ROZDZIAŁ 2

SPÓR O STOSUNEK LOGIKI DO MATEMATYKI

LEIBNIZ I PROGRAM MATEMATYZACJI LOGIKI

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) był jednym z najbardziej twórczych oraz najwszechstronniejszych uczonych swoich czasów. W jego niezwykle bogatym dorobku można odnaleźć wiele zapowiedzi „rewolucji” w logice, która nastąpiła na przełomie XIX i XX wieku. Mimo że był autorem wielu nowatorskich idei, które wykraczały poza arystotelesowki sposób uprawiania logiki, wyrażał się o Arystotelesie z wielkim entuzjazmem, nazywając sylogistykę „jednym z najpiękniejszych odkryć ducha ludzkiego”.

Istotnym i nowatorskim wkładem Leibniza w rozwój logiki była pierwsza poważna próba jej matematyzacji, która wiązała się z powszechną w jego czasach tendencją do szukania jasnej i pewnej metody odkrycia naukowego. Powstała w tym samym okresie metoda analityczna Kartezjusza nie zyskała uznania Leibniza, gdyż nie uwzględniała, jak twierdził, wagi formy logicznej, która gwarantowała poprawność rozumowań sylogistycznych i konieczność twierdzeń matematyki. Ponadto Leibniz uważał, że wszelkie zdania prawdziwe, nawet zdania opisujące przygodne fakty, są konieczne. Nic bowiem nie może być przypadkowe w „najlepszym ze światów”, a wszelka przygodność faktów jest jedynie pozorna, gdyż jest rezultatem słabości rozumu ludzkiego. Słabości owej miała częściowo zaradzić metoda pozwalająca na odkrywanie niektórych spośród koniecznych prawd o świecie[1]. Wszelka efektywna i niezawodna metoda odkrycia naukowego, zwana przez Leibniza **logiką odkrycia**, musiałaby, podobnie jak dowód matematyczny, mieć postać ciągu formuł języka sformalizowanego powiązanych regułami inferencji. Innymi słowy musiałaby być **rachunkiem**.

Leibniz nigdy nie przedstawił w wersji ostatecznej projektowanego przez siebie rachunku, który miał być oparty na słowniku zwanym **językiem myśli**. Obecnie wiemy, że przedsięwzięcie to było z góry skazane na niepowodzenie. Podjął on jednak kilka prób stworzenia takiego rachunku, wśród których najwcześniejszą była *ars combinatoria*. Leibniz traktował sztukę kombinacji jako

[1] Znajomość wszystkich praw koniecznych, czyli wszechwiedz,a była zarezerwowana dla Boga.

bardziej fundamentalną zarówno od logiki jak i matematyki. Była to, w jego zamierzeniu, efektywna metoda konstrukcji pojęć złożonych i dowodzenia twierdzeń w oparciu o kombinacje liczb kodujących pojęcia proste. Aby otrzymać zdanie konieczne, należało wyprowadzić je z identyczności przez zastępowanie jednych wyrażeń, wyrażeniami równoważnymi na mocy definicji. Zarówno logika jak i matematyka miały być oparte na wspólnej podstawie, którą miał stanowić rachunek formalizujący obie metody. Żadna z prób zbudowania rachunku uniwersalnego nie spełniła pokładanych w niej oczekiwań. Doniosłość pomysłów Leibniza polega jednak na czymś innym. Dostrzegł on bowiem identyczność form w logice i matematyce, zaś stworzone przez niego rachunki antycypowały współczesne algebry abstrakcyjne. Przy całym swym nowatorstwie Leibniz powielał jednak niedostatki sylogistyki Arystotelesa. W szczególności nie próbował rozszerzyć języka logiki na relacje wieloargumentowe, starając się za wszelką cenę sprowadzić zdania z wyrażeniami relacyjnymi do zdań kategorycznych[2].

Leibniz bywa niekiedy uważany za prekursora logicyzmu. Jeżeli przez logicyzm rozumie się pogląd głoszący, że matematykę można z logiki wyprowadzić nie odwołując się do żadnych środków pozalogicznych, to Leibniz logicystą *sensu stricto* nie był. Niewątpliwie antycypował jednak proces matematyzacji logiki, czym przyczynił się pośrednio do powstania logicyzmu. W leibniziańskim programie szukania rachunku dla efektywnej metody dowodzenia w logice i matematyce zatarła się bowiem intuicyjnie oczywista, chociaż bardzo trudna do zdefiniowania, różnica między tymi dyscyplinami[3].

ODRĘBNOŚĆ LOGIKI I MATEMATYKI U KANTA

Abstrakcyjne podejście Leibniza do logiki i matematyki, które prowadziło do zatarcia różnic między tymi dyscyplinami znalazło zdecydowanego przeciwnika w osobie Immanuela Kanta (1724–1804). Kant uważał logikę, która była w jego czasach utożsamiana z sylogistyką Arystotelesa, za dziedzinę wiedzy ostatecznie sformułowaną i zamkniętą, w której nie należy oczekiwać już żadnych, gdyż „zawiera ona tylko formy myśli”. Kant rozumiał logikę jako naukę „*a priori* o

---

[2] Jak zauważył Englebretsen w [1989], Leibniz inaczej formalizował zdania o budowie podmiotowo-orzecznikowej niż czynił to Arystoteles; problem ten szerzej przedstawię w kolejnym rozdziale.

[3] W próbach szukania języka uniwersalnego pozwalającego na dowodzenie wszelkich twierdzeń zaciera się nie tylko różnica między matematyką a logiką, ale między wszelkimi naukami. Wszelkie bowiem nauki operować miały zdaniami koniecznymi utożsamianymi przez Leibniza ze zdaniami *a priori*.

koniecznych prawach myślenia” i „o prawidłowym posługiwaniu się rozumieniem i rozumem”.

Kluczem do zrozumienia poglądów Kanta jest problem błędu w myśleniu oraz sposób dochodzenia do praw logiki. Jeżeli będziemy rozumieć prawa logiki będące koniecznymi prawami myślenia w sposób analogiczny do praw fizyki, wszelki błąd w myśleniu byłby niezrozumiały, gdyż prawa przyrody są bezwyjątkowe. W rzeczywistości kantowskie znaczenie terminu „prawo myślenia” zbliża się często do znaczenia normatywnego. Błędy w myśleniu są wówczas wynikiem „braku namysłu” lub „uprzedzeniem”. Prawa myślenia nie opisują zatem działania umysłu, lecz jedynie wskazują jak umysł powinien działać. Kant nie wyjaśnił również w jaki sposób formułujemy prawa logiki. Nie mogą być one jednak wyprowadzane z „obserwacji nad rozumieniem”, gdyż nie tłumaczyłoby to ich koniecznego charakteru. Prawa logiki nie wskazują bowiem jak myślimy, lecz jak powinniśmy myśleć. Należy zatem przyjąć pewien rodzaj intuicji logicznej, która pozwala nam na poznawanie tych praw.

Poglądy Kanta na temat logiki bywają niekiedy określane mianem umiarkowanego psychologizmu. Nie rozstrzygając w tym miejscu czy określenie to jest w przypadku Kanta zasadne, warto wspomnieć o poglądach Johna Stuarta Milla (1806–1873), który będąc psychologistą i empirystą zarazem, doszedł do rezultatów zupełnie odmiennych niż Kant:

> Logika nie jest nauką oddzielną od psychologii ani jej równorzędną. Na tyle, na ile jest ona w ogóle nauką, stanowi ona część lub gałąź psychologii, różniąc się od niej z jednej strony tak jak część różni się od całości, a z drugiej tak jak sztuka różni się od nauki. Jej podstawy teoretyczne w całości zapożyczone zostały z psychologii i zawierają w sobie tyle z tej nauki, ile potrzeba, aby uzasadnić reguły sztuki. Logika nie musi wiedzieć więcej z nauki o myśleniu, aniżeli to, na czym polega różnica między myśleniem dobrym a złym[4].

Według Milla prawa logiki i matematyki nie są, w ścisłym tego słowa znaczeniu, konieczne. Ich pozorna konieczność jest rezultatem tego, że negacji tych praw nie da się przedstawić pojęciowo. Są one bowiem uogólnieniami najstarszymi, najlepiej ugruntowanymi i potwierdzonymi przez doświadczenie. Skrajny empiryzm Milla doprowadził zatem do zatarcia granicy dzielącej logikę i matematykę.

Immanuel Kant, w przeciwieństwie do Milla, uznawał zasadniczą odrębność obu dyscyplin. W *Krytyce Czystego Rozumu* przeciwstawił się poglądowi o analityczności zdań matematyki, głoszonemu w szkole Christiana Wolffa (1679–1754) – ucznia i kontynuatora idei Leibniza. Przez proste zdanie analityczne rozumiał Kant zdanie kategoryczne, którego „orzecznik zawiera się podmiocie”. Można to interepretować w ten sposób, że treść orzecznika zawarta

[4] Por. Mill [1843].

jest w treści podmiotu. Dotyczy to nawet zdań analitycznych o treści empirycznej, tak jak w znanym przykładzie:

> [...] wszystkie zdania analityczne są sądami *a priori*, nawet wtedy, gdy ich pojęcia są empiryczne, np. *Złoto jest żółtym metalem*; ażeby to wiedzieć, nie potrzeba mi bowiem żadnego dalszego doświadczenia poza moim pojęciem złota, które zawiera w sobie to, że ciało to jest żółte i jest metalem; gdyż to właśnie stanowiło moje pojęcie i nie musiałem nic innego robić, jak je rozłożyć, nie oglądając się za niczym innym poza nim[5].

