przeliczalnym, $\overline{C} \subset B$ i $C \subset \Phi_{\mathcal{S}}(B)$. Dla każdego $i \in \mathbb{N}$ określmy zbiory $B_i = B \cap \left[x_i - \frac{1}{i}, x_i + \frac{1}{i}\right]$. Zauważmy, że $x_i \in \Phi_{\mathcal{S}}(B_i)$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Zatem na mocy poprzedniego lematu dla każdego $i \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór doskonały K_i taki, że $x_i \in K_i \subset B_i$. Określmy zbiór K następująco:

$$K = \overline{C} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i.$$

Wówczas $C \subset K \subset B$. Pokażemy, że K jest zbiorem doskonałym. Niech $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ oraz $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Jeśli nieskończenie wiele elementów ciągu $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ należy do zbioru $\overline{C}$ lub K_{i_0} dla pewnego $i_0 \in \mathbb{N}$, to $x \in K$. Załóżmy przeciwnie. Wówczas istnieją ciągi $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ oraz $\{i_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ takie, że $x_{n_j} \in K_{i_j}$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Zatem $\left|x_{i_j} - x_{n_j}\right| < \frac{2}{i_j}$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Stąd wnioskujemy, że $\lim_{j \to \infty} x_{i_j} = x$, a więc $x \in \overline{C} \subset K$, co oznacza domkniętość zbioru K. Pokażemy teraz, że zbiór K jest w sobie gęsty. Istotnie, wystarczy pokazać, że dowolny element $x \in \overline{C}$ jest punktem skupienia zbioru K. Jeśli x jest punktem skupienia zbioru C, to oczywiście jest punktem skupienia zbioru K. Załóżmy więc, że x nie jest punktem skupienia zbioru C. Istnieje więc $i_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $x = x_{i_0}$. Zatem $x_{i_0} \in K_{i_0}$ i stąd wnioskujemy, że x jest punktem skupienia zbioru K. $\square$

Lemat 3.3. *Niech $\mathcal{S} = \{S_n\} \in \mathbb{S}$ oraz $E \in \mathcal{L}$. Wtedy dla każdego $\mathcal{T}_{nat}$-domkniętego zbioru X takiego, że $X \subset E \cap \Phi_{\mathcal{S}}(E)$ istnieje zbiór doskonały K o tej własności, że $X \subset K \subset E$.*

Dowód. Istnieje zbiór przeliczalny $C \subset E$, taki że $\overline{C} = X$. Zatem $\overline{C} \subset E \cap \Phi_{\mathcal{S}}(E)$. Na mocy poprzedniego lematu istnieje zbiór doskonały K, taki że $C \subset K \subset E$. Ponieważ $\overline{C} \subset \overline{K} = K$, więc $X \subset K \subset E$. $\square$

Twierdzenie 3.4. *Niech $\mathcal{S} = \{S_n\} \in \mathbb{S}$ będzie regularnym ciągiem zbiorów i niech $E \in \mathcal{L}$. Wówczas dla każdego zbioru $\mathcal{T}_{nat}$-domkniętego X takiego, że $X \subset E \cap \Phi_{\mathcal{S}}(E)$ istnieje zbiór doskonały P taki, że $X \subset P \subset E$ oraz $X \subset \Phi_{\mathcal{S}}(P)$.*

Dowód. Z regularności ciągu zbiorów $\mathcal{S}$ wynika istnienie ciągu $\mathcal{I} = \{I_n\} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ takiego, że $\alpha(\mathcal{I}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\operatorname{diam}(I_n \cup \{0\})}{\lambda(I_n)} < \infty$ oraz $\Phi_{\mathcal{S}} = \Phi_{\mathcal{I}}$.

Możemy na mocy zbieżności ciągu $\mathcal{I}$ do zera założyć, że $I_n \subset [-1, 1]$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Połóżmy $F = E \cap \bigcup_{x \in X} [x - 1, x + 1]$. Wtedy $X \subset F \cap \Phi_{\mathcal{I}}(F)$. Z lematu 3.3

wynika istnienie zbioru doskonałego K takiego, że $X \subset K \subset F$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ określmy

$$R_n = \left\{ x \in F : \frac{1}{n+1} < \operatorname{dist}(x, X) \leqslant \frac{1}{n} \right\}.$$

Zauważmy, że $F = X \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy przez $P_n \subset R_n$ zbiór doskonały taki, że $\lambda(R_n \setminus P_n) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Zdefiniujmy zbiór P następująco:

$$P = K \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n.$$

Wówczas $X \subset P \subset F$. Pokażemy, że P jest zbiorem doskonałym. Jeśli $x_0 \in P$, to $x_0 \in K$ lub $x_0 \in P_{n_0}$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$. Jako, że zbiory K i P_{n_0} są doskonałe, to x_0 jest punktem skupienia zbioru P. Uzasadnimy teraz, że zbiór P jest domknięty. Niech $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset P$ oraz $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$. Jeśli nieskończenie wiele elementów ciągu $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ należy do zbioru K lub do zbioru P_{n_0}, to $x_0 \in P$. Załóżmy przeciwnie. Niech $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ i $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ będą takimi ciągami liczb naturalnych, że $x_{k_j} \in P_{n_j} \subset R_{n_j}$. Wnioskujemy stąd, że $\operatorname{dist}\left(x_{k_j}, X\right) \leqslant \frac{1}{k_j}$. W rezultacie otrzymujemy, że $\operatorname{dist}(x_0, X) = 0$, a więc $x_o \in \overline{X} = X \subset P$.

Pokażemy, że $X \subset \Phi_{\mathcal{I}}(P)$. Niech $x \in X$. Wówczas $x \in X \cap \Phi_{\mathcal{S}}(F)$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\lambda\left(F \cap (x + I_n)\right) \leqslant \lambda\left(P \cap (x + I_n)\right) + \lambda\left((F \setminus P) \cap (x + I_n)\right).$$

Zachodzą dwa przypadki:

Przypadek 1. $(x + I_n) \cap R_j = \emptyset$ dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$(F \setminus P) \cap (x + I_n) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \cap (x + I_n) = \emptyset,$$

więc

$$\lambda\left(F \cap (x + I_n)\right) \leqslant \lambda\left(P \cap (x + I_n)\right).$$

Przypadek 2. Istnieje $j \in \mathbb{N}$ takie, że $(x + I_n) \cap R_j \neq \emptyset$. Określmy

$$m(n) := \min\left\{j \in \mathbb{N} : (x + I_n) \cap R_j \neq \emptyset\right\}.$$

Pokażemy, że $\lim_{n \to \infty} m(n) = \infty$. Niech $y \in (x + I_n) \cap R_{m(n)}$. Wtedy $y - x \in I_n$ oraz $y \in R_{m(n)}$, więc $\operatorname{diam}\left(I_k \cup \{0\}\right) |x - y| > \frac{1}{m(n)+1}$. Ze zbieżności ciągu $\mathcal{I}$ do zera wynika, że $\lim_{n \to \infty} m(n) = \infty$. Zauważmy, że

$$(F \setminus P) \cap (x + I_n) \subset \bigcup_{j \geqslant m(n)} \left(R_j \setminus P_j\right).$$

Stąd wynika, że

$$\lambda\left(\left(F \setminus P\right) \cap \left(x + I_n\right)\right) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{j \geqslant m(n)} \left(R_j \setminus P_j\right)\right) \leqslant \sum_{j \geqslant m(n)} \lambda\left(R_j \setminus P_j\right) < \frac{1}{2^{m(n)}}.$$

Zatem

$$\lambda\left(F \cap \left(x + I_n\right)\right) \leqslant \lambda\left(P \cap \left(x + I_n\right)\right) + \lambda\left(\left(F \setminus P\right) \cap \left(x + I_n\right)\right) < \lambda\left(P \cap \left(x + I_n\right)\right) + \frac{1}{2^{m(n)}}.$$

Skoro $\alpha(\mathcal{I}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\operatorname{diam}(I_n \cup \{0\})}{\lambda(I_n)} < \infty$, to możemy założyć założyć, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\operatorname{diam}\left(I_k \cup \{0\}\right) \leqslant 2\alpha(\mathcal{I})\lambda(I_k)$. Zatem dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lambda\left(I_k\right) \geqslant \frac{\operatorname{diam}\left(I_k \cup \{0\}\right)}{2\alpha(\mathcal{I})}$$

Ponadto, jeśli $y \in \left(x + I_n\right) \cap R_{m(k)}$, to

$$\operatorname{dist}\left(X, y\right) > \frac{1}{m(k) + 1}.$$

Stąd

$$\operatorname{diam}\left(\{0\} \cup I_k\right) \geqslant |x - y| > \frac{1}{m(k) + 1},$$

więc

$$\lambda(I_k) \geqslant \frac{1}{2\alpha(\mathcal{I})(m(k) + 1)}.$$

Ostatecznie

$$\frac{\lambda\left(F \cap \left(x + I_k\right)\right)}{\lambda(I_k)} \leqslant \frac{\lambda\left(P \cap \left(x + I_k\right)\right)}{\lambda(I_k)} + \frac{2\alpha(\mathcal{I})(m(k) + 1)}{2^{m(k)}}.$$

Skoro $x \in \Phi_{\mathcal{S}}(F) = \Phi_{\mathcal{I}}(F)$, to biorąc pod uwagę przypadki 1 i 2 otrzymujemy, że

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda\left(P \cap \left(x + I_n\right)\right)}{\lambda(I_n)} = 1,$$

więc $x \in \Phi_{\mathcal{I}}(P)$. Zatem $x \in \Phi_{\mathcal{S}}(P)$. $\square$

Pokażemy dalej, że topologia generowana przez regularny ciąg zbiorów jest całkowicie regularna.

Obecnie zdefiniujemy funkcje $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągłe.

Definicja 3.5. Niech $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$. Powiemy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$-*aproksymatywnie ciągła* w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, gdy istnieje zbiór $U_{x_0} \in \mathcal{L}$ taki, że $x_0 \in \Phi_{\mathcal{S}}\left(U_{x_0}\right)$ oraz $\lim_{x \to x_0, x \in U_{x_0}} f(x) = f(x_0)$. Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$-*aproksymatywnie ciągła*, gdy jest $\mathcal{S}$-*aproksymatywnie ciągła* w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$.

Własność 3.6. *Niech $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, zaś $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągłymi w punkcie x_0. Wówczas funkcje $f + g$ oraz $f \cdot g$ są $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągłe w punkcie x_0. Ponadto, jeśli $f(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{1}{f}$ jest również $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła w punkcie x_0.*

Dowód. Niech funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągłe w punkcie x_0. Wówczas istnieją zbiory $U^1_{x_0}, U^2_{x_0} \in \mathcal{L}$ takie, że $x_0 \in \Phi_{\mathcal{S}}\left(U^1_{x_0}\right)$, $x_0 \in \Phi_{\mathcal{S}}\left(U^2_{x_0}\right)$ oraz $\lim_{x \to x_0, x \in U^1_{x_0}} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \to x_0, x \in U^2_{x_0}} g(x) = g(x_0)$. Niech $U_{x_0} = U^1_{x_0} \cap U^2_{x_0}$. Oczywiście $U_{x_0} \in \mathcal{L}$. Ponadto

$$x_0 \in \Phi_{\mathcal{S}}\left(U^1_{x_0}\right) \cap \Phi_{\mathcal{S}}\left(U^2_{x_0}\right) = \Phi_{\mathcal{S}}\left(U^1_{x_0} \cap U^2_{x_0}\right) = \Phi_{\mathcal{S}}\left(U_{x_0}\right)$$

oraz

$$\lim_{x \to x_0, x \in U_{x_0}} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0),$$

a więc funkcja $f + g$ jest $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła w punkcie x_0. Analogicznie dowodzimy, że funkcja $f \cdot g$ jest $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła w punkcie x_0.

Załóżmy teraz, że funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła w punkcie x_0 i $g(x_0) \neq 0$. Niech $f(y) = \frac{1}{y}$. Wówczas $\frac{1}{g(x)} = f(g(x))$. Z ciągłości funkcji f w punkcie $y_0 = g(x_0)$ otrzymujemy, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $|y - y_0| < \delta$, to $|f(y) - f(y_0)| < \epsilon$. Na mocy $\mathcal{S}$-aproksymatywnej ciągłości funkcji g w punkcie x_0 istnieje zbiór $U_{x_0} \in \mathcal{L}$ taki, że $x_0 \in \Phi_{\mathcal{S}}(U_{x_0})$ oraz istnieje $\delta_1 > 0$ taka, że jeśli $x \in A \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, to $|g(x) - g(x_0)| < \delta$. Skoro $g(x) \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, to $|f(g(x)) - f(y_0)| < \epsilon$, czyli $|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}| < \epsilon$. Oznacza to, że funkcja $\frac{1}{g}$ jest również $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła w punkcie x_0. $\square$

Z powyższej własności wynika następujący wniosek.

Wniosek 3.7. *Niech $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$, zaś $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągłymi. Wówczas funkcje $f + g$ oraz $f \cdot g$ są $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągłe. Ponadto, jeśli $f(x) \neq 0$, to funkcja $\frac{1}{f}$ jest również $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła.*

Definicja 3.8. Niech $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$. Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$-górnie aproksymatywnie ciągła w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeżeli dla każdego $a > f(x_0)$ istnieje zbiór $U_{x_0} \in \mathcal{L}$ taki, że $x_0 \in \Phi(U_{x_0})$ oraz $a > f(x)$ dla każdego $x \in U_{x_0}$. Powiemy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$-górnie aproksymatywnie ciągła, jeśli jest $\mathcal{S}$-górnie aproksymatywnie ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$.

Niech $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$. Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$-dolnie aproksymatywnie ciągła w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeżeli dla każdego $a < f(x_0)$ istnieje zbiór $U_{x_0} \in \mathcal{L}$ taki, że $x_0 \in \Phi\left(U_{x_0}\right)$ oraz $a < f(x)$ dla każdego $x \in U_{x_0}$. Powiemy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$-dolnie aproksymatywnie ciągła, jeśli jest $\mathcal{S}$-dolnie aproksymatywnie ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$.

