Janusz Ciuciura

Hierarchie systemów logiki parakonsystentnej

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Hierarchie systemów logiki parakonsystentnej

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Janusz Ciuciura

Hierarchie systemów logiki parakonsystentnej

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Łódź 2018

Janusz Ciuciura – Uniwersytet Łódzki, Wydział Filozoficzno-Historyczny, Instytut Filozofii
Katedra Logiki i Metodologii Nauk, 90-131 Łódź, ul. Lindleya 3/5

RECENZENT
Wojciech Suchoń

REDAKTOR INICJUJĄCY
Magdalena Skoneczna

SKŁAD I ŁAMANIE
AGENT PR

KOREKTA TECHNICZNA
Leonora Wojciechowska

PROJEKT OKŁADKI
Katarzyna Turkowska

Zdjęcie wykorzystane na okładce: © Depositphotos.com/ekostsov, fosin

Publikacja bez opracowania redakcyjnego w Wydawnictwie UŁ

© Copyright by Janusz Ciuciura, Łódź 2018
© Copyright for this edition by Uniwersytet Łódzki, Łódź 2018

Publikacja jest udostępniona na licencji Creative Commons
Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0 (CC BY-NC-ND)

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie I. W.08666.18.0.M

Ark. wyd. 7,0; ark. druk. 9,875

ISBN 978-83-8142-190-4
e-ISBN 978-83-8142-191-1

https://doi.org/10.18778/8142-190-4

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63

SPIS TREŚCI

WSTĘP

W procesie komunikacji językowej wypowiadamy pewne wyrażenia, zwroty, zdania. Aby właściwie zrozumieć intencje rozmówcy, musimy często brać pod uwagę nie tylko treść i kształt wypowiedzi, ale także jej kontekst, czas, miejsce, itd. Kiedy więc przydarza się nam mylnie rozumieć czyjąś wypowiedź, może być to spowodowane mętnym jej sformułowaniem, może również być następstwem naszej ignorancji. U podstaw takiego stanu rzeczy tkwić może bagatelizowanie roli, jaką odgrywa w wypowiedzi wspomniana *otoczka językowa*. Dodatkowe komplikacje pojawią się wówczas, gdy struktura zdania, a nawet pojedyncze wyrażenia, obarczone są wieloznacznością.

Na szczęście, sprzyja nam rozwój logiki współczesnej. Z powodzeniem prowadzi się badania, wykorzystując współczesną aparaturę pojęciową. Znane są już konstrukcje logiczne, w których analizuje się pojęcie sprzeczności. Takimi właśnie konstrukcjami są systemy logiki parakonsystentnej.

Niestety, trudno w języku polskim znaleźć odpowiednik anglojęzycznego terminu *paraconsistent logic*. Aby oddać właściwe znaczenie przymiotnika *paraconsistent*, należałoby posłużyć się zbitką słów polskich. Tak powstał rodzimy zwrot *logiki tolerujące sprzeczność*.

Za autora terminu *paraconsistent* (*logic*) uznaje się peruwiańskiego filozofa Francisco Miró Quesada Cantuariasa. W artykule pochodzącym z 1992 roku da Costa wspominał:

> […] napisałem do Miró Quesady, który przyjął nową logikę z wielkim entuzjazmem, prosząc go o wymyślenie dla niej nazwy. Pamiętam jego odpowiedź, jakby to było wczoraj. Podał trzy propozycje: nową logikę można by nazwać metakonsystentną, ultrakonsystentną lub parakonsystentną [w terminologii anglojęzycznej: *metaconsistent, ultraconsistent, paraconsistent* – JC]. Skomentował następnie wszystkie trzy propozycje, stwierdzając, iż z jego punktu widzenia, wybrałby ostatnią z wymienionych. Termin *parakonsystentna* brzmiał wspaniale. Zacząłem więc go stosować, sugerując innym [...], aby uczynili to samo. Dwa lub trzy miesiące później, stał się cud. Termin rozprzestrzenił się po całym świecie. Nowy termin zaczęto stosować we wszystkich ośrodkach badawczych, bezpośrednio lub pośrednio związanych z logiką, od półkuli północnej do południowej. Przypuszczam, że w dziejach nauki (a na pewno w dziejach logiki) niewiele razy miało miejsce coś podobnego [...][1].

---

[1] Da Costa, N.C.A., Béziau, J.Y., Bueno, O. (1995a), *Paraconsistent Logic in a Historical Perspective*, „Logique et Analyse", 150-151-152, s. 118.

Po raz pierwszy termin *paraconsistent logic* pojawił się oficjalnie w 1976 roku na Trzecim Kongresie Latynoamerykańskim poświęconym logice matematycznej (Brazylia, Campinas). Od tego czasu jest powszechnie używany na określenie logik tolerujących sprzeczność. Logika parakonsystentna jest przykładem logiki nieklasycznej.

Co wyróżnia logikę parakonsystentną spośród innych logik nieklasycznych? Próbując odpowiedzieć na to pytanie, przyjmijmy, że w danym języku formalnym J obecny jest, oprócz innych symboli, spójnik negacji. Oznaczmy ten spójnik symbolem „~". Literą F oznaczmy zbiór wszystkich wyrażeń sensownych (w skrócie: formuł) języka J, tj. wyrażeń zbudowanych zgodnie z następującymi zasadami:

(1) Każda zmienna zdaniowa, tj. $p_1, p_2, p_3, \dots$, itd., jest formułą.

Zbiór zmiennych zdaniowych, w skrócie *var*, jest zbiorem niepustym i przeliczalnym. Ze względu na wygodę i przejrzystość zapisu, zamiast $p_1, p_2, p_3, \dots$, będziemy zazwyczaj pisać $p, q, r, \dots$ *etc.*

(2) Jeżeli α jest formułą, to $\sim \alpha$ jest formułą.

Spójnik negacji jest funktorem jednoargumentowym. W § 2.5 mowa będzie także o spójniku asercji. W § 5.3 pojawią się dwa dodatkowe spójniki jednoargumentowe: *niesprzeczności* i *sprzeczności*. W pewnych fragmentach książki pojawią się również intensjonalne funktory modalne, przede wszystkich symbol możliwości $\Diamond$.

(3) Jeśli α i β są formułami, to wyrażenia $\alpha \to \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$ oraz $\alpha \leftrightarrow \beta$ również są formułami.

Do spójników dwuargumentowych należy więc implikacja „$\to$", koniunkcja „$\wedge$", alternatywa „$\vee$" i równoważność „$\leftrightarrow$". Spójnik równoważności jest definiowalny za pomocą implikacji oraz koniunkcji: $\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$. Dlatego będzie on zazwyczaj pomijany, podczas prezentacji poszczególnych systemów logicznych. Przez *system* rozumieć będziemy dowolny podzbiór zbioru wszystkich formuł.

Małe litery alfabetu greckiego $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ pełnią funkcję tzw. *metazmiennych.* Metazmienne występują w schematach formuł. Dzięki metazmiennym i schematom formuł zbyteczna stanie się reguła podstawiania. Duże litery alfabetu greckiego $\Gamma, \Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z}, \dots$ będą z kolei pełnić funkcję zbiorów formuł.

Definicja 0.1. Przez *logikę* określoną na zbiorze formuł F, rozumiemy dowolną relację binarną $\vdash \subseteq 2^F \times F$ (gdzie 2^F jest zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru F), spełniającą następujące warunki, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F$ oraz $\Gamma, \Delta \subseteq F$:

(1) jeśli $\alpha \in \Gamma$, to $\Gamma \vdash \alpha$
(2) jeśli $\Gamma \vdash \alpha$ i $\Gamma \subseteq \Delta$, to $\Delta \vdash \alpha$
(3) jeśli ($\Gamma \vdash \alpha$ oraz $\Delta \cup \{\alpha\} \vdash \beta$), to $\Gamma, \Delta \vdash \beta$.

Pojęcie logiki utożsamione jest zatem z pojęciem *relacji konsekwencji*. Relacja konsekwencji może spełniać jeszcze inne warunki np. finitarności oraz strukturalności.

Zdefiniujemy teraz dwa kluczowe pojęcia. W tym celu załóżmy, że S jest systemem formalnym (systemem dedukcyjnym, teorią dedukcyjną).

Definicja 0.2. Powiemy, że S jest systemem sprzecznym, o ile istnieje formuła α wyrażona w języku systemu S, taka, że zarówno α jak i $\sim \alpha$, są jednocześnie tezami S.

Definicja 0.3. Powiemy, że S jest systemem przepełnionym (*trywialnym*), o ile każda formuła systemu S jest jego tezą.

Kiedy logiką, leżącą u podstaw systemu S jest logika klasyczna (a ściślej, S jest teorią tej logiki), wówczas S jest systemem przepełnionym wtedy i tylko wtedy, gdy S jest systemem sprzecznym. Systemy przepełnione nie mają żadnego znaczenia praktycznego. Każde zdanie sformułowane w języku takiego systemu jest jego twierdzeniem. Logiki parakonsystentne, jak przekonamy się niebawem, *tolerują* sprzeczność, co wcale nie oznacza, że są konstrukcjami trywialnymi.

Niewiele jest konstrukcji logicznych, w których sprzeczność tolerowana jest w dosłownym tego słowa znaczeniu. Z reguły po prostu nie dopuszcza się, żeby pewna formuła wraz z jej negacją były jednocześnie twierdzeniami danej logiki. Jeśli już to ma miejsce, są to formuły specjalnego typu. Za wzór takich formalizacji uchodzi logika antynomii Asenjo i Tamburino, logika dialektyczna Routleya i Meyera, czy też systemy *V2* i *V3* Arrudy[2].

Większość systemów logiki parakonsystentnej toleruje sprzeczność nie dlatego, że możliwe jest w nich *współistnienie* dwóch zdań, z których jedno jest zaprzeczeniem drugiego, lecz dlatego, iż z pary zdań α, $\sim\alpha$ nie wyprowadzimy dowolnego zdania β. Akceptacja sprzeczności rodzi bowiem problemy natury metodologicznej (np. komplikacje w dowodzie twierdzenia o adekwacji). Systemy logiki parakonsystentnej to zatem formalizmy, w których odrzuca się możliwość ich trywializacji za sprawą pary formuł sprzecznych. Oznacza to tyle tylko, iż akceptacja formuł sprzecznych: α, $\sim \alpha$, nie pociąga za sobą akceptacji dowolnej formuły β.

Przytoczona charakterystyka wydaje się zbyt ogólnikowa. Istnieje wiele systemów logicznych, w których para formuł sprzecznych nie implikuje przepełnienia, a mimo to, systemy te mają niewiele wspólnego z ideą parakonsystencji. Przykładem takiego systemu jest choćby pochodząca z 1949 roku logika nonsensu Halldéna (inspirowana logiką Boczwara), niektóre systemy logiki relewantnej lub logiki koneksyjnej[3].

---

[2] Zob. §§ 2.2, 2.7, 2.8.

[3] Por. §§ 2.3, 3.3. Zob. Halldén, S. (1949), *The Logic of Nonsense*, Uppsala Universitets årsskrift, 9, Uppsala; Boczwar, D.A. (1938), *Ob odnom tréhznacnom iscislénii i égo priménénii к analizu paradoksov klassicéskogo rassirennogo funkcjonał'nogo iscislénia*, „Matematiceskij sbornik", 4, s. 287–308; Dunn, J. M., Restall, G. (2002),

⁂

Prezentowana książka jest pierwszą monografią w języku polskim całkowicie poświęconą logikom tolerującym sprzeczność[4]. Przedstawiane tu systemy logiczne charakteryzowane są na dwa zasadnicze sposoby: aksjomatyczny i semantyczny. W wersji aksjomatycznej określimy pewien podzbiór zbioru wszystkich formuł, zwany zbiorem aksjomatów, oraz ustalimy zbiór reguł wnioskowania. W tym drugim przypadku będzie to na ogół zbiór jednoelementowy. Jedyną nieaksjomatyczną regułą inferencji będzie bowiem reguła odrywania. W wariancie semantycznym określimy z kolei sposób rozumienia poszczególnych spójników logicznych. Skorzystamy głównie z tzw. semantyki waluacyjnej.

Formalizmy, z założenia, służą za pewnego rodzaju ilustrację dla rozważań filozoficznych nad *naturą* logiki parakonsystentnej. I tak, w rozdziale pierwszym omówimy założenia filozoficzne, które stanowiły fundament systemów logiki tolerującej sprzeczność. Dokonamy ogólnej charakterystyki logiki parakonsystentnej. Wskażemy kryteria, dzięki którym będziemy w stanie – do pewnego stopnia – rozstrzygnąć, czy dany system można nazwać parakonsystentnym, czy też nie.

Rozdział drugi poświęcony będzie prekursorom logiki parakonsystentnej. Przyjrzymy się pierwszym, naszym zdaniem najważniejszym, systemom logiki tolerującej sprzeczność. Omówimy także koncepcje formalno-logiczne, które choć bezpośrednio nie były związane z ideą logiki parakonsystentnej, to jednak stanowiły źródło inspiracji dla jej twórców.

W rozdziale trzecim dokonamy prezentacji hierarchii systemów logiki parakonsystentnej w oparciu o tzw. *kryterium ilościowe*. Kryterium to sprowadza się *de facto* do określenia liczby formuł, niezbędnych do trywializacji danego systemu. W klasycznym rachunku zdań, logice intuicjonistycznej, systemach logiki modalnej itp. wystarczają dwie takie formuły: α, $\sim\alpha$. Większa ich liczba, np. α, $\sim\alpha$, $\sim\sim\alpha$, $\sim\sim\sim\alpha$, $\sim\sim\sim\sim\alpha$, jest redukowalna do dwóch. W przypadku prezentowanej hierarchii podobna redukcja nie będzie możliwa. Trywializacja kolejnych systemów hierarchii dokona się za sprawą większej ilości formuł.

Relevance Logic, [w:] Gabbay, D.M., Guenthner, F. (red.), *Handbook of Philosophical Logic*, 6, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, s. 1–128; McCall, S. (2012), *A History of Connexivity*, [w:] Gabbay, D.M., Pelletier J., Woods, J. (red.), *Handbook of the History of Logic*, 11, Logic: A History of its Central Concepts, Elsevier, Amsterdam, s. 415–449.

[4] W języku polskim istnieją nieliczne publikacje książkowe, których fragmenty poświęcono prezentacji wybranych systemów logiki parakonsystentnej, np. Pietryga, A. (2004), *Status zasady sprzeczności w świetle logiki współczesnej*, Aureus, Kraków; Nasieniewski, M. (2008), *Wprowadzenie do logik adaptywnych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Mikołaja Kopernika, Toruń.

W rozdziale czwartym zaproponujemy hierarchie systemów logiki parakonsystentnej, w których decydującą rolę odgrywa tzw. *kryterium jakościowe*. Kryterium jakościowe sprowadza się do określenia stopnia złożoności formuł, trywializujących dany system. Uzależnione jest więc nie od ilości formuł trywializujących dany system, lecz od ich kształtu.

Rozdział piąty zawiera analizę systemów logiki parakonsystentnej, spełniających tzw. *kryterium mieszane*. Kryterium mieszane, podobnie jak wcześniej wzmiankowane kryteria, jest bezpośrednio związane z pojęciem trywializacji. Aby przepełnić dany system wymagana jest, oprócz pary formuł: α, $\sim\alpha$, jeszcze jedna, dodatkowa formuła. To formuła specjalnego typu, posiadająca odpowiedni kształt. Dla systemu C_1 da Costy będzie to na przykład prawo niesprzeczności, $\sim(\alpha \wedge \sim\alpha)$, dla systemów *LFI* będzie to formuła α poprzedzona jednoargumentowym spójnikiem „$\circ$".

W książce przyjęto standardową notację logiczną. Jakiekolwiek odstępstwo od tej zasady zostanie zasygnalizowane w formie osobnego komentarza. Przez termin *formuła* będziemy rozumieć zarówno poszczególne, poprawnie zbudowane, wyrażenia języka danego systemu, np. $p \to q$, jak i schematy tych wyrażeń np. $\alpha \to \beta$ (tzw. *metaformuły*). Z kontekstu będzie wiadomo, o które ze znaczeń słowa *formuła* chodzi. Podobna uwaga dotyczy pojęcia *aksjomat* oraz *prawo logiczne*. W tekście pojawi się wiele praw logicznych i reguł wnioskowania. Zazwyczaj mają one swoje nazwy i oznaczenia. Dla ułatwienia lektury zamieszczamy poniżej listę najważniejszych praw i reguł, wykorzystanych w rozprawie.