Zdania analityczne, nawet o treści empirycznej są, wedle Kanta, uznawane na podstawie zasady sprzeczności, stanowiącej ich „wspólną naczelną zasadę”:

> Ponieważ orzeczenie twierdzącego sądu analitycznego jest już przedtem pomyślane w pojęciu podmiotu, przeto nie można go bez sprzeczności o podmiocie zaprzeczyć; tak samo jego przeciwieństwo w sądzie analitycznym, lecz przeczącym, trzeba z koniecznością o podmiocie zaprzeczyć, i to także na zasadzie sprzeczności[6].

Psychologistycznie rozumiana zasada sprzeczności, posiadająca u Kanta status logicznego prawa myślenia, stanowi kryterium apriorycznej pewności wszystkich zdań analitycznych.

Prawdom matematyki przysługuje, podobnie jak zdaniom analitycznym, aprioryczna konieczność. Jednak w odróżnieniu od Leibniza i Wolffa, Kant uważał, że zdania matematyki nie są analityczne, lecz syntetyczne *a priori*. Oznacza to, że nie mogą być ani wyprowadzone jedynie z prostych zdań analitycznych, ani uznane bezpośrednio na mocy zasady sprzeczności.

> Początkowo można by sobie pomyśleć, że zdanie <7 + 5 = 12> jest jedynie zdaniem analitycznym, które według zasady sprzeczności wynika z sumy siedmiu i pięciu. [...] Pojęcia dwunastu wcale jeszcze nie pomyślałem przez to, że mam na myśli tylko owo połączenie siedmiu i pięciu; i choćbym nie wiem jak długo rozkładał swe pojęcie takiej możliwej sumy, to jednak dwunastki tam nie znajdę. Musi się wyjść poza te pojęcia, przywołując na pomoc naoczność, odpowiadającą jednemu z nich, np. swoje pięć palców [...]. Znaczy to, że zdanie arytmetyczne jest zawsze syntetyczne, o czym przekonamy się biorąc nieco większe liczby; [...] bez przywołania na pomoc naoczności, przez sam tylko rozbiór naszych pojęć, nigdy sumy nie znajdziemy[7].

Konieczność matematyki i jej empiryczna ważność są zapewnione dzięki apriorycznym formom naoczności. W dowodzeniu twierdzeń matematyki potrzebna jest intuicja, dzięki której można dowodzić twierdzeń konstruując obiekty matematyczne. Konstruowanie obiektów matematycznych odbywa się w czystej naoczności, której formami są czas i przestrzeń, zaś logika, która

---

[5] Por. Kant [1783], s. 22 wydania polskiego.
[6] *Op. cit.*, s. 22.
[7] *Op. cit.*, s. 24–25.

stanowiła zespół naczelnych praw myślenia, pozwala na operowanie obiektami w czystej naoczności[8].

PLATONIZM FREGEGO I POCZĄTKI LOGICYZMU

Pogląd określany mianem logicyzmu rozwinięty został przez szereg myślicieli żyjących na przełomie XIX i XX wieku[9]. Podstawowa teza logicyzmu głosi, że przynajmniej pewne teorie matematyczne są częścią logiki, a zatem da się je z logiki wyprowadzić, bez odwołania się do jakichkolwiek pojęć i zasad pozalogicznych. Frege próbował sprowadzić twierdzenia arytmetyki do logiki i przyznać im status zdań analitycznych. Liczby naturalne definiował odwołując się wyłącznie do terminologii teoriomnogościowej, korzystając z wprowadzonego przez Cantora pojęcia równoliczności zbiorów. Arytmetyka byłaby zatem teorią, której twierdzenia są wyprowadzalne z aksjomatów logiki oraz z definicji pojęć arytmetycznych, takich jak liczba naturalna czy następnik. Pojęcia te definiowane były za pomocą pojęć teoriomnogościowych, uznawanych za logiczne.

Poglądy Fregego na status arytmetyki są sprzeczne z poglądami Kanta, który uznawał twierdzenia arytmetyki za zdania syntetyczne *a priori*. Frege krytykował go między innymi za niejasny sens słowa „intuicja". W cytowanym wcześniej przykładzie Kant twierdzi, że aby obliczyć sumę 5 i 7, należy „wyjść poza te pojęcia" oraz „odwołać się do pomocy intuicji dotyczącej jednego z nich, np. pięciu palców". Takie rozumienie intuicji jest według Fregego zupełnie bezużyteczne przy próbie obliczenia sum większych liczb, np. 135664 + 37863[10]. Arytmetyka, podobnie jak logika, wyraża czyste i uniwersalne prawa myśli, których w żaden sposób nie należy rozumieć, jak czynił to Kant, w sposób psychologiczny. Królestwo myśli, owo „trzecie królestwo", obok wewnętrznego świata przedstawień i zewnętrznego świata postrzeganych rzeczy, jest pewną wersją platońskiego obiektywnego świata idei. Prawa logiki i matematyki umożliwiają wszelkie myślenie bez względu na jego treść, są zatem niezależne od obiektu, o którym podmiot myśli. Szeroko rozumiana logika, obejmująca również arytmetykę, jest zatem teorią opisująca uniwersalne prawa myśli.

Aby zapewnić jedność notacyjną szeroko rozumianej logice, Frege stworzył zupełnie nowy typ języka logiki, w którym wyrażenia dzielą się na dwie

---

[8] Kantowska koncepcja nieanalityczności zdań matematyki, która prowadziła do wymogu konstruowania obiektów matematycznych, legła u podstaw różnych koncepcji konstruktywistycznych w filozofii matematyki z najbardziej chyba znanym intuicjonizmem.

[9] W tym opracowaniu zostaną omówione poglądy Gottloba Fregego (1848–1925), Bertranda Russella (1872–1970), Ludwiga Wittgensteina (1889–1951), Rudolfa Carnapa (1891–1970) i Hansa Reichenbacha (1891–1953).

[10] Por. Kneale i Kneale [1962], s. 447.

podstawowe grupy: **funkcje** i ich **argumenty**. Język ten miał stanowić oczyszczoną wersję języka naturalnego, która nie jest obarczona wieloznacznością i niejasnością występującą w mowie potocznej. Jednocześnie miał być nową wersją leibniziańskiego języka uniwersalnego, w którym da się dowodzić koniecznych prawd myśli.

Geometrii Frege przypisywał status różny od arytmetyki i uznawał jej twierdzenia za zdania syntetyczne:

> Uważam, że Kant wniósł wielki wkład w rozróżnienie między sądami analitycznymi a syntetycznymi. Nazywając prawdy geometrii syntetycznymi i *a priori*, odkrył on ich prawdziwą naturę. [...] Jeżeli Kant mylił się co do arytmetyki, nie umniejsza to w mojej opinii wartości jego pracy[11].

Syntetyczność geometrii Frege uzasadniał w inny sposób niż Kant. Uważał, że była ona rezultatem możliwości budowania w niesprzeczny sposób geometrii alternatywnych wobec klasycznej geometrii euklidesowej. Przedmiotami różnych geometrii są wzajemnie nierównoważne obszary rzeczywistości. Geometria nie jest zatem, w przeciwieństwie do arytmetyki, uniwersalna, lecz jest teorią o konkretnym fragmencie rzeczywistości:

> ...] możemy zawsze założyć przeciwieństwo kilku lub jednego aksjomatu geometrii bez popadania w sprzeczność podczas przeprowadzania wnioskowania, mimo konfliktu między założeniami i naszą intuicją. Fakt ten świadczy o wzajemnej niezależności aksjomatów geometrii, ich niezależność od prostych praw myśli oraz o syntetyczności geometrii[12].

Sposób uzasadniania logiczności arytmetyki zaproponowany Fregego został rychło podważony. W liście do Fregego z 1901 roku, Bertrand Russell wskazywał, że teoria zbiorów, która posłużyła Fregemu do wyprowadzenia arytmetyki z logiki jest sprzeczna[13]. Formułując swój słynny paradoks, Russell zanegował możliwość stosowania naiwnej teorii zbiorów do wyprowadzania arytmetyki z logiki, nie podważył natomiast głoszonych przez Fregego poglądów na temat jej logiczności. Wystąpienie Russella spowodowało powstanie dwóch konkurencyjnych podejść do teorii zbiorów: **teorii mnogości**, czyli systemu aksjomatycznego zbudowanego w języku pierwszego rzędu oraz **teorii typów** zbudowanej w języku nieskończenie wysokiego rzędu. Bertrand Russell wykorzystał aparat stworzonej przez siebie teorii typów do wyprowadzenia arytmetyki z logiki, kontynuując tym samym idee Fregego.