Niech

$$\mathcal{S}_0 = \{\mathcal{S} \in \mathbb{S} : \forall_{A \in \mathcal{L}}\ A \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A) \Rightarrow \lambda\left(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A\right) = 0\}.$$

Praca [W1] zawiera rezultat, że dla dowolnego ciągu $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_0$ funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{\mathcal{S}},\mathrm{nat}}$, gdzie

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ jest funkcją ciągłą z przestrzeni } \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rangle \text{ w przestrzeń } \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{nat}} \rangle\}.$$

W świetle wniosku 1.22 otrzymujemy, że $\mathcal{S}_0 = \mathbb{S}$ i stąd wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.9. *Niech $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{\mathcal{S}},nat}$.*

Twierdzenie 3.10. *Niech $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest $\mathcal{S}$-górnie aproksymatywnie ciągła i $\mathcal{S}$-dolnie aproksymatywnie ciągła.*

Dowód. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ i niech $a > f\left(x_0\right)$. Z twierdzenia 3.9 wynika, że $x_0 \in \{x \in \mathbb{R} : a > f(x)\} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. Istnieje zatem zbiór $U_{x_0} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ taki, że $x_0 \in U_{x_0}$ i $U_{x_0} \subset \{x \in \mathbb{R} : a > f(x)\}$, a więc $x_0 \in \Phi_{\mathcal{S}}\left(U_{x_0}\right)$ oraz $a > f(x)$ dla $x \in U_{x_0}$. Wobec powyższego funkcja f jest $\mathcal{S}$-górnie aproksymatywnie ciągła w punkcie x_0. Z dowolności x_0 wynika, że funkcja f jest $\mathcal{S}$-górnie aproksymatywnie ciągła na $\mathbb{R}$. Analogicznie pokazujemy, że funkcja f jest $\mathcal{S}$-dolnie aproksymatywnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Załóżmy teraz, że że funkcja f jest $\mathcal{S}$-górnie i $\mathcal{S}$-dolnie aproksymatywnie ciągła na $\mathbb{R}$. Niech $x_0 \in \{x \in \mathbb{R} : f(x) < a\}$. Wówczas istnieje zbiór U_{x_0} taki, że $x_0 \in \Phi\left(U_{x_0}\right)$ i $f(x) < a$ dla $x \in U_{x_0}$. Oczywiście $U_{x_0} \subset \{x \in \mathbb{R} : f(x) < a\}$. Kładąc

$$V_{x_0} = \left(U_{x_0} \cup \{x_0\}\right) \cup \Phi_{\mathcal{S}}\left(U_{x_0} \cup \{x_0\}\right)$$

otrzymujemy na podstawie faktu, że $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem dolnej gęstości, że $V_{x_0} \subset \Phi_{\mathcal{S}}\left(V_{x_0}\right)$, więc $V_{x_0} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. Wynika stąd, że $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < a\} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.

Analogicznie uzasadniamy na podstawie $\mathcal{S}$-dolnej aproksymatywnej ciągłości, że $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. Zatem $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{\mathcal{S}},\mathrm{nat}}$, więc na mocy twierdzenia 3.9 funkcja f jest $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła. □

Twierdzenie 3.11. *Niech $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ będzie ciągiem regularnym, zaś $E \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ będzie zbiorem typu F_σ. Istnieje wówczas funkcja $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła f taka, że*

1. $0 < f(x) \leqslant 1$ *dla* $x \in E$,
2. $f(x) = 0$ *dla* $x \notin E$.

Dowód. Niech $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ będzie ciągiem regularnym. Oznaczmy przez E zbiór typu F_σ taki, że $E \subset \Phi_{\mathcal{S}}(E)$. Opierając się na twierdzeniu 3.4, analogicznie jak w twierdzeniu 6.5 w [B], dowiedziemy istnienia rodziny $\{P_\alpha : \alpha \in [1, \infty)\}$ zbiorów $\mathcal{T}_{\mathrm{nat}}$-domkniętych takich, że

(i) dla $\alpha_1 < \alpha_2$, zachodzi $P_{\alpha_1} \subset P_{\alpha_2} \cap \Phi_{\mathcal{S}}(P_{\alpha_2})$,

(ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = E$.

Zbiór E jest typu F_σ, więc $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, gdzie każdy ze zbiorów jest $\mathcal{T}_{\mathrm{nat}}$-domknięty. Niech $P_1 = F_1$. Na mocy twierdzenia 3.4 istnieje taki $\mathcal{T}_{\mathrm{nat}}$-domknięty zbiór K_2, że

$$P_1 \subset K_2 \subset E$$

oraz

$$P_1 \subset \Phi_{\mathcal{S}}(K_2) \text{ i } K_2 \subset \Phi_{\mathcal{S}}(E).$$

Niech $P_2 = F_2 \cup K_2$. Wtedy

$$P_1 \subset P_2 \subset E$$

oraz

$$P_1 \subset \Phi_{\mathcal{S}}(P_2)\ ,\ P_2 \subset \Phi_{\mathcal{S}}(E) \text{ i } F_2 \subset P_2.$$

Załóżmy, że dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ określiliśmy zbiory P_n takie, że

$$P_{n-1} \subset P_n \subset E$$

oraz

$$P_{n-1} \subset \Phi_{\mathcal{S}}(P_n)\ ,\ P_n \subset \Phi_{\mathcal{S}}(E) \text{ i } F_n \subset P_n.$$

Z twierdzenia 3.4 wynika istnienie takiego $\mathcal{T}_{\mathrm{nat}}$-domkniętego zbioru K_{n+1}, że

$$P_n \subset K_{n+1} \subset E$$

oraz

$$P_n \subset \Phi_{\mathcal{S}}\left(K_{n+1}\right) \text{ i } K_{n+1} \subset \Phi_{\mathcal{S}}\left(E\right).$$

Połóżmy $P_{n+1} = K_{n+1} \cup F_{n+1}$. Mamy wówczas

$$P_n \subset P_{n+1} \subset E$$

oraz

$$P_n \subset \Phi_{\mathcal{S}}\left(P_{n+1}\right)\ ,\ P_{n+1} \subset \Phi_{\mathcal{S}}\left(E\right) \text{ i } F_{n+1} \subset P_{n+1}.$$

Łatwo zauważyć, że $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = E$, a więc spełniony jest warunek (ii). Pokażemy teraz, że zachodzi warunek (i). Dla każdego $m = 0, 1, 2, \ldots$ i $n \geqslant 2^m$ określimy zbiory $\mathcal{T}_{\mathrm{nat}}$-domknięte $P_{\frac{n}{2^m}}$. Dla $m = 0$ otrzymujemy ciąg zbiorów $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i mamy

$$\begin{gathered} P_{\frac{n}{2^m}} \subset P_{\frac{n+1}{2^m}}, \\ P_{\frac{n}{2^m}} \subset \Phi_{\mathcal{S}}\left(P_{\frac{n+1}{2^m}}\right). \end{gathered}$$

Załóżmy, że dla ustalonego m określiliśmy zbiory $P_{\frac{n}{2^m}}$ dla każdego $n \geqslant 2^m$ spełniające powyższe dwa warunki. Zauważmy, że $P_{\frac{n}{2^m}} = P_{\frac{2n}{2^{m+1}}}$. Na mocy twierdzenia 3.4 istnieje zbiór $\mathcal{T}_{\mathrm{nat}}$-domknięty, który oznaczymy $P_{\frac{2n+1}{2^{m+1}}}$, o następujących własnościach:

$$\begin{gathered} P_{\frac{n}{2^m}} \subset P_{\frac{2n+1}{2^{m+1}}} \subset P_{\frac{n+1}{2^m}}, \\ P_{\frac{n}{2^m}} \subset \Phi_{\mathcal{S}}\left(P_{\frac{2n+1}{2^{m+1}}}\right) \text{ i } P_{\frac{2n+1}{2^{m+1}}} \subset \Phi_{\mathcal{S}}\left(P_{\frac{n+1}{2^m}}\right). \end{gathered} \tag{12}$$

Ostatecznie, dla dowolnej liczby $\alpha \in [1, +\infty]$ zdefiniujmy zbiór P_α następująco:

$$P_\alpha = \bigcap_{\frac{n}{2^m} \geqslant \alpha} P_{\frac{n}{2^m}}.$$

Oczywiście dla dowolnej liczby $\alpha \in [1, +\infty]$ zbiór P_α jest $\mathcal{T}_{\mathrm{nat}}$-domknięty. Niech $\alpha_1 < \alpha_2$, zaś m, n będą takie, że

$$\alpha_1 < \frac{n}{2^m} < \frac{n+1}{2^m} < \alpha_2.$$

Wtedy na mocy (12) otrzymujemy, że

$$P_{\alpha_1} \subset P_{\frac{n}{2^m}} \subset P_{\frac{n+1}{2^m}} \subset P_{\alpha_2}$$

oraz

$$P_{\frac{n}{2^m}} \subset \Phi_{\mathcal{S}}\left(P_{\frac{n+1}{2^m}}\right).$$

Zatem $P_{\alpha_1} \subset P_{\alpha_2}$ i $P_{\alpha_1} \subset \Phi_{\mathcal{S}}(P_{\alpha_2})$, co kończy dowód warunku (i).

Połóżmy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\inf\{\alpha : x \in P_\alpha\}} & \text{dlaa } x \in E \\ 0 & \text{dla } x \notin E \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja f spełnia warunki (1), (2).

Pokażemy teraz, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie $x \notin E$. Niech $x_0 \notin E$ i $n \in \mathbb{N}$. Z warunku (2) otrzymujemy, że $x_0 \notin P_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jako, że zbiory P_n są $\mathcal{T}_{\text{nat}}$-domknięte, istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap P_n = \emptyset$. Co więcej, warunek (1) pociąga za sobą równość $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap P_\alpha = \emptyset$ dla każdego $\alpha \leqslant n$. Jeśli $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ to $\inf\{\alpha : x \in P_\alpha\} \geqslant n$. Wynika stąd, że $f(x) \leqslant \frac{1}{n}$ dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Z równości $f(x_0) = 0$ wynika ciągłość funkcji f w punkcie x_0.

Pokażemy, że funkcja f jest półciągła z góry dla $x \in E$. Niech $x_0 \in E$ oraz $a > f(x_0)$. Oznaczmy $n_0 = \min\{n : x_0 \in P_n\}$. Jeśli $n_0 = 1$, to $f(x_0) = 1$. Wówczas dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ otrzymujemy, że $f(x) \leqslant f(x_0)$, a więc $f(x) < a$. Jeśli $n_0 > 1$, to istnieje taka $\delta > 0$, że

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \bigcup_{n=1}^{n_0-1} P_n = \emptyset.$$

Wówczas dla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mamy

$$f(x) \leqslant \frac{1}{n_0} = f(x_0) < a,$$

czyli $f(x) < a$. Zatem funkcja f jest górnie półciągła na zbiorze E, a więc jest też $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła na zbiorze E.

Pokażemy teraz, że f jest funkcją $\mathcal{S}$-dolnie aproksymatywnie ciągłą w każdym punkcie $x \in E$. Weźmy dowolne $x_0 \in E$ i $a < f(x_0)$. Wtedy $f(x_0) = \frac{1}{\inf\{\alpha : x_0 \in P_\alpha\}} = \frac{1}{M}$ i $a < \frac{1}{M+\epsilon}$ dla pewnego $\epsilon > 0$. Na mocy (1) otrzymujemy, że

$$x_0 \in P_{M+\frac{\epsilon}{4}} \subset P_{M+\frac{\epsilon}{2}} \cap \Phi_{\mathcal{S}}(P_{M+\frac{\epsilon}{2}}).$$

Co więcej, jeśli $x \in P_{M+\frac{\epsilon}{2}}$, to

$$f(x) \geqslant \frac{1}{M + \frac{\epsilon}{2}} > \frac{1}{M+\epsilon} > f(x_0) > a.$$

Zatem $P_{M+\frac{\epsilon}{2}} \subset \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$ oraz $x_0 \in \Phi_{\mathcal{S}}(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\})$. Oznaczmy $U_{x_0} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$. Wówczas $x_0 \in \Phi_{\mathcal{S}}(U_{x_0})$ i dla $x \in U_{x_0}$ mamy $f(x) > a$. Oznacza to, że funkcja f jest $\mathcal{S}$-dolnie aproksymatywnie ciągła w punkcie x_0. Zatem na mocy twierdzenia 3.10 funkcja f jest aproksymatywnie ciągła w punkcie x_0. Z dowolności x_0 wynika, że funkcja f jest aproksymatywnie ciągła. □

Lemat 3.12. *Niech $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$, zaś przez $E_1, E_2, K \subset \mathbb{R}$ oznaczmy zbiory parami rozłączne takie, że $E_1 \cup E_2 \cup K = \mathbb{R}$. Załóżmy ponadto, że $E_1 \cup K$ i $E_2 \cup K$ są zbiorami typu F_σ oraz $E_1 \cup K \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, $E_2 \cup K \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. Istnieje wtedy funkcja $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła f o następujących własnościach:*

1. $0 < f(x) < 1$ *dla* $x \in K$,
2. $f(x) = 0$ *dla* $x \in E_1$,
3. $f(x) = 1$ *dla* $x \in E_2$.

Dowód. Z twierdzenia 3.11 wynika isnienie funkcji $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągłych g, h takich, że

1. $0 < g(x) \leqslant 1$ dla $x \notin E_1$ i $g(x) = 0$ dla $x \in E_1$,
2. $0 < h(x) \leqslant 1$ dla $x \notin E_2$ i $h(x) = 0$ dla $x \in E_2$.