I. Prawa logiczne

(1) aksjomaty pozytywnej częśći logiki Hilberta:

(H1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$	prawo poprzedzania (symplifikacji)
(H2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	prawo sylogizmu Fregego
(H3) $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$	prawo dołączania koniunkcji
(H4) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$	prawo pochłaniania dla koniunkcji
(H5) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$	prawo pochłaniania dla koniunkcji
(H6) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$	prawo pochłaniania dla alternatywy
(H7) $\alpha \to (\beta \vee \alpha)$	prawo pochłaniania dla alternatywy

(H8) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$ prawo dodawania poprzedników

(2) prawa implikacji intuicjonistycznej (implikacyjnej części pozytywnej logiki Hilberta):

(*pt*) $\alpha \to \alpha$ prawo tożsamości

(*ps*) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$ prawo sylogizmu (hipotetycznego)

(*pk*) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ prawo komutacji

(*psk*) $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$ prawo skracania

(3) aksjomaty *uklasyczniające* implikację intuicjonistyczną:

(*pP*) $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ prawo Peirce'a

(*pD*) $\alpha \vee (\alpha \to \beta)$ prawo Dummetta

(4) prawa zawierające spójnik negacji:

(*pK*) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to {\sim}\beta) \to {\sim}\alpha)$ prawo Kołmogorowa

(*pJ*) $(\alpha \to {\sim}\beta) \to (\beta \to {\sim}\alpha)$ prawo Johanssona

(*pn*) ${\sim}(\alpha \wedge {\sim}\alpha)$ prawo niesprzeczności

(*nn*) ${\sim}{\sim}\alpha \to \alpha$ prawo podwójnej negacji (mocne)

$(nn)^{*}$ $\alpha \to {\sim}{\sim}\alpha$ prawo podwójnej negacji (słabe)

(*tnd*) $\alpha \vee {\sim}\alpha$ prawo wyłączonego środka (*tertium non datur*)

$(tnd)^{\sim *}$ $\alpha \vee {\sim}{*}\,\alpha$ prawo wyłączonego środka z tzw. silną negacją

(*efq*) $\alpha \to ({\sim}\alpha \to \beta)$ prawo przepełnienia

$(efq)^{\wedge}$ $(\alpha \wedge {\sim}\alpha) \to \beta$ prawo przepełnienia (koniunkcyjno-implikacyjne)

(*pC*) $({\sim}\alpha \to \alpha) \to \alpha$ prawo Claviusa (mocne)

$(pC)^*\ (\alpha \to \sim \alpha) \to \sim \alpha$ prawo Claviusa (słabe)

osłabione wersje prawa przepełnienia:

$(efq)^k\ \alpha \to (\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \ldots\ (\sim^k \alpha \to \beta)\ldots)),\ k \geq 2$
$(efq)^\circ\ \circ\alpha \to (\alpha \to (\sim \alpha \to \beta))$

$(F1) \sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta)$

$(F1)^k\ \sim^k \alpha \to (\sim^{k+1} \alpha \to \beta),\ k \geq 1$

$(F2)\ (\alpha \to \beta) \to (\sim (\alpha \to \beta) \to \gamma))$

$(F2)^k\ \sim^{k-1} (\alpha \to \beta) \to (\sim^k (\alpha \to \beta) \to \gamma)),\ k \geq 1$

osłabione wersje praw podwójnej negacji:

$(nn)^k\ \sim^k \alpha \to \sim^{k-2} \alpha,\ k \geq 3$

$(nn)^{*k}\ \sim^{k-2} \alpha \to \sim^k \alpha,\ k \geq 3$

$(nn)^{\to} \sim \sim (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$

$(nn)^{*\to}\ (\alpha \to \beta) \to \sim \sim (\alpha \to \beta)$

osłabione wersje praw Claviusa:

$(pC)^{\to} (\sim (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$

$(pC)^{*\to} ((\alpha \to \beta) \to \sim (\alpha \to \beta)) \to \sim (\alpha \to \beta)$

prawa de Morgana:

$(dMa) \sim (\alpha \wedge \beta) \to (\sim \alpha \vee \sim \beta)$

$(dMa)^*\ (\sim \alpha \vee \sim \beta) \to \sim (\alpha \wedge \beta)$

$(dMb) \sim (\alpha \vee \beta) \to (\sim \alpha \wedge \sim \beta)$

$(dMb)^*\ (\sim \alpha \wedge \sim \beta) \to \sim (\alpha \vee \beta)$

prawa logiki koneksyjnej:

$(tB)\ (\alpha \to \sim \beta) \to \sim (\alpha \to \beta)$ teza Boecjusza (pierwsza)

$(tB)^*\ (\alpha \to \beta) \to \sim (\alpha \to \sim \beta)$ teza Boecjusza (druga)

$(tA) \sim (\sim \alpha \to \alpha)$ teza Arystotelesa (pierwsza)

$(tA)^{*} \sim (\alpha \to \sim \alpha)$ teza Arystotelesa (druga)

pozostałe prawa:

$(if) \sim (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \sim \beta)$

$(dd)^{\to} ((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \delta)) \to (((\alpha \to \beta) \to \sim (\gamma \to \delta)) \to \sim (\alpha \to \beta))$

$(pkr)^{*} (\alpha \to \beta) \to (\sim \beta \to \sim \alpha)$

$(F3) \sim \alpha \to \sim (\alpha \to \alpha)$

$(F4) (\sim \alpha \to \sim \beta) \to ((\sim \alpha \to \sim \sim \beta) \to \alpha)$

$(F4)^{\to} (\sim X \to Y) \to ((\sim X \to \sim Y) \to X)$, gdzie $X = \alpha \to \beta$, $Y = \gamma \to \delta$

$(F5) \sim (\alpha \to \sim \sim \alpha) \to \alpha$

$(F6) \sim (\alpha \to \beta) \to \alpha$

$(F6)^{*} \sim (\alpha \to \beta) \to \sim \beta$

$(F7)\ \alpha \to \sim (\alpha \to \sim \alpha)$

$(F8) (\alpha \to \beta) \to \sim (\alpha \wedge \sim \beta)$.

II. Reguły wnioskowania

$(RO)\ \alpha, \alpha \to \beta / \beta$ reguła odrywania

$(EFQ)\ \alpha, \sim \alpha / \beta$ reguła *ex falso quodlibet*

$(DK)\ \alpha, \beta / \alpha \wedge \beta$ reguła dołączania koniunkcji

$(Syll)\ \alpha \to \beta, \beta \to \gamma / \alpha \to \gamma$ reguła sylogizmu

modyfikacje reguły *ex falso quodlibet*:

$(EFQ)^{*}\ \alpha, \sim \alpha / \beta$, o ile $\alpha \notin var$

$(EFQ)^{(nn)*}\ \alpha \to \sim \sim \alpha, \alpha, \sim \alpha / \beta$

$(EFQ)^{\circ} \sim (\alpha \wedge \sim \alpha), \alpha, \sim \alpha / \beta$

$(EFQ)^{(n)}\ \alpha^{(n)}, \alpha, \sim \alpha / \beta$.

$(EFQ)^{\perp}\ \alpha \vee \sim \alpha, \sim (\alpha \vee \sim \alpha) / \beta$.

III. Zbiory aksjomatów:

$(AC_{\omega})\ \alpha$, o ile α jest aksjomatem systemu C_{ω} da Costy

$(AC_{min})\ \alpha$, o ile α jest aksjomatem systemu C_{min}

$(AH^{+})\ \alpha$, o ile α jest aksjomatem pozytywnej części logiki Hilberta.

Rozdział 1

LOGIKA PARAKONSYSTENTNA ZAŁOŻENIA FILOZOFICZNE

Logika parakonsystentna nie pojawiła się znikąd, nie była też dziełem przypadku. Pojawiła się w następstwie pewnej refleksji filozoficznej, poświęconej pojęciom sprzeczności i trywializacji. Z syntaktycznego punktu widzenia, każda teoria matematyczna jest dozwolona, o ile nie jest trywialna. Dewizę tę określa się mianem z*asady tolerancji w matematyce.* Podstawę filozoficzną zasady tolerancji odnajdziemy w idei pluralizmu logicznego Carnapa[1].

1.1. Kryteria

Pojęcia *sprzeczność* i *przepełnienie* związane są z własnościami relacji konsekwencji i konkretnymi prawami logicznymi. Dlatego też pośród kryteriów, jakie powinna spełniać logika parakonsystentna, wymieniane są na ogół dwa podstawowe warunki:

(1) sprzeczność nie implikuje przepełnienia
(2) prawo niesprzeczności, $(pn) \sim (p \wedge \sim p)$, nie jest twierdzeniem.

Prawo niesprzeczności traktowano dotychczas jako prawo bezwzględnie konieczne, stanowiące fundament naszego myślenia. Badania Łukasiewicza i da Costy, podważyły ten fundament.

> Wprawdzie już Heraklit podważał znaczenie zasady sprzeczności, można jednak sądzić, iż szedł zbyt daleko twierdząc, że 'spór (tu: sprzeczność) jest ojcem wszystkiego'. Zaletą idei parakonsystentności jest umiar; sprzeczność nie jest tu eliminowana za wszelką cenę, ale też, dzięki zrezygnowaniu z zasady przepełniania, nie staje się czymś powszechnym. Odpowiada to strukturze ludzkich przekonań: trudno byłoby chyba znaleźć człowieka o przekonaniach całkowicie spójnych, ale też, z drugiej strony, niełatwo spotkać kogoś, kto zgodziłby się, że z powodu jakiejś lokalnej, nieraz zupełnie nieważnej sprzeczności, jego wiedza o świecie jest zupełnie bezwartościowa[2].

---

[1] Zob. Carnap, R. (1949), *The Logical Syntax of Language*, Routledge & Kegan Paul, London, s. 51–52. Zasadę tolerancji w matematyce wyznawał m.in. jeden z twórców logiki parakonsystentnej, Newton C.A. da Costa.

[2] Urchs, M., Nasieniewski, M., Kwiatkowski, S. (1997), *Klasyczny rachunek zdań. Wykład i zadania. Skrypt dla studentów pierwszego roku*, Uniwersytet im. M. Kopernika, Toruń, s. 21.

Co więcej, pojawienie się sprzeczności w komunikacji międzyludzkiej może mieć podstawy w samym języku. Niezależnie bowiem, czy lapsusy natury terminologicznej posiadają wymiar czysto humorystyczny: „A w gazecie napisali, że zginął pudel podpalany. Aaa… jakby mnie tak podpalali, też bym uciekł”[3], artystyczny: „Więc przybądź i jeżeli chcesz mi co zarzucić, Zarzuć mi ręce na szyję”[4], dramatyczny: „Dzieci pogryzły psy”, czy też przybiorą formę sofizmatów: „Czy to, co zostało napisane, napisał ktoś? Otóż zostało napisane, że ty siedzisz, ale teraz jest to fałszywe; było jednak prawdziwe wtedy, gdy było pisane; a więc równocześnie została napisana prawda i fałsz”[5], wskazują na niesłychane bogactwo znaczeniowe wyrażeń języka naturalnego. Jakie są przyczyny błędów językowych? Twórcy logiki parakonsystentnej nie odpowiadają przeważnie na tak postawione pytanie. Koncentrują się nie na przyczynach, lecz co najwyżej na skutkach opisanego stanu rzeczy.

Zaplecza ideologicznego dla logik tolerujących sprzeczność poszukuje się nierzadko wśród filozofów, którym nie obce były rozważania nad naturą sprzeczności. Wymienia się wówczas Heraklita, Hegla, Marksa, Meinonga, Wittgensteina lub dialeteistów[6]. Na uwagę zasługuje także filozofia *jak gdyby* (niem. *die Philosophie des Als Ob*) Hansa Vaihingera.

Filozofia *jak gdyby* przyjmuje za punkt wyjścia następujące założenie: Świat jest realny, wszystko inne jest fikcją. Pojęcia, terminy, struktury, klasyfikacje, definicje itp. wszystko to jest wytworem umysłu ludzkiego i jako takie nie znajduje realnego odbicia w świecie rzeczy i zjawisk. Już same użyte w tym miejscu pojęcia: *rzecz*, *zjawisko* są niczym innym jak świadomie stworzonymi fikcjami, które okazują się niezastąpione w opisie świata, opisie badań naukowych, doznań religijnych czy w życiu codziennym. Vaihinger ukuł termin *fikcja* na określenie przekonań, o których wiemy, że nie są prawdziwe, lecz okazują się z pewnych względów, np. naukowych, korzystne. Używamy ich *jak gdyby* były one prawdziwe, o ile przynoszą nam korzyść poznawczą. Musimy jednak pamiętać, że granica między prawdą a fałszem jest płynna, albowiem wszystko, co postrzegamy ma charakter subiektywny: *Subjektives ist fiktiv; Fiktives ist falsch; Falsches ist Irrtum*

---

[3] Bohdan Smoleń, *Szeptanka*.

[4] Leopold Staff, *Do Muzy*.

[5] Arystoteles (1978), *O dowodach sofistycznych*, [w:] Arystoteles, *Topiki. O dowodach sofistycznych*, PWN, Warszawa, s. 292.

[6] Zob. da Costa, N.C.A., Béziau, J.Y., Bueno (1995a), *Paraconsistent Logic in a Historical Perspective*, „Logique et Analyse”, 150–151–152, s. 111–125; Sylvan, R. (1980), *Exploring Meinong's Jungle and Beyond: An Investigation of Noneism and the Theory of Items*. Department of Philosophy Monograph Series 3, Research School of Social Sciences, Australian National University, Canberra; Priest, G. (2007), *Paraconsistency and Dialetheism*, [w:] Gabbay, D., Woods, J. (red.), *Handbook of the History of Logic*, 8, The Many Valued and Nonmonotonic Turn in Logic, Elsevier, Amsterdam–Oxford, s. 129–204; Wang, W. (2011), *Against Classical Dialetheism*, „Frontiers of Philosophy in China”, 6/3, s. 492–500.

– pisał Vaihinger[7]. Jeśli postrzeganie sprzeczności ma charakter subiektywny, to tym samym nosi znamiona fikcji. To zaś, co fikcyjne, jest obarczone błędem.

Dotykamy w tym miejscu dość istotnego problemu. Problem związany jest z formalno-logicznym opisem *sprzeczności*. Z syntaktycznego punktu widzenia sprzeczność wyrażana jest zwykle za pośrednictwem spójnika negacji. W tradycyjnym sformułowaniu, negacja zdania prawdziwego winna być zdaniem fałszywym, negacja zdania fałszywego – zdaniem prawdziwym. Zdania α i $\sim \alpha$ są zdaniami sprzecznymi. Sprzeczności zaś nie mogą być prawdziwe[8]. Jeśli zatem prawdziwe jest zdanie α, to negacja tego zdania nie może być prawdziwa. Jeśli fałszywe jest zdanie α, to negacja tego zdania nie może być fałszywa. Nasuwa się wątpliwość: Czy spójnik „~", obecny w języku systemów logiki parakonsystentnej, można w ogóle uznać za negację? Odpowiedź nie jest jednoznaczna. Uzależniona jest od przyjętych założeń filozoficznych. Przyjmując bowiem, iż zdania α, $\sim \alpha$ są jednocześnie prawdziwe, stwierdzamy jedynie, że zdania te są *podprzeciwne*. Nie ma wówczas mowy o żadnej sprzeczności. Tak pojęta negacja wyraża co najwyżej pojęcie podprzeciwieństwa, a nie pojęcie sprzeczności.

Sytuację komplikuje dodatkowo fakt, iż w standardowym podejściu logicznym pojęcie sprzeczności związane jest nierozerwalnie z pojęciem przepełnienia (trywializacji). Sprzeczność implikuje przepełnienie. Sprzeczność trywializuje logikę. Logika parakonsystentna jest nietrywialną konstrukcją formalną, w której sprzeczność jest lub, przynajmniej potencjalnie, może być akceptowana. Wspominając o *nietrywialności* logiki parakonsystentnej mamy rzecz jasna na myśli *Definicję 0.3.*

Niech F oznacza zbiór wszystkich formuł języka J, zaś $\vdash$ będzie (semantyczną lub syntaktyczną) relacją konsekwencji określoną na zbiorze F.

Definicja 1.1.1. Powiemy, że logika $\langle F, \vdash \rangle$ jest logiką parakonsystentną, o ile $\{\alpha, \sim \alpha\} \nvdash \beta$, dla pewnych $\alpha, \beta \in F$.

Podana definicja ma bardzo ogólny charakter, toteż nietrudno wskazać tzw. przypadki graniczne, których analiza przysporzy niemało kłopotów interpretacyjnych. Zaliczymy do nich następujące sytuacje:

(1) z pary formuł sprzecznych nie wynika dowolna formuła β, tylko jej negacja, tj. $\{\alpha, \sim \alpha\} \nvdash \beta$, dla pewnych $\alpha, \beta \in F$, ale $\{\alpha, \sim \alpha\} \vdash \sim \beta$, dla dowolnych α, $\beta \in F$

(2) istnieje formuła (rodzaj *falsum*), z której wynika dowolne zdanie, np. $\{\sim (\alpha \vee \sim \alpha)\} \vdash \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F$

[7] Vaihinger, H. (1922), *Die Philosophie des Als Ob*, Verlag von Felix Meiner, Leipzig, s. 193.