---

[11] Por. Frege [1884], § 89.
[12] Por. Frege [1884], § 14.
[13] Był to tzw. paradoks Russella, zwany również antynomią klas niezwrotnych.

ZNAKI LOGICZNE U RUSSELLA

W pracy *Principles of Mathematics*[14], której planowany drugi tom rozrósł się do monumentalnego dzieła *Principia Mathematica*, znajdujemy, obok ogólnej charakterystyki logiki i stosunku logiki do matematyki, pierwszą wyraźną próbę zdefiniowania pojęcia **stałej logicznej**:

> Logika symboliczna zajmuje się zasadniczo inferencją w ogóle i jest odróżniana od różnych gałęzi matematyki ze względu na swą ogólność. [...] Logika symboliczna bada jedynie ogólne reguły, za pomocą których odbywa się rozumowanie dedukcyjne i wymaga klasyfikacji relacji i pojęć jedynie w zakresie tych ogólnych reguł. Owe szczególne pojęcia pojawiające się w zdaniach logiki formalnej oraz wszystkie inne pojęcia definiowane za ich pomocą, są to tak zwane stałe logiczne. Liczba niedefiniowalnych stałych logicznych nie jest zbyt duża – jest ich jedynie osiem lub dziewięć. Te i tylko te pojęcia tworzą przedmiot matematyki, żadne inne pojęcia poza definiowanymi za pomocą owych ośmiu czy dziewięciu pojęć pierwotnych nie występują ani w arytmetyce, ani w geometrii, ani w racjonalnej dynamice. Ze względów technicznych dogodnie jest wybrać jako jedyną niedefiniowalną stałą logiczną pojęcie implikacji formalnej, występującej, np. w zdaniu: *jeżeli x jest człowiekiem, to x jest śmiertelny, dla każdego x*. Ogólna postać implikacji formalnej jest następująca: *jeżeli* $\varphi(x)$, *to* $\psi(x)$, *dla każdego x*, gdzie $\varphi(x)$ i $\psi(x)$, *dla każdego x,* są zdaniami. Analiza pojęcia implikacji formalnej należy do podstaw logiki, ale nie jest wymagana dla jej formalnego sformułowania. Dodatkowo za pojęcia niedefiniowalne uważa się: implikację między zdaniami nie zawierającymi zmiennych, relację należenia do zbioru, relację wyrażaną terminem *taki że*, samo pojęcie relacji i pojęcie prawdy. Za pomocą tych pojęć można wyrazić wszystkie zdania logiki symbolicznej[15].

Uniwersalność logiki Russell rozumiał w taki sposób, że zmienne powinny mieć niczym nieograniczony zakres, który obejmowałby obiekty, własności, relacje i sądy, przy zastrzeżeniu, że rolę podmiotu zdaniowego pełnić mogą jedynie nazwy własności i relacji. Każdy bez wyjątku obiekt może być wartością semantyczną zmiennej nieograniczonej, predykaty zaś i relacje są definiowane dla wszystkich rodzajów obiektów. Przyjrzyjmy się zatem w jaki sposób Russell definiuje inne stałe logiczne[16]. Skoro nie istnieje istotna różnica między korelatami semantycznymi zdań i wyrażeń innych kategorii, to spójniki zdaniowe mogą łączyć dowolne wyrażenia. Na przykład *Jeżeli Sokrates to Platon* jest w ujęciu Russella zdaniem, chociaż zdaniem fałszywym. Umożliwia to, w świetle prawa $p \Rightarrow p$, na zdefiniowanie terminu „zdanie” w sposób następujący:

$$(\forall p)(p \text{ jest zdaniem} \Leftrightarrow (p \Rightarrow p))$$

W świetle przytoczonej definicji, metajęzykowe wyrażenie „zdanie” jest dla Russella stałą logiczną. Definiując pozostałe stałe logiczne za pomocą implikacji

---

[14] Por Russell [1903].

[15] Por. Russell [1901]. Cytuję za Egner i Dennon (wyd.) [1961], s. 145–146.

[16] Por. Byrd [1989], który uwspółcześnił i uściślił oryginalne definicje Russella.

materialnej i kwantyfikatora ogólnego, Russell stworzył logikę całkowicie niestandardową, w której istotną rolę pełni kwantyfikowanie po zdaniach. W logice tej daje się zdefiniować termin „relacja binarna", który, podobnie jak termin „zdanie", uważany był przez Russella za wyrażenie logiczne:

$(\forall R)(R\ jest\ relacją\ (binarną) \Leftrightarrow \forall x \forall y(xRy \Rightarrow xRy))$

W *Principles of Mathematics* Russell nie do końca odróżniał podział na język przedmiotowy i metajęzyk, od podziału na język pierwszego i wyższych rzędów. Wszelkie metatwierdzenia posiadały ten sam status co twierdzenia logiki. Prowadziło to do nieodróżniania kwantyfikatora ogólnego z poziomu przedmiotowego ($\forall x$, $\forall y$) od kwantyfikatora metajęzykowego ($\forall p$, $\forall R$), przy pomocy którego można również orzekać o ogólności logiki. Występujące w przytoczonych definicjach podstawowe znaki logiczne mogą być, według Russella, definiowane jedynie przez enumerację, gdyż wszelkie własności, za pomocą których można by je zdefiniować, same muszą zakładać obiekty z klasy znaków logicznych. We wszystkich regułach syntaktycznych bądź semantycznych dotyczących znaków logicznych pojawiają się bowiem ich metajęzykowe odpowiedniki. Nie oznacza to jednak, że wybór podstawowych znaków logicznych był według Russella zupełnie arbitralny. W innym miejscu podaje następujące określenie klasy znaków logicznych:

> Znaki logiczne są klasami lub relacjami, których ekstensja albo wszystko zawiera, albo przynajmniej posiada tyle obiektów, jak gdyby wszystko zawierała. Zbiór bądź relacja posiada tyle obiektów, jak gdyby wszystko zawierał, gdy istnieje wzajemnie jednoznaczna relacja między obiektami tego zbioru lub relacji, a zbiorem wszystkich możliwych obiektów[17].

Określenie to jest jedną z pierwszych prób sformułowania semantycznego kryterium logiczności wyrażeń, w którym próbuje się uściślić niejasne pojęcie przejrzystości.

W poglądach Russella daje się dostrzec zdecydowaną niechęć do sylogistyki Arystotelesa. Russell przyznaje wprawdzie, że sylogistyka stanowiła początek logiki formalnej, ale jednocześnie twierdzi, że był to początek wielowiekowej stagnacji tej dyscypliny. Krytykował sylogistykę głównie z powodu przecenienia roli sylogizmów w naukach dedukcyjnych. Sylogizm jest bowiem tylko jednym z wielu rodzajów rozumowania dedukcyjnego, które w dodatku praktycznie nie występuje w matematyce. Wielowiekowe utrzymywanie fikcji jakoby dowód matematyczny dawał się sprowadzić do ciągu sylogizmów, spowodowało, według Russella, że Immanuel Kant, który był owej fikcji świadom, uznał matematykę za

[17] Russells Archives document 230.030350-F2, p.1., cytuję za Byrd [1989].

teorię pozalogiczną[18]. Rozwój obu dyscyplin świadczy jednak o tym, że wprawdzie logika i matematyka powstały niezależnie od siebie, ale w chwili obecnej nie jest możliwe ustanowienie między nimi wyraźnej granicy. Są one, wedle słów Russella, jak chłopiec i mężczyzna: logika jest dzieciństwem matematyki, zaś matematyka dorosłością logiki

> Dowód ich identyczności jest oczywiście jedynie kwestią szczegółów. Zaczynając od przesłanek uznawanych jako należące do logiki można dojść, stosując wnioskowanie dedukcyjne, do rezultatów, które z całą pewnością należą do matematyki. Uświadamiamy sobie jednocześnie, że nie istnieje między nimi wyraźna granica. [...] Jeżeli jednak ktoś nadal nie uznaje identyczności logiki i matematyki, należy zażądać aby pokazał, w którym miejscu ciągu reguł i definicji *Principia Mathematica* kończy się logika, a zaczyna matematyka. Każda odpowiedź musi być całkowicie arbitralna[19].