Zauważmy, że funkcja $f(x) = \frac{g(x)}{g(x)+h(x)}$ spełnia warunki (1)-(3), zaś na mocy wniosku 3.7 jest $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła. □

Twierdzenie 3.13. *Jeśli ciąg $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ jest regularny, to przestrzeń topologiczna $\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}}\rangle$ jest całkowicie regularna.*

Dowód. Niech F oznacza zbiór $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-domknięty taki, że $x_0 \notin F$. Z własności zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a wynika istnienie zbioru C typu G_δ o następujących własnościach: $F \subset C$ i $\lambda(F) = \lambda(C)$ oraz $x_0 \notin C$. Połóżmy $E_1 = \{x_0\}$, $E_2 = C$ i $H = \mathbb{R} \setminus (C \cup \{x_0\})$. Na mocy lematu 3.12 istnieje funkcja $\mathcal{S}$-aproksymatywnie ciągła $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ taka, że $f(x_0) = 0$ oraz $f(x) = 1$ dla każdego $x \in F$. Z twierdzenia 3.10 wynika, że $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{\mathcal{S}},\mathrm{nat}}$. Oznacza to, że przestrzeń topologiczna $\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}}\rangle$ jest całkowicie regularna. □

4. Porównywanie topologii $\mathcal{S}$-gęstości

Celem tego rozdziału będzie badanie warunków związanych z porównywaniem topologii. Badania porównywania uogólnień topologii gęstości związanych z różnymi koncepcjami wprowadzonych punktów gęstości są zawarte miedzy innymi w pracach [FF1], [FF2], [FFH], [W1], [WBW]. Niech $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem zbiorów, $x \in \mathbb{R}$ oraz $N \subset \mathbb{N}$ będzie zbiorem skończonym. Oznaczmy

$$\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(x) = \operatorname{card}\{n \in N : x \in I_n\}.$$

Ponadto, dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ wprowadźmy oznaczenie

$$\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(A) = \max\left\{\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(x) : x \in A\right\}.$$

Wówczas można odnotować następującą własność.

Własność 4.1. *1.* $\forall_{N\subset\mathbb{N}}\ \forall_{A\subset\mathbb{R}}\ \forall_{B\subset\mathbb{R}} \left(A \subset B \Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(A) \leqslant \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(B)\right)$,

2. $\forall_{N\subset\mathbb{N}}\ \forall_{A\subset\mathbb{R}}\ \forall_{B\subset\mathbb{R}} \left(B \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset \Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(A \cup B) = \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(A)\right)$.

Definicja 4.2. Niech $M \in \mathbb{N}$. Powiemy, że ciąg $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ złożony z dowolnych podzbiorów prostej spełnia warunek $(M*)$, gdy

$$\forall_{\substack{K\subset\mathbb{R},\\ 0\notin\overline{K}}}\ \forall_{\substack{N\subset\mathbb{N},\\ \operatorname{card}(N)<\infty}}\ \exists_{N^*\subset N} \left(\left(K \cap \bigcup_{n\in N} I_n = K \cap \bigcup_{n\in N^*} I_n\right) \wedge \left(\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}(K) \leqslant M\right)\right).$$

Udowodnimy teraz pewne warunki równoważne warunkowi $(M*)$.

Własność 4.3. *Niech $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie zbieżnym do zera ciągiem złożonym z dowolnych podzbiorów prostej takim, że zbiór $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ jest ograniczony. Następujące warunki są równoważne:*

1. *Ciąg $\mathcal{I}$ spełnia warunek $(M*)$ dla pewnego $M \in \mathbb{N}$;*
2. $\forall_{\substack{K\subset\mathbb{R},\\ 0\notin\overline{K}}}\ \forall_{N\subset\mathbb{N}}\ \exists_{\substack{N^*\subset N,\\ \operatorname{card}(N^*)<\infty}} \left((K \cap \bigcup_{n\in N} I_n = K \cap \bigcup_{n\in N^*} I_n) \wedge \left(\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}(K) \leqslant M\right)\right)$;
3. $\forall_{0<a<b}\ \forall_{N\subset\mathbb{N}}\ \exists_{\substack{N^*\subset N,\\ \operatorname{card}(N^*)<\infty}} \ ((([-b,-a] \cup [a,b]) \cap \bigcup_{n\in N} I_n =$ $(([-b,-a] \cup [a,b]) \cap \bigcup_{n\in N^*} I_n) \wedge \left(\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}([-b,-a] \cup [a,b]) \leqslant M\right)\right)$;
4. $\forall_{0<a<b}\ \forall_{\substack{N\subset\mathbb{N},\\ \operatorname{card}(N)<\infty}}\ \exists_{N^*\subset N} \left((([-b,-a] \cup [a,b]) \cap \bigcup_{n\in N} I_n =\right.$ $\left.([-b,-a] \cup [a,b]) \cap \bigcup_{n\in N^*} I_n \wedge \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}([-b,-a] \cup [a,b]) \leqslant M\right)$.

Dowód. 1⇒2 Niech $0 \notin \overline{K}$ i $N \subset \mathbb{N}$. Jeśli N jest zbiorem skończonym, to implikacja jest oczywista. Załóżmy więc, że zbiór N jest nieskończony. Skoro $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$, to $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\{0\} \cup I_n) = 0$. Z faktu, że $0 \notin \overline{K}$ wynika istnienie takiego skończonego zbioru $N_1 \subset N$, że

$$K \cap \bigcup_{n\in N} I_n = K \cap \bigcup_{n\in N_1} I_n.$$

Skoro ciąg $\mathcal{I}$ spełnia warunek $(M*)$, to istnieje skończony zbiór $N_1^* \subset N_1$ taki, że

$$K \cap \bigcup_{n\in N_1} I_n = K \cap \bigcup_{n\in N_1^*} I_n$$

oraz $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N_1^*}(K) \leqslant M$.

Implikacje 2⇒3 oraz 3⇒4 są oczywiste.

4⇒1 Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek 4. Niech $K \subset \mathbb{R}$ i $0 \notin \overline{K}$. Skoro zbiór $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ jest ograniczony, to istnieje $\alpha > 0$, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset [-\alpha, \alpha]$. Zatem istnieją takie $0 < a < b$, że $K \cap [-\alpha, \alpha] \subset [-b, -a] \cup [a, b]$. Niech $N \subset \mathbb{N}$ będzie zbiorem skończonym. Istnieje wówczas taki zbiór $N^* \subset N$, że

$$\begin{gathered}([-b, -a] \cup [a, b]) \cap \bigcup_{n\in N} I_n = \\ ([-b, -a] \cup [a, b]) \cap \bigcup_{n\in N^*} I_n.\end{gathered}$$

oraz $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}([-b, -a] \cup [a, b]) \leqslant M$. Zatem

$$K \cap \bigcup_{n\in N} I_n = K \cap \bigcup_{n\in N^*} I_n$$

i na mocy własności 4.1

$$\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}(K) = \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}(K \cap [-\alpha, \alpha]) \leqslant \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}([-b, -a] \cup [a, b]) \leqslant M.$$

□

Przykłady ciągów spełniających i nie spełniających warunku $(M*)$ podamy w dalszym ciągu pracy. Teraz przystąpimy do dowodu głównych rezultatów, poprzedzając je pewnymi lematami.

Niech $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}, \mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$. Oznaczmy

$$I(l) = \{i \in \mathbb{N} : K_l \cap I_i \neq \emptyset\},$$

$$I_m(l) = \{i \in \mathbb{N} : \lambda(I_i) \leqslant m \cdot \lambda(K_l \cap I_i)\},$$

gdzie l, m są dowolnymi liczbami naturalnymi.

Lemat 4.4. *Jeśli $m_0, l_0 \in \mathbb{N}$ i $I_{m_0}(l) \neq \emptyset$ dla każdego $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant l_0$ oraz $z_l = \min I_{m_0}(l)$ dla $l \geqslant l_0$, to $\lim_{l\to\infty} z_l = \infty$.*

Dowód. Ciąg $\{z_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony. W przeciwnym przypadku istnieje $z_{l^*} \in \mathbb{N}$ i ciąg rosnący $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $z_{l^*} \in I_{m_0}(l_n)$. Zatem

$$\lambda\left(I_{z_{l^*}}\right) \leqslant m_0 \cdot \lambda\left(K_{l_n} \cap I_{z_{l^*}}\right)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \lambda\left(K_{l_n}\right) = 0$, to otrzymujemy sprzeczność z faktem, że $\lambda\left(I_{z_{l^*}}\right) > 0$. Analogicznie pokazujemy, że każdy podciąg ciągu $\{z_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony, a więc $\lim_{l\to\infty} z_l = \infty$. □

Lemat 4.5. *Załóżmy, że $0 \notin I_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy ponadto, że istnieje $l_0 \in \mathbb{N}$, że $I(l) \neq \emptyset$ dla każdego $l \geqslant l_0$. Jeśli $z_l = \min I(l)$ dla $l \geqslant l_0$, to $\lim_{l\to\infty} z_l = \infty$.*

Dowód. Zauważmy, że ciąg $\{z_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony. Istotnie, w przeciwnym przypadku istnieje $z_{l^*} \in \mathbb{N}$ oraz ciąg $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $z_{l^*} = \min z(l_n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $z_{l^*} \in I\left(l_n\right)$ i $K_{l_n} \cap I_{z_{l^*}} \neq \emptyset$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $0 \notin I_{z_{l^*}}$, więc istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $(-\epsilon, \epsilon) \cap I_{z_{l^*}} = \emptyset$. Skoro $\operatorname{diam}\left(\{0\} \cup K_{l_n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, to w otoczeniu $(-\epsilon, \epsilon)$ leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{K_{l_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, co jest sprzeczne z faktem, że $K_{l_n} \cap I_{z_{l^*}} \neq \emptyset$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Analogicznie wnioskujemy, że każdy podciąg ciągu $\{z_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony, więc $\lim_{l\to\infty} z_l = \infty$. □

Lemat 4.6. *Niech $0 \notin K_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\{l_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnie ustalonym rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Dla dowolnego $n \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I\left(l_j\right)$ połóżmy $Z(n) = \{j \in \mathbb{N} : n \in I(l_j)\}$ i $z_n = \min Z(n)$. Załóżmy, że zbiór $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} I\left(l_j\right)$ jest nieskończony i ustawmy jego wyrazy w rosnący ciąg $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Wówczas $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \infty$.*

Dowód. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy założyć, że $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} I\left(l_j\right) = \mathbb{N}$. Zauważmy, że ciąg $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony. W przeciwnym przypadku istnieje $z_{n^*} \in \mathbb{N}$ oraz rosnący ciąg liczb naturalnych $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ taki, że $z_{n^*} = \min Z(n_j)$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Otrzymujemy wówczas, że $K_{l_{z_{n^*}}} \cap I_{n_j} \neq \emptyset$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Analogicznie jak w poprzednim lemacie wnioskujemy, że $K_{l_{z_{n^*}}} \cap I_{n_j} \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu $j \in \mathbb{N}$. Sprzeczność ta dowodzi, że ciąg $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony. Podobnie pokazujemy, że każdy podciąg ciągu $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony. Wnioskujemy stąd, że $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. □

Lemat 4.7. *Niech $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in N}$ będzie skończonym ciągiem zbiorów, którego każdy element jest skończoną sumą przedziałów domkniętych. Wówczas dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}$ zachodzi nierówność*

$$\sum_{n\in N} \lambda\left(A \cap I_n\right) \leqslant \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(A) \cdot \lambda\left(A \cap \bigcup_{n\in N} I_n\right)$$

.

Dowód. Niech $x_0, x_1, \ldots, x_{n_0}$ będą wszystkimi końcami przedziałów tworzących zbiory z ciągu $\mathcal{I}$, przy czym $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n_0}$. Zauważmy, że dla każdego $n \in N$, jeżeli $(x_{k-1}, x_k) \cap I_n \neq \emptyset$, to

$$(x_{k-1}, x_k) = (x_{k-1}, x_k) \cap I_n = (x_{k-1}, x_k) \cap \bigcup_{m\in N} I_m. \tag{13}$$

Pokażemy, że dla $k \in \mathbb{N}$ takich , że $(x_{k-1}, x_k) \cap \bigcup_{m\in N} I_m \neq \emptyset$ mamy

$$\operatorname{card}\left\{n \in N : (x_{k-1}, x_k) \cap I_n \cap A \neq \emptyset\right\} \leqslant \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(A).$$

Załóżmy, że $\{n \in N : (x_{k-1}, x_k) \cap I_n \cap A \neq \emptyset\} \neq \emptyset$. Istnieje więc $n' \in \{n \in \mathbb{N} : (x_{k-1}, x_k) \cap I_n \cap A \neq \emptyset\}$. Zatem istnieje $x' \in (x_{k-1}, x_k) \cap I_{n'} \cap A$, więc $x' \in I_{n'}$. Oznacza to, że $n' \in \{n \in N : x' \in I_n\}$. Zatem

$$\left\{n \in \mathbb{N} : (x_{k-1}, x_k) \cap I_n \cap A \neq \emptyset\right\} \subset \left\{n \in N : x' \in I_n\right\},$$

skąd

$$\operatorname{card}\left\{n \in N : (x_{k-1}, x_k) \cap I_n \cap A \neq \emptyset\right\} \leqslant \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(x').$$

Z uwagi na to, że $x' \in A$ otrzymujemy, że

$$\operatorname{card}\left\{n \in N : (x_{k-1}, x_k) \cap I_n \cap A \neq \emptyset\right\} \leqslant \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(A).$$

W konsekwencji, na mocy (13), dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subset \mathbb{R}$ mamy

$$\sum_{n\in N} \lambda\left(A \cap I_n \cap (x_{k-1}, x_k)\right) \leqslant \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(A)\lambda\left(A \cap (x_{k-1}, x_k)\right). \tag{14}$$

Z (13) i (14) oraz faktu, że miara zbioru skończonego wynosi zero, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(A)\lambda\left(A \cap \bigcup_{n\in N} I_n\right) &\geqslant \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(A)\lambda\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{n_0} (x_{k-1}, x_k) \cap \bigcup_{n\in N} I_n\right) \\
= \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(A) \sum_{k=1}^{n_0} \lambda\left(A \cap (x_{k-1}, x_k) \cap \bigcup_{n\in N} I_n\right) &= \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N}(A) \sum_{k=1}^{n_0} \lambda\left(A \cap (x_{k-1}, x_k) \cap I_n\right)
\end{aligned}$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n_0} \sum_{n \in N} \lambda\left(A \cap I_n \cap (x_{k-1}, x_k)\right) = \sum_{n \in N} \sum_{k=1}^{n_0} \lambda\left(A \cap I_n \cap (x_{k-1}, x_k)\right)$$

$$= \sum_{n \in N} \lambda\left(A \cap I_n \cap \bigcup_{k=1}^{n_0} (x_{k-1}, x_k)\right) = \sum_{n \in N} \lambda\left(A \cap I_n\right).$$

□

Możemy teraz sformułować i udowodnić główne wyniki tego rozdziału.