[8] Takie stanowisko reprezentował np. Hartley Slater. Zob. Slater, B.H. (1995), *Paraconsistent Logics?*, „Journal of Philosophical Logic", 24/4, s. 451–454.

(3) istnieją zbiory formuł, z których wynika dowolne zdanie, np. $\{\alpha, \sim\alpha\} \not\vdash \beta$, dla pewnych $\alpha, \beta \in F$, ale $\{\sim(\alpha \wedge \sim\alpha), \alpha, \sim\alpha\} \vdash \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F$.

Warunek pierwszy spełnia tzw. logika minimalna Johanssona wraz z prezentowanym w § 2.4 systemem Kołmogorowa. Nie spełnia natomiast żaden ze znanych, *istotnych* systemów logiki parakonsystentnej. Oznacza to, że termin *parakonsystencja* kojarzony jest w większym stopniu ze zbiorem formuł, które trywializują dany system, aniżeli z formułą będącą rezultatem trywializacji. Ważna jest ilość formuł należących do zbioru przesłanek, ważny jest także ich kształt. W oparciu o to spostrzeżenie sformułowane zostało kryterium ilościowe, jakościowe i mieszane. Proponowane kryteria stanowią punktem odniesienia dla analizy poszczególnych systemów logiki parakonsystentnej.

Warunek drugi przywodzi na myśl klasyczne własności relacji wynikania. Z semantycznego punktu widzenia, z fałszu wynika dowolne zdanie – jak ma to miejsce choćby w przypadku klasycznego rachunku zdań. Kontrtautologia implikuje dowolną formułę. Istnieją systemy logiki parakonsystentnej, w których relacja wynikania posiada tę własność, tj. istnienia formuły, z której wynika dowolne zdanie. Należy do nich logika dyskusyjna Jaśkowskiego[9].

Trzeci warunek jest następstwem ograniczeń nałożonych na relację wynikania. Para formuł α, $\sim\alpha$, nie trywializuje danego systemu. Standardowe pojęcie sprzeczności uległo więc pewnym modyfikacjom. Skoro ze sprzeczności wynika dowolne zdanie, to $\{\alpha, \sim\alpha\}$ nie jest zbiorem sprzecznym. Dopiero rozszerzenie zbioru $\{\alpha, \sim\alpha\}$ o dodatkową formułę (lub formuły), powoduję jego *usprzecznienie*. Nasuwa się wątpliwość: O jaką dodatkową formułę lub formuły chodzi? Odpowiedź uzależniona jest od systemu, który rozważamy oraz kryterium, które zamierzamy zastosować. Jeśli w grę wchodzi kryterium ilościowe, zmuszeni będziemy do precyzyjnego określenia liczby formuł trywializujących system. Formułą taką może być negacja negacji formuły α, negacja negacji negacji formuły α, negacja negacji negacji negacji formuły α, itd. Zagadnienie to szerzej omówimy w § 3.2 na przykładzie B^n-systemów ($n \geq 1$). Jeśli z kolei mamy na myśli kryterium mieszane, pytanie sprowadza się do określenia kształtu dodatkowej formuły. Dodatkowa formuła może przybrać formę prawa niesprzeczności, albo np. koniunkcji coraz bardziej złożonych praw niesprzeczności. Tak jak to ma miejsce w przypadku C_n-systemów da Costy ($n \geq 1$).

Pośród wielu charakterystyk logiki parakonsystentnej, dwie mają szczególne znaczenie. Stanowią one punkt odniesienia dla licznych rozważań na temat istoty parakonsystencji. Pierwsza pochodzi z 1948 roku. Jej autorem jest polski logik

---

[9] Por. § 2.5, *Twierdzenie 2.5.4.*

Stanisław Jaśkowski. Celem Jaśkowskiego było zbudowanie rachunku logicznego, który spełniałby trzy podstawowe wymogi[10]:

(1) powstały rachunek w zastosowaniu do teorii sprzecznych nie będzie pociągał ich trywializacji

Dyrektywa stała się pierwowzorem dla definicji 1.1.1. Stanowi, lakonicznie rzecz ujmując, istotę logik tolerujących sprzeczność.

(2) powstały rachunek ma umożliwić praktyczne wnioskowanie

Postulat, sprowadza się do wymogu, aby rachunek był dostatecznie bogaty w zbiór (schematów) twierdzeń. Współcześnie określa się to mianem postulatu maksymalnej parakonsystencji[11]. Niestety, jest kwestią sporną, jak należy rozumieć zwrot *dostatecznie bogaty*. Każde rozstrzygnięcie ma charakter arbitralny i stanowi otwarte pole do interpretacji.

(3) powstały rachunek logiczny ma posiadać uzasadnienie intuicyjne.

Warunek obarczony jest dużą dozą subiektywizmu. Niemniej, wskazuje na konieczność uzasadnienia dokonanego wyboru i powstrzymania się od mnożenia *bytów logicznych* ponad miarę.

Druga charakterystyka pochodzi z 1974 roku. Jej autorem jest brazylijski logik Newton da Costa. Celem da Costy było opracowanie hierarchii systemów, spełniających cztery zasadnicze warunki:

(1) prawo niesprzeczności nie będzie twierdzeniem żadnego z systemów hierarchii

Istnienie nietrywialnych teorii sprzecznych nie powinno być postrzegane jako rodzaj zagrożenia. Nietrywialne teorie sprzeczne mogą być równie wartościowe, co teorie niesprzeczne. Problematyczny jest co najwyżej formalizm, który leży u ich podstaw, a ściślej, niektóre jego twierdzenia – w tym zasada niesprzeczności. Zasadę tę należy więc odrzucić. Należy zbudować system tudzież hierarchię systemów, w których prawo niesprzeczności nie będzie twierdzeniem. Odrzucenie prawa niesprzeczności stanowi jedno z podstawowych założeń, które mają spełniać postulowane systemy. Dla da Costy ma to wymiar nie tylko logiczno-formalny, ale posiada również głęboki sens filozoficzny. Jak niebawem się przekonamy, nie wszystkie systemy logiki parakonsystentnej spełniają pierwsze kryterium da Costy.

---

[10] Jaśkowski, S. (1948), *Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*, „Studia Societatis Scientiarum Torunesis", 1/5, s. 57–77.

[11] Por. Arieli, O., Avon, A., Zamansky, A. (2011), *Ideal Paraconsistent Logics*, „Studia Logica", 99/1–3, s. 32.

(2) z pary formuł sprzecznych, tj. α i $\sim \alpha$, nie będzie można w ogólności wydedukować dowolnej formuły β

Sprzeczność nie implikuje trywialności. Otwarty pozostaje wszakże problem, czy formuły α i $\sim \alpha$, to rzeczywiście para zdań sprzecznych.

(3) język formalny systemów powinien w łatwy sposób dać się rozszerzyć do języka pierwszego rzędu (*z* lub *bez* identyczności)

Język klasycznego rachunku zdań jest językiem zbyt ubogim, żeby stanowić podstawę formalizacji dla skomplikowanych teorii matematycznych. Potrzebny jest język o większej mocy ekspresyjnej. Język logiki pierwszego rzędu spełnia, zdaniem da Costy, to kryterium.

(4) systemy powinny zawierać możliwie wiele praw i reguł inferencji logiki klasycznej.

Odrzucenie praw niesprzeczności i przepełnienia nie powinno skutkować odrzuceniem innych, *bezpiecznych* praw i reguł klasycznego rachunku zdań. Które zaś z praw i reguł nazwiemy bezpiecznymi, będzie przede wszystkim następstwem przyjętych założeń formalno-logicznych[12].

1.2. ZASADA *EX FALSO QUODLIBET*

Średniowieczna zasada głosi: z fałszu wynika wszystko (łac. *ex falso sequitur quodlibet*) tudzież: ze sprzeczności wynika wszystko (łac. *ex contradictione sequitur quodlibet*). W logice tradycyjnej fałszywe jest twierdzenie, że dwa zdania sprzeczne są jednocześnie prawdziwe. Należy więc unikać sprzeczności. W XII wieku Wilhelm z Soissons, korzystając z zasady *ex falso quodlibet*, wykazał, co stanie się, gdy zignorujemy to ostrzeżenie. Załóżmy, że jednocześnie prawdziwe są zdania sprzeczne, tj. *p* i *nie-p*, wówczas:

(1) Jeśli prawdziwe są zdania *p* i *nie-p*, to prawdziwe jest zdanie *p*.

(2) Zatem zdanie *p* jest prawdziwe.

(3) Jeśli prawdziwe są zdania *p* i *nie-p*, to prawdziwe jest zdanie *nie-p*.

(4) Zatem zdanie *nie-p* jest prawdziwe.

(5) Jeśli zdanie *p* jest prawdziwe, to prawdziwe jest zdanie *p* lub prawdziwe jest zdanie *q*.

---

[12] Próbę szczegółowego opracowania zagadnienia podjęto w Arieli, O., Avon, A., Zamansky, A. (2011), *op. cit.*, s. 31–60.

(6) Zatem prawdziwe jest zdanie *p* lub prawdziwe jest zdanie *q*.

(7) Jeśli prawdziwe jest zdanie *nie-p*, oraz prawdziwe jest zdanie *p* lub prawdziwe jest zdanie *q*, to prawdziwe jest zdanie *q*.

(8) Zatem prawdziwe jest zdanie *q*.

Tak więc, jeśli prawdziwe są zdania *p* i *nie-p*, to prawdziwe jest zdanie *q*[13]. Ze sprzeczności wynika dowolne zdanie. Z fałszu wynika wszystko.

Z *parakonsystentnego* punku widzenia, krok (7) dowodu budzi największe kontrowersje. Poddano go krytyce już w XV wieku[14]. W kroku (7) wykorzystano bowiem ukryte założenie: negacja zdanie prawdziwego jest zdaniem fałszywym, czyli jeśli *nie-p* jest zdaniem prawdziwym, to *p* jest zdaniem fałszywym. Jeżeli akceptujemy to założenie, wtedy, zgodnie z prawem *modus tollendo ponens* (w wersji z alternatywą), jeśli prawdziwe jest zdanie *p* lub prawdziwe jest zdanie *q*, oraz fałszywe jest zdanie *p*, to prawdziwe jest zdanie *q*. Stąd wniosek, iż prawdziwe jest zdanie *q*. W systemach logiki parakonsystentnej takie założenie zwykle nie jest akceptowane. Wyjaśnimy to, odwołując się do definicji klasycznej funkcji wartościowania *v*. W klasycznym rachunku zdań, pośród postulatów, które spełnia funkcja *v*, widnieje następujący warunek:

$(v\sim)$ $v(\sim\alpha) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$.

Zastępując równoważność metajęzykową *wtw, gdy*, metajęzykową implikacją *jeżeli …, to …*, otrzymamy dwa warunki:

$(v1\sim)$ jeżeli $v(\sim\alpha) = 1$, to $v(\alpha) = 0$

$(v2\sim)$ jeżeli $v(\sim\alpha) = 0$, to $v(\alpha) = 1$.

Najwięcej potencjalnych wątpliwości budzi warunek $(v1\sim)$. Odrzuca go da Costa, odrzucają twórcy systemów *LFI*. Niestety, system spełniający tylko postulat $(v2\sim)$ nie ma zbyt wielu walorów praktycznych[15]. Dodaje się więc dwa kolejne (lub tylko jeden) postulaty:

$(v1\sim\sim)$ jeżeli $v(\sim\sim\alpha) = 1$, to $v(\alpha) = 1$

$(v2\sim\sim)$ jeżeli $v(\sim\sim\alpha) = 0$, to $v(\alpha) = 0$.

---

[13] W wersji formalnej dowód Wilhelma przedstawił m.in. C.I. Lewis. Zob. Martin, Ch. J. (1986), *William's Machine*, „Journal of Philosophy", 83/10, s. 565.

[14] Zob. Sylvan, R. (2000), *A Preliminary Western History of Sociative Logics*, [w:] Hyde, D., Priest, G. (red.), *Sociative Logics and Their Applications: Essays by the Late Richard Sylvan*, Ashgate Publishers, Aldershot.

[15] Por. Batens, D. (1980), *Paraconsistent Extensional Propositional Logics*, „Logique et Analyse", 11, s. 3–11.

Warunki $(v2{\sim})$ i $(v1{\sim\sim})$ spełniają np. systemy C_{min}, *Ci* oraz *Cil*. Postulaty $(v2{\sim})$, $(v1{\sim\sim})$ i $(v2{\sim\sim})$ spełnia zaś system *Cile*[16].

Można zaryzykować twierdzenie, że systemy, w których spójnik negacji charakteryzują postulaty $(v2{\sim})$, $(v1{\sim\sim})$ i $(v2{\sim\sim})$, są systemami logiki parakosystentnej[17].

W logice współczesnej zasadę *ex falso quodlibet* utożsamia się zazwyczaj z regułą wnioskowania:

(EFQ) $\alpha, \sim \alpha \,/\, \beta$,

czasem z własnością relacji konsekwencji:

$\{\alpha, \sim \alpha\} \vdash \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F$,

rzadziej z prawem logicznym:

(*efq*) $\alpha \to (\sim \alpha \to \beta)$.

Regułę (EFQ) określano mianem reguły Dunsa Szkota, zaś (*efq*) – prawem Dunsa Szkota. W 1640 roku wydano *Opera Omnia* Dunsa Szkota. Pośród pism znajdowały się *Komentarze do Analityk Pierwszych* (łac. *In librum primum Priorum Analyticorum Aristotelis Questions on Prior Analytics quaestiones*). W *Komentarzach* lakonicznej interpretacji poddano również zasadę *ex falso quodlibet.* Autentyczność *Komentarzy* została jednak podważona w latach trzydziestych XX wieku przez Gölza[18]. Prawdziwy autor tego dzieła jest nieznany, nieznanego autora nazwano Pseudo-Szkotem. W konsekwencji reguła (EFQ) otrzymała nową nazwę: Pseudo-Szkota[19]. Anonimowego komentatora dzieł logicznych Arystotelesa utożsamia się czasem z osobą Jana z Kornwalii, który studiował w Oksfordzie około roku 1300 oraz wykładał teologię w Paryżu od 1310 do 1315 roku[20].

Pod koniec wieku XX zasadę *ex falso quodlibet* zaczęto łączyć z pojęciem *eksplozywności*. Relację konsekwencji spełniającą warunek $\{\alpha, \sim \alpha\} \vdash \beta$, dla do-

---

16 Zob. § 5.3.

17 Zob. Tuziak, R. (1996), *Paraconsistent Extensions of Positive Logic*, „Bulletin of the Section of Logic", 25/1, s. 16.

18 Zob. Buckner, E. (2015), *On the Authenticity of Scotus's Logical Works*, [w:] Hall, A. W., Klima, G. (red.), *Maimonides on God and Duns Scotus on Logic and Metaphysics* (t. 12, Proceedings of the Society for Medieval Logic and Metaphysics), Cambridge Scholars Publishing, Cambridge, s. 55–56.

19 Zob. Priest, G., Routley, R. (1982), *Lessons from Pseudo Scotus*, „Philosophical Studies", 42, s. 189–199.

20 Zob. Courtley, W. J. (1988), *Schools and Scholars in Fourteenth-Century England*, Princeton University Press, Princeton, s. 228.

wolnych $\alpha, \beta \in F$, nazwano *eksplozywną* (ang. *explosive*)[21]. Korzystając z pojęcia eksplozywności, można przeformułować definicję 1.1.1 do postaci następującej:

*Definicja 1.1.1.** Logikę $\langle F, \vdash \rangle$ nazwiemy parakonsystentną, o ile relacja $\vdash$ nie jest eksplozywna.

Zasada *ex falso* (vel *ex contradictione*) *quodlibet* należy do kluczowych pojęć logiki parakonsystenetnej, kluczowych w sensie negatywnym. Logikę parakonsystentną definiujemy bowiem w odniesieniu do zasady, której nie powinna spełniać. Nie mówimy, jakie pozytywne własności ma posiadać relacja konsekwencji, tylko jakich własności spełniać nie powinna.