Arytmetyka Russella wyprowadzona była z systemu zwanego rozgałęzioną teorią typów, którą Russell wraz z Alfredem Whiteheadem (1861–1947) sformułowali w *Principia Mathematica*. Jednym z celów sformułowania rozgałęzionej teorii typów było, jak pamiętamy, uniknięcie antynomii klas niezwrotnych, która podważyła poprawność redukcji arytmetyki do logiki dokonanej przez Fregego. Wedle Russella rozgałęziona teoria typów była logiką, gdyż w pewnym sensie mówiła o wszystkich możliwych bytach. Wszystkim własnościom, np. własnościom indywiduów, własnościom własności indywiduów, itd., przyporządkowane zostały typy, układające się w nieskończoną hierarchię. Jaka jest zatem natura przedmiotu, który Russell nazywa wymiennie logiką lub matematyką? Przede wszystkim przedmiot ten nie traktuje o poszczególnych rzeczach i poszczególnych własnościach, lecz o związkach między dowolnymi rzeczami i dowolnymi własnościami. Zdania logiki i matematyki są prawdziwe jedynie dzięki swojej formie. Składają się ze zmiennych lub liter schematycznych oraz ze specjalnych słów zwanych stałymi logicznymi, których jedynym zadaniem jest wyrażanie formy. Obecność stałych logicznych w językach, zarówno naturalnych jaki sztucznych, nie jest bezwzględnie konieczna. Jako przykład podaje on zdania: *Sokrates jest wcześniejszy od Arystotelesa* oraz *Sokrates poprzedza Arystotelesa*, które wyrażają ten sam sąd i posiadają tę samą formę, mimo że w pierwszym z nich wyrażana jest ona przez słowa (stałe logiczne) *jest* oraz *od*, a w drugim przez termin *poprzedza*. Forma u Russella nie powinna być utożsamiana z „powierzchniową" formą zdań, gdyż w istocie odnosi się do sądów. Hipotetyczny język bez stałych logicznych, czyli język, w którym forma sądów jest reprezentowana przez „formę zdań" bez stałych logicznych, byłby

[18] Krytykę sylogistyki można znaleźć w Russell [1946], por. Egner i Dennon (wyd.) [1961], s. 275–281.
[19] Por. Russell [1919]. Cytuję za Egner i Dennon (wyd.) [1961], s. 175.

doprowadzonym do perfekcji językiem logiki i czystej matematyki. Jednak zarówno w języku potocznym, jak i w praktycznie używanych językach logiki i matematyki stałe logiczne występują, pełniąc bardzo ważną funkcję upraszczającą czy wręcz umożliwiającą notację. Wszystkie stałe matematyki, tj. wyrażenia nie będące literami schematycznymi, są według Russella stałymi logicznymi. Za przykład może posłużyć liczba 1, którą można wprowadzić rozważając wszystkie zdania postaci:

Istnieje term[20] *c taki, że* φx *jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy x jest c*[21].

Liczba 1 jest rozumiana jako klasa zbiorów będących denotacjami wszystkich φ, które spełniają powyższe zdania, czyli jest klasą wszystkich zbiorów jednoelementowych.

Faktyczną klęskę logicyzmu spowodowało to, że nie udało się dowieść w sposób bezsporny wyprowadzalności matematyki z logiki, bez odwołania się do pojęć pozalogicznych. Russell wyraził związany z tym niepokój pisząc:

> [...] mimo że wszystkie zdania logiczne (lub matematyczne) mogą być wyrażone za pomocą stałych logicznych oraz zmiennych, nie jest jednak tak, że odwrotnie, wszystkie zdania tak wyrażone są logiczne. Znaleźliśmy jak dotąd jedynie warunek konieczny, nie zaś warunek dostateczny zdań matematycznych. Zdefiniowaliśmy bowiem w sposób wystarczający charakter pierwotnych *idei*, za pomocą których wszystkie idee matematyki mogą być *zdefiniowane*, nie zdefiniowaliśmy jednak pierwotnych *zdań*, z których mogą zostać *wyprowadzone* wszystkie zdania matematyki. Jest to zagadnienie o wiele trudniejsze, nie posiadające dotąd pełnego rozwiązania[22].

Jako przykład zdania, które nie może zostać wyprowadzone z aksjomatów logiki Russell podaje **aksjomat nieskończoności** głoszący, że istnieje nieskończenie wiele indywiduów. Pozalogiczny charakter tego aksjomatu stanowi koronny argument przeciwników logicyzmu na rzecz pozalogicznego charakteru teorii mnogości i arytmetyki, gdyż aksjomat ten pojawia się w dowodzie twierdzenia głoszącego, że dla każdej liczby naturalnej istnieje jej następnik.

NIEZALEŻNOŚĆ TEMATYCZNA RELACJI WYNIKANIA U TARSKIEGO

Jednym z najżywiej dyskutowanych tekstów z zakresu filozofii logiki jest artykuł *O pojęciu wynikania logicznego*[23] , w którym Alfred Tarski (1901–1983) definiuje klasyczne pojęcie semantycznej relacji konsekwencji logicznej.

---

[20] Wyrażenie „term" z języku Russella znaczy tyle co obiekt.

[21] Por. Egner i Dennon (wyd.) [1961], s. 180.

[22] Por. Egner i Dennon (wyd.) [1961], s. 181.

[23] Por. Tarski [1936].

Definicja ta opiera się na tzw. koncepcji **reinterpretacyjnej**, która różni się zasadniczo od wcześniejszej, lecz mniej znanej **substytucyjnej** koncepcji Bernarda Bolzano (1781–1848). Konsekwencja logiczna w ujęciu substytucyjnym może być rozumiana w ten sposób, że ze zbioru przesłanek wynika wniosek, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej zamiany (substytucji) wyrażeń pozalogicznych w przesłankach i wniosku, wniosek pozostaje prawdziwy, zawsze gdy przesłanki były prawdziwe. Jak łatwo zauważyć definicja ta zawodzi, gdy brakuje w języku nazw pewnych obiektów[24].

Zarówno definicja Bolzano, jak i wolna od jej wad definicja Tarskiego zakładają uprzedni podział znaków językowych na logiczne i pozalogiczne. Na samym wstępie artykułu Tarski zastrzega, że każda, nawet najbardziej precyzyjna definicja pojęcia konsekwencji logicznej, jest do pewnego stopnia arbitralna i nie pokrywa się z intuicyjnym pojęciem wynikania. W szczególności nie do zaakceptowania jest podejście utożsamiające wynikanie w sensie intuicyjnym ze zbiorem reguł inferencji używanych w logice i matematyce. Dzieje się tak z dwóch powodów. Nie wszystkie rozumowania intuicyjnie niezawodne są formalizowane oraz nie wszystkie schematy inferencji poprawnych na gruncie logiki klasycznej są intuicyjnie bez zastrzeżeń. Jako przykład posłużyć nam może schemat dowolnego paradoksu implikacji, np. $(p \Rightarrow q)$ / $((p \wedge r) \Rightarrow q)$, którego podstawienia mogą okazać się całkowicie absurdalne:

<u>*Jeżeli dodamy przyprawy do zupy, to jej smak ulegnie poprawie*</u>
Jeżeli dodamy przyprawy do zupy i dolejemy do niej rycyny, to jej smak ulegnie poprawie

Aby zdanie α wynikało z klasy zdań K muszą być, według Tarskiego, spełnione dwa wymogi:

1. Nie może być tak, że zdania z K są współprawdziwe, zaś α fałszywe;
2. Relacja wynikania nie może być zależna w żaden sposób od wiedzy empirycznej ani, w szczególności, od wiedzy o obiektach, do których odnoszą się zdania z klasy K.

Konsekwencja logiczna powinna być zatem niezawodna i niezależna tematycznie. Tarski stara się spełnić oba postulaty w podanej przez siebie definicji:

Niech L będzie dowolną klasą zdań. Zastępując wszystkie symbole pozalogiczne zmiennymi, otrzymuje się klasę L' funkcji zdaniowych. Dowolny ciąg obiektów spełniających każdą funkcję zdaniową klasy L' jest modelem (lub realizacją) klasy zdań L. A zatem zdanie α ***wynika logicznie*** *ze zdań klasy K wtedy i tylko wtedy, gdy każdy model klasy K jest modelem zdania α.*

[24] Por. Etchemendy [1990], gdzie można znaleźć wnikliwą analizę obu koncepcji wynikania logicznego.

Tak zdefiniowana konsekwencja logiczna nie oddawała, według Tarskiego, wszystkich intuicji związanych z wynikaniem w sensie potocznym. W szczególności niepokoił Tarskiego niejasny status znaków logicznych. Dostrzegał, że podział znaków na logiczne i pozalogiczne nie jest całkowicie dowolny, chociaż kryterium podziału wymyka się wszelkim sformułowaniom:

[...] nie znam żadnych obiektywnych względów, które by pozwalały przeprowadzić ścisłą granicę między obiema kategoriami terminów[25].

Naruszenie tradycyjnego podziału wyrażeń na logiczne i pozalogiczne może prowadzić do nieintuicyjnego sposobu rozumienia konsekwencji logicznej, niezgodnego z potocznym rozumieniem wynikania. Jednak Tarski nie twierdził, że próby sformułowania kryterium logiczności stałych skazane są z góry na niepowodzenie. W ostatnich słowach artykułu dopuszcza możliwość ścisłego uzasadnienia tradycyjnego rozróżnienia między terminami logicznymi, a pozalogicznymi. Gdyby jednak tak się nie stało, to podstawowe pojęcia logiki i takie jak wynikanie logiczne, zdanie analityczne lub tautologia pozostałyby zależne od chwiejnego podziału wyrażeń języka na wyrażenia logiczne i pozalogiczne. Chwiejność tego podziału jest wedle Tarskiego:

[...] naturalnym odbiciem owej chwiejności, która daje się zaobserwować w użyciu pojęcia wynikania na gruncie mowy potocznej[26].