Twierdzenie 4.8. *Niech $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ i $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ oraz ciąg $\mathcal{I}$ spełnia warunek $(M*)$ dla pewnego $M \in \mathbb{N}$. Załóżmy też, że $0 \notin K_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli*

$$\lim_{m \to \infty} b_m = 0, \text{ gdzie } b_m = \limsup_{l \to \infty} \frac{\lambda\left(K_l \setminus \bigcup_{n \in I_m(l)} I_n\right)}{\lambda\left(K_l\right)},$$

to $\Phi_{\mathcal{I}}(A) \subset \Phi_{\mathcal{K}}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$.

Dowód. Niech $\lim_{m \to \infty} b_m = 0$. Pokażemy, $\Phi_{\mathcal{I}}(A) \subset \Phi_{\mathcal{K}}(A)$ że dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$.

Załóżmy, że $0 \in \Phi_{\mathcal{I}}(A)$. Pokażemy, że $0 \in \Phi_{\mathcal{K}}(A)$.

Niech $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$. Z założenia istnieje $m_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $m \geqslant m_0$ zachodzi nierówność $b_m < \frac{\epsilon}{2}$. Z określenia b_m mamy, że dla $m \geqslant m_0$

$$\limsup_{l \to \infty} \frac{\lambda\left(K_l \setminus \bigcup_{n \in I_m(l)} I_n\right)}{\lambda\left(K_l\right)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Zatem dla każdego $m \geqslant m_0$ istnieje takie $l_m \in \mathbb{N}$, że dla $l \geqslant l_m$

$$\frac{\lambda\left(K_l \setminus \bigcup_{n \in I_m(l)} I_n\right)}{\lambda\left(K_l\right)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

W szczególności, dla m_0 istnieje takie l_{m_0}, że dla $l \geqslant l_{m_0}$

$$\frac{\lambda\left(K_l \setminus \bigcup_{n \in I_{m_0}(l)} I_n\right)}{\lambda\left(K_l\right)} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{15}$$

Oznaczmy $l_0 = l_{m_0}$. Weźmy dowolne $0 < \beta < \frac{\epsilon}{2Mm_0}$, gdzie M występuje w warunku $(M*)$. Skoro $0 \in \Phi_{\mathcal{I}}(A)$, to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n \geqslant n_0$

$$\lambda\left(I_n \setminus A\right) < \beta\lambda\left(I_n\right).$$

Zauważmy, że zbiór $I_{m_0}(l)$ jest niepusty dla $l \geqslant l_0$. Z lematu 4.4 wynika, że $\lim_{l\to\infty} z_l = \infty$, gdzie $z_l = \min I_{m_0}(l)$ dla $l \geqslant l_0$. Zatem istnieje $l_1 \in \mathbb{N}$, że $I_{m_0}(l) \subset (n_0, +\infty)$ dla każdego $l \geqslant l_1$. Niech $l \geqslant \max\{l_0, l_1\}$. Połóżmy $N_l = I_{m_0}(l)$. Jako, że ciąg $\mathcal{I}$ spełnia warunek $(M*)$, to istnieje skończony podzbiór $N_l^* \subset N_l$ taki, że dla dowolnego $l \geqslant \max\{l_0, l_1\}$ mamy

$$K_l \cap \bigcup_{n\in N_l} I_n = K_l \cap \bigcup_{n\in N_l^*} I_n$$

oraz

$$\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N_l^*}(K_l) \leqslant M.$$

Wówczas, dla $l \geqslant \max\{l_0, l_1\}$, korzystając z lematu 4.7 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\lambda\left(\left(K_l \cap \bigcup_{n\in N_l} I_n\right) \setminus A\right) &= \lambda\left(\left(K_l \cap \bigcup_{n\in N_l^*} I_n\right) \setminus A\right) \\ &\leqslant \sum_{n\in N_l^*} \lambda(I_n \setminus A) \leqslant \sum_{n\in N_l^*} \beta\lambda(I_n) \leqslant \sum_{n\in N_l^*} \beta m_0 \lambda(K_l \cap I_n) \\ &\leqslant \beta m_0 \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N_l^*}(K_l)\lambda\left(K_l \cap \bigcup_{n\in N_l^*} I_n\right) \leqslant \beta m_0 M \lambda(K_l).\end{aligned}$$

Wynika stąd, że dla dowolnego $l \geqslant \max\{l_0, l_1\}$ mamy, że

$$\begin{aligned}\lambda(K_l \setminus A) &= \lambda\left(\left(\left(K_l \cap \bigcup_{n\in N_l} I_n\right) \cup \left(K_l \setminus \bigcup_{n\in N_l} I_n\right)\right) \setminus A\right) \\ &\leqslant \lambda\left(\left(K_l \cap \bigcup_{n\in N_l} I_n\right) \setminus A\right) + \lambda\left(K_l \setminus \bigcup_{n\in N_l} I_n\right) \leqslant \\ &\qquad M m_0 \beta \lambda(K_l) + \lambda\left(K_l \setminus \bigcup_{n\in I_{m_0}(l)} I_n\right).\end{aligned}$$

Ostatecznie, dla $l \geqslant \max\{l_0, l_1\}$, na mocy nierówności (15) i powyższego oszacowania, wnioskujemy, że

$$\frac{\lambda(K_l \setminus A)}{\lambda(K_l)} \leqslant M m_0 \beta + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Z dowolności $\epsilon > 0$ otrzymujemy, że $0 \in \Phi_{\mathcal{K}}(A)$.

$\square$

Z powyższego twierdzenia możemy wywnioskować następujące twierdzenie.

Wniosek 4.9. *Niech* $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ *i* $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ *oraz ciąg* $\mathcal{I}$ *spełnia warunek* $(M*)$ *dla pewnego* $M \in \mathbb{N}$*. Niech* $\mathcal{K}' = \{K'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ *będzie takim ciągiem zbiorów, że* $0 \notin K'_n$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $\Phi_{\mathcal{K}'} = \Phi_{\mathcal{K}}$*. Jeśli*

$$\lim_{m\to\infty} b'_m = 0, \text{ gdzie } b'_m = \limsup_{l\to\infty} \frac{\lambda\left(K'_l \setminus \bigcup_{n\in I_m(l)} I_n\right)}{\lambda\left(K'_l\right)},$$

to $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$*.*

Dowód. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że $\Phi_{\mathcal{I}}(A) \subset \Phi_{\mathcal{K}'}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$. Ponieważ $\Phi_{\mathcal{K}'}(A) = \Phi_{\mathcal{K}}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$, to $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. □

Twierdzenie 4.10. *Niech* $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ *i* $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$*. Jeśli* $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$*, to*

$$\lim_{m\to\infty} b_m = 0, \text{ gdzie } b_m = \limsup_{l\to\infty} \frac{\lambda\left(K_l \setminus \bigcup_{n\in I_m(l)} I_n\right)}{\lambda\left(K_l\right)}.$$

Dowód. Na mocy twierdzenia 2.11 istnieje taki ciąg zbiorów $\mathcal{K} = \{K'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$, że $K'_n \subset K_n$, $0 \notin K'_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(K_n\setminus K'_n)}{\lambda(K_n)} = 0$ oraz $\Phi_{\mathcal{K}'}(A) = \Phi_{\mathcal{K}}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$. Pokażemy, że

$$\lim_{m\to\infty} b'_m = 0, \text{ gdzie } b'_m = \limsup_{l\to\infty} \frac{\lambda\left(K'_l \setminus \bigcup_{n\in I_m(l)} I_n\right)}{\lambda\left(K'_l\right)}.$$

Zauważmy, że istnieje takie $l_0 \in \mathbb{N}$, że $I'(l) = \{i \in \mathbb{N} : K'_l \cap I_i \neq \emptyset\} \neq \emptyset$ dla każdego $l \geqslant l_0$. Istotnie, w przeciwnym przypadku istnieje ciąg $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$I'(l_n) = \left\{i \in \mathbb{N} : K'_{l_n} \cap I_i \neq \emptyset\right\} = \emptyset.$$

Kładąc $A = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Int} I_n$ otrzymujemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\frac{\lambda\left(A \cap I_{l_n}\right)}{\lambda\left(I_{l_n}\right)} = 1,$$

więc $0 \in \Phi_{\mathcal{I}}(A)$. Wynika stąd, że $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$.

Jednocześnie, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{\lambda\left(A \cap K'_{l_n}\right)}{\lambda\left(K'_{l_n}\right)} = 0,$$

więc $0 \notin \Phi_{\mathcal{K}'}(A) = \Phi_{\mathcal{K}}(A)$. Oznacza to, że $A \notin \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że $I'(l) \neq \emptyset$ dla każdego $l \geqslant l_0$.

Możemy zatem bez zmniejszania ogólności rozważań założyć, że $I'(l) \neq \emptyset$ dla każdego $l \in \mathbb{N}$.

Załóżmy, że warunek $\lim_{m\to\infty} b'_m = 0$ nie jest spełniony. Stąd wynika, że $\limsup_{m\to\infty} b'_m = b > 0$. Niech $\frac{b}{4} > \epsilon > 0$. Wówczas istnieje ciąg $\left\{b'_{m_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ taki, że $b'_{m_j} > \frac{b}{2}$ oraz $m_j > 2^{j+1}$ dla $j \in \mathbb{N}$. Skoro $b'_{m_j} > \frac{b}{2}$, to

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\lambda\left(K'_{l_j} \setminus \bigcup_{n\in I_{m_j}(l_j)} I_n\right)}{\lambda\left(K'_{l_j}\right)} > \frac{b}{2},$$

więc dla każdego $j \in \mathbb{N}$ można wskazać takie $l_j \in \mathbb{N}$, że

$$\frac{\lambda\left(K'_{l_j} \setminus \bigcup_{n\in I_{m_j}(l_j)} I_n\right)}{\lambda\left(K'_{l_j}\right)} \geqslant \frac{b}{4}$$

oraz jednocześnie

$$\frac{\lambda\left(K_{l_j} \setminus K'_{l_j}\right)}{\lambda\left(K_{l_j}\right)} < \epsilon.$$

Wybierając ewentualnie podciąg, możemy założyć, że ciąg $\{l_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ jest rosnący oraz zbiory ciągu $\left\{K'_{l_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ są parami rozłączne. Jest to możliwe, ponieważ $0 \notin K'_n$ i $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\{0\} \cup K'_n) = 0$.

Jeśli $n \in I'(l_j) \setminus I_{m_j}(l_j)$, to z określenia zbioru $I_{m_j}(l_j)$ otrzymujemy, że

$$\lambda\left(K_{l_j} \cap I_n\right) \leqslant \frac{1}{m_j}\lambda(I_i) \leqslant \frac{1}{2^{j+1}}\lambda(I_i).$$

Niech $B = \{0\} \cup \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$, gdzie $B_j = K'_{l_j} \setminus \bigcup_{n\in I_{m_j}(l_j)} \operatorname{Int} I_n$.

Zauważmy, że zbiór B jest domknięty w topologii naturalnej. Istotnie, niech ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Jeśli nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ należy do zbioru B_{j_0}, to z faktu, że zbiór B_{j_0} jest domknięty otrzymujemy, że $x_0 \in B_{j_0} \subset B$. Podobnie, jeśli nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest równych 0, to $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \in B$.

Załóżmy teraz, że każdy ze zbiorów B_j zawiera co najwyżej skończoną liczbę wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Skoro $\lim_{j\to\infty} \operatorname{diam}(\{0\}\cup B_j) = 0$, to w dowolnym otoczeniu zera znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, skąd wnioskujemy, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in B$.

Zauważmy ponadto, że $0 \notin \Phi_{\mathcal{K}}(\mathbb{R} \setminus B)$. Istotnie,

$$\frac{\lambda\left(B \cap K_{l_j}\right)}{\lambda\left(K_{l_j}\right)} > \frac{\lambda\left(B \cap K'_{l_j}\right)}{\lambda\left(K_{l_j}\right)} =$$

$$\frac{\lambda\left(B \cap \left(K_{l_j} \setminus \left(K_{l_j} \setminus K'_{l_j}\right)\right)\right)}{\lambda\left(K_{l_j}\right)} \geqslant \frac{\lambda\left(B \cap K_{l_j}\right)}{\lambda\left(K_{l_j}\right)} - \frac{\lambda\left(K_{l_j} \setminus K'_{l_j}\right)}{\lambda\left(K_{l_j}\right)} =$$

$$\frac{\lambda\left(K_{l_j} \setminus \bigcup_{n \in I_{m_j}(l_j)} I_n\right)}{\lambda\left(K_{l_j}\right)} - \frac{\lambda\left(K_{l_j} \setminus K'_{l_j}\right)}{\lambda\left(K_{l_j}\right)} \geqslant \frac{b}{4} - \epsilon > 0.$$

Pokażemy teraz, że $\{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus B) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Ponieważ zbiór $\mathbb{R} \setminus B$ jest otwarty w topologii naturalnej, to wystarczy pokazać, że $0 \in \Phi_{\mathcal{I}}(\mathbb{R} \setminus B)$.

Niech $\left\{I_{n_j}\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym podciągiem ciągu $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Pokażemy, że istnieje taki podciąg $\left\{I_{n_{j_s}}\right\}_{s \in \mathbb{N}}$ ciągu $\left\{I_{n_j}\right\}_{j \in \mathbb{N}}$, że

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\lambda\left(B \cap I_{n_{j_s}}\right)}{\lambda\left(I_{n_{j_s}}\right)} = 0.$$

Nie zmniejszając ogólności rozważań pokażemy, że istnieje taki podciąg $\{I_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ciągu $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, że

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\lambda(B \cap I_{n_k})}{\lambda(I_{n_k})} = 0.$$

Rozważmy zbiór

$$T = \left\{n \in \mathbb{N} : n \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left(I'(l_j) \setminus I_{m_j}(l_j)\right)\right\}.$$

Załóżmy, że zbiór T jest skończony. Załóżmy, że $n \notin T$, a więc $n \notin \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left(I'(l_j) \setminus I_{m_j}(l_j)\right)$. Wówczas $\mathrm{Int} I_n \cap B = \emptyset$. Istotnie, załóżmy, że istnieje $j_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathrm{Int} I_n \cap B_{j_0} \neq \emptyset$. Skoro $n \notin I'(l_{j_0}) \setminus I_{m_{j_0}}(l_{j_0})$, to $n \notin I'(l_{j_0})$ lub $n \in I_{m_{j_0}}(l_{j_0})$. W pierwszym przypadku mamy, że $I_n \cap K'_{l_{j_0}} = \emptyset$, więc $\mathrm{Int} I_n \cap B_{j_0} = \emptyset$, zaś w drugim otrzymujemy, że $\mathrm{Int} I_n \cap B_{j_0} = \emptyset$, co prowadzi do sprzeczności.