1.3. SZKOŁY PARAKONSYSTENCJI

W czasach starożytnych przynależność do danej szkoły filozoficznej wiązała się z określonymi regułami postępowania. Uczniowie Pitagorasa byli na przykład zobowiązani do dzielenia się swoimi majątkami ze wspólnotą, którą tworzyli. „[...] uczniowie łączyli razem swoje majątki. Przez pięć lat zachowywali milczenie, słuchali tylko wykładów Pitagorasa, ale go nie oglądali aż do chwili, gdy się wykazali znajomością jego nauki. Dopiero od tej pory przychodzili do jego domu i mogli go widzieć”[22]. Domeną zaś Cyników była prostota. „Cynicy uważali, że trzeba wieść proste życie, poprzestawać na skromnych pokarmach i zadowalać się jedną tylko szatą, gardzić bogactwem, sławą i szlachetnym urodzeniem. Niektórzy nawet odżywiali się tylko warzywami, pili zimną wodę i mieszkali w byle jakich schronieniach [...]”[23] Do jakiej szkoły filozoficznej człowiek należał, taki wiódł żywot. Filozofia nie była dyscypliną *stricte* akademicką. Była sposobem, w jaki pojmuje się świat, w jaki przeżywa się życie.

W czasach współczesnych przynależność do danej szkoły oznacza coś innego, aniżeli oznaczało w czasach starożytnej Grecji. Punkt ciężkości przesunięty został ze sfery praktycznej do sfery teoretycznej. Przynależność do danej szkoły nie wiąże się już z obowiązkiem przekazania własnego majątku na rzecz szkoły, nie wiąże się także z koniecznością przejścia na dietę wegańską. Ma natomiast związek z rozwojem naukowym[24]. Przy takim rozumieniu szkoły pojawia się potrzeba wskazania kryterium przynależności. Kto i na jakich zasadach przynależy do danej szkoły? Opisane trudności trafnie wyraził Ryszard Jadczak:

---

[21] Zob. Carnielli, W.A., Marcos, J. (2001), *Ex Contradictione Non Sequitur Quodlibet*, „Proceedings of the II Annual Conference on Reasoning and Logic”, Bucharest.

[22] Laertios, D. (1984), *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, przeł. I. Krońska, PWN, Warszawa, s. 468.

[23] *Ibid.*, s. 366.

[24] Por. Tatarkiewiczowie T. i W. (1979), *Wspomnienia*, PIW, Warszawa, s. 125.

> Trudno znaleźć jasne kryterium, które pozwoliłoby na łączenie określonej grupy ludzi, parających się nauką, w szkołę. Czy dla określenia „szkoła" w nauce wystarczy przyjąć istnienie mistrza-nauczyciela, który – dzięki swym osiągnięciom badawczym, autorytetowi oraz pewnym zasadom pracy – skupia wokół siebie jakąś liczbę uczniów-wychowanków? Czy za reprezentantów „szkoły" można uznać wszystkich, którzy w pewnym okresie pobierali nauki u „mistrza" (zdobywali pod jego kierunkiem stopnie naukowe), czy też tylko tych, którzy pozostawali z nim w ideowych związkach, czerpali z jego dokonań, realizowali i kontynuowali jego program badawczy?[25]

W opisie szkół parakonsystencji posłużymy się nieco problematycznym, w czasach powszechnej globalizacji, kryterium geograficznym. Mając świadomość, że zaproponowany podział nie jest podziałem zupełnym, a elementy podziału nie będą, z uwagi na dynamiczny charakter rzeczywistości, rozłączne, wyróżnimy pięć, naszym zdaniem najważniejszych, *szkół* logiki parakonsystentnej[26]:

(1) Brazylijska szkoła parakonsystencji

Główną postacią szkoły jest Newton da Costa. Da Costa odgrywa podobną rolę w logice brazylijskiej jak Kazimierz Twardowski w polskiej logice okresu międzywojennego. Przed pojawieniem się da Costy jedynie nieliczni, zainteresowani logiką, słyszeli o logice brazylijskiej.

Autorem pierwszego brazylijskiego podręcznika do logiki był urodzony w 1916 roku w São Paulo Vicente Ferreira da Silva. W dziedzinie logiki Ferreira da Silva był samoukiem. Studiował początkowo dzieła Russella, Whiteheada i Wittgensteina, skąd czerpał inspirację do badań nad logiką matematyczną. W 1939 roku opublikował *Logikę współczesną* (port. *A Lógica Moderna*), rok później ukazały się jego *Elementy logiki matematycznej* (port. *Elementos de Lógica Matemática*)[27]. Opublikowane książki zyskały mu grono wielbicieli, do których m.in. należał Newton da Costa. Ferreira da Silva był asystentem Quine'a, podczas jego czteromiesięcznego pobytu w Brazylii (rok 1942)[28]. Redagował, głównie pod względem językowym, portugalskojęzyczną książkę Quine'a *O Sentido da Nova Lógica.* W ogólnym rozrachunku, spotkanie z Quinem zakończyło się jednak dla Ferreira da Silvy wielkim rozczarowaniem. Sprowokowało jego głęboką filozoficzną przemianę. Porzucił swoje zainteresowania logiką na rzecz fenome-

---

[25] Jadczak, R. (1990), *O tzw. Szkole Lwowsko-Warszawskiej*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici", Filozofia XI, 197, s. 23.

[26] Por. Tanaka, K. (2003), *Three Schools of Paraconsistency*, „Australasian Journal of Logic", 1, s. 28–42. Tanaka wymienia trzy główne szkoły: brazylijską, autralijską i belgijską.

[27] Zob. Teixeira, A. B., *Vicente Ferreira da Silva: da lógica simbólica à filosofia da mitologia*, Centro de Documentação do Pensamento Brasileiro, s. 2, URL=<http://www.cdpb.org.br/vicente_ferreira_da_silva_braz_teixeira.pdf> (dostęp: 10.03.2017).

[28] Zob. Quine, W.V. (1997), *Mission to Brazil*, „Logique & Analyse", 157, s. 6.

nologii i filozofii egzystencjalnej. Ferreira da Silva stał się jednym z pionierów studiów nad filozofią Heideggera w Brazylii.

W 1957 roku zawiązała się w Kurytybie nieformalna grupa logiczna. Przewodniczył jej Newton da Costa. Do grupy należała m.in. Ayda I. Arruda, późniejsza współpracownica da Costy, autorka licznych prac z dziedziny logiki parakonsystentnej. W 1968 roku da Costa przenosi się do São Paulo, gdzie w tamtejszym uniwersytecie (*Universidade de São Paulo*) formuje nową grupę badawczą, skupioną wokół problematyki logik tolerujących sprzeczność. W 1979 roku powstaje Brazylijskie Stowarzyszenie Logiczne (port. *Sociedade Brasileira de Lógica*), które za cel stawia sobie m.in.: promowanie kursów, seminariów i konferencji z zakresu logiki, upowszechnianie wyników prac badawczych oraz stymulowanie wymiany naukowej[29]. Z da Costą współpracowali tacy logicy brazylijscy jak M.S. de Gallego, A.M. Sette, E.H. Alves, I.Urbas oraz I. D'Ottaviano.

Do końca lat osiemdziesiątych XX wieku problematyka badawcza brazylijskiej szkoły parakonsystencji ogniskowała się przede wszystkim wokół C_n–systemów da Costy[30]. W latach dziewięćdziesiątych, pogłębiono badania nad wykorzystania logiki parakonsystentnej w podstawach matematyki[31]. Na początku XXI wieku zintensyfikowano badania nad wykorzystaniem logiki parakonsystentnej w budowie inteligentnych systemów informatycznych[32]. W tym samym czasie pewną popularność zyskały również tzw. *Logiki Sprzeczności Formalnej* (*LFI*, z ang. *Logics of Formal Inconsistency*) autorstwa Marcosa, Carnielliego i Coniglio[33].

(2) Polska szkoła parakonsystencji

Postacią pierwszoplanową polskiej szkoły parakonsystencji jest bez wątpienia Stanisław Jaśkowski. Jaśkowski urodził się w Warszawie w roku 1906. W 1924 roku rozpoczął studia matematyczne w Uniwersytecie Warszawskim. Podczas studiów uczęszczał na wykłady prowadzone przez Łukasiewicza, Leśniewskiego i Tarskiego. W 1932 roku uzyskał stopień doktora na podstawie dysertacji poświęconej dedukcji naturalnej. Promotorem doktoratu był Jan Łukasiewicz. Po zakończeniu II wojny światowej Jaśkowski rozpoczął pracę w Uniwersytecie im. Mikołaja Kopernika w Toruniu. Z toruńskim uniwersytetem zwią-

---

[29] Zob. D'Ottaviano, I.M.L., Carnielli, W.A., Alves E.H. (1996), *The Centre for Logic in Campinas and the Development of Logic in Brazil*, „Logique & Analyse", 153–154, s. 18.

[30] Zob. § 2.6.

[31] Zob. Mortensen, Ch. (1990), *Models for Inconsistent and Incomplete Differential Calculus*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 31, s. 274–285; Mortensen, Ch. (1995), *Inconsistent Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[32] Zob. Abe, J.M. (2015), *Paraconsistent Intelligent-Based Systems: New Trends in the Applications of Paraconsistency*, Intelligent Systems Reference Library, 94, Springer International Publishing.

[33] Zob. § 5.3.

zał się na kolejne dwadzieścia lat życia. Zmarł w 1965 roku. Spuścizna naukowa Jaśkowskiego jest imponująca. Obejmowała prace z zakresu dedukcji naturalnej, logik nieklasycznych – w tym: logiki intuicjonistycznej oraz logik modalnych, podstaw matematyki, a także pozycje popularnonaukowe[34]. Jaśkowski był twórcą pierwszego w historii logiki parakonsystentnego rachunku logicznego, tzw. logiki dyskusyjnej *D2*. Prezentacji tego rachunku poświęcamy osobny podrozdział książki[35].

Punktem przełomowym dla rozwoju logiki dyskusyjnej stał się rok 1967. W Paryżu w tym właśnie roku spotykają się dwaj logicy: Newton C.A. da Costa i dawny uczeń Jaśkowskiego, Lech Dubikajtis. Od tego momentu datuje się wzajemna ich współpraca na gruncie logiki dyskusyjnej. W Polsce badania nad systemami logiki dyskusyjnej prowadzono w zasadzie w dwóch ośrodkach akademickich: Toruniu i Katowicach, częściowo samodzielnie, częściowo zaś we współpracy z ośrodkami zagranicznymi. Owocem tych badań stały się pierwsze aksjomatyzacje systemu logiki dyskusyjnej, wyrażone w języku modalnym[36]. Równolegle z badaniami nad modalną charakterystyką systemu logiki dyskusyjnej, prowadzono badania nad algebraizacją *D2*. Pierwsze próby opracowania semantyki algebraicznej dla systemu *D2* pochodzą z 1968 roku[37]. Największy wkład w rozwój badań nad algebraizacją logiki dyskusyjnej miał niewątpliwie Jerzy Kotas. Kotas jako pierwszy udowodnił, iż logika Jaśkowskiego jest algebraizowalna[38]. W 1998 roku zorganizowano w Toruniu sympozjum upamiętniające pięćdziesięciolecie powstania logiki dyskusyjnej[39]. Głównym organizatorem

---

[34] Zob. Dubikajtis, L. (1967), *Stanisław Jaśkowski*, „Ruch Filozoficzny", 25/3–4, s. 187–198; Dubikajtis, L. (1975), *The Life and Works of Stanisław Jaśkowski*, „Studia Logica", 34/2, s. 109–116.

[35] Zob. § 2.5.

[36] Zob. Kotas, J. (1974), *The Axiomatization of S. Jaśkowski's Discussive System*, „Studia Logica", 33/2, s. 195–200; Kotas J. (1975), *Discussive Sentential Calculus of Jaśkowski*, „Studia Logica", 34/2, s. 149–168; Kotas, J., da Costa, N.C.A. (1989), *Problems of Modal and Discussive Logics*, [w:] Priest, G., Routley, R., Norman, J. (red.), *Paraconsistent Logic, Philosophia*, München-Hamden-Wien, s. 227–244.

[37] Zob. da Costa, N.C.A., Dubikajtis, L. (1968), *Sur la logique discursive de Jaśkowski*, „Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences (Série des sciences math., astr. et phys.)", 16/7, s. 551–557.

[38] Zob. Kotas, J. (1971), *On the Algebra of Classes of Formulae Jaśkowski's Discussive System*, „Studia Logica", 27, s. 81–90; Kotas, J. (1971), *Logical Systems with Implications*, „Studia Logica", 28, s. 101–116; Kotas, J. (1974), *On Quantity of Logical Values in the Discussive D2 System and in Modular Logic*, „Studia Logica", 33/3, s. 273–275; Ciuciura, J. (2015), *Algebraization of Jaśkowski's Paraconsistent Logic D2*, „Studies in Logic, Grammar and Rhetoric", 42/55, s. 173–193.

[39] Zob. Perzanowski, J., Pietruszczak, A. (1999), *Preface*, „Logic and Logical Philosophy", 7, s. 5–6.

konferencji był Jerzy Perzanowski[40]. Badania nad logiką dyskusyjną prowadzili w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych XX wieku m.in. Tomasz Furmanowski, Jerzy Błaszczuk, Wiesław Dziobiak oraz współpracujący z logikami polskimi Max Urchs[41]. Badania kontynuują obecnie: Marek Nasieniewski, Andrzej Pietruszczak[42] i Janusz Ciuciura[43].

(3) Belgijska szkoła parakonsystencji

Czołową postacią belgijskiej szkoły parakonsystencji jest Diderik Batens, wieloletni wykładowca Uniwersytetu w Gandawie. Batens to autor ponad 150 publikacji, zarówno z dziedziny logiki, epistemologii jak i filozofii nauki. Jest pomysłodawcą tzw. logik adaptywnych. Z formalno-logicznego punktu widzenia, idea logik adaptywnych wiąże się nierozerwalnie z powstaniem logiki *CLuN*[44]. Pierwsze wzmianki na temat logiki adaptywnej pojawiają się w pracy Batensa pochodzącej z 1989 roku[45].

Intuicje i inspiracje filozoficzne, które legły u podstaw logik adaptywnych, związane są z niepewnością wiedzy na temat przyszłych wydarzeń, sprzeczności generowanej przez różne, równie wiarygodne źródła informacji oraz braku abso-

---

[40] Zob. Perzanowski, J. (1975), *On M-fragments and L-fragments of Normal Modal Propositional Logics*, „Reports on Mathematical Logic", 5, s. 63–72.

[41] Zob. Urchs, M. (1986), *On Two Systems of Stanisław Jaśkowski*, „The Journal of Non-Classical Logic", 3/1, s. 25–32; Błaszczuk, J.J., Dziobiak, W. (1975a), *Remarks on Perzanowski's Modal System*, „Bulletin of the Section of Logic", 4/2, s. 57–64; Błaszczuk, J.J., Dziobiak, W. (1975b), *Modal Systems Related to S4n of Sobociński*, „Bulletin of the Section of Logic", 4/3, s. 103–108; Błaszczuk, J.J., Dziobiak, W. (1976), *An Axiomatization of M-counterparts for Some Modal Calculi*, „Reports on Mathematical Logic", 6, s. 3–6; Błaszczuk, J.J., Dziobiak, W. (1977), *Modal Logics Connected with Systems S4n of Sobociński*, „Studia Logica", 36/3, s. 151–164; Furmanowski, T. (1975), *Remarks on Discussive Propositional Calculus*, „Studia Logica", 34/1, s. 39–43.

[42] Zob. Nasieniewski, M., Pietruszczak, A. (2008), *The Weakest Regular Modal Logic Defining Jaskowski's Logic D2*, „Bulletin of the Section of Logic", 37/3–4, s. 197–201; Nasieniewski, M., Pietruszczak, A. (2009), *New Axiomatizations of the Weakest Regular Modal Logic Defining Jaśkowski's Logic D2*, „Bulletin of the Section of Logic", 38/1–2, s. 45–50; Nasieniewski, M., Pietruszczak, A. (2012), *On the Weakest Modal Logics Defining Jaśkowski's Logic D2 and the D2-Consequence*, „Bulletin of the Section of Logic", 41/3–4, s. 215–232.

[43] Zob. Ciuciura, J. (2004), *Labelled Tableaux for D2*, „Bulletin of the Section of Logic", 33/4, s. 223–235; Ciuciura, J. (2008), *Negations in the Adjunctive Discursive Logic*, „Bulletin of the Section of Logic", 37/3–4, s. 143–160; Ciuciura, J. (2013), *Non-Adjunctive Discursive Logic*, „Bulletin of the Section of Logic", 42/3–4, s. 169–182.

[44] Zob. § 3.1.