Oczywiście termin „relacja wynikania” może być tak uściślony, aby pozbawić go owej chwiejności znaczeniowej. Skutkiem tego zabiegu jest „arbitralność”, którą Tarski przypisał regułom wnioskowania używanym w matematyce, w szczególności zaś regule indukcji matematycznej. Również relacja wynikania logicznego w logice klasycznej, która uwarunkowana jest wyborem klasycznych stałych logicznych, jest z pewnością jednym z możliwych uściśleń tego pojęcia. Obok wymienionych istnieją oczywiście nieklasyczne relacje wynikania, alternatywne wobec klasycznej.

LOGICYZM CARNAPA

Pojęcie znaku logicznego[27] pojawia się często w pracach Rudolfa Carnapa w związku z czynionymi przez niego próbami eksplikacji pojęcia analityczności. Wychodząc z założenia, że zdaniami ***analitycznymi**$_d$* (*explicandum*) są zdania

[25] *Op. cit.,* s. 200.
[26] *Op. cit.,* s. 202.
[27] Carnap używał tego terminu zamiast terminu „stała logiczna” między innymi, dlatego że do znaków logicznych zaliczał zmienne indywiduowe.

prawdziwe we wszystkich możliwych stanach rzeczy, Carnap usiłuje tak dobrać *explicatum* (***analityczny$_t$***), wyrażane terminami „jest *L*-prawdziwy” albo „jest analityczny w *L*”, aby przypadki jego użycia pokrywały się tylko z jasnymi przypadkami użycia terminu „*analityczny$_d$*”. W *Logical Syntax of Language*[28] Carnap definiuje zdanie *analityczne$_t$* jako zdanie będące konsekwencją pustego zbioru zdań. Zdaniami analitycznymi w sensie *analityczny$_d$*, podpadającymi pod określenie „jasny przypadek” użycia tego terminu, są dla Carnapa prawdy logiki i matematyki. Jednak zakwalifikowanie ich jako *analityczne$_t$* zakłada wcześniejszy podział znaków na logiczne oraz pozalogiczne, zwane przez Carnapa znakami **opisowymi**, czyli posiadającymi „fizyczne znaczenie”. W *Logical Syntax* kryterium znaków podziału jest całkowicie syntaktyczne:

Jeżeli symbol α_i nie jest zdefiniowany, to nazywamy go deskryptywnym (α_d), gdy α_i jest **pr** lub **fu**[29]. Jeśli α_i jest zdefiniowany, to nazywamy go α_d, gdy w łańcuchu definicyjnym α_i występuje nie zdefiniowany α_d. Wyrażenie A_i nazywamy deskryptywnym (A_d), jeśli w A_i występuje α_d. α_i nazywamy symbolem logicznym (α_1), jeśli α_i nie jest α_d. A_i nazywamy logicznym (A_l), jeśli A_i nie jest $_d$[30].

Oczywiście kryterium to jest konsekwencją arbitralnego podziału symboli na logiczne i opisowe w tzw. *Języku Określonym I* (*Definite Language I*), w którym do symboli logicznych zalicza stałe liczbowe: 0, 1, 2, ..., zmienne liczbowe oraz tzw. symbole indywidualne obejmujące spójniki logiczne, symbole pomocnicze (nawiasy i przecinek), symbol następnika, predykat równości, kwantyfikatory oraz pewne operatory.

W *Introduction to Semantics*[31] Carnap uznał, że kryterium podziału znaków na logiczne i pozalogiczne sformułowane w *Logical Syntax* jest nieadekwatne i należałoby go szukać raczej na gruncie semantyki[32], chociaż nie należy spodziewać się, że kryterium takie da się kiedykolwiek sformułować. Wątpliwości te pojawiają się również na początkowych stronach *Meaning and Necessity*[33] , gdzie stwierdza, że rozróżnienie na znaki logiczne i pozalogiczne, zwane **desygnatorami**, oparte jest na pewnych oczywistych, lecz nieścisłych intuicjach, wyrażających stopień niezależności znaczenia znaku od kontekstu, w którym występuje. Dlatego też wszelkie podziały są w dużym stopniu subiektywne:

Wprowadzenie terminu desygnator nie miało na celu wskazania, że określane nim wyrażenia są nazwami pewnych obiektów [...], lecz jedynie, że posiadają one w pewnym sensie niezależne

---

[28] Carnap [1937].
[29] W symbolice Carnapa **pr** oznacza predykaty zaś **fu** funktory pozalogiczne.
[30] Por. Carnap [1937], s. 45 wydania polskiego.
[31] Carnap [1942].
[32] Por. Carnap [1942], s. 247−248.
[33] Carnap [1957].

znaczenie, niezależne przynajmniej do pewnego stopnia. Jedynie zdania oznajmujące posiadają znaczenie w sensie ścisłym; wszystkie pozostałe wyrażenia nabierają znaczenia poprzez sposób, w jaki współtworzą znaczenia zdań. Można zatem, w sposób niezbyt ścisły, rozróżnić różne stopnie niezależności znaczenia. Najniższy stopień niezależności przypisałbym nawiasom, niewiele większy alternatywie, koniunkcji itp., nieco większy symbolom operacji arytmetycznych w języku arytmetyki i znacznie większy predykatom oraz stałym indywiduowym [...]. Zasugerowany porządek jest wysoce subiektywny, zaś wyznaczenie granicy pomiędzy wyrażeniami pozbawionymi niezależnego znaczenia czy posiadającymi go jedynie w minimalnym stopniu (tj. synkategorematycznymi w tradycyjnej terminologii), a tymi, których znaczenie jest w dużym stopniu niezależne i można przez to zaliczyć je do desygnatorów, jest sprawą konwencji. Jeżeli jednak dla danego języka istnieje metajęzyk, to wydaje się słusznym, aby za desygnatory uznać przynajmniej te wyrażenia, którym na poziomie metajęzyka odpowiadają zmienne[34].

Podobną opinię Carnap wyraża również w *Introduction*:

Przykładami znaków uważanych za logiczne są znaki pomocnicze [...] (np. nawiasy i przecinek używane w logice symbolicznej oraz znaki przestankowe w pisanych językach słownych) [...][35].

Logiczność znaków jest według Carnapa stopniowalna, a najwyższym stopniem logiczności charakteryzują się znaki przestankowe. Wszelkie próby udzielenia ścisłej odpowiedzi na pytanie o zakres terminu „znak logiczny” natrafiają na fundamentalne trudności, czemu dał wyraz w *Introduction*:

Mamy tu zatem pytanie czy terminy „logiczny” i „opisowy” mogą być zdefiniowane za pomocą innych pojęć semantycznych [...], w taki sposób, że zastosowanie ogólnej definicji do dowolnego systemu doprowadzi do rezultatu pokrywającego się z zamierzonym podziałem. Zadowalające rozwiązanie nie jest jeszcze znane[36].

Wiele ciekawych uwag na temat znaków logicznych odnaleźć można w *Meaning and Necessity*[37]. Podstawowym pojęciem semantycznym, które tam występuje, jest **opis stanu**, definiowany jako ciąg wszystkich zdań atomowych lub negacji zdań atomowych pewnego zinterpretowanego języka *S*, zwanego systemem semantycznym. Pojęcie to pozwala zdefiniować całą rodzinę tzw. *L*-pojęć, takich jak *L*-prawdziwość czy też *L*-fałszywość zdania, czyli jego logiczna prawdziwość bądź fałszywość, rozumiana jako zachodzenie lub niezachodzenie tego zdania dla każdego opisu stanu języka *S*. Zdanie, które jest *L*-prawdziwe lub *L*-fałszywe nazywane jest zdaniem ***L*-zdeterminowanym**. Pojęcie *L*-zdeterminowania rozszerza się następnie na desygnatory pozostałych kategorii syntaktycznych:

---

[34] Por. Carnap [1957], s. 7.

[35] Por. Carnap [1942], s. 57. O związkach między znakami logicznymi, a przestankowymi pisali również Wittgenstein w *Traktacie*, Reichenbach w [1947] i Došen w [1989].

[36] Por. Carnap [1942], s. 59.

[37] Carnap [1957].

Desygnator jest *L*-zdeterminowany w *S* wtw, gdy jedynie semantyczne reguły *S*, bez żadnego odniesienia do wiedzy o faktach, *podają* jego ekstensję[38].

Przytoczone określenie można uznać za próbę eksplikacji pojęcia przejrzystości znaków logicznych. Intuicyjnie przejrzystość można określić w sposób następujący. Funktor, czyli wyrażenie nienasycone w sensie Fregego, jest przejrzysty, gdy znając denotacje jego argumentów możemy, bez odwołania się do żadnej wiedzy o faktach, podać denotację wyrażenia złożonego. Wyrażenie nasycone w sensie Fregego, tj. stała inywiduowa, zmienna indywiduowa lub symbol zdaniowy, jest przejrzyste, gdy możemy podać jego denotację bez odwołania się do żadnej wiedzy o faktach. W ujęciu Carnapa przejrzyste, czyli *L*-zdeterminowane, są spójniki prawdziwościowe, kwantyfikatory, operator ι służący do konstrukcji deskrypcji określonych, operator λ-abstrakcji, nawiasy pełniące funkcje znaków przestankowych oraz znaki indywiduowe o „standardowej formie", które oznaczały u Carnapa stałe liczbowe. Ponadto Carnap zalicza do znaków logicznych zmienne indywiduowe, dla których reguły semantyczne podają ekstensje niezależnie od wszelkich faktów, oraz znaki operacji arytmetycznych.