Zatem istnieje podciąg $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ taki, że $n_k \notin T$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. W konsekwencji istnieje podciąg $\{I_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ciągu $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\lambda(B \cap I_{n_k})}{\lambda(I_{n_k})} = 0.$$

Załóżmy teraz, że zbiór T jest nieskończony. Niech $T = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. Połóżmy

$$Z(k) = \left\{j \in \mathbb{N} : n_k \in I'(l_j) \setminus I_{m_j}(l_j)\right\}$$

oraz $z_k = \min Z(k)$. Ponieważ

$$Z(k) \subset \{j \in \mathbb{N} : n_k \in I'(l_j)\},$$

to

$$z_k \geqslant \min \{j \in \mathbb{N} : n_k \in I'(l_j)\}.$$

Z lematu 4.6 wynika, że $\lim_{k\to\infty} z_k = +\infty$.

Ponadto

$$\lambda(B \cap I_{n_k}) = \lambda\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (B_j \cap I_{n_k})\right) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{j\notin Z(k)} (B_j \cap I_{n_k})\right) + \lambda\left(\bigcup_{j\in Z(k)} (B_j \cap I_{n_k})\right)$$

Ponieważ dla $j \notin Z(k)$ mamy, że $\lambda(B_j \cap I_{n_k}) = 0$, więc $\lambda\left(\bigcup_{j\notin Z(k)} (B_j \cap I_{n_k})\right) = 0$. Ponadto

$$\lambda\left(\bigcup_{j\in Z(k)} (B_j \cap I_{n_k})\right) \leqslant \sum_{j\in Z(k)} \left(K'_{l_j} \cap I_{n_k}\right) \leqslant \sum_{j\geqslant z_k} \frac{1}{m_j}(I_{n_k}) \leqslant \sum_{j\geqslant z_k} \frac{1}{2^{m_j}}\lambda(I_{n_k}) \leqslant \lambda(I_{n_k}) \sum_{j\geqslant z_k} \frac{1}{2^{j+1}} = \lambda(I_{n_k}) \cdot \frac{1}{2^{z_k}}.$$

Jako, że $\lim_{k\to\infty} z_k = +\infty$, to $\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda\left(B\cap I_{n_k}\right)}{\lambda\left(I_{n_k}\right)} = 0$.

Zatem ostatecznie wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(B \cap I_n)}{\lambda(I_n)} = 0.$$

Oznacza to, że $0 \in \Phi_{\mathcal{I}}(\mathbb{R} \setminus B)$, a więc $\mathbb{R} \setminus B \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $\lim_{m\to\infty} b'_m = 0$. Zauważmy, że

$$\frac{\lambda\left(K_l \setminus \bigcup_{n\in I_m(l)} I_n\right)}{\lambda(K_l)} \leqslant \frac{\lambda(K_l \setminus K'_l)}{\lambda(K_l)} + \frac{\lambda\left(K'_l \setminus \bigcup_{n\in I_m(l)} I_n\right)}{\lambda(K_l)} \leqslant \frac{\lambda(K_l \setminus K'_l)}{\lambda(K_l)} + \frac{\lambda\left(K'_l \setminus \bigcup_{n\in I_m(l)} I_n\right)}{\lambda(K'_l)}.$$

Otrzymujemy stąd, że $b_m \leqslant b'_m$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Zatem $\lim_{m\to\infty} b_m = 0$.

$\square$

5. Dyskusja warunku $(M*)$

W rozdziale tym przedstawimy dyskusję warunku $(M*)$. W szczególności podamy przykłady i własności ciągów spełniających i nie spełniających warunku $(M*)$. Najpierw pokażemy, że każdy ciąg $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ przedziałów domkniętych spełnia warunek $(2*)$. Dowód poprzedzimy lematami.

Lemat 5.1. *Niech J_1, J_2, J_3 będą takimi przedziałami domkniętymi, że $J_1 \cap J_2 \cap J_3 \neq \emptyset$. Istnieją wówczas wskaźniki $i, j \in \{1,2,3\}$ takie, że $J_i \cup J_j = J_1 \cup J_2 \cup J_3$.*

Dowód. Niech $x_{\min} = \min(J_1 \cup J_2 \cup J_3)$ oraz $x_{\max} = \max(J_1 \cup J_2 \cup J_3)$. Z założenia wynika, że $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = [x_{\min}, x_{\max}]$. Niech i, j będą tak wybrane, że $x_{\min} = \min J_i$ oraz $x_{\max} = \min J_j$. Wówczas, wnioskujemy, że

$$J_i \cup J_j = [x_{\min}, x_{\max}] = J_1 \cup J_2 \cup J_3.$$

□

Lemat 5.2. *Niech $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in N}$ będzie skończonym ciągiem przedziałów domkniętych. Wówczas istnieje zbiór $\widetilde{N} \subset N$ taki, że podciąg $\mathcal{J}' = \{J_n\}_{n\in\widetilde{N}}$ ciągu $\mathcal{J}$ ma następujące własności:*

1. $\bigcup_{n\in\widetilde{N}} J_n = \bigcup_{n\in N} J_n$,
2. $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}^{\widetilde{N}} \leqslant 2$, *gdzie* $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}^{\widetilde{N}} = \max\left\{\mathcal{M}_{\mathcal{J}}^{\widetilde{N}}(x) : x \in \mathbb{R}\right\}$.

Dowód. Jeśli $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}^{\widetilde{N}} < 3$, to kładąc $\widetilde{N} = N$ otrzymujemy tezę. Załóżmy, że $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}^{N} \geqslant 3$. Istnieje wówczas $x \in \bigcup_{n\in N} J_n$ oraz przedziały $J_{n_1}, J_{n_2}, J_{n_3} \in \mathcal{J}$ takie, że $x \in J_{n_1} \cap J_{n_2} \cap J_{n_3}$. Na mocy lematu 5.1 istnieją $i, j \in \{1,2,3\}$ takie, że $J_{n_i} \cup J_{n_j} = J_{n_1} \cup J_{n_2} \cup J_{n_3}$. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy przyjąć, że $i = 1, j = 2$. Niech $\mathcal{J}^1 = \{J_s\}_{s\in N^1}$ będzie podciągiem ciągu $\mathcal{J}$ złożonym ze wszystkich jego wyrazów poza J_{n_3}. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\in N} J_n &= \left(\bigcup_{n\in N} J_n \setminus (J_{n_1} \cup J_{n_2} \cup J_{n_3})\right) \cup (J_{n_1} \cup J_{n_2} \cup J_{n_3}) \\ &= \bigcup_{n\in N} J_n \setminus ((J_{n_1} \cup J_{n_2} \cup J_{n_3}) \cup (J_{n_1} \cup J_{n_2})) = \bigcup_{s\in N^1} J_s.\end{aligned}$$

Jeżeli $\mathcal{M}_{\mathcal{J}^1}^{N^1} \leqslant 2$, to teza zachodzi dla $\mathcal{J}' = \mathcal{J}^1$ i $\widetilde{N} = N^1$. W przeciwnym przypadku, postępując jak powyżej, tworzymy ciąg $\mathcal{J}^2 = \{J_l\}_{l\in N^2}$ poprzez usunięcie jednego z przedziałów z ciągu $\mathcal{J}^1$ tak, aby

$$\bigcup_{l\in N^2} J_l = \bigcup_{s\in N^1} J_s = \bigcup_{n\in N} J_n.$$

Jeśli $\mathcal{M}_{\mathcal{J}^2}^{N^2} \leqslant 2$, to teza lematu zachodzi dla $\mathcal{J}' = \mathcal{J}^2$ i $\widetilde{N} = N^2$. W przeciwnym razie powtarzamy powyższe rozumowanie. Procedura musi skończyć się po skończonej liczbie kroków, bo ciąg $\mathcal{J}$ jest skończony. Otrzymujemy więc podciąg $\mathcal{J}^k = \{J_m\}_{m\in N^k}$ ciągu $\mathcal{J}$ taki, że

$$\bigcup_{m\in N^k} J_m = \bigcup_{n\in N} J_n$$

oraz $\mathcal{M}_{\mathcal{J}^k}^{N^k} \leqslant 2$, więc teza zachodzi dla $\mathcal{J}' = \mathcal{J}^k$ i $\widetilde{N} = N^k$. □

Własność 5.3. *1. Dowolny ciąg $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ parami rozłącznych podzbiorów $\mathbb{R}$ spełnia warunek* (1∗)*.*

2. Dowolny wstępujący (zstępujący) ciąg $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podzbiorów $\mathbb{R}$ spełnia warunek (1∗)*.*

3. Każdy ciąg $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ przedziałów domkniętych spełnia warunek (2∗)*.*

Dowód. 1. Niech $N \subset \mathbb{N}$ będzie dowolnym zbiorem skończonym. Wówczas dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy, że $\operatorname{card}\{n \in N : x \in I_n\} \leqslant 1$, skąd wynika, że ciąg $\mathcal{I}$ spełnia warunek (1∗).

2. Niech $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie wstępującym ciągiem podzbiorów $\mathbb{R}$, $N \subset \mathbb{N}$ dowolnym zbiorem skończonym, zaś $K \subset \mathbb{R}$ dowolnym zbiorem takim, że $0 \notin \overline{K}$. Niech $N^* = \{\max N\}$. Wówczas

$$K \cap \bigcup_{n\in N} I_n = K \cap \bigcup_{n\in N^*} I_n$$

oraz $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}(x) \leqslant 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wynika stąd, że ciąg $\mathcal{I}$ spełnia warunek (1∗). Analogicznie, biorąc pod uwagę $N^* = \{\min N\}$, pokazujemy, że dowolny zstępujący ciąg przedziałów $\mathbb{R}$ spełnia warunek (1∗).

3. Niech $K \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym zbiorem takim, że $0 \notin \overline{K}$, zaś $N \subset \mathbb{N}$ dowolnym zbiorem skończonym. Na mocy lematu 5.2 istnieje zbiór $\widetilde{N} \subset N$ taki, że $\bigcup_{n\in\widetilde{N}} J_n = \bigcup_{n\in N} J_n$ i $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}^{\widetilde{N}} \leqslant 2$. Zatem przyjmując $N^* = \widetilde{N}$ otrzymujemy, że

$$K \cap \bigcup_{n\in N} J_n = K \cap \bigcup_{n\in N^*} J_n.$$

Ponadto $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}^{N^*} \leqslant 2$. Zatem ciąg $\mathcal{J}$ spełnia warunek (2∗). □

Pokażemy teraz, że dla każdej liczby $M \in \mathbb{N}$ istnieje ciąg zbiorów, który spełnia warunek $(M*)$, ale nie spełnia tego warunku dla żadnej liczby naturalnej mniejszej niż M.

Własność 5.4. *Dla dowolnego $M \in \mathbb{N}$, $M \geqslant 2$ istnieje ciąg zbiorów $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ oraz $\mathcal{I}$ spełniający warunek $(M*)$ i nie spełniający warunku $((M-1)*)$.*

Dowód. Określmy ciąg $\mathcal{J}^- = \{J_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie J_n^- jest przedziałem domkniętym i $J_n^- \subset (-\infty, 0)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Niech ponadto ciąg $\mathcal{J}^-$ będzie zbieżny do zera, a jego wyrazy będą parami rozłączne. Analogicznie określamy zbieżny do zera ciąg $\mathcal{J}^+ = \{J_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $J_n^+ \subset (0, +\infty)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i wyrazy ciągu $\mathcal{J}^+$ są parami rozłączne. W każdym przedziale J_n^- zdefiniujmy M przedziałów domkniętych parami rozłącznych J_n^i dla $1 \leqslant i \leqslant M$. Położmy $I_n^i = J_n^i \cup J_n^+$ dla $1 \leqslant i \leqslant M$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Niech $\mathcal{K} = \{K_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem złożonym ze wszystkich zbiorów $\{I_n^i : n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant M\}$. Zauważmy, że $\mathcal{K} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ oraz $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\mathbb{N}}(x) \leqslant M$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Zatem wnioskujemy, że ciąg $\mathcal{K}$ spełnia warunek $(M*)$.

Pokażemy teraz, że ciąg $\mathcal{K}$ nie spełnia warunku $((M-1)*)$. Niech $K = \bigcup_{i=1}^{M} I_{n_0}^i$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$ jest ustalone. Niech $N \subset \mathbb{N}$ będzie takim zbiorem skończonym, że

$$K \cap \bigcup_{l\in\mathbb{N}} K_l = K.$$

Niech $N^* \subset N$ będzie taki, że

$$K = K \cap \bigcup_{l\in N^*} K_l.$$

Z powyższej równości i z postaci zbiorów ciągu $\mathcal{K}$ wynika, że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant M$ istnieje takie $l \in N^*$, że $K_l = I_{n_0}^i$. Zatem dla dowolnego $x \in J_{n_0}^+$ otrzymujemy, że $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^N(x) = M > M - 1$. Oznacza to, że ciąg $\mathcal{K}$ nie spełnia warunku $((M-1)*)$. $\square$

Podamy teraz przykład ciągu $\mathcal{K} \in \mathcal{I}_{<\omega}$, który nie spełnia warunku $(M*)$ dla żadnej liczby $M \in \mathbb{N}$.

Przykład 5.5. Rozważmy ciąg $\mathcal{K} = \{K_l\}_{l\in\mathbb{N}}$, którego wyrazami są wszystkie zbiory postaci

$$I_n^k := \left[-\frac{1}{n} + \frac{k-1}{n^2(n+1)}, -\frac{1}{n} + \frac{k}{n^2(n+1)}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right],$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $1 \leqslant k \leqslant n$. Wówczas $\mathcal{K} \in \mathcal{I}_{<\omega}$.