[45] Zob. Batens, D. (1989), *Dynamic Dialectical Logics*, [w:] Priest, G., Routley, R., Norman, J., (red.), *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent*, Philosophia Verlag, Monachium, s. 187–217.

lutnej pewności, co do przyjętych założeń. Rozumowania prowadzone w obrębie logik adaptywnych winny mieć zatem charakter dynamiczny. Całkowita rezygnacja z logiki klasycznej nie jest jednak zbyt dobrym pomysłem. Owszem, wraz z jej odrzuceniem pozbędziemy się wielu nieintuicyjnych praw logicznych, ale utracimy również wiele innych praw, co do których intuicyjności nie mielibyśmy żadnych zastrzeżeń. Batens zaproponował następujące rozwiązanie. W logikach adaptywnych używane będą dwie relacje konsekwencji: *słabsza*, zwana logiką dolną (ang. *lower limit logic*) – funkcję logiki dolnej może pełnić np. logika *CLuN*; oraz *silniejsza*, zwana logiką górną (ang. *upper limit logic*) – utożsamiona np. z logiką klasyczną. Oprócz wspomnianych relacji konsekwencji, przyjmuje się dodatkowo tzw. zbiór formuł *abnormalnych* (ang. *abnormalities*) – zbiór taki mogą tworzyć np. wszystkie formuły o postaci $\alpha \wedge \sim \alpha$; oraz tzw. strategię adaptacyjną, np. minimalnej abnormalności formuł[46].

(4) Australijska szkoła parakonsystencji

Głównym przedstawicielem australijskiej szkoły parakonsystencji jest obecnie Graham Priest. Do roku 1996 był również Richard Sylvan (dawniej Routley). W dużym uproszczeniu można przyjąć, że jednym z fundamentalnych założeń *szkoły* jest przeświadczenie, iż w świecie obiektywnym sprzeczności istnieją realnie. Stanowisko Priesta nosi miano *dialetheizmu*. *Dialetheia* jest pewnym zdaniem, powiedzmy α, takim, że zarówno α jak i negacja tego zdania są jednocześnie prawdziwe. Dialetheizm to zaś przekonanie, że takie zdania jak *dialetheia* naprawdę istnieją[47].

(5) Izraelska szkoła parakonsystencji

Określenie *izraelska szkoła parakonsystencji* może, na pierwszy rzut oka, wydawać się pewnym nadużyciem. Za wyodrębnieniem jej spośród innych *szkół*

---

[46] Zob. Batens, D. (1999), *Inconsistency-adaptive Logics*, [w:] Orlowska, E. (red.), *Logic at Work. Essays Dedicated to the Memory of Helena Rasiowa*, Physica Verlag (Springer), Heidelberg–New York; Batens, D. (2000), *Minimally Abnormal Models in Some Adaptive Logics*, „Synthese", 125, s. 5–18; Batens, D. (2000b), *A Survey of Inconsistency-adaptive Logics*, [w:] Batens, D., Mortensen, Ch., Priest G., Van Bendegem, J.P. (red.), *Frontiers of Paraconsistent Logic*, Research Studies Press, Baldock, UK; Batens, D. (2001), *A General Characterization of Adaptive Logics*, „Logique et Analyse", 173–175, s. 45–68; Batens, D. (2004), *Extending the Realm of Logic. The Adaptive-Logic Programme*, [w:] Weingartner, P. (red.), *Alternative Logics. Do Sciences Need Them?*, Springer, Berlin–Heidelberg. W języku polskim dostępne jest wprowadzanie do logik adaptywnych autorstwa Marka Nasieniewskiego. Zob. Nasieniewski, M. (2008), *op.cit.*

[47] Zob. Priest, G., Routley, R., Norman, J. (red.) (1989), *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, München: Philosophia Verlag, Philosophia, München–Hamden–Wien; Priest, G. (1990), *Dialectic and Dialetheic*, „Science and Society", 53, s. 388–415; Priest, G. (2006), *Doubt Truth to Be a Liar*, Oxford University Press, Oxford.

przemawiają jednakże trzy fundamentalne kwestie: względna jednorodność tematyki, próba systematyzacji systemów logiki parakonsystentnej oraz wypracowanie nowych metod formalnych. Głównym przedstawicielem szkoły jest Aaron Avron, którego zainteresowania badawcze obejmują zarówno rozważania z zakresu podstaw matematyki, informatyki, rachunku sekwentów jak i, rzecz jasna, logiki parakonsystentnej[48].

Na początku XXI wieku Avron opracował koncepcję tzw. matryc niedeterministycznych (*Nmatryc*)[49]. Idea Nmatryc logicznych zapożyczona została z informatyki, ściślej od automatów niedeterministycznych. Automat niedeterministyczny jest rodzajem automatu, którego działania nie da się do końca przewidzieć[50] – podobnie w Nmatrycach. W standardowym, deterministycznym podejściu wartość logiczna wyrażenia złożonego jest jednoznacznie określona przez wartość logiczną podformuł. W przypadku Nmatryc wartość logiczna formuły złożonej może być określona niedeterministycznie dzięki pewnemu niepustemu zbiorowi opcji[51]. Nmatryce znalazły zastosowanie w semantycznej charakterystyce wielu systemów logiki tolerującej sprzeczność[52].

---

[48] Zob. Avron, A. (1999), *Negation: Two Points of View*, [w:] Gabbay, D., Wansing, H., (red.), *What is Negation?*, Applied Logic Series, 13, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston, s. 3–22; Avron, A. (2008), *5-valued Non-deterministic Semantics for the Basic Paraconsistent Logic mCi*, „Studies in Logic, Grammar and Rhetoric", 14, s. 127–136.

[49] Zob. Avron, A., Zamansky, A. (2011), *Non-Deterministic Semantics for Logical Systems*, [w:] Gabbay, D. M., Guenthner, F. (red.), *Handbook of Philosophical Logic*, 16, Springer Publishing Company, s. 227–304.

[50] Zob. Hopcroft, J., Motwani, R., Ullman, J. (2005), *Wprowadzenie do teorii automatów, języków i obliczeń*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, § 2.3.

[51] Zob. Avron, A. (2007), *Non-deterministic Semantics for Families of Paraconsistent Logics*, [w:] Béziau, J.-Y., Carnielli, W., Gabbay, D.M. (red.), *Handbook of Paraconsistency*, Studies in Logic, 9, College Publications, London, s. 285–320.

[52] Zob. Avron, A. (2007), *Non-deterministic Semantics for Logics with a Consistency Operator*, „Journal of Approximate Reasoning", 45, s. 271–287.

Rozdział 2

POCZĄTKI LOGIKI PARAKONSYSTENTNEJ

Pośród prekursorów logiki tolerującej sprzeczność odnajdziemy zarówno autorów, którzy bezpośrednio nawiązują do idei parakonsystencji, jak i takich, którzy *explicite* nigdy nie wskazywali na konieczność opracowania systemu umożliwiającego analizę logiczną sprzecznych, lecz nietrywialnych teorii. Nie było to źródłem motywacji dla prowadzonych przez nich badań. Autorzy ci analizowali jednak pojęcie sprzeczności oraz podważali intuicyjność niektórych praw logiki klasycznej, w tym – prawa przepełnienia i prawa niesprzeczności. Do grona tego typu twórców należą choćby: Łukasiewicz, Wasiliew, Orłow, Kołmogorow oraz Johansson. Inni, tacy jak Jaśkowski, da Costa lub Asenjo, znaleźli w omawianej problematyce źródło inspiracji dla dalszych badań. Są twórcami rachunków logicznych, które służą – lub potencjalnie mogłyby służyć – do analizy sprzecznych, lecz nietrywialnych teorii.

2.1. ŁUKASIEWICZ I ZASADA NIESPRZECZNOŚCI

Zacznijmy od prostego eksperymentu. Przygotujmy trzy względnie duże naczynia. Pierwsze z naczyń wypełnijmy wodą gorącą, drugie – zimną, trzecie zaś – wodą letnią. Włóżmy teraz jedną rękę, powiedzmy prawą, do naczynia wypełnionego wodą gorącą, lewą – do naczynia z wodą zimną. Odczekajmy kilkadziesiąt sekund, po czym umieśćmy obydwie ręce w naczyniu z wodą letnią. Jakie będą wtedy odczucia zmysłowe? Otóż, z jednej strony wydawać się będzie, że woda w naczyniu jest zimna. To odczucie zapewne przypisane zostanie prawej ręce. Z drugiej natomiast, że woda w naczyniu jest ciepła. To wrażenie przypiszemy bezspornie ręce lewej. Woda w naczyniu z wodą letnią zdaję się być zatem ciepła i zimna jednocześnie. Eksperyment, zwany eksperymentem trzech naczyń (ang. *3-bowls experiment*, dosł. eksperyment trzech misek), rozważał w XVII wieku angielski filozof John Locke[1]. Pod koniec wieku XX eksperyment doczekał się bardziej współczesnej, neurobiologicznej interpretacji[2].

Postawmy teraz przewrotne pytanie: Czy przytoczony eksperyment podważa zasadę niesprzeczności? Zasadę niesprzeczności można sformułować na

[1] Zob. Locke, J. (1690/1999), *An Essay Concerning Human Understanding,* The Pennsylvania State University, Pennsylvania, 2.8.21.

[2] Zob. Tritsch, M.F. (1990), *Temperature Sensation: The ‘3-Bowls Experiment’ Revisited*, „Die Naturwissenschaften” („The Science of Nature”), 77/ 6, s. 288–289.

wiele sposobów. Możemy mówić o cechach obiektów. Wówczas posiłkujemy się zazwyczaj tzw. sformułowaniem ontologicznym, które brzmi następująco: „To samo nie może zarazem przysługiwać i nie przysługiwać temu samemu pod tym samym względem" lub krócej: „Niepodobna, ażeby coś zarazem było i nie było"[3]. Można również odwołać się do pojęcia sądu, głosząc: „Najpewniejsza to z wszystkich zasad, że sądy sprzeczne nie są zarazem prawdziwe"[4]. W tym przypadku nawiązujemy do tzw. sformułowania logicznego. Termin *sformułowanie logiczne* nie jest jednak zbyt precyzyjny, ponieważ w sformułowaniu „Najpewniejsza to z wszystkich zasad..." odwołujemy się do pojęcia prawdy. To zaś pojęcie ma charakter metajęzykowy. Rację więc ma Bocheński, nazywając to sformułowanie *metalogicznym*[5]. Możemy wreszcie powołać się na nasze przekonania, twierdząc, iż: „Nikt nie może wierzyć, że to samo jest i nie jest [...]"[6] Tym razem mamy do czynienia z tzw. sformułowaniem psychologicznym. Wyodrębnienie trzech Arystotelesowskich sformułowań zasady niesprzeczności oraz ich analizę zawdzięczamy Łukasiewiczowi.

Jak widzimy, w eksperymencie trzech naczyń, próbuje się podważyć zasadę niesprzeczności w najbardziej dyskusyjnym jej sformułowaniu, tj. wersji psychologicznej (o ile oczywiście mamy na względzie subiektywne doznania *eksperymentatora*, a nie *dopełniające się* cechy, przypisane badanemu obiektowi). Słowa krytyczne na temat zasady niesprzeczności wyraził już sam Łukasiewicz, pisząc:

> Należy, moim zdaniem, w końcu odrzucić fałszywy, choć rozpowszechniony pogląd, że zasada sprzeczności jest najwyższą zasadą wszelkiego dowodzenia! [...] istnieją zasady prostsze i oczywistsze niż zasada sprzeczności, które mogą uchodzić za zasady ostatecznie i niedowodliwe. Przede wszystkim należy do nich zasada tożsamości, która głosi: Każdy przedmiot posiada cechę, którą posiada[7].

Wymienienie Łukasiewicza jako jednego z prekursorów logiki parakonsystentnej, choć może budzić kontrowersje, ma jednak swoje uzasadnienie. Krytykując Arystotelesowską zasadę niesprzeczności, nieświadomie wpisał się Łukasiewicz w ogólny nurt rozważań nad filozoficznymi podstawami logiki parakonsystentnej[8].

---

[3] Arystoteles, *Metafizyka*, Γ3, 1005b 19–20, Γ3, 1005a 22–23. Cyt. za Łukasiewicz, J. (1910), *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*, Akademia Umiejętności, Kraków.

[4] Arystoteles, *op. cit.*, Γ6, 1011b 13–14. Cyt. za *ibid.*

[5] Por. Rutkowski, T. (1994), *Próba kwestionowania pierwszych zasad: tożsamości, niesprzeczności i wyłączonego środka*, „Studia Philosophiae Christianae", 30/2, s. 232.

[6] Arystoteles, *op. cit.* Γ6, 1005b 23–26. Cyt. za Łukasiewicz, J. (1910), *op. cit.*

[7] Łukasiewicz, J. (1997), *Zasada sprzeczności u Arystotelesa*, „Filozofia Nauki", 5/1, s. 161, 153.

[8] Zob. da Costa, N.C.A., Béziau, J.Y., Bueno, O. (1995a), *op. cit.*, s. 111–122; da Costa, N.C.A., Béziau, J.Y., Bueno, O. (1995b), *Aspects of Paraconsistent Logic*, „Bulletin of the IGPL", 3/4, s. 597–624.

2.2. LOGIKA UROJONA WASILIEWA

U podstaw intuicji logicznych Wasiliewa tkwi przekonanie, iż należy odróżnić świat realny, rozumiany jako *nasz świat* materialny, od świata wyobrażonego, będącego *światem naszych myśli*. Świat realny poznajemy dzięki zmysłom i doświadczeniu. Świat ten jest przedmiotem poznania empirycznego. W refleksji nad poznaniem świata realnego możemy sformułować dwa – zdaniem Wasiliewa – bardzo ważne fakty. Po pierwsze, doświadczenie bezpośrednie nie daje wystarczających podstaw do stwierdzenia istnienia sądów negatywnych. Sądy negatywne są wyłącznie następstwem wnioskowania. Załóżmy bowiem, że mamy do czynienia z dwoma zdaniami podmiotowo-orzecznikowymi, typu: *S jest P* oraz *S jest Q* tudzież, że orzeczniki *P* oraz *Q* wykluczają się. Jeśli na podstawie danych doświadczenia stwierdzamy, iż *S jest P*, wówczas natychmiast wyprowadzamy wniosek, że *S nie jest Q*. Czynimy to na drodze rozumowania, a nie doświadczenia empirycznego. Po drugie, istnieją w świecie realnym co najmniej takie dwie cechy, *P* i *Q*, które jednocześnie nie mogą przysługiwać żadnemu przedmiotowi z tego świata. Na przykład, żaden przedmiot *S* nie może być jednocześnie, w tym samym czasie, całkowicie biały i całkowicie czarny. W świecie realnym istnieją zatem takie własności, które łącznie nie przysługują żadnemu przedmiotowi. Na tym właśnie spostrzeżeniu opiera się w koncepcji Wasiliewa pojęcie negacji i sprzeczności. Obydwa pojęcia mają charakter względny. Ich sens wiąże się bezpośrednio z istnieniem określonej rzeczywistości, istnieniem świata, w którym żyjemy[9].

Z drugiej strony, można przecież postulować istnienie świata, w którym pojęcie negacji i sprzeczności oraz oparte na nich prawa logiczne będą, przynajmniej z naszej perspektywy, pozbawione sensu. W takim świecie istniałyby na przykład takie cechy wykluczające się *P* i *Q*, które mogłyby przysługiwać równocześnie temu samemu przedmiotowi w tym samym czasie. Co więcej, dane doświadczenia mogłyby być wysłowione zarówno w sądach pozytywnych, czyli moglibyśmy stwierdzić o danym przedmiocie *S*, że jest *P*, jak i negatywnych, czyli o przedmiocie *S* moglibyśmy powiedzieć, że nie jest *P*. W tej sytuacji, zdaniem Wasiliewa, należałoby postulować istnienie trzeciego rodzaju sądów, tzw. sądów sprzecznych, które przybrałyby taką oto formę: *S jest i zarazem nie jest P*. Przyjęcie sądu sprzecznego skutkuje odrzuceniem prawa niesprzeczności, rozumianego jako *S nie może być nie-S*. A skoro prawo niesprzeczności uzależnione jest od istnienia określonego świata, ma zatem charakter względny. Stwierdzenie tego faktu prowadzi do wniosku, iż prawo niesprzeczności nie należy do najwyższych, tj. absolutnie koniecznych, zasad naszego myślenia. W konsekwencji rodzi się wątpliwość, czy wszystkie prawa logiki mają ten sam charakter, co prawo nie-

[9] Por. Kwiatkowski, T. (1964), *Wasiliewa koncepcja logiki niearystotelesowskiej*, „Ruch Filozoficzny", 22/2–4, s. 213.

sprzeczności? Czy wszystkie prawa logiki są względne? Wasiliew daje odpowiedź przeczącą. Otóż, aby w ogóle móc wnioskować i wypowiadać sądy, musimy postulować istnienie praw absolutnych. Prawa absolutne są gwarantem logiczności naszych wypowiedzi. Taki charakter ma na przykład prawo: *Żaden sąd nie może być zarazem prawdziwy i fałszywy*. Prawo to, zwane przez Wasiliewa prawem absolutnej różnicy prawdy i fałszu, ma obowiązywać we wszystkich systemach logicznych. Prawo to nie jest jednak jedynym prawem absolutnym. Do grona tego typu praw zaliczył Wasiliew również prawo tożsamości i prawo racji dostatecznej. Prawo tożsamości brzmi: *Znaczenie terminów w sądzie pozostaje zawsze to samo* (*nie zmienia się*). Wasiliew nazwał to prawo ogólną zasadą czynności poznawczej sądzenia. Jeśli dany system logiczny ma być spójny, nie możemy dowolnie zmieniać znaczenia użytych w nim terminów. Z kolei, w prawie racji dostatecznej stwierdzamy, iż *każdy sąd musi być uzasadniony* (*musi mieć swoją rację*). Wasiliew określił to prawo jako ogólną zasadą czynności poznawczej wnioskowania. Prawa absolutne, stanowiące podstawę każdego systemu logicznego, nazywa Wasiliew metalogiką. Tak więc, w skład każdego systemu logicznego wchodzą dwa rodzaje praw: względne, które obowiązują tylko w danym systemie logicznym oraz absolutne, czyli te, które obowiązują we wszystkich systemach logicznych.