Jak zauważamy, określone wyżej intuicyjne pojęcie przejrzystości jest tak nieprecyzyjne, że może być rozumiane i eksplikowane na wiele sposobów, które prowadzą do zupełnie różnych rezultatów. Przyjmując, na przykład, punkt widzenia Kanta, liczebniki oraz znaki operacji arytmetycznych nie są przejrzyste, gdyż aby dodać pięć do siedmiu, „musi się wyjść poza te pojęcia, przywołując na pomoc naoczność". Jest to oczywiście zupełnie inne rozumienie niejasnego i niejednoznacznego pojęcia przejrzystości.

ANTYLOGICYZM STEPHENA KUHNA

W artykule *Logical expressions, Constants and Operator Logic,* Stephen Kuhn[39] występuje jako zwolennik maksymalnego ograniczenia zakresu terminów „logika" i „znak logiczny". W rezultacie wyłącza on poza zakres terminu „znak logiczny" wszelkiego rodzaju funktory modalne, a logiki modalne uznaje za pozalogiczne teorie owych funktorów. Punktem wyjścia dla Kuhna jest stwierdzenie, że logika od czasów Arystotelesa oparta jest na siedmiu symbolach, których odpowiednikami w języku naturalnym są wyrażenia: *każdy... jest, pewien... jest, i, lub, nie jest tak, że, jeżeli...., to..., wtedy i tylko wtedy, gdy...* oraz wiele ich wariantów stylistycznych. Języki sformalizowane domknięte ze

[38] Por. Carnap [1957], s. 72.
[39] Por. Kuhn [1981].

względu na relację wynikania, w której te właśnie znaki pełnią istotną rolę, stanowią, wedle Kuhna, niekwestionowany trzon logiki zwany logiką klasyczną. Nad logiką klasyczną nadbudowuje się liczne teorie, przede wszystkim teorie matematyczne.

Kryterium pozwalające na przeprowadzenie granicy pomiędzy logiką i teorią pozalogiczną jest pozornie oczywiste. Logika jest na tyle ogólna lub uniwersalna, że pozwala formułować zdania prawdziwe o „wszystkim”, czyli zdania niezależne tematycznie, oraz reguły inferencji o „wszystkim”, czyli reguły inferencji niezależne tematycznie. W przeciwieństwie do logiki, teorie pozalogiczne pozwalają formułować prawdy i poprawnie wnioskować jedynie o określonym fragmencie „rzeczywistości” lub jedynie „na temat” pewnych obiektów. Intuicja ta znalazła wyraz, jak twierdzi Kuhn, w powszechnym przekonaniu, że znaki logiczne są **stałymi**, gdyż ich denotacje są takie same bez względu na to co głoszą zdania, w których te znaki występują. Stąd wziął się mylny, zdaniem Kuhna, termin „stała logiczna”. Wyrażeniu „stała” Kuhn nadał specyficzne znaczenie i pokazał, że nie może być ono łączone z pojęciem logiczności znaku. Przez stałość znaku rozumie bowiem Kuhn takie ograniczenie klasy możliwych funkcji interpretacyjnych dla tego znaku, aby nie zmieniał on swego korelatu semantycznego dla żadnej funkcji interpretacyjnej, ani dziedziny interpretacji. Jeżeli zachodzi ten warunek, to koniunkcja pozostaje koniunkcją, a negacja negacją, bez względu na dziedzinę, w której interpretujemy pozostałe wyrażenia języka. W definicji konsekwencji logicznej Tarskiego wyrażenia pozalogiczne traktowane są w sposób **schematyczny**. Termin ten bierze się stąd, że w schematach formuł logicznie poprawnych, bądź reguł inferencji, wyrażenia pozalogiczne zastępowane są metajęzykowymi literami schematycznymi. Schematyczność wyrażeń pozalogicznych prowadzi do przyporządkowania im dowolnych korelatów semantycznych o typie właściwym dla ich kategorii syntaktycznej. Z drugiej strony Kuhn uważa, że logiczność znaku jest, w świetle definicji Tarskiego, synonimem jego nieschematyczności i pokazuje, że pewne wyrażenia logiczne są stałe, lecz pewne wyrażenia logiczne stałymi nie są. Na przykład korelatem semantycznym negacji dla każdej funkcji interpretacyjnej jest funkcja prawdziwościowa opisana znaną tabelką.

$$\begin{bmatrix} 1 \to 0 \\ 0 \to 1 \end{bmatrix}$$

Stąd negacja i inne spójniki prawdziwościowe rzeczywiście zasługują na miano stałych logicznych. Dla kwantyfikatorów $\forall$, $\exists$, które również uważane są za wyrażenia logiczne, nie można podać *explicite* korelatów semantycznych, gdyż zależą one od dziedziny interpretacji. Nie są one zatem stałymi. W konsekwencji Kuhn uznał, że przynajmniej pewne wyrażenia logiczne nie są stałe, a zatem stałość w sposób przez niego rozumiany nie jest warunkiem wystarczającym logiczności i nie ma *de facto* sensu używać określenia „stała logiczna", lecz „znak logiczny" lub „wyrażenie logiczne".

Przytoczona argumentacja Kuhna oparta jest na specyficznie rozumianym „absolutnym" pojęciu stałości. Rozumiejąc jednak stałość jako zrelatywizowaną do dziedziny interpretacji[40], nic nie stoi na przeszkodzie, aby używać terminu „stała logiczna" w stosunku do kwantyfikatorów. Przy zrelatywizowaniu stałości do tzw. struktur modalnych, czyli zbiorów możliwych światów z określoną na nich relacją dostępności, można używać tego terminu w odniesieniu do operatorów modalnych.

Określenie „stała logiczna" nasuwa wątpliwości innego rodzaju. Dzieje się tak jednak z innego powodu niż podany przez Kuhna. Chodzi mianowicie o standardowe rozróżnienie na stałe i zmienne, które również bywają określane jako logiczne[41]. Odpowiedniejszym dla nich terminem byłby „znak logiczny" lub „wyrażenie logiczne". Niestety, jak pokazał Reichenbach[42], funkcja znaków logicznych może być pełniona również przez pewne nieleksykalizowane konstrukcje składniowe i gramatyczne, w odniesieniu do których nie ma zwyczaju używać terminu „znak". A zatem rzeczowniki „znak", „wyrażenie" i „stała" w zestawieniu z przymiotnikiem „logiczny" nie powinny być traktowane dosłownie.

Powróćmy jednak do argumentacji Kuhna, który twierdził, że nie istnieją żadne formalne kryteria logiczności wyrażeń. Można mówić jedynie o pewnych argumentach natury filozoficznej, które skłaniają nas do uznania wyrażeń za logiczne. W szczególności uznał on logiki modalne za pozalogiczne teorie funktorów modalnych. Podstawowym argumentem na rzecz tego stanowiska jest wielość logik modalnych oraz to, że tworzone są one poprzez wzbogacenie aksjomatyki logiki klasycznej przez różne zestawy aksjomatów specyficznych dla danej wersji. Kuhn widzi w tym daleko posuniętą analogię do teorii matematycznych nadbudowanych nad logiką klasyczną. Jak można zauważyć ta część argumentacji Kuhna stanowi wersję argumentacji Fregego na rzecz syntetyczności geometrii. Kuhn wysuwa jednak o wiele poważniejsze argumenty na rzecz pozalogiczności funktorów modalnych. Podstawowy błąd logików polegał, według Kuhna, na uznaniu funktorów modalnych za nieschematyczne. Doprowadziło to do mylnego uznania ich za znaki logiczne. Za taki stan rzeczy Kuhn obarcza winą składnię języka pierwszego rzędu, w którym brak jest

[40] Wyrażenie jest stałe w dziedzinie *D* wtw, gdy posiada ono ten sam korelat semantyczny dla wszystkich funkcji interpretacyjnych przyporządkowujących wyrażeniom języka obiekty odpowiedniego typu, skonstruowane z elementów *D*.

[41] Zwolennikiem tego poglądu był, jak pamiętamy, Carnap. Również Reichenbach uznawał zaimki, będące odpowiednikami zmiennych w języku naturalnym, za wyrażenia logiczne, por. rozdział 3.