Pokażemy, że ciąg $\mathcal{K}$ nie spełnia warunku $(M*)$ dla żadnego $M \in \mathbb{N}$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i połóżmy

$$K = \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right].$$

Wówczas $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=1}^{n} I_n^k = K$. Niech $N \subset \mathbb{N}$ będzie dowolnym skończonym zbiorem takim, że

$$K \cap \bigcup_{l\in\mathbb{N}} K_l = K.$$

Załóżmy, że $N^* \subset N$ jest takim zbiorem, że

$$K \cap \bigcup_{l\in N} K_l = K \cap \bigcup_{l\in N^*} K_l.$$

Wynika stąd, że każdy ze zbiorów I_n^k, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $1 \leqslant k \leqslant n$, należy do podciągu $\{K_l : l \in N^*\}$. Skoro $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \subset I_n^k$ dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$, to dla każdego $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \subset I_n^k$ mamy $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{N^*}(x) \geqslant n$ i w konsekwencji $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{N^*}(K) \geqslant n$. Oznacza to, że ciąg $\mathcal{K}$ nie spełnia warunku $((n-1)*)$. Z dowolności $n \in \mathbb{N}$ mamy, że ciąg $\mathcal{K}$ nie spełnia warunku $(M*)$ dla żadnego $M \in \mathbb{N}$.

Definicja 5.6. Niech $M \in \mathbb{N}$. Powiemy, że ciąg $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ złożony z dowolnych podzbiorów prostej, spełnia prawostronny warunek $(M*)$, gdy

$$\forall_{K\subset(0,+\infty), 0\notin\overline{K}}\ \forall_{N\subset\mathbb{N}, \mathrm{card}(N)<\infty}\ \exists_{N^*\subset N} \left(K \cap \bigcup_{n\in N} I_n = K \cap \bigcup_{n\in N^*} I_n \wedge \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}(K) \leqslant M\right).$$

Powiemy, że ciąg $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia lewostronny warunek $(M*)$, gdy

$$\forall_{K\subset(-\infty,0), 0\notin\overline{K}}\ \forall_{N\subset\mathbb{N}, \mathrm{card}(N)<\infty}\ \exists_{N^*\subset N} \left(K \cap \bigcup_{n\in N} I_n = K \cap \bigcup_{n\in N^*} I_n \wedge \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}(K) \leqslant M\right).$$

Uwaga 5.7. Bezpośrednio z definicji wynika, że jeśli ciąg $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek $(M*)$, to spełnia prawostronny i lewostronny warunek $(M*)$.

Analogicznie do własności 4.3 możemy udowodnić następującą własność.

Własność 5.8. *Niech $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zbiorów zbieżnym do zera takim, że zbiór $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ jest ograniczony. Następujące warunki są równoważne:*

1. *Ciąg $\mathcal{I}$ spełnia prawostronny warunek $(M*)$;*
2. $\forall_{\substack{K\subset(0,+\infty),\\ 0\notin\overline{K}}}\ \forall_{\substack{N\subset\mathbb{N},\\ \mathrm{card}(N)<\infty}}\ \exists_{N^*\subset N} \left(\left(K\cap\bigcup_{n\in N} I_n = K\cap\bigcup_{n\in N^*} I_n\right) \wedge \left(\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}(K) \leqslant M\right)\right);$

3. $\forall_{0<a<b} \forall_{\substack{N\subset\mathbb{N},\\ \mathrm{card}(N)<\infty}} \exists_{N^*\subset N} \left(\left([a,b]\cap \bigcup_{n\in N} I_n = [a,b]\cap \bigcup_{n\in N^*} I_n\right) \wedge \left(\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}([a,b]) \leqslant M\right)\right)$;

4. $\forall_{0<a<b} \forall_{\substack{N\subset\mathbb{N},\\ \mathrm{card}(N)<\infty}} \exists_{N^*\subset N} \left([a,b]\cap \bigcup_{n\in N} I_n = [a,b]\cap \bigcup_{n\in N^*} I_n \wedge \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{N^*}([a,b]) \leqslant M\right)$.

Uwaga 5.9. Można sformułować własność analogiczną do powyższej dla ciągów spełniających lewostronny warunek $(M*)$.

Przykład 5.10. Pokażemy, że ciąg $\mathcal{K}$ określony w przykładzie 5.5 spełnia prawostronny warunek $(2*)$. Niech $0 < a < b$ i $N \subset \mathbb{N}$ będzie zbiorem skończonym. Z definicji ciągu $\mathcal{K}$ wynika, że dla każdego $l \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $n_l \in \mathbb{N}$ taka, że $J_{n_l} \subset K_l$, gdzie $J_{n_l} = \left[\frac{1}{n_l+1}, \frac{1}{n_l}\right]$. Niech $\mathcal{R} \subset N \times N$ będzie relacją równoważności określoną następująco:

$$\forall_{l'\in N} \forall_{l''\in N}\ l' \,\mathcal{R}\, l'' \Leftrightarrow J_{n_{l'}} = J_{n_{l''}}.$$

Niech N^* będzie dowolnym selektorem tej relacji. Wówczas

$$[a,b]\cap \bigcup_{l\in N} K_l = [a,b]\cap \bigcup_{l\in N^*} K_l.$$

oraz $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{N^*}([a,b]) \leqslant 2$.

Analogicznie można pokazać, że ciąg $\mathcal{K}$ spełnia lewostronny warunek $(2*)$, my jednak zaprezentujemy alternatywny dowód.

Pokażemy, że ciąg $\mathcal{K}$ spełnia warunek 3. własności 5.8 w kontekście lewostronnego warunku $(M*)$. Niech $a < b < 0$ i $N \subset \mathbb{N}$ będzie zbiorem skończonym. Dla $l \in \mathbb{N}$ połóżmy $K'_l = K_l \setminus J_{n_l}$, gdzie J_{n_l} jest określone jak wyżej i niech $\mathcal{K}' = \{K'_l\}_{l\in\mathbb{N}}$. Skoro $b < 0$, to

$$[a,b]\cap \bigcup_{l\in N} K_l = [a,b]\cap \bigcup_{l\in N} K'_l.$$

Ciąg $\mathcal{K}'$, jako ciąg przedziałów domkniętych, spełnia warunek $(2*)$, zatem istnieje zbiór $N^* \subset N$, że

$$[a,b]\cap \bigcup_{l\in N} K'_l = [a,b]\cap \bigcup_{l\in N^*} K'_l$$

i $\mathcal{M}_{\mathcal{K}'}^{N^*}([a,b]) \leqslant 2$. Ponieważ

$$[a,b]\cap \bigcup_{l\in N^*} K'_l = [a,b]\cap \bigcup_{l\in N^*} K_l$$

oraz dla każdego $x \in [a,b]$ i $l \in N^*$ mamy, że $x \in K_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in K'_l$, więc $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{N^*}([a,b]) = \mathcal{M}_{\mathcal{K}'}^{N^*}([a,b]) \leqslant 2$.

Przedstawimy teraz następujący lemat.

Lemat 5.11. *Niech $\mathcal{I} = \{I_n\} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ będzie ciągiem zbiorów takim, że $I_n = I_n^1 \cup I_n^2$ oraz $\lambda(I_n^1 \cap I_n^2) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(I_n^1)}{\lambda(I_n)} = \alpha \ i \ \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(I_n^2)}{\lambda(I_n)} = \beta,$$

przy czym $\alpha > 0, \beta > 0$ oraz $\alpha + \beta = 1$. Niech ciąg $\mathcal{J} = \{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ będzie określony następująco:

$$J_1 = I_1^1, J_2 = I_1^2, J_3 = I_2^1, J_4 = I_2^2, J_5 = I_3^1, J_6 = I_3^2, \dots$$

Wówczas $\Phi_{\mathcal{I}}(A) = \Phi_{\mathcal{J}}(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{L}$.

Dowód. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy, że

$$\frac{\lambda(A \cap I_n)}{\lambda(I_n)} = \frac{\lambda(A \cap J_{2n-1}) + \lambda(A \cap J_{2n})}{\lambda(I_n)} =$$
$$\frac{\lambda(A \cap J_{2n-1})}{\lambda(J_{2n-1})} \cdot \frac{\lambda(J_{2n-1})}{\lambda(I_n)} + \frac{\lambda(A \cap J_{2n})}{\lambda(J_{2n})} \cdot \frac{\lambda(J_{2n})}{\lambda(I_n)}.$$

Załóżmy, że 0 jest punktem $\mathcal{J}$- gęstości mierzalnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A \cap J_n)}{\lambda(J_n)} = 1.$$

Stąd i z powyższych równości oraz założenia wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A \cap I_n)}{\lambda(I_n)} = \alpha + \beta = 1,$$

a więc 0 jest punktem $\mathcal{I}$ - gęstości zbioru A.

Załóżmy teraz, że 0 nie jest punktem $\mathcal{J}$-gęstości zbioru mierzalnego $A \subset \mathbb{R}$. Oznacza to, że istnieje liczba $a < 1$ i ciąg $\{k_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left(A \cap J_{k_j}\right)}{\lambda\left(J_{k_j}\right)} = a.$$

Nie zmniejszając ogólności rozważań, możemy założyć, że dla każdego $j \in \mathbb{N}$ istnieje takie $n_{k_j} \in \mathbb{N}$, że $J_{k_j} = I^1_{n_{k_j}}$. Wówczas dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{\lambda\left(A \cap I^1_{n_{k_j}}\right)}{\lambda\left(I^1_{n_{k_j}}\right)} = \frac{\lambda\left(A \cap I_{n_{k_j}}\right)}{\lambda\left(I_{n_{k_j}}\right)} + \frac{\lambda\left(A \cap I^2_{n_{k_j}}\right)}{\lambda\left(I^2_{n_{k_j}}\right)} = \frac{\lambda\left(A \cap J_{k_j}\right)\lambda\left(I^1_{n_{k_j}}\right)}{\lambda\left(J_{k_j}\right)\lambda\left(I_{n_{k_j}}\right)} + \frac{\lambda\left(A \cap I^2_{n_{k_j}}\right)}{\lambda\left(I^2_{n_{k_j}}\right)}.$$

Wynika stąd, że

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\lambda\left(A \cap I^1_{n_{k_j}}\right)}{\lambda\left(I^1_{n_{k_j}}\right)} \leqslant \alpha + a\beta < 1,$$

więc 0 nie jest punktem $\mathcal{I}$-gęstości zbioru A. Analogicznie wnioskujemy, gdy załóżymmy, że dla każdego $j \in \mathbb{N}$ istnieje takie $n_{k_j} \in \mathbb{N}$, że $J_{k_j} = I^2_{n_{k_j}}$. Pokazaliśmy więc, że $\Phi_{\mathcal{I}}(A) = \Phi_{\mathcal{L}}(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{J}$. $\square$

Przykład 5.12. Podamy teraz przykład ciągu $\mathcal{K} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ nie spełniającego prawostronnego warunku $(M*)$ dla żadnej liczby $M \in \mathbb{N}$. Niech ciąg $\mathcal{I} = \left\{I^k_n\right\}$ będzie określony następująco:

$$I^k_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n\,(n+1)^2}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1} + \frac{k-1}{n\,(n+1)^2}, \frac{1}{n+1} + \frac{k}{n\,(n+1)^2}\right],$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $k = 2, \ldots, n+1$. Niech $\mathcal{K} = \{K_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ oznacza ciąg złożony ze wszystkich wyrazów ciągu $\mathcal{I}$. Z postaci zbiorów będących wyrazami ciągu $\mathcal{I}$ można wywnioskować, że $\mathcal{K} \in \mathcal{I}_{<\omega}$.

Niech $M \in \mathbb{N}$. Niech $K = \left[\frac{1}{M+2}, \frac{1}{M+1}\right]$, zaś $N \subset \mathbb{N}$ będzie takim zbiorem skończonym, że $\bigcup_{l\in N} K_l = \bigcup_{k=2}^{k=M+2} I^k_{M+1}$. Wówczas

$$\begin{aligned} K \cap \bigcup_{l\in N} K_l = K \cap \bigcup_{k=2}^{k=M+2} I^k_{M+1} = \\ \left[\frac{1}{M+2}, \frac{1}{M+1}\right] \cap \left[\frac{1}{M+2}, \frac{1}{M+2} + \frac{1}{(M+1)\,(M+2)^2}\right] \cup \\ \bigcup_{k=2}^{k=M+2} \left[\frac{1}{M+2} + \frac{k-1}{(M+1)\,(M+2)^2}, \frac{1}{M+2} + \frac{k}{(M+1)\,(M+2)^2}\right] = \\ \left[\frac{1}{M+2}, \frac{1}{M+1}\right]. \end{aligned}$$

Niech $N^* \subset N$ będzie dowolnym zbiorem takim, że

$$K \cap \bigcup_{l\in N^*} K_l = \left[\frac{1}{M+2}, \frac{1}{M+1}\right] = K \cap \bigcup_{l\in N} K_l.$$

Zauważmy, że dowolny $y \in \left[\frac{1}{M+2}, \frac{1}{(M+1)(M+2)^2}\right] \subset \left[\frac{1}{M+2}, \frac{1}{M+1}\right]$ należy do każdego zbioru I^k_{M+1}, wchodzącego w skład ciągu $\mathcal{K}$. Oznacza to, że $\mathcal{M}^{N^*}_{\mathcal{I}}(y) > M$, więc $\mathcal{M}^{N^*}_{\mathcal{I}}(K) > M$.

Pomimo, że ciąg $\mathcal{K}$ nie spełnia prawostronnego warunku $(M*)$ dla żadnego $M \in \mathbb{N}$, to istnieje ciąg $\mathcal{J} \in \mathcal{I}_{<\omega}$, który spełnia prawostronny warunek $(2*)$ oraz $\Phi_{\mathcal{K}}(A) =$

$\Phi_{\mathcal{J}}(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{L}$. Niech $\mathcal{J}^1 = \{J_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$J_n^1 = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n\,(n+1)^2}\right].$$

Niech $\mathcal{J}' = \left\{J_n^k\right\}$, gdzie

$$J_n^k = \left[\frac{1}{n+1} + \frac{k-1}{n\,(n+1)^2}, \frac{1}{n+1} + \frac{k}{n\,(n+1)^2}\right]$$

dla $n \in \mathbb{N}$ i $k = 1, \ldots, n+1$. Niech $\mathcal{J}^2 = \{J_m^2\}_{m\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem złożonym ze wszystkich elementów ciągu $\mathcal{J}'$.