Wprowadzone przez Wasiliewa rozróżnienie może prowadzić do pewnych problemów interpretacyjnych. Z jednej bowiem strony, sądy absolutne wydają się mieć charakter bardziej ogólny, aniżeli sądy względne (stąd określenie ich mianem metalogiki). Wygląda to tak, jakby sądy absolutne opisywały rzeczywistość językową, zaś sądy względne odnosiły się do rzeczywistości pozajęzykowej. Wykorzystując współczesną terminologię, moglibyśmy powiedzieć, że Wasiliew odróżnił metajęzyk od języka przedmiotowego. Język przedmiotowy wykorzystuje do opisu świata materialnego bądź świata naszych myśli. Metajęzyk służy mu natomiast do opisu języka przedmiotowego. Problem polega na tym, że Wasiliew nie używa języka formalnego do wyrażenia własnych intuicji logicznych. Postulaty formułuje w języku naturalnym, toteż funkcję metajęzyka danego języka przedmiotowego pełni u Wasiliewa ten sam język, co język przedmiotowy.

Z drugiej strony, pomysły Wasiliewa mogą przywodzić na myśl refleksje filozoficzne nad nieintuicyjnością niektórych praw logiki klasycznej. Wystarczy, jako przykład, wspomnieć tu o rozważaniach na temat własności implikacji klasycznej. Niektóre implikacyjne prawa logiki klasycznej wydają się paradoksalne. Do ich grona należy choćby prawo poprzedzania $p \rightarrow (q \rightarrow p)$. Jeśli akceptujemy p, to akceptujemy również implikację $q \rightarrow p$. Zauważmy, że q jest dowolnym zdaniem. Jeśli więc wypowiemy zdanie: *Bolesław Chrobry był pierwszym królem Polski*, to na mocy prawa poprzedzania możemy stwierdzić, iż *jeśli chmury na niebie są z waty cukrowej, to Bolesław Chrobry był pierwszym królem Polski*. Nie ma żadnego związku treściowego między zdaniami p i q. Co więcej, zdanie q jest fałszywe. Refleksje te dały impuls do pracy nad stworzeniem nowych systemów logicznych, wolnych od opisanych trudności interpretacyjnych. Tak powstały systemy implikacji ścisłej oraz systemy logiki relewantnej.

Podobną analizę możemy przeprowadzić dla niektórych systemów logiki parakonsystentnej, konkretnie tych, które spełniają kryteria Newtona da Costy. Przypomnijmy, da Costa pośród podanych przez siebie kryteriów wymienia następujący warunek: w systemach logiki tolerującej sprzeczność prawo $\sim (p \wedge \sim p)$ nie jest tezą. Zauważmy, że prawo niesprzeczności – oryginalnie sformułowane przez Wasiliewa w nieco odmienny sposób – należy do grupy praw względnych. Nie obowiązuje zatem we wszystkich systemach logicznych. Jeśli teraz weźmiemy pod uwagę rodzinę C_n–systemów da Costy, widzimy, że prawo niesprzeczności wraz z prawem przepełnienia są przykładami praw względnych, natomiast cała pozytywna część logiki Hilberta, prawo wyłączonego środka, $p \vee \sim p$, oraz jedno z praw podwójnej negacji, mianowicie $\sim \sim p \rightarrow p$, należy do grupy praw absolutnych. W opisanym wyżej kontekście, Wasiliew jawi się jako prekursor logik nieklasycznych, pośród których logika parakonsystentna zdaje się zajmować poczesne miejsce.

Idee logiczne Wasiliewa łączą się ściśle z koncepcją geometrii Łobaczewskiego. Geometria Łobaczewskiego stanowi dla nich nieustające źródło inspiracji. Odkryty przez Łobaczewskiego niesprzeczny system geometryczny, odmienny od systemu Euklidesa, zapoczątkował w XIX wieku rozwój geometrii. I choć niezależnie od Łobaczewskiego, podstawy geometrii nieeuklidesowej opracowano już na początku XIX, to ani Gauss, ani Bolyai nie wywarli na Wasiliewie takiego wrażenia, jak Łobaczewski[10].

Wasiliew, inspirowany odkryciem Łobaczewskiego, określił swoją logikę jako niearystotelesowską. Geometria Łobaczewskiego (zwana także geometrią hiperboliczną oraz geometrią siodła) powstała na skutek odrzucenia postulatu równoległości, logika urojona Wasiliewa powstała jako efekt odrzucenia jednego z aksjomatów logiki Arystotelesa – prawa niesprzeczności. Zdaniem Wasiliewa, logika Arystotelesa oparta jest na czterech prawach:

(1) prawie niesprzeczności: *S nie może być zarazem P i nie-P*

(2) prawie wyłączonego środka: Istnieją tylko dwa jakościowo różne rodzaje sądów, tj. sądy twierdzące i sądy przeczące. *Parom jakościowo różnych sądów przysługuje ta własność, że jeden z nich jest prawdziwy, a drugi fałszywy*

(3) prawie tożsamości: *Znaczenie terminów w sądzie nie zmienia się*

(4) prawie racji dostatecznej: *Każdy sąd musi mieć swoją rację*.

Prawa tożsamości i racji dostatecznej obowiązują bezwzględnie w każdym systemie logicznym. Są niepodważalne. Mają charakter bezwzględnie konieczny, absolutny. Prawa niesprzeczności i wyłączonego środka mają zaś charakter względny. Obowią-

---

[10] Por. Suchoń, W. (1999), *Vasil'iev: What Did He Exactly Do?*, „Logic and Logical Philosophy", 7, s. 134; Bazhanow, W.A. (1990), *The Fate of One Forgotten Idea: Vasiliev and his Imaginary Logic*, „Studies in Soviet Thought", 39, s. 339.

zują tylko w niektórych systemach logicznych, takich na przykład jak logika Arystotelesa. Możemy więc je odrzucić. Odrzucając prawo niesprzeczności, akceptujemy tym samym twierdzenie głoszące, iż *S może być zarazem P i nie-P*. W rezultacie otrzymujemy nowy system logiczny, zwany przez Wasiliewa logiką urojoną. W logice urojonej, prawo niesprzeczności nie obowiązuje. Nie obowiązuje także prawo wyłączonego środka. Wasiliew zastępuje je tzw. prawem wyłączonego czwartego:

Istnieją trzy i tylko trzy rodzaje sadów: sądy twierdzące (*S jest P*), sądy przeczące (*S nie jest P*) oraz sądy sprzeczności (*S jest i zarazem nie jest P*). *Jeśli jeden z sądów jest prawdziwy, dwa pozostałe są fałszywe*.

W tym miejscu zarysowuje się pewne podobieństwo, między logiką urojoną Wasiliewa a wielowartościową logiką Łukasiewicza. Zarówno w jednym, jak i drugim przypadku, prawo niesprzeczności oraz prawo wyłączonego środka nie obowiązują. Inna jest jednak waga problemu i sposób jego prezentacji. Wielowartościowa logika Łukasiewicza spoczywa na solidnych podstawach filozoficznych. Jej powstanie było następstwem indeterministycznych poglądów na świat, które żywił Łukasiewicz. W 1930 roku pisał:

> Mogę przyjąć bez sprzeciwu, że moja obecność w Warszawie w pewnej określonej chwili przyszłego roku, np. w południe dnia 21 grudnia, dzisiaj nie jest rozstrzygnięta, ani w sensie pozytywnym, ani w negatywnym. Jest więc możliwe, ale nie konieczne, że w wymienionej chwili będę obecny w Warszawie. Przy tym założeniu zdanie: Będę w Warszawie w południe dnia 21 grudnia przyszłego roku dzisiaj nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe. Gdyby bowiem było dzisiaj prawdziwe, to moja przyszła obecność w Warszawie byłaby konieczna, co sprzeciwia się założeniu; gdyby zaś dzisiaj było fałszywe, to moja przyszła obecność w Warszawie byłaby niemożliwa, co także sprzeciwia się założeniu. Omawiane zdanie nie jest więc dzisiaj ani prawdziwe, ani fałszywe, toteż musi mieć jakąś trzecią wartość, różną od 0, czyli od fałszu i od 1, czyli od prawdy. Wartość tę możemy oznaczyć jako 1/2; jest to możliwość, która występuje obok fałszu i prawdy jako trzecia wartość. Rozumowaniu temu zawdzięcza swoje powstanie trójwartościowy system rachunku zdań[11].

Logika Wasiliewa nie jest jednolitym, koherentnym systemem, lecz co najwyżej zbiorem luźno sformułowanych idei. Wasiliew ignoruje fakt, że sylogistyka Arystotelesa nie stanowi całego obszaru logiki. Co więcej, podobieństwa, których dopatruje się Wasiliew między rolą jaką odgrywają w logice Arystotelesa tzw. naczelne zasady myślenia a rolą aksjomatów w geometrii euklidesowej tudzież między logiką urojoną a geometrią Łobaczewskiego są nazbyt daleko idące[12]. Zilustrujmy to prostym przykładem. W geometrii Łobaczewskiego linie mogą być albo przecinające się, albo nieprzecinające się, albo zbieżne. Podobna

[11] Łukasiewicz, J. (1961), *O determinizmie*, [w:] Łukasiewicz, J., *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*, wybór J. Słupecki, PWN, Warszawa, s. 153.

[12] Poglądy Wasiliewa były poddawane dyskusji i krytykowane już za jego życia. Zob. Hessen, S.I. (1910), *Review of Vasil'év 1910*, „Logos", 2, s. 287–288; Smirnow,

analogia występuje u Wasiliewa. W logice urojonej sądy są albo twierdzące, albo przeczące, albo nieokreślone[13].

Z biegiem lat idee Wasiliewa doczekały się kilku formalizacji. W 1977 roku Ayda I. Arruda zaprezentowała trzy systemy logiczne: *V1*, *V2* oraz *V3*. Litera *V*, obecna w nazwie danego systemu, pochodzi od pierwszej litery anglojęzycznej transkrypcji nazwiska Wasiliew, tj. zapisu *Vasiliev*. Niestety, wykorzystanie kolejnych liczb naturalnych *1, 2, 3* na oznaczenie konkretnego systemu może być nieco mylące. Sugeruje bowiem, że mamy do czynienia z systemem bazowym *V1*, pozostałe zaś dwa systemy są jego rozszerzeniem. O ile przypuszczenie to ma swoje uzasadnienie w przypadku systemu *V2*, który rzeczywiście stanowi rozszerzenie systemu *V1*, o tyle system *V3* jest już integralną konstrukcją, bazującą na zupełnie odmiennej koncepcji[14].

Istota formalizmu systemów *V1* i *V2* opiera się na prostym zabiegu syntaktycznym. Definiujemy dwa różne zbiory zmiennych zdaniowych. Pierwszy ze zbiorów to standardowy zbiór zmiennych zdaniowych, znany z klasycznego rachunku zdań; drugi – to tzw. zbiór zmiennych Wasiliewa. Nakładamy następnie pewne ograniczenie na zbiór schematów aksjomatycznych systemu, wskazując, w których z nich zmienne Wasiliewa nie mogą wystąpić. Aby wyjaśnić to w bardziej precyzyjny sposób, zdefiniujmy na początek język obydwu systemów. W skład alfabetu język *V1* i *V2* wchodzą następujące elementy:

(1) niepusty i przeliczalny zbiór zmiennych zdaniowych

(2) niepusty i przeliczalny, możliwie skończony zbiór zmiennych Wasiliewa

(3) klasyczne spójniki zdaniowe: $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$

(4) nawiasy

Przez *var* oznaczmy zbiór zmiennych zdaniowych, przez *varV* zbiór zmiennych Wasiliew. Zapis $\alpha \notin varV$ oznacza, że α *nie jest zmienną Wasiliewa*. Pojęcie formuły definiujemy standardowo. W skład zbioru schematów aksjomatycznych systemu *V1* wchodzą formuły:

K.A. (1911), *Review of Vasil'év 1910*, „Żurnal Ministérstwa. Narodnogo Prosweścieńja", 32, s. 144–154.

[13] Wasiliew był postrzegany przez niektórych badaczy jako prekursor logiki wielowartościowej. Zob. Rescher, N. (1969), *Many-Valued Logic*, McGraw-Hill, New York; Kline, G.L. (1965), *N.A. Vasil'ev and the Development of Many-valued Logics*, [w:] Tymieniecka, A.T. (red.), *Contributions to Logic and Methodology in Honour of J.M. Bocheński*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, s. 315–326; Jammer, M. (1974), *The Philosophy of Quantum Mechnics: The Interpretations of QM in Historical Perspective*, John Wiley and Sons, New York.

[14] Zob. Arruda, A.I. (1977), *On Imaginary Logic of N.A. Vasiliev*, [w:] Arruda A.I., da Costa N.C.A., Chuaqui R. (red.), *Nonclassical Logics, Model Theory and Computability*, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, s. 3–24.

(AH^+) α, o ile α jest aksjomatem pozytywnej części logiki Hilberta

(*tnd*) $\alpha \vee \sim \alpha$

$(efq)^*$ $\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta)$, o ile $\alpha \notin varV$.

Jedyną nieaksjomatyczną, pierwotną regułą wnioskowania jest reguła odrywania:

(RO) $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \,/\, \beta$.

Podana aksjomatyzacja różni się tylko w niewielkim stopniu od aksjomatyzacji klasycznego rachunku zdań. Na poziomie języka wprowadzony zostaje jednak dodatkowy zbiór zmiennych zdaniowych. Kluczowym dla systemu *V1* aksjomatem staje się wówczas $(efq)^*$, w którym za α nie możemy podstawić zmiennej Wasiliewa. W następstwie, reguła *ex falso quodlibet* ulega pewnej modyfikacji, tj.:

$(EFQ)^{V1}$ $\alpha, \sim \alpha \,/\, \beta$, o ile $\alpha \notin varV$.

Oprócz reguły $(EFQ)^{V1}$ modyfikacjom podlegają też inne reguły, np.:

$(R1)^{V1}$ $\alpha \,/\, \sim \sim \alpha$, o ile $\alpha \notin varV$

$(R2)^{V1}$ $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \sim \beta \,/\, \sim \alpha$, o ile $\beta \notin varV$

$(R3)^{V1}$ $\alpha \rightarrow \beta \,/\, \sim \beta \rightarrow \sim \alpha$, o ile $\beta \notin varV$

$(R4)^{V1}$ $\sim \alpha \rightarrow \sim \beta \,/\, \beta \rightarrow \alpha$, o ile $\beta \notin varV$.

System *V1*, prócz charakterystyki syntaktycznej, otrzymał również charakterystykę semantyczną. Niech F_{V1} oznacza zbiór formuł systemu *V1*. Funkcję *V1*–wartościowania v, v: $F_{V1} \longrightarrow \{1,0\}$, definiują indukcyjnie następujące warunki:

($v1$) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ lub $v(\beta) = 1$

($v2$) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ oraz $v(\beta) = 1$

($v3$) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$ lub $v(\beta) = 1$

($\notin varV$) jeśli $\alpha \notin varV$, to $v(\alpha) = 1$ wtw, gdy $v(\sim \alpha) = 0$

($\in varV$) jeśli $\alpha \in varV$ oraz $v(\alpha) = 0$, to $v(\sim \alpha) = 1$.

Pojęcie *V1*–tautologii definiujemy jako formułę, która jest prawdziwa przy dowolnym *V1*–wartościowaniu. Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą odrywania definiują relację konsekwencji $\vdash_{V1}$.

Twierdzenie 2.2.1. (Arruda 1977) Dla dowolnej $\alpha \in F_{V1}$, α jest *V1*–tautologią wtw, gdy $\vdash_{V1} \alpha$.

Jeśli teraz wzbogacimy zbiór aksjomatów systemu *V1* o schemat:

(*sp*) $\alpha \wedge \sim \alpha$, o ile $\alpha \in varV$

otrzymamy system *V2*.