[42] Por. rozdział 3.

zarezerwowanej dla nich kategorii syntaktycznej. W związku z tym postuluje wzbogacenie języka pierwszego rzędu o kategorie *n*-argumentowych funktorów zdaniowych. Tak wzbogaconą logikę pierwszego rzędu nazwał **logiką operatorową**. Wprowadzenie tego pojęcia pozwoliło mu na stwierdzenie, że między logiką operatorową, a teoriami modalnymi zachodzi analogiczny związek, jak między logiką pierwszego rzędu, a teoriami matematycznymi. Ograniczając się do części zdaniowej, język logiki operatorowej składa się, oprócz symboli zdaniowych i spójników prawdziwościowych, z kategorii funktorów *n*-argumentowych: $\Box_1^n$, $\Box_2^n$, ... , dla każdego $n \geq 0$. Logika operatorowa posiada standardowe reguły składni oraz reguły semantyczne dla spójników logicznych, wyrażone za pomocą tabelek prawdziwościowych. Funktory zdaniowe są oczywiście traktowane jako wyrażenia pozalogiczne. Znaczenie wybranych operatorów może być ustalone za pomocą dodatkowych aksjomatów i dodatkowych reguł inferencji. Na przykład przyjęcie aksjomatu:

$$\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box\, p \Rightarrow \Box q)$$

oraz reguły Gödla, która głosi, że jeżeli φ jest twierdzeniem, to $\Box\varphi$ również jest twierdzeniem, ustala znaczenie funktora 1-argumentowego funktora konieczności $\Box\Box\Box$ w minimalnej logice modalnej *K*. Analogiczna procedura zachodzi dla teorii nadbudowanych nad klasyczną logiką pierwszego rzędu. Na przykład aksjomatyka teorii mnogości Zermelo–Fraenkla ustala znaczenie wybranego predykatu 1-argumentowego jako „bycie zbiorem" i pewnego predykatu 2-argumentowego jako „należenia do zbioru". Podobnie aksjomatyka arytmetyki sprowadza się do nadania znaczenia wyróżnionym przez nią predykatom, np. dwuargumentowemu predykatowi ≥, pewnym stałym indywiduowych (liczebnikom) oraz funkcjom (np. funkcjom następnika i operacjom arytmetycznym).

KRYTERIA LOGICZNOŚCI ZNAKÓW W KATEGORIACH WIEDZY *A PRIORI*

Interesującą próbę wyeksplikowania pojęcia przejrzystości znaków poczynił Christopher Peacocke, który w artykule *What Is a Logical Constant*[43] zaproponował kryterium logiczności, o którym twierdził, że jest „adekwatne i wolne od wszelkiej arbitralności". Język logiki, dla którego sformułowane zostało to kryterium, jest standardowym językiem pierwszego rzędu z symbolami funkcyjnymi i standardowymi regułami syntaktycznymi. Kluczową rolę w semantyce Peacocke'a, będącej w rzeczywistości pewną wersją semantyki

[43] Por. Peacocke [1976].

Tarskiego, pełnią pojęcia funkcji interpretacyjnej i nieskończonego ciągu elementów dziedziny interpretacji. Funkcje interpretacyjne i ciągi przyporządkowują wyrażeniom języka pewne obiekty pozajęzykowe, będące ich korelatami semantycznymi, zwanymi przez Peacocke'a, wartościami tych wyrażeń dla funkcji interpretacyjnej oraz ciągu. Wartości te definiuje się w sposób indukcyjny. Niech $\boldsymbol{J}$ będzie funkcją interpretacyjną, zaś s ciągiem obiektów z dziedziny interpretacji D. Krok „zerowy" indukcji polega na podaniu wartości dla wyrażeń prostych.

1. Wartością zmiennej indywiduowej x_i dla funkcji interpretacyjnej $\boldsymbol{J}$ i ciągu s jest i-ty element ciągu s, ten sam dla każdej każdej funkcji interpretacyjnej $\boldsymbol{J}$: $\boldsymbol{J}(x_i)(s) = s_i$, gdzie s_i jest i-tym wyrazem ciągu s;
2. Wartością stałej indywiduowej c_i dla $\boldsymbol{J}$ oraz s jest pewien obiekt a z dziedziny D, ten sam dla każdego ciągu s: $\boldsymbol{J}(c_i)(s) \in D$;
3. Wartością zmiennej zdaniowej p_i dla $\boldsymbol{J}$ oraz s jest wartość logiczna 1 lub 0: $\boldsymbol{J}(p_i)(s) \in \{1, 0\}$;
4. Wartością predykatu n-argumentowego P_i^n dla $\boldsymbol{J}$ oraz s jest zbiór A n-argumentowych ciągów obiektów z dziedziny D, ten sam dla każdego ciągu s: $\boldsymbol{J}(P_i^n)(s) = A \subseteq D^n$.

Wartości wyrażeń złożonych wyznaczane są za pomocą reguł semantycznych funktorów bądź operatorów. W szczególności jeżeli $\boldsymbol{J}(\varphi)(s) = 1$ (0), to powiemy, że ciąg s spełnia (nie spełnia) formułę φ dla funkcji interpretacyjnej $\boldsymbol{J}$.

Ponieważ kryterium logiczności Peacocke'a, które zostanie podane nieco później, stanowi próbę uściślenia pojęcia przeźroczystości epistemologicznej na gruncie własności reguł semantycznych, rozpatrzmy kilka przykładów takich reguł dla wyrażeń logicznych i pozalogicznych.

1. $\boldsymbol{J}(P_i^n(t_1,...,t_n))(s) = 1$ wtw $< \boldsymbol{J}(t_1)(s),..., \boldsymbol{J}(t_n)(s)> \in \boldsymbol{J}(P_i^n)(s)$, gdzie $t_1,.., t_n$ są termami, czyli stałymi lub zmiennymi indywiduowymi;
2. Ciąg s spełnia $\phi \wedge \psi$ dla $\boldsymbol{J}$ wtw, gdy s spełnia ϕ dla $\boldsymbol{J}$ i s spełnia ψ dla $\boldsymbol{J}$;
3. Ciąg s spełnia $\forall x_i \phi$ dla $\boldsymbol{J}$ wtw, gdy każdy ciąg różniący się od s co najwyżej i-tym wyrazem, spełnia formułę ϕ dla $\boldsymbol{J}$;
4. Ciąg s przyporządkowuje dla $\boldsymbol{J}$ termowi $ojciec(t)$[44] taki obiekt o_i z dziedziny interpretacji D, że o_i jest ojcem o_j, gdzie o_j jest obiektem przyporządkowanym przez ciąg s dla $\boldsymbol{J}$ termowi t.

Zatem aby wyznaczyć wartość formuły $\phi \wedge \psi$ dla $\boldsymbol{J}$ i s, wystarczy znać wartości formuły ϕ i formuły ψ dla tych samych $\boldsymbol{J}$ oraz s. Podobnie, by wyznaczyć wartość formuły $\forall x_i \phi$ dla pewnego $\boldsymbol{J}$ i s, wystarczy znać wartości formuły ϕ dla $\boldsymbol{J}$ oraz wszystkich ciągów powstałych z s przez zamianę i-tego wyrazu. Nie zawsze jednak reguła semantyczna pozwala wyznaczyć wartość wyrażenia złożonego

---

[44] Chodzi tu oczywiście o deskrypcję określoną *the father of*, nie zaś o predykat złożony *father of*. W języku polskim różnica ta nie występuje.

jedynie na podstawie znajomości wartości argumentów występującego w niej funktora. W przykładzie pierwszym nie wystarczy znać wartości argumentów predykatu, trzeba również wiedzieć czy ciąg wartości tych argumentów należy do wartości semantycznej predykatu. Podobnie jest w przykładzie czwartym, gdzie aby wyznaczyć wartość termu *ojciec Wolfganga Amedeusza Mozarta* dla pewnego $\boldsymbol{J}$ i s, nie wystarczy wiedzieć, który obiekt jest wartością termu *Wolfgang Amedeusz Mozart* dla $\boldsymbol{J}$ i s, lecz trzeba znać dodatkowo pewne fakty dotyczące wzajemnych relacji między obiektami dziedziny interpretacji. Zatem aby wyznaczyć wartość semantyczną wyrażenia z pozalogicznym funktorem głównym, nie wystarczy znać wartości jego argumentów, lecz należy odwołać się do pewnej wiedzy o rzeczywistości, czyli do wiedzy *a posteriori*.

Kryterium Peacocke'a ma postać definicji, której celem jest dokonanie jednoznacznego podziału na wyrażenia logiczne i pozalogiczne. Wyrażenie α jest logiczne jeżeli spełnione są następujące warunki:

1. α jest syntaktycznie prostym funktorem lub operatorem pewnej kategorii $\tau/\sigma_1...\sigma_n$;
2. jeżeli znane są:
   a) wartości przyporządkowane wyrażeniom $\beta_1...\beta_n$ kategorii $\sigma_1...\sigma_n$ przez wszystkie ciągi dla dowolnej funkcji interpretacyjnej $\boldsymbol{J}$,
   b) reguła semantyczna przyporządkowująca wartości wyrażeniom złożonym o budowie $\alpha(\beta_1...\beta_n)$,

   to znane są również a priori wartości wyrażenia $\alpha(\beta_1...\beta_n)$ dla funkcji $\boldsymbol{J}$ i dla wszystkich ciągów.