Z definicji ciągu $\mathcal{K}$ wynika, że dla każdego $l \in \mathbb{N}$ istnieje n_l, że $K_l = J_{n_l}^1 \cup J_{n_l}^2$. Jednocześnie $\lambda\left(J_{n_l}^1 \cap J_{n_l}^2\right) = 0$ oraz $\frac{\lambda\left(J_{n_l}^1\right)}{\lambda(J_l)} = \frac{1}{2} = \frac{\lambda\left(J_{n_l}^2\right)}{\lambda(J_l)}$ dla każdego $l \in \mathbb{N}$. Zatem ciąg $\mathcal{J}$, określony jak w lemacie 5.11, spełnia równość $\Phi_{\mathcal{K}}(A) = \Phi_{\mathcal{J}}(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{L}$, a jako ciąg przedziałów domkniętych spełnia warunek $(2*)$.

Problem 5.13. Czy dla każdego ciągu $\mathcal{I} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ istnieje taki ciąg $\mathcal{K} \in \mathcal{I}_{<\omega}$, że $\Phi_{\mathcal{K}}(A) = \Phi_{\mathcal{I}}(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{L}$ oraz ciąg $\mathcal{K} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ spełnia warunek $(M*)$ dla pewnego $M \in \mathbb{N}$.

6. Ciągi słabo regularne

W rozdziale tym wyróżnimy pewne ciągi rodziny $\mathbb{S}$, które nazwiemy słabo regularnymi.

Definicja 6.1. Powiemy, że ciąg $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ jest słabo regularny, gdy $\Phi_d(A) \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$.

Uwaga 6.2. Z twierdzenia 1.10 wynika, że słabą regularność wystarczy zdefiniować dla ciągów $\mathcal{I} \in \mathcal{I}_{<\omega}$, ponieważ dla każdego ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ istnieje taki ciąg $\mathcal{I} \in \mathcal{I}_{<\omega}$, że $\Phi_{\mathcal{S}} = \Phi_{\mathcal{I}}$.

Konsekwencją twierdzenia 2.6 jest następująca własność.

Własność 6.3. *Każdy ciąg regularny $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ jest słabo regularny.*

Z definicji 6.1 otrzymujemy własność.

Własność 6.4. *Jeśli ciąg $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ jest słabo regularny, to $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.*

Z twierdzenia 2.9 wynika własność.

Własność 6.5. *Jeśli ciąg $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ jest słabo regularny, to $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem dolnej gęstości.*

Obecnie udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.6. *Istnieje ciąg słabo regularny $\mathcal{I} \in \mathcal{I}_{<\omega}$, który nie jest regularny.*

Dowód. Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie malejąco zbieżnym do zera ciągiem liczb z przedziału $(0,1)$ takim, że $2^{n+2}x_{n+1} < x_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy

$$I_1 = [x_1, 2x_1] \cup \left[\left(4 - 2^0\right) x_1, 4x_1\right],$$

$$I_2 = [x_2, 2x_2] \cup \left[\left(4 - 2^{-1}\right) x_2, 4x_2\right] \cup \left[\left(8 - 2^{-1}\right) x_2, 8x_2\right], \cdots$$

i ogólnie

$$I_n = \bigcup_{i=1}^{n} \left[\left(2^i - 2^{-i+1}\right) x_n, 2^i x_n\right] \cup \left[\left(2^{n+1} - 2^{-n+1}\right) x_n, 2^{n+1} x_n\right],$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oznaczmy $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zauważmy, że

1. $\operatorname{diam}(\{0\} \cup I_n) = 2^{n+1}x_n \to_{n\to\infty} 0$,

2. $\lambda(I_n) = 2x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

3. $\alpha(\mathcal{I}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{diam}(\{0\}\cup I_n)}{\lambda(I_n)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}x_n}{2x_n} = \infty$,

4. $I_n \subset [x_n, 2^{n+1}x_n]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

5. $I_n \cap I_m = \emptyset$ dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ i $m \neq n$.

Z własności 1 otrzymujemy, że $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$. Pokażemy, że ciąg $\mathcal{I}$ jest słabo regularny, ale nie jest regularny. Pokażemy więc, że $\Phi_d(A) \subset \Phi_{\mathcal{I}}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$ i nie istnieje ciąg $\mathcal{K} = \{K_l\}_{l\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ taki, że $\Phi_{\mathcal{I}}(A) = \Phi_{\mathcal{K}}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$ oraz $\alpha(\mathcal{K}) < \infty$. Załóżmy przeciwnie, że istnieje ciąg $\mathcal{K} = \{K_l\}_{l\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ o powyższych własnościach. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy założyć, że $K_l \subset (-1,1)$ dla każdego $l \in \mathbb{N}$.

Skoro $\alpha(\mathcal{K}) < \infty$, to

$$\exists_{j_0\in\mathbb{N}}\forall_{l\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(\{0\} \cup K_l) < 2^{j_0-1}\lambda(K_l).$$

Połóżmy

$$A = (0,1) \setminus \bigcup_{n>j_0+1} \left(I_n \cap \left[\left(2^{j_0+2}-1\right)x_n, 2^{n+1}x_n\right]\right).$$

Wówczas dla $n > j_0 + 1$ mamy, że

$$\lambda(I_n \setminus A) = \lambda\left(I_n \cap \left[\left(2^{j_0+2}-1\right)x_n, 2^{n+1}x_n\right]\right) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left[\left(2^i - 2^{-i+1}\right)x_n, 2^i x_n\right] \cup \left[\left(2^{n+1}-2^{-n+1}\right)x_n, 2^{n+1}x_n\right] \cap \left[\left(2^{j_0+2}-1\right)x_n, 2^{n+1}x_n\right]\right)$$

oraz

$$I_n \setminus A \supset \left[\left(2^{j_0+2} - 2^{-j_0-1}\right)x_n, 2^{j_0+2}x_n\right],$$

więc

$$\lambda(I_n \setminus A) \geqslant 2^{-j_0-1}x_n = 2^{-j_0-2}\lambda(I_n).$$

Otrzymujemy stąd, że

$$\frac{\lambda(I_n \setminus A)}{\lambda(I_n)} \geqslant 2^{-j_0-2},$$

co oznacza, że $0 \notin \Phi_{\mathcal{I}}(A)$.

Pokażemy teraz, że $0 \in \Phi_{\mathcal{K}}(A)$. Oczywiście $0 \in \Phi_{\mathcal{I}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)$, a więc $0 \in \Phi_{\mathcal{K}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)$. Wynika stąd, że istnieje takie $l_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $l \geqslant l_0$ zachodzi nierówność

$$\lambda\left(K_l \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) < \frac{1}{4}\lambda\left(K_l\right).$$

Niech

$$L = \left\{l \in \mathbb{N} : \lambda\left(K_l \cap \bigcup_{n>j_0+1} \left(I_n \cap \left[\left(2^{j_0+2}-1\right)x_n, 2^{n+1}x_n\right]\right)\right) > 0\right\}.$$

Zauważmy, że jeśli zbiór L jest skończony, to $0 \in \Phi_{\mathcal{K}}(A)$. Załóżmy zatem, że zbiór L jest nieskończony. Wystarczy pokazać, że dla każdego ciągu $\{K_{l_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $l_n \in L$ zachodzi równość $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(K_{l_n}\setminus A)}{\lambda(K_{l_n})} = 0$. W celu uproszczenia oznaczeń załóżmy, że $L = \mathbb{N}$. Dla dowolnego $l \in L$ określmy

$$m(l) = \min\left\{n > j_0 + 1 : \lambda\left(K_l \cap \left(I_n \cap \left[\left(2^{j_0+2}-1\right)x_n, 2^{n+1}x_n\right]\right)\right) > 0\right\}.$$

Wówczas $\lim_{l\to\infty} m(l) = \infty$. Istotnie, załóżmy, że istnieje ograniczony podciąg $\{m\left(l_s\right)\}_{s\in\mathbb{N}}$ ciągu $\{m(l)\}_{l\in\mathbb{N}}$. Istnieje wówczas $n_0 \in \mathbb{N}$, że

$$\lambda\left(K_{l_s} \cap \left(I_{n_0} \cap \left[\left(2^{j_0+2}-1\right)x_{n_0}, 2^{n_0+1}x_{n_0}\right]\right)\right) > 0$$

dla każdego $s \in \mathbb{N}$, co jest sprzeczne z faktem, że $\lim_{s\to\infty} \operatorname{diam}\left(\{0\} \cup K_{l_s}\right) = 0$. Z definicji ciągu $\{m(l)\}_{l\in\mathbb{N}}$ wynika, że $\operatorname{diam}\left(\{0\} \cup K_l\right) > 2^{j_0+1}x_{m(l)}$. Zatem

$$\lambda\left(K_l\right) > 2^{-j_0+1}\operatorname{diam}\left(\{0\} \cup K_l\right) > 4x_{m(l)}.$$

Ponadto, dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$, mamy

$$\lambda\left(K_l \cap \bigcup_{n<m(l)} I_n \cap \left[0, 2^{m(l)+1}x_{m(l)}\right]\right) = 0,$$

co jest konsekwencją inkluzji

$$\bigcup_{n<m(l)} I_n \subset \left[x_{m(l)-1}, 4x_1\right]$$

i własności, że

$$2^{m(l)+1}x_{m(l)} < x_{m(l)-1}.$$

Zatem dla $l \geqslant l_0$, mamy

$$\lambda\left(K_l\right) \leqslant \lambda\left(K_l \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) + \lambda\left(K_l \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) \leqslant$$

$$\lambda\left(K_l \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \cap \left[0, 2^{m(l)+1}x_{m(l)}\right]\right) + \lambda\left(\left[2^{m(l)+1}x_{m(l)}, 4x_1\right] \cap K_l\right) + \frac{1}{4}\lambda\left(K_l\right) =$$

$$\lambda\left(K_l \cap \bigcup_{n<m(l)} I_n \cap \left[0, 2^{m(l)+1}x_{m(l)}\right]\right) + \lambda\left(K_l \cap I_{m(l)} \cap \left[0, 2^{m(l)+1}x_{m(l)}\right]\right) +$$

$$\lambda\left(K_l \cap \bigcup_{n>m(l)} I_n \cap \left[0, 2^{m(l)+1}x_{m(l)}\right]\right) + \lambda\left(\left[2^{m(l)+1}x_{m(l)}, 4x_1\right] \cap K_l\right) + \frac{1}{4}\lambda\left(K_l\right) \leqslant$$

$$\lambda\left(I_{m(l)}\right) + x_{m(l)} + \lambda\left(\left[2^{m(l)+1}x_{m(l)}, 4x_1\right] \cap K_l\right) + \frac{1}{4}\lambda\left(K_l\right) =$$

$$3x_{m(l)} + \lambda\left(\left[2^{m(l)+1}x_{m(l)}, 4x_1\right] \cap K_l\right) + \frac{1}{4}\lambda\left(K_l\right),$$

W konsekwencji, dla $l \geqslant l_0$ otrzymujemy, że

$$\lambda\left(\left[2^{m(l)+1}x_{m(l)}, 4x_1\right] \cap K_l\right) \geqslant \frac{3}{4}\lambda\left(K_l\right) - 3x_{m(l)} > \frac{3}{4} \cdot 4x_{m(l)} - 3x_{m(l)} = 0.$$

Jako, że

$$\operatorname{diam}\left(\{0\} \cup K_l\right) > 2^{m(l)+1}x_{m(l)},$$

to

$$\lambda\left(K_l\right) > 2^{-j_0+1}\operatorname{diam}\left(\{0\} \cup K_l\right) > 2^{-j_0+m(l)+2}x_{m(l)}.$$

Ponadto, dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lambda\left(K_l \setminus A\right) = \lambda\left(K_l \cap \bigcup_{n>j_0+1} \left(I_n \cap \left[\left(2^{j_0+2} - 1\right)x_n, 2^{n+1}x_n\right]\right)\right) =$$

$$\lambda\left(K_l \cap \bigcup_{n\geqslant m(l)} \left(I_n \cap \left[\left(2^{j_0+2} - 1\right)x_n, 2^{n+1}x_n\right]\right)\right) \leqslant$$

$$\lambda\left(I_{m(l)}\right) + \lambda\left(K_l \cap \bigcup_{n>m(l)} \left(I_n \cap \left[\left(2^{j_0+2} - 1\right)x_n, 2^{n+1}x_n\right]\right)\right) \leqslant$$

$$\lambda\left(I_{m(l)}\right) + x_{m(l)} = 3x_{m(l)}.$$

Zatem dla $l \geqslant l_0$ otrzymujemy

$$\frac{\lambda\left(K_l \setminus A\right)}{\lambda\left(K_l\right)} < \frac{3x_{m(l)}}{2^{m(l)-j_0+2}x_{m(l)}},$$

więc
$$\lim_{l\to 0}\frac{\lambda\left(K_l\setminus A\right)}{\lambda\left(K_l\right)}=0.$$
Oznacza to, że $0\in\Phi_{\mathcal{K}}(A)$, co jest sprzeczne z faktem, że $0\notin\Phi_{\mathcal{K}}(A)=\Phi_{\mathcal{I}}(A)$. Pokażemy teraz, że $\Phi_d(A)\subset\Phi_{\mathcal{I}}(A)$ dla każdego zbioru $A\in\mathcal{L}$. Załóżmy, że $0\in\Phi_d(A)$. Niech
$$P_n^i=\left[\left(2^i-2^{-i+1}\right)x_n,2^ix_n\right]$$
dla $n\geqslant i$, $i\in\mathbb{N}$. Zdefiniujmy ciąg $\mathcal{P}^i=\{P_n^i\}$ dla dowolnego $i\in\mathbb{N}$ oraz $n\geqslant i$. Zauważmy, że $\alpha\left(\mathcal{P}^i\right)=2^{2i-1}<\infty$ dla każdego $i\in\mathbb{N}$, więc na mocy twierdzenia 2.5 $\Phi_d(A)\subset\Phi_{\mathcal{P}^i}(A)$ dla każdego zbioru $A\in\mathcal{L}$ oraz każdego $i\in\mathbb{N}$. Niech $\epsilon>0$. Istnieje $j\in\mathbb{N}$, że $2^{-j+1}<\epsilon$. Skoro $0\in\Phi_{\mathcal{P}^i}(A)$ dla każdego $i\in\mathbb{N}$, to
$$\exists_{n_0}\forall_{i=1,\ldots,j}\forall_{n>n_0}\ \lambda\left(P_n^i\setminus A\right)<\epsilon\lambda\left(P_n^i\right).$$
Zatem dla $n>\max\{j,n_0\}$ mamy
$$\begin{aligned}\lambda\left(I_n\setminus A\right)=\lambda\left(\bigcup_{i=1}^n P_n^i\cup\left[\left(2^{n+1}-2^{-n+1}\right)x_n,2^{n+1}x_n\right]\setminus A\right)\leqslant\\ \lambda\left(\bigcup_{i=1}^j\left(P_n^i\setminus A\right)\right)+\lambda\left(\bigcup_{i=j+1}^n\left(P_n^i\setminus A\right)\right)+2^{-n+1}x_n\leqslant\\ \sum_{i=1}^j\epsilon\lambda\left(P_n^i\right)+\sum_{i=j+1}^n 2^{1-i}x_n+2^{-n+1}x_n=\\ \epsilon\lambda\left(\bigcup_{i=1}^j P_n^i\right)+\sum_{i=j+1}^n 2^{1-i}x_n+2^{-n+1}x_n=\epsilon\lambda\left(I_n\right)+2\epsilon x_n.\end{aligned}$$
Otrzymujemy stąd, że dla $n>\max\{j,n_0\}$
$$\frac{\lambda\left(I_n\setminus A\right)}{\lambda\left(I_n\right)}\leqslant\epsilon+\frac{2\epsilon x_n}{\lambda\left(I_n\right)}<2\epsilon.$$
Pokazaliśmy więc, że $\Phi_d(A)\subset\Phi_{\mathcal{I}}(A)$ dla każdego zbioru $A\in\mathcal{L}$, a więc ciąg $\mathcal{I}$ jest słabo regularny. □