System *V2* jest jedną z tych nielicznych konstrukcji logicznych, w których *explicite* wyrażono pojęcie sprzeczności[15]. W większości systemów logiki parakonsystentnej po prostu odrzuca się prawo przepełnienia, zaś reguła (EFQ) jest zwykle pusto spełniona. Nie mamy tym samym możliwości wyprowadzenia sprzeczności z dwóch zdań, z których jedno jest negacją drugiego. Nie posiadamy bowiem odpowiednich środków syntaktycznych do wyrażenia sprzeczności. We wspomnianych systemach, z uwagi na twierdzenie o przystosowaniu, nie mogą wszak istnieć dwie takie formuły, z których pierwsza byłaby negacją drugiej i obydwie byłyby tezami. System *V2* daje taką możliwość. W *V2* zarówno α jak i jej negacja, $\sim \alpha$, są jednocześnie tezami systemu. Dowód:

(1) $\alpha \wedge \sim \alpha$, o ile $\alpha \in varV$ (*sp*)
(2) $(\alpha \wedge \sim \alpha) \rightarrow \alpha$ (H4)
(3) α (RO), (1), (2).

Analogicznie udowodnimy, że formuła $\sim \alpha$ jest tezą systemu *V2*. Dowody będą poprawne pod jednym wszakże warunkiem: α jest zmienną Wasiliewa. W systemie *V2* reguła *ex falso quodlibet* podlega podobnej, co w *V1*, modyfikacji, tj.:

$(\mathrm{EFQ})^{V1}$ $\alpha, \sim \alpha \,/\, \beta$, o ile $\alpha \notin varV$.

Pomimo, iż formuły α oraz $\sim \alpha$ są wyprowadzalne w *V2*, to poprawne ich użycie w przesłankach reguły $(\mathrm{EFQ})^{V1}$ jest niemożliwe. Zarówno α jak i $\sim \alpha$ należą bowiem do zbioru zmiennych Wasiliewa. Reguła $(\mathrm{EFQ})^{V1}$ wraz z aksjomatem $(efq)^*$ nie doprowadzą więc systemu *V2* do przepełnienia.

Semantykę systemu *V2* uzyskamy, zastępując znany z *V1* warunek:

$(\in varV)$ jeśli $\alpha \in varV$ oraz $v(\alpha) = 0$, to $v(\sim \alpha) = 1$,

innym warunkiem, mianowicie:

$(\in varV)$ jeśli $\alpha \in varV$, to $v(\alpha) = v(\sim \alpha) = 1$.

Na uwagę zasługuje fakt, że zmiennym Wasiliewa oraz ich negacjom przypisano tę samą wartość logiczną. Formuły α oraz $\sim \alpha$ są jednocześnie prawdziwe.

Podobnie jak w przypadku systemu *V1*, pojęcie *V2*–tautologii definiujemy jako formułę, która jest prawdziwa przy dowolnym*V2*–wartościowaniu.

Twierdzenie 2.2.2. (Arruda 1977) Dla dowolnej $\alpha \in F_{V2}$, α jest *V2*–tautologią wtw, gdy $\vdash_{V2} \alpha$.

---

[15] Por. § 2.7.

W języku obydwu prezentowanych dotychczas systemów obecne były dwa różne zbiory zmiennych zdaniowych. Konstrukcja systemu *V3* opiera się na odmiennym założeniu. Rozszerzamy standardowy język klasycznego rachunku zdań o nowe, nieklasyczne spójniki, przyjmując przy tym pewne ograniczenie: nowe spójniki mogą wystąpić wyłącznie w wybranych formułach.

W skład alfabetu język *V3* wchodzą elementy:

(1) niepusty i przeliczalny zbiór zmiennych zdaniowych *var*

(2) klasyczne spójniki zdaniowe: $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$

(3) symbol nieklasycznej negacji „$\neg$" oraz symbol nieklasycznej koniunkcji „&"

(4) nawiasy.

Do zbioru formuł systemu *V3* zaliczymy wyrażenia zbudowane zgodnie z zasadami:

(1) każda zmienna zdaniowa jest formułą

(2) jeśli α jest formułą, to $\sim \alpha$ też jest formułą

(3) jeśli α i β są formułami, to $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ oraz $\alpha \leftrightarrow \beta$ są formułami

(4) jeśli p jest zmienną zdaniową, to $\neg p$ jest formułą

(5) jeśli p i q są zmiennymi zdaniowymi, to $p \mathbin{\&} q$ jest formułą

(6) żadne inne wyrażenie, poza wymienionymi w punktach (1)–(5), nie jest formułą.

Zauważmy, iż użycie nieklasycznej negacji oraz nieklasycznej koniunkcji ogranicza się wyłącznie do zmiennych zdaniowych.

Jeśli dowolną aksjomatyzację klasycznego rachunku zdań wzbogacimy o trzy następujące schematy:

(A1)* $\sim p \leftrightarrow \neg p \vee (p \mathbin{\&} \neg p)$

(A2)* $\sim \neg p \leftrightarrow p \vee (p \mathbin{\&} \neg p)$

(A3)* $\sim (p \mathbin{\&} \neg p) \leftrightarrow p \vee \neg p$,

otrzymamy aksjomatyzację systemu *V3*. Jedyną pierwotną regułą wnioskowania systemu *V3* jest reguła odrywania (RO) $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \,/\, \beta$. Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą odrywania definiują relację konsekwencji $\vdash_{V3}$.

Niestety, Arruda nie podała *explicite* żadnych wskazówek, co do sposobu czytania wprowadzonych spójników. Mając jednak w pamięci rozważania Wasiliewa na temat logiki urojonej, można by przyjąć, że zapis $\neg p$ należy rozumieć jako *zdanie (sąd) p jest przeczące(y)*, zaś zapis $p \mathbin{\&} \neg p$ jako *zdanie (sąd)* $p \mathbin{\&} \neg p$ *jest sprzeczne(y)*.

Rozszerzenie klasycznego rachunku zdań o nowe aksjomaty umożliwia wyprowadzenie w systemie *V3* wielu interesujących praw, np.:

(1) $\sim(p \wedge \neg p)$
(2) $\sim(p \wedge (p \mathbin{\&} \neg p))$
(3) $\sim(\neg p \wedge (p \mathbin{\&} \neg p))$
(4) $\neg p \to \sim p$
(5) $\neg p \vee p \vee (p \mathbin{\&} \neg p)$
(6) $(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge (p \mathbin{\&} \neg p)) \vee (\neg p \wedge (p \mathbin{\&} \neg p)) \to \alpha.$

Na szczególną uwagę zasługują formuły (5) i (6). W formule (5) można dopatrywać się odpowiednika prawa wyłączonego czwartego: *zdanie p jest przeczące lub twierdzące lub sprzeczne*. Formuła (6) powiada, iż pogwałcenie zasady wyłączonego czwartego, grozi trywializacją systemu. Jeżeli bowiem zdanie *p* jest jednocześnie twierdzące i przeczące lub twierdzące i sprzeczne lub przeczące i sprzeczne, to dowolna formuła α jest twierdzeniem systemu *V3*. Ponadto, zgodnie z prawem wyłączonego czwartego, jeśli jeden z sądów jest prawdziwy, dwa pozostałe są fałszywe. Pogwałcenie tej zasady, również winno skutkować trywializacją *V3*. Oprócz więc (EFQ) w jej klasycznym sformułowaniu, w systemie *V3* wyprowadzalne są reguły:

(EFQ1) $p, \neg p \,/\, \alpha$, o ile *p* jest zmienną zdaniową
(EFQ2) $p, p \mathbin{\&} \neg p \,/\, \alpha$, o ile *p* jest zmienną zdaniową
(EFQ3) $\neg p, p \mathbin{\&} \neg p \,/\, \alpha$, o ile *p* jest zmienną zdaniową

Regułę (EFQ1) wyprowadzimy w *V3* dzięki tezie (4) $\neg p \to \sim p$, prawu przepełnienia i regule odrywania. Dowód dla (EFQ2) jest następujący:

(1) p	*zał.*
(2) $p \mathbin{\&} \neg p$	*zał.*
(3) $(p \mathbin{\&} \neg p) \vee \neg p$	*dołączanie alternatywy*, (2)
(4) $\neg p \vee (p \mathbin{\&} \neg p)$	*przemienność alternatywy*, (3)
(5) $\sim p$	(A1)*, (4) , *reguła* $\alpha \leftrightarrow \beta, \beta \,/\, \alpha$
α	*prawo przepełnienia*, (1), (5) i (RO).

Dowód dla (EFQ3):

(1) $\neg p$	*zał.*
(2) $p \mathbin{\&} \neg p$	*zał.*
(3) $\neg p \vee p$	*dołączanie alternatywy*, (1)
(4) $p \vee \neg p$	*przemienność alternatywy*, (3)
(5) $\sim(p \mathbin{\&} \neg p)$	(A3)*, (4) , *reguła* $\alpha \leftrightarrow \beta, \beta \,/\, \alpha$
α	*prawo przepełnienia*, (2), (5) i (RO).

Semantyka systemu *V3* odbiega nieco od semantyki prezentowanych wcześniej systemów. Niech F_{V3} oznacza zbiór wszystkich formuł systemu *V3*. Funkcję *V3*–wartościowania v, $v: F_{V3} \longrightarrow \{1,0\}$, definiują indukcyjnie następujące warunki:

$(v1)$ $v(\alpha \vee \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ lub $v(\beta) = 1$

$(v2)$ $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ oraz $v(\beta) = 1$

$(v3)$ $v(\alpha \to \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$ lub $v(\beta) = 1$

$(v4)$ $v(\sim \alpha) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$

(var) $v(p) = 1$ wtw, gdy $v(\neg p) = v(p \,\&\, \neg p) = 0$

$(\neg var)$ $v(\neg p) = 1$ wtw, gdy $v(p) = v(p \,\&\, \neg p) = 0$

$(\& var)$ $v(p \,\&\, \neg p) = 1$ wtw, gdy $v(p) = v(\neg p) = 0$.

V3–tautologię definiujemy jako formułę, która jest prawdziwa przy dowolnym *V3*–wartościowaniu.

Twierdzenie 2.2.3. (Arruda 1977) Dla dowolnej $\alpha \in F_{V3}$: α jest *V3*–tautologią wtw, gdy $\vdash_{V3} \alpha$.

Chociaż żaden z prezentowanych systemów nie oddaje w pełni idei logiki Wasiliewa, to właśnie *V3* wydaje się być im najbliższy. Dzięki wzbogaceniu języka klasycznego rachunku zdań o dwa dodatkowe spójniki, możliwe stało się wyrażenie przynajmniej niektórych intuicji logicznych Wasiliewa.

2.3. SYSTEM ORŁOWA

W roku 1928 ukazuje się interesujący artykuł Iwana Orłowa. Artykuł zawiera analizę syntaktyczną pewnego systemu, który uznany został za pierwszą w dziejach formalizację implikacyjno-negacyjnego fragmentu systemu *R* logiki relewantnej[16].

W logice klasycznej dużą rolę odgrywa spójnik implikacji materialnej. Spójnik ten cechują jednak własności, które uznawane są przez niektórych logików za paradoksalne[17]. Żeby się o tym przekonać, wystarczy przywołać takie prawa logiki klasycznej, jak:

$p \to (q \to q)$

$\sim (q \to q) \to p$

$(p \wedge \sim p) \to q$.

---

[16] Zob. Došen, K. (1992), *The First Axiomatization of Relevant Logic*, „Journal of Philosophical Logic", 21, s. 339.

[17] Zob. np. Mares, E.D. (2012a), *Relevance Logic*, [w:] Zalta, E.N. (red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/logic-relevance/> (dostęp: 25.06.2017).

W podanych przykładach nie istnieje żadna szczególna *zależność* pomiędzy formułą występującą w poprzedniku – a formułą występującą w następniku głównej implikacji. Przez termin *zależność* rozumiemy tu tzw. postulat minimalnej relewancji, wymagający, aby co najmniej jedna zmienna zdaniowa występująca w poprzedniku występowała także w następniku implikacji[18]. Niestety, spełnienie tego postulatu nie gwarantuje, iż wyrugowane zostaną inne paradoksalne prawa implikacji klasycznej, typu:

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$
$$p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$$
$$\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r).$$

Potrzebne jest bardziej restrykcyjne kryterium. Kryterium, w którym stwierdza się na przykład, że zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych następnika powinien zawierać się w zbiorze zmiennych zdaniowych poprzednika implikacji. Postulat ten spełnia tzw. implikacja analityczna, którą opracował na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych XX wieku Parry[19]. Wymóg ten wydaje się jednak nazbyt rygorystyczny. W przypadku jego akceptacji, zmuszeni będziemy odrzucić wiele praw implikacyjnego fragmentu logiki relewantnej *R*, w tym następujące:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$
$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q))$$
$$(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)).$$

Pierwsza z wymienionych formuł pełni funkcję aksjomatu w systemie *R* Andersona i Belnapa[20]. Druga pojawiła się jako jeden z aksjomatów tzw. rachunku słabej implikacji. Rachunek słabej implikacji, zaprezentowany w 1951 roku przez Churcha, jest równoważny implikacyjnemu fragmentowi systemu *R*[21]. Trzecią formułę, jako jeden z aksjomatów swojego systemu, wymienia Orłow.

---

[18] Zob. Mares, E.D., Meyer, R.K. (2001), *Relevant Logics*, [w:] Goble, L. (red.), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Blackwell Publishers, Malden, s. 283.

[19] Zob Parry, W.T. (1968), *The Logic of C.I. Lewis*, [w:] Schilpp, P.A. (red.), *The Philosophy of C.I. Lewis*, Cambridge University Press, Cambridge, s. 115–154; Dunn, J.M. (1972), *A Modification of Parry's Analytic Implication*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 13/2, s. 195–205.

[20] Zob. Mares, E.D. (2012b), *The Logic R: Supplement to Relevace Logic*, [w:] Zalta, E.N. (red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <https://plato.stanford.edu/entries/logic-relevance/logice.html> (dostęp 25.06.2017).

[21] Zob. Dunn, J.M., Restall, G. (2002), *Relevance Logic*, [w:] Gabbay, D.M., Guenthner, F. (red.), *Handbook* of Philosophical Logic, 6, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, s. 1–128.

W skład systemu Orłowa wchodzą aksjomaty:

$(nn)^{*}\ \alpha \rightarrow \sim \sim \alpha$

$(nn)\ \sim \sim \alpha \rightarrow \alpha$

$(\mathrm{F7})\ \alpha \rightarrow \sim (\alpha \rightarrow \sim \alpha)$

$(pkr)^{*}\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\sim \beta \rightarrow \sim \alpha)$

$(pk)\ (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

$(ps)\ (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

oraz reguła odrywania (RO) $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \,/\, \beta$.

Łatwo dostrzec, iż system Orłowa czyni zadość tylko pierwszemu z wymienionych postulatów, tj. postulatowi minimalnej relewancji[22]. I choć system okrzyknięty został mianem pierwszej w dziejach formalizacji implikacyjno-negacyjnego fragmentu systemu *R*, niektórzy dopatrują się w nim również pierwszej w historii aksjomatyzacji systemu logiki parakonsystentnej[23]. Dzieje się tak, ponieważ prawo przepełnienia $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$ nie jest wyprowadzalne w systemie Orłowa.

Dowód (Alves 1992, s. 20). Rozważmy matrycę:

$$\mathcal{M} = \langle\{1, 2, 0\}, \{1, 2\}, \rightarrow, \sim\rangle,$$

w której $\{1, 2, 0\}$ pełni funkcję zbioru wartości logicznych, $\{1, 2\}$ jest zbiorem wartości wyróżnionych w matrycy $\mathcal{M}$, spójniki implikacji i negacji definiują tabelki:

$(\rightarrow)$	1	2	0
1	1	0	0
2	1	2	0
0	1	1	1

	$(\sim)$
1	0
2	2
0	1

Aksjomaty Orłowa zawsze przyjmują wartości wyróżnione, reguła odrywania również je dziedziczy. W przypadku prawa przepełnienia tak już nie jest. Jeśli zmiennej p przypisana zostanie wartość logiczna 2, zaś zmiennej q – wartość logiczna 0, wówczas cała formuła $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$ przyjmie wartość 0. Wartość logiczna 0 nie należy do zbioru wartości wyróżnionych w matrycy $\mathcal{M}$. Prawo przepełnienia jest więc niezależne względem aksjomatyzacji podanej przez Orłowa.

[22] Oprócz wspomnianych postulatów, na szczególną uwagę zasługuje także tzw. kryterium von Wrighta, Geacha i Smileya. Zob. Anderson, A.R., Belnap, N.D. (1962), *Tautological Enatailments*, „Philosophical Studies", 13/1–2, s. 9–10.

[23] Zob. Alves, E.H. (1992), *The First Axiomatization of a Paraconsistent Logic*, „Bulletin of the Section of Logic", 21/1, s. 20.

Motywacje filozoficzne, którymi kierował się Orłow, niewiele mają wspólnego z ideą logik parakonsystentnych[24]. Mimo to, system Orłowa spełnia ogólny warunek *parakonsystentności*: z pary formuł α, $\sim \alpha$ nie wyprowadzimy dowolnego zdania β.

2.4. SYSTEM KOŁMOGOROWA I LOGIKA MINIMALNA JOHANSSONA

Wymienienie takiego nazwiska jak Kołmogorow, czy też Johansson, w gronie prekursorów logiki parakonsystentnej wydawać się może na pierwszy rzut oka pewnym nadużyciem. Przecież Kołmogorow i Johansson kojarzeni są zwykle z problematyką oscylującą wokół logiki intuicjonistycznej, a nie z logikami tolerującymi sprzeczność. Wyjaśnienia należy przede wszystkim upatrywać w refleksji nad *nieintuicyjnością* niektórych praw logiki. Otóż, zarówno Kołmogorow jak i Johansson poddają krytyce rzekomą intuicyjność prawa przepełnienia. Kołmogorow pisał: „[...] prawo to nie ma i mieć nie może żadnych podstaw intuicyjnych, jako że stwierdza ono coś o konsekwencji czegoś niemożliwego: musimy zaakceptować *q*, jeśli sąd prawdziwy *p* traktujemy jako fałszywy"[25]. Z kolei Johansson w jednym ze swoich listów do Heytinga pisał o konieczności odrzucenia prawa przepełnienia, albowiem „powiada [ono], iż skoro udowodniono, że ~*p*, wówczas *q* wynika z *p*, nawet jeśli wcześniej nie było o tym żadnej mowy"[26]. Prawo przepełnienia jest więc nieintuicyjne.

Analizę formalną rozpoczniemy od systemu Kołmogorowa. W 1925 roku Kołmogorow opublikował artykuł pt. *O zasadzie tertium non datur*, w którym zaprezentował pewien system aksjomatyczny. System składa się z implikacyjnej części pozytywnej logiki Hilberta:

$$\alpha \to (\beta \to \alpha)$$
$$(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$$
$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$$
$$(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$$

oraz aksjomatu charakteryzującego syntaktycznie spójnik negacji:

---

[24] Zob. Došen, K. (1992), *op. cit.*, s. 341–342.

[25] Kołmogorow, A. N. (1925), *O zasadzie tertium non datur* (w jęz. rosyjskim), „Matematiceskij sbornik", 32, II, § 4.

[26] Cyt. za van der Molen, T. (2016), *The Johansson/Heyting Letters and the Birth of Minimal Logic*, s. 2, URL = <https://eprints.illc.uva.nl/696/1/X-2016-04.text.pdf> (dostęp: 05.02.2017).

$(pK)\ (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim \beta) \to \sim \alpha)$[27].

Jedyną nieaksjomatyczną reguła wnioskowania jest reguła (RO) $\alpha, \alpha \to \beta\ /\ \beta$[28].

Okazuje się, że w tak zdefiniowanym systemie nie wyprowadzimy prawa przepełnienia. Żeby się o tym przekonać, wystarczy wziąć pod uwagę następującą matrycę:

$$\mathcal{M} = \langle\{1, 0\}, \{1\}, \to, \sim\rangle,$$

w której {1,0} jest zbiorem wartości logicznych, {1} – zbiorem wartości wyróżnionych w matrycy $\mathcal{M}$, spójniki implikacji i negacji charakteryzują zaś tabelki:

(→)	1	0
1	1	0
0	1	1

	(~)
1	1
0	1

Łatwo zweryfikować, iż wszystkie aksjomaty zawsze przyjmują wartość wyróżnioną. Reguła odrywania także ją dziedziczy. Nie dotyczy to jednak prawa przepełnienia. Wystarczy zmiennej p przypisać wartość wyróżnioną, zaś zmiennej q – wartość 0, wówczas $1 \to (\sim 1 \to 0) = 1 \to (1 \to 0) = 1 \to 0 = 0$. Prawo przepełnienia jest zatem niezależne względem aksjomatyzacji podanej przez Kołmogorowa[29].

Tezą systemu Kołmogorowa jest natomiast formuła o postaci $p \to (\sim p \to \sim q)$[30]. Wyprowadzalny jest również pewien wariant reguły *ex falso quodlibet*:

$(\mathrm{EFQ})^{\sim}\ \alpha, \sim \alpha\ /\ \sim \beta.$

Dowód dla $(\mathrm{EFQ})^{\sim}$:

(1) α	*zał.*
(2) $\sim \alpha$	*zał.*
(3) $\beta \to \alpha$	*aksjomat* $\alpha \to (\beta \to \alpha)$, (1), (RO)
(4) $\beta \to \sim \alpha$	*aksjomat* $\sim \alpha \to (\beta \to \sim \alpha)$, (2), (RO)
$\sim \beta$	(pK), (3), (4), (RO).

---

[27] Por. Uspensky, V.A. (1992), *Kolmogorov and Mathematical Logic*, „The Journal of Symbolic Logic", 57/2, s. 387.

[28] W aksjomatach podanych przez Kołmogorowa nie występowały symbole metazmiennych, tylko zmienne zdaniowe. W rezultacie, oprócz reguły odrywania, obecna była w systemie także reguła podstawiania.

[29] Por. Jaśkowski, S. (1948), *Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*, „Studia Societatis Scientiarum Torunesis", 1/5, s. 61.

[30] Dowód zob. *ibid.*, s. 61–62.

Z pary formuł α, $\sim \alpha$ nie wydedukujemy dowolnego zdania β. Wyprowadzimy wszakże jego negację. Co ciekawe, do analogicznych wniosków dojdziemy również wtedy, gdy analizie poddamy tzw. logikę minimalną Johanssona, tj. implikacyjną logikę Hilberta wzbogaconą o aksjomat:

(pJ) $(\alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \sim \alpha)$[31].

Nie jest to niczym zaskakującym, zważywszy na fakt, iż logika minimalna Johanssona jest równoważna systemowi Kołmogorowa.

Minimalna logika Johanssona jest nie tylko równoważna systemowi Kołmogorowa, ale również aksjomatyzacji opartej na implikacyjnej logice Hilberta i dwóch następujących schematach:

$$\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \sim \beta)$$

$$(\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha.$$

Jedyną pierwotną nieaksjomatyczną reguła wnioskowania jest reguła odrywania[32].

2.5. LOGIKA DYSKUSYJNA JAŚKOWSKIEGO

W 1948 roku Stanisław Jaśkowski publikuje pierwszy z artykułów poświęconych logice dyskusyjnej pt. *Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*. Rok później ukazuje się praca *O koniunkcji dyskusyjnej w rachunku zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*. Powstały system oznacza symbolem *D2*. Logika dyskusyjna Jaśkowskiego powszechnie uznawana jest za pierwszy – pod względem historycznym – formalny system logiki parakonsystentnej.

Istnieją, co najmniej dwa główne powody, dla których Jaśkowski opracował system logiki dyskusyjnej. Pierwszy, związany jest z bogactwem znaczeniowym wyrażeń języka naturalnego. Otóż, w życiu codziennym, a bywa, że i w nauce, operujemy wyrażeniami o znaczeniu wieloznacznym, nieostrym bądź okazjonalnym. Każde zaś niefrasobliwe użycie takiego wyrażenia może doprowadzić do pozornych sprzeczności. Pojawienie się sofizmatów albo tzw. sporów słownych (*logomachie*) to zaledwie dwie z wielu możliwych konsekwencji opisanego problemu.

Sytuacja ulega komplikacji, gdy nieprecyzyjna terminologia wkrada się w szeregi konkretnej dyscypliny naukowej lub pojawia się w zbiorze przepisów prawnych. Wówczas nawet drobne różnice w interpretacji znaczenia danego wyrażenia mogą pociągać za sobą poważne konsekwencje[33].

---

[31] Zob. Johansson, I. (1937), *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus* „Compositio Mathematica", 4, s. 119–136.

[32] Zob. Nowak, M. (1998), *Kripke Semantics for Some Paraconsistent Logics*, „Logica Trianguli", 2, s. 87–101.

[33] Więcej na ten temat zob. np. Brożek, A., Jadacki, J. (2005), *Reforma terminologii muzycznej*, „Sztuka i Filozofia", 26, s. 206–228; Mazglewski, A. (2005), *Nieścisłości termi-*

Sam Jaśkowski nie precyzuje, jakie są możliwe przyczyny błędów językowych: czy są to błędy wynikające z niestaranności mówienia (a może i chaotycznego myślenia) rozmówcy, czy też świadomego pogwałcenia zasad gramatyki języka naturalnego. Jaśkowski koncentruje się nie na przyczynach, lecz na skutkach opisanego stanu rzeczy (w wymiarze formalno-logicznym).

Drugi ważny powód, dla którego opracowano *D2*, związany jest z rolą, jaką odgrywa pojęcie *hipotezy* w naukach empirycznych. I tym razem, podobnie jak w przypadku języka naturalnego, Jaśkowski nie określa dokładnie, co rozumie przez termin *hipoteza* oraz nie podaje żadnej klasyfikacji nauk empirycznych. Ogranicza się do lakonicznego stwierdzenia, iż w toku rozwoju tych nauk zdarza się, że nie jesteśmy w stanie wyjaśnić wyników doświadczenia przy pomocy jednolitej, niesprzecznej teorii. Wyjaśniając lub tłumacząc badane zjawiska, posługujemy się odrębnymi hipotezami, noszącymi miano *hipotez roboczych*. Badamy rzeczywistość, używając alternatywnych modeli zjawisk. Dokonujemy próby opisu wybranych aspektów rzeczywistości. Hipotezy robocze, alternatywne modele nie zawsze są między sobą zgodne. Stajemy więc ponownie w obliczu problemu istnienia sprzeczności pozornej.

Powstaje pytanie: Jak powyższe obserwacje wyrazić w języku formalnym? Zdaniem Jaśkowskiego, pytanie sprowadza się do kwestii wyboru rachunku logicznego, który spełniałby następujące wymogi: po pierwsze, w zastosowaniu do teorii sprzecznych nie będzie pociągał ich trywializacji. Co oznacza, że mimo pojawienia się sprzeczności, mają istnieć zdania (co najmniej jedno), które będziemy w stanie sfalsyfikować. Podważamy tym samym zasadę *ex falso quodlibet*. Jak zobaczymy niebawem, *D2* jest przykładem logiki tolerującej sprzeczność nie dlatego, że możliwe jest w nim współistnienie dwóch zdań, z których jedno jest zaprzeczeniem drugiego, lecz dlatego, iż z pary zdań α, $\sim\alpha$ nie wydedukujemy dowolnego zdania β; po drugie, ma to być konstrukcja na tyle zasobna w zbiór twierdzeń, aby umożliwić praktyczne wnioskowanie. Można przecież wyobrazić sobie rachunek posiadający zaledwie kilka twierdzeń. Niestety, jego walory praktyczne, przynajmniej w tym kontekście, zostaną zakwestionowane; i wreszcie, po trzecie, powstały rachunek logiczny ma posiadać uzasadnienie intuicyjne.

Różny jest stopień realizacji powyższych warunków i obiektywna ich ocena. Zwłaszcza ostatni z wymienionych nie jest pozbawiony dużej dozy subiektywizmu. Spełnienie warunku pierwszego daje gwarancję, że mamy do czynienia z systemem logiki parakonsystentnej.

Podążając śladem Jaśkowskiego, dokonajmy teraz wyboru rachunku logicznego, który umożliwi nam wyrażenie intuicji. Analizę rozpoczniemy od prezentowanego w § 2.4 systemu Kołmogorowa. Przypomnijmy: prawo przepełnienia nie jest wyprowadzalne w tym systemie. Wyprowadzalna jest natomiast formuła

---

nologiczne w przepisach prawa polskiego o zawieraniu małżeństw wyznaniowych ze skutkami cywilnymi i ich praktyczne konsekwencje, „Ius Matrimoniale", 10/16, s. 193–206.

o postaci $p \to (\sim p \to \sim q)$. Pomimo, iż z pary formuł α, $\sim \alpha$ nie wydedukujemy dowolnej formuły β, to wydedukujemy jej negację. Zdaniem Jaśkowskiego, jest to stan bliski trywializacji systemu. To rozwiązanie należy więc odrzucić.

Drugim analizowanym przez Jaśkowskiego systemem, był system implikacji ścisłej Lewisa. Jeśli znak „→" rozumieć będziemy jako symbol implikacji ścisłej, wówczas nietrudno zauważyć, iż prawo przepełnienia nie jest twierdzeniem tego system. Twierdzeniami są natomiast formuły:

(F2) $(p \to q) \to (\sim (p \to q) \to r)$

$(efq)^\wedge\ (p \wedge \sim p) \to q$.

Odnotujmy w tym miejscu, że (F2) jest tezą w tych i tylko tych systemach implikacji ścisłej, które są definiowalne semantycznie przez modele Kripkego z przechodnią relacją osiągalności. Formuła (F2) nie jest zatem tezą (odpowiednika) modalnego systemu *K*. Koszty jakie musimy zapłacić za to *uściślenie* są jednak dość wysokie. Zbiór tez zawierających jedynie ścisłą implikację jest na tyle ubogi, że rozważany system nie miałby tu większego znaczenia praktycznego. A jest to jeden z głównych warunków, jakie wymienił Jaśkowski.

Kolejnym krokiem była analiza jednego z systemów logiki wielowartościowej[34]. Niestety, i tym razem, system nie spełnił oczekiwań. Okazuje się, że do zbioru tez analizowanego systemu należy dowolna formuła o postaci:

$(efq)^\wedge\ p \to (\sim p \to (\sim \sim p \to q))$.

Obecność trzech formuł: p, $\sim p$, $\sim \sim p$, trywializuje system. W rezultacie, Jaśkowski zaniechał wszelkich prób budowy systemu logiki dyskusyjnej na bazie logiki wielowartościowej. Jak sam pisał:

> Jeśli chodzi o systemy rachunku zdań, które mogą być zdefiniowane przez podanie wielowartościowej macierzy, to nie są mi znane publikacje pozostające w bezpośrednim związku z omawianym tu zagadnieniem [...][35].

Na szczęście, znane były Jaśkowskiemu publikacje na temat innego systemu logicznego, który sprostałby oczekiwaniom i który mógłby stanowić bazę interpretacyjną dla dalszych rozważań. Takim systemem okazał się system logiki modalnej *S5*. Zanim jednak przyjrzyjmy się bliżej zaproponowanej przez Jaśkowskiego interpretacji, omówimy pojęcie *asercji dyskusyjnej*.

Punkt wyjścia stanowi obserwacja życia codziennego. Niemal każdego dnia widzimy i słyszymy ludzi dyskutujących na określony temat. Możemy wówczas pokusić się o pewien myślowy eksperyment. Spróbujmy złączyć w jednolitą całość możliwie wszystkie zdania wypowiedziane w trakcie dyskusji i uformować coś na kształt listy wypowiedzi. Zauważmy, że wystarczą zaledwie dwie osoby, które przykładają inny

---

[34] Jaśkowski miał na myśli system $Ł^2_3$ Słupeckiego. Zob. § 3.3.

[35] Jaśkowski, S. (1948), *op. cit.*, s. 63.

sens do wypowiadanych przez siebie słów, aby nawet drobne różnice znaczeniowe doprowadziły do pozornych sprzeczności. Jako środek zaradczy, należałoby każde ze zdań poprzedzić zastrzeżeniem: *według poglądu jednego z uczestników dyskusji* albo *przy pewnym znaczeniu użytych w dyskusji terminów.* Takie działanie pomogłoby odróżnić, w pewnym stopniu, osoby, które zabrały głos w dyskusji. Dla Jaśkowskiego był to wystarczający powód, żeby wprowadzić pojęcie *asercji dyskusyjnej*.

Sens przypisywany asercji dyskusyjnej różni się od tego, który przypisuje się asercji klasycznej. Asercja klasyczna jest spójnikiem ekstensjonalnym, który intuicyjnie odpowiada tym zwrotom języka potocznego, które mają za zadanie ekspresyjne wzmocnienie wypowiedzi. Mówimy na przykład: *Odwiedziłem dziadka w szpitalu*, ale mówimy także: *Naprawdę odwiedziłem dziadka w szpitalu*, gdzie słowo *naprawdę* pełni funkcję wzmocnienia (asercji). Asercja klasyczna nie zmienia wartości logicznej zdania. Zdanie prawdziwe pozostanie zdaniem prawdziwym, zdanie fałszywe – fałszywym. Z kolei, asercja dyskusyjna zawiera w sobie *implicite* zastrzeżenie *według poglądu jednego z uczestników dyskusji* lub *przy pewnym znaczeniu użytych w dyskusji terminów*