Termin „znane *a priori*" rozumie się jako „znane bez jakiejkolwiek wiedzy na temat własności obiektów i relacji zachodzących między obiektami w dziedzinie interpretacji".

Tak sformułowane kryterium pozwoliło Peacocke'owi na zakwalifikowanie do znaków logicznych typowych stałych logiki klasycznej, czyli koniunkcji, alternatywy, negacji, implikacji i kwantyfikatorów. Jednak predykat identyczności nie spełniał, według Peacocke'a, przytoczonego kryterium, gdyż wiedząc, że *i*- tym wyrazem ciągu *s* jest *a*, zaś *j*-tym wyrazem ciągu *s* jest *b*, nie można wiedzieć *a priori* czy *s* spełnia formułę $x_i = x_j$. Aby to stwierdzić, należy móc porównywać obiekty i stwierdzać ich identyczność, gdyż $\boldsymbol{J}(x_i = x_j)(s) = 1$ wtw, gdy $proj_i(s) = proj_j(s)$. Podobnie predykat $\in$ bycia elementem zbioru nie jest znakiem logicznym, gdyż jeżeli wiadomo, że obiekty *a* i *b* są odpowiednio *i*-tym i *j*-tym elementem ciągu *s*, to nie można wiedzieć *a priori* czy *s* spełnia $x_i \in x_j$. Aby to stwierdzić, trzeba wiedzieć czy *b* „składa się" z innych obiektów, a zatem czy jest zbiorem, a jeśli tak, to czy obiekt *a* jest jednym z obiektów wchodzących w skład *b*. Reguła semantyczna dla predykatu $\in$ głosi bowiem, że: $\boldsymbol{J}(x_i \in x_j)(s) = 1$ wtw, gdy $proj_i(s) \in proj_j(s)$.

Kryterium Peacocke'a miało stanowić uściślenie pojęcia przejrzystości znaków. Niestety nie likwiduje ono wszystkich niejasności wiązanych z tym pojęciem. Może o nich świadczyć rezultat porównania reguł dla predykatu identyczności oraz dla kwantyfikatorów. Zapisana w nieco innej formie reguła semantyczna dla kwantyfikatora ogólnego głosi, że $\boldsymbol{J}(\forall x_i\varphi)(s) = 1$ wtw, dla każdego s' takiego, że dla każdego $j \neq i$, $s_i = s'_j$, $\boldsymbol{J}(\varphi)(s') = 1$. Czy zatem aby wyznaczyć wartość formuły $\forall x_i\varphi$ dla s, wystarczy znać powyższą regułę semantyczną i wiedzieć, które ciągi spełniają formułę φ, bez odwołania się do jakichkolwiek relacji między obiektami dziedziny interpretacji? Pozornie wydawać się może, że argumentacja Peacocke'a sugeruje odpowiedź pozytywną. Niestety nie usuwa to wszystkich wątpliwości, które biorą się z niejasności sformułowania „jeżeli znane są wartości przyporządkowane $\beta_1...\beta_n$ przez wszystkie ciągi [...] znane są *a priori* wartości przyporządkowane $\alpha(\beta_1...\beta_n)$ przez wszystkie ciągi". Dla klasycznych spójników zdaniowych sformułowanie to znaczy tyle, że wiedząc o każdym ciągu s czy spełnia φ i ψ, wiadomo również *a priori* czy s spełnia $\varphi\wedge\psi$. W przypadku kwantyfikatorów chodzi jednak o coś więcej. Aby stwierdzić, że s spełnia $\forall x_i\varphi$, nie wystarczy bowiem wiedzieć, że formułę φ spełniają, np. ciągi s_1, s_2, s_3..., lecz czy każdy ciąg powstały z s przez zamianę i-tego wyrazu jest jednym z owych ciągów. Nie jest przecież tak, że zamieniając i-ty wyraz ciągu s na obiekt b natychmiast stwierdzamy, że otrzymujemy w ten sposób ciąg s_1, o którym z założenia wiemy, że spełnia φ. W tym celu należy bowiem móc identyfikować ciągi, co nie jest możliwe bez umiejętności identyfikowania ich wyrazów. Ponadto aby stwierdzić, że formuła $\forall x_i\varphi$ jest spełniona przez s, należy wiedzieć czy φ jest spełniona przez ciągi powstałe z zamiany i-tego wyrazu ciągu s kolejno na wszystkie obiekty z dziedziny interpretacji. To jednak również nie jest możliwe bez umiejętności identyfikacji obiektów. Bez umiejętności tej bowiem możemy sobie wyobrazić sytuację polegającą na powtarzaniu pewnych zastąpień, przy systematycznym pomijaniu jednego lub więcej obiektów z dziedziny. Okazuje się zatem, że na mocy kryterium Peacocke'a, status predykatu identyczności jest taki sam jak status kwantyfikatorów. Aby zachować logiczność kwantyfikatorów, należy albo uzupełnić kryterium Peacocke'a o dodatkowy warunek głoszący, że postulowany w kryterium *podmiot* potrafi identyfikować, czyli stwierdzać identyczność bądź różność obiektów z dziedziny interpretacji, albo uznać, że warunek ten jest już *implicite* w kryterium Peacocke'a zawarty, a problemy interpretacyjne spowodowane są pewnymi niejasnościami sformułowania.

Kryterium Peacocke'a nie jest z pewnością poprawną eksplikacją pojęcia logiczności znaków. Nie spełnia ono bowiem warunku ścisłości, będącego jednym z podstawowych warunków poprawnej eksplikacji. Można jednak próbować bronić kryterium Peacocke'a w inny sposób. Być może, jak sugerują to pewne jego uwagi, kryterium pomyślane zostało w taki sposób, aby kolejne jego modyfikacje, polegające na rozszerzeniu wiedzy potrzebnej podmiotowi do oceny wartości wyrażenia złożonego, pozwalały na uznawanie kolejnych funktorów lub operatorów za wyrażenia logiczne w mniejszym stopniu niż poprzednie. Mielibyśmy zatem do czynienia z pewnym porządkiem logiczności, w którym w największym stopniu logiczne byłyby klasyczne spójniki zdaniowe, zaraz za nimi klasyczne kwantyfikatory i predykat równości. Mniejszy stopień logiczności przysługiwałby funktorom temporalnym i modalnym, gdyż założona w kryterium wiedza podmiotu musi zostać wzbogacona o znajomość wartości wyrażeń w różnych momentach czasu i różnych stanach rzeczy.

Osobną dyskusję poświęca Peacocke spójnikom intuicjonistycznym, którym przypisuje logiczność na gruncie zmodyfikowanego specjalnie dla nich kryterium. Modyfikacja ta polega na zamianie sformułowania „ciąg *s* spełnia formułę ϕ", na „może być dowiedzione, że ciąg *s* spełnia formułę ϕ", zaś sformułowania „ciąg *s* nie spełnia formuły ϕ" na: „założenie, że *s* spełnia ϕ może być w efektywny sposób sprowadzone do absurdu". Logiczność wyrażeń w logikach nieklasycznych byłaby zatem nieporównywalna z logicznością wyrażeń w logikach klasycznych, gdyż opierałaby się na daleko posuniętej modyfikacji kryterium.

Ze zdecydowaną krytyką Peacocke'a wystąpił Timothy McCarthy[45], stwierdzając, że sformułowanie kryterium Peacocke'a jest spełnione przez całą grupę wyrażeń przejrzystych epistemologicznie w szerokim sensie. Do wyrażeń tych zalicza McCarthy wyrażenia arytmetyczne, funktory intensjonalne oraz wyrażenia teoriomnogościowe, np. predykat należenia do zbioru. Wszystkie one charakteryzują się tym, że mając wiedzę o regule semantycznej tego wyrażenia i wiedzę *de re* o jego argumencie (bądź argumentach), można wyznaczyć *a priori* obiekt będący wartością semantyczną wyrażenia złożonego. Termin „przejrzystość epistemologiczna" nie powinien być z żaden sposób utożsamiany z przejrzystością w przyjętym w tej pracy znaczeniu. Przejrzystość epistemologiczna została bowiem wprowadzona przez Quine'a w *Word and Object* dla określenia predykatów, które można orzekać o obiektach jedynie na podstawie empirycznie stwierdzalnych cech tych obiektów, takich jak barwa, kształt, wielkość, ciężar, gatunek biologiczny, itd. Wyrażeniami, które nie są przejrzyste epistemologicznie są zatem „bycie czyimś ojcem", „bycie dziekanem" czy „bycie cziymś przyjacielem". Pojęcie to jest dobrze zdefiniowane jedynie w kategoriach empirystycznej epistemologii Quine'a, zwanej niekiedy epistemologią znaturalizowaną. Ponadto interpretacja McCarthy'ego jest całkowicie niezgodna z intencją Peacocke'a, który jako zdecydowany przeciwnik logicyzmu, nie był skłonny do uznania wyrażeń arytmetycznych

[45] Por. McCarthy [1981].

i teoriomnogościowych za logiczne. Kontrowersje te świadczą niewątpliwie o niejasnościach związanych z pojęciem wiedzy *a priori*.