Twierdzenie 6.7. *Istnieje ciąg słabo regularny $\mathcal{I}\in\mathcal{I}_{<\omega}$ taki, że dla każdego ciągu regularnego $\mathcal{S}\in\mathbb{S}$ topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ nie pokrywa się z topologią $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.*

Dowód. Niech $\mathcal{I}\in\mathcal{I}_{<\omega}$ będzie ciągiem słabo regularnym uzyskanym w dowodzie twierdzenia 6.6. Załóżmy, że dla pewnego ciągu regularnego $\mathcal{S}\in\mathbb{S}$ mamy, że $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}=\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. Z wniosku 2.10 i własności 6.5 otrzymujemy, że $\Phi_{\mathcal{I}}$ oraz $\Phi_{\mathcal{S}}$ są operatorami dolnej gęstości. Skoro $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}=\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, to z wniosku 1.3 wynika, że $\Phi_{\mathcal{I}}=\Phi_{\mathcal{S}}$, co przeczy własności ciągu $\mathcal{I}$ uzyskanego w dowodzie twierdzenia 6.6. □

Twierdzenie 6.8. *Ciąg $\mathcal{J} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ przedziałów domkniętych jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabo regularny.*

Dowód. Warunek konieczny jest oczywisty. Załóżmy, że ciąg $\mathcal{J} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ przedziałów domkniętych jest słabo regularny, a więc $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$. Wówczas z twierdzenia 1.4 wynika, że $\alpha(\mathcal{J}) < \infty$, a więc ciąg $\mathcal{J}$ jest regularny. □

Twierdzenie 6.9. *Jeśli ciąg $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ jest słabo regularny, to przestrzeń topologiczna $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rangle$ jest regularna.*

Dowód. Z własności 6.5 operator $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem dolnej gęstości, więc z twierdzenia 1.18 przestrzeń topologiczna $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rangle$ jest regularna. □

Problem 6.10. Czy dla każdego słabo regularnego ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ przestrzeń topologiczna $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rangle$ jest całkowicie regularna?

7. O topologiach $\mathcal{S}$-gęstości związanych z pewnymi ciągami przedziałów symetrycznych

W rozdziale tym przedstawimy pewne zależności między topologiami generowanymi przez operatory $\Phi_{\mathcal{S}}$, gdzie $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ a topologiami generowanymi przez operatory związane z ciągami średnic zbiorów ciągu $\mathcal{S}$.

Lemat 7.1. *Jeśli $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem liczb dodatnich zbieżnym do zera $J_n = [-d_n, d_n]$ oraz $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, to $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$.*

Dowód. Oczywiście $\mathcal{J} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ oraz $\Phi_d(A) \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)$ dla dowolnego $A \in \mathcal{L}$. Zatem $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$. □

Twierdzenie 7.2. *Niech $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$, $d_n = \operatorname{diam}(\{0\} \cup S_n)$ i $J_n = [-d_n, d_n]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $\alpha(\mathcal{S}) < \infty$, to $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.*

Dowód. Oczywiście $\mathcal{J} \in \mathbb{S}$. Pokażemy, że $\Phi_{\mathcal{J}}(A) \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$. Niech $\epsilon > 0$. Skoro

$$\alpha(\mathcal{S}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{diam}(\{0\} \cup S_n)}{\lambda(S_n)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2d_n}{\lambda(S_n)} < \infty,$$

to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant n_0$ mamy, że

$$\frac{d_n}{\lambda(S_n)} < \alpha(\mathcal{S}) + \epsilon.$$

Jednocześnie, dla $n \geqslant n_0$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\frac{\lambda(A \cap S_n)}{\lambda(S_n)} \leqslant \frac{\lambda(A \cap [-d_n, d_n])}{\lambda(S_n)} \leqslant \frac{\lambda(A \cap [-d_n, d_n])}{d_n} \cdot \frac{d_n}{\lambda(S_n)} \\ < \frac{\lambda(A \cap [-d_n, d_n])}{d_n} \cdot (\alpha(\mathcal{S}) + \epsilon).\end{aligned}$$

Stąd wynika, że jeśli 0 jest punktem $\mathcal{J}$-rozrzedzenia zbioru A, czyli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A \cap [-d_n, d_n])}{2d_n} = 0,$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A \cap S_n)}{\lambda(S_n)} = 0,$$

co oznacza, że 0 jest punktem $\mathcal{S}$-rozrzedzenia zbioru A. Stąd wnioskujemy, że jeśli $0 \in \Phi_{\mathcal{J}}(A)$, to $0 \in \Phi_{\mathcal{S}}(A)$, a więc $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. □

Wniosek 7.3. *Przy założeniach poprzedniego twierdzenia zachodzą inkluzje:*

$$\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{S}}.$$

Pokażemy teraz, że inkluzja $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ nie implikuje, że $\alpha(\mathcal{J}) < \infty$. Dowód poprzedzimy lematem.

Lemat 7.4. *Niech $\mathcal{S}' = \{S'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\mathcal{S}'' = \{S''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą takimi ciągami rodziny $\mathbb{S}$, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(S''_n)}{\lambda(S'_n)} = 0.$$

Jeśli $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $S_n = S'_n \cup S''_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ oraz

$$\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}'}(A)$$

dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$.

Dowód. Oczywiście $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$. Niech $A \in \mathcal{L}$. Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(S_n \triangle S'_n)}{\min\{\lambda(S_n), \lambda(S'_n)\}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(S''_n)}{\lambda(S'_n)} = 0.$$

Zatem na mocy własności 1.9 otrzymujemy, że $\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}'}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$. □

Twierdzenie 7.5. *Istnieje ciąg $\mathcal{I} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ taki, że $\alpha(\mathcal{I}) = \infty$ oraz $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, gdzie $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, przy czym $J_n = [-\operatorname{diam}(\{0\} \cup I_n), \operatorname{diam}(\{0\} \cup I_n)]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Niech $\mathcal{I}' = \{I'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{I}'' = \{I''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$I'_n = \left[\frac{1}{3^{n+2}}, \frac{1}{3^{n+1}}\right], \; I''_n = \left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{8^n}, \frac{1}{2^n}\right].$$

Niech $I_n = I'_n \cup I''_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\alpha(\mathcal{I}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{diam}(\{0\} \cup I_n)}{\lambda(I_n)} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{2}{3^{n+2}} + \frac{1}{8^n}} = \infty$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(I''_n)}{\lambda(I'_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{8^n}}{\frac{2}{3^{n+2}}} = 0.$$

Na mocy lematu 7.4 wnioskujemy, że $\Phi_{\mathcal{I}}(A) = \Phi_{\mathcal{I}'}(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}$. Ciąg $\mathcal{I}' = \{I'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem przedziałów domkniętych oraz

$$\alpha(\mathcal{I}) = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^{n+2}}} = 3 < \infty,$$

więc na mocy twierdzenia 1.5 dla ciągów przedziałów domkniętych otrzymujemy, że $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\mathcal{I}'}$. Ponieważ $\Phi_{\mathcal{I}'} = \Phi_{\mathcal{I}}$, to $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Skoro $\operatorname{diam}(\{0\} \cup I_n) = \frac{1}{2^n}$, to kładąc $J_n = \left[-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right]$ dla $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy, że ciąg $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, na mocy twierdzenia 1.4 spełnia równość $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}_d$. Stąd otrzymujemy, że $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. □

W przypadku zbieżnych do zera ciągów przedziałów domkniętych sytuacja opisana w powyższym twierdzeniu nie zachodzi.

Twierdzenie 7.6. *Niech* $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ *będzie ciągiem przedziałów domkniętych i* $d_n = \operatorname{diam}(\{0\} \cup I_n)$ *oraz* $J_n = [-d_n, d_n]$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Niech* $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Wówczas* $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\alpha(\mathcal{S}) < \infty$.

Dowód. Jeśli $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, to z lematu 7.1 wynika, że $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, a więc $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ i w konsekwencji z twierdzenia 1.4 otrzymujemy, że $\alpha(\mathcal{S}) < \infty$. Z kolei, jeśli $\alpha(\mathcal{S}) < \infty$, to z twierdzenia 7.5 wynika, że $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. □

Wniosek 7.7. *Dla każdego ciągu przedziałów przedziałów domkniętych* $\mathcal{S} \in \mathcal{I}_{<\omega}$ *równość* $\alpha(\mathcal{S}) = \infty$ *implikuje, że* $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \setminus \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \neq \emptyset$.

Literatura

[B] A. Bruckner, *Differentiation of Real Functions*, Lecture Notes in Mathematics, Springer–Verlag 659 (1978).

[BSW] T. Banakh, F. Strobin, R. Wiertelak, On a generalization od density topologies on the real line, (w przygotowaniu).

[C] M. Csornyei, *Density theorems revisited*, Acta Sci. Math. 64 (1998), 65–69.

[CLO] K. Ciesielski, L. Larsson, K. Ostaszewski, *$\mathcal{I}$-density continuous functions*, Memoirs of Amer. Math. Soc. 515 (1994).

[F] T. Filipczak, *Density type topologies generated by functions, f-density as a generalization of $\langle s \rangle$-density*, Chapter 23 in Traditional and Present-Day Topics in Real Analysis, Faculty of Mathematics and Computer Science, Univerity of Łódź (2013), 389–409.

[FF1] M. Filipczak, T. Filipczak, *On f-density topologies*, Topology Appl. 155 (2008), 1980–1989.

[FF2] M. Filipczak, T. Filipczak, *On the comparison of the density type topologies generated by sequences and functions*, Comment Math. 49 No. 2 (2009), 161–170.

[FH] M. Filipczak, J. Hejduk, *On the topologies associated with Lebesgue measure*, Tatra Mt. Math. Publ. 28 (2004), 187–197.

[FFH] M. Filipczak, T. Filipczak, J. Hejduk, *On the comparison of the density type topologies*, Atti. Semin. Mat. fis. Univ. Modena Reggio Emilia 52 (2004) no. 1, 37–46 .

[GNN] C. Goffman, C. J. Neugebauer, T. Nishiura, *The density topology and approximate continuity*, Duke Math. J. 28 (1961), 116–121.

[GW] C. Goffman, D. Waterman, *Approximately continuous transformations*, Proc. Am. Math. Soc. 12 (1961), 116–121.

[HP] O. Haupt, C. Pauc, *La topologie de Denjoy approximative envisage comme vraie topologie*, C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), 390–392.

[HLW1] J. Hejduk, A. Loranty, R. Wiertelak, *On $\mathcal{J}$-continuous functions*, Tatra Mt. Math. Publ. 62 (2013), 45–55.

[HLW2] J. Hejduk, A. Loranty, R. Wiertelak, *$\mathcal{J}$-approximately continuous functions*, Tatra Mt. Math. Publ. 62 no. 6 (2017), 45–55.

[HW1] J. Hejduk, R. Wiertelak, *On the Abstract Density Topologies Generated by Lower and Almost Lower Density Operators*, Traditional and Present-Day Topics in Real Analysis, Łódź University Press (2013).

[HW2] J. Hejduk, R. Wiertelak, *On the generalization of density topologies on the real line*, Math. Slovaca 64 (5) (2014), 1267–1276.

[HW3] J. Hejduk, R. Wiertelak, *On some properties of $\mathcal{J}$-approximately continuous functions*, Math. Slovaca 67 (2017), 1323–1332.

[LMZ] J. Lukes, J. Maly, L. Zajicek, *Fine Topology methods in Real Analysis an Potential Theory*, Lecture Notes in Mathematics, 1189 (1986), Springer–Verlag, Berlin.

[O] J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer–Verlag, Berlin (1980).

[PWW] W. Poreda, E. Wagner-Bojakowska, W. Wilczyński, *A category analogue of the density topology*, Fund, Math. 125 (1985), 167–173.

[SW1] F. Strobin, R. Wiertelak, *On the generalization of density topology on the real line*, Topology Appl. 199 (2016), 1–16.

[SW2] F. Strobin, R. Wiertelak, *Algebrability of $\mathcal{S}$-continuous functions* , Topology Appl. 231 (2017), 373–385.

[WBW] E. Wagner-Bojakowska, W. Wilczyński, *Comparison of ψ-density topologies*, Real. Anal. Ex. 25 (1999-2000), 661–672.

[W] M. Widzibor, *On some properties of operators generated by regular sequences of measurable sets*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Sér. Rech. Déform. (2018).

[WW] M. Widzibor, R. Wiertelak, *On some properties of operators generated by regular sequences of measurable sets* , Topology Appl. 265 (2019), 106824.

[W1] R. Wiertelak, *Comparison of density topologies on the real line*, Math. Slovaca 681 (2018), 173–190.

[W2] R. Wiertelak, *On $\mathcal{S}$-approximately continuous functions*, Lith. Math J. (2020), http://doi.org/10.2017/S10986-02005502-5.

[W3] W. Wilczyński, *Density topologies*, Chapter 15 in Handbook of Measure Theory, Ed. E. Pap. Elsevier (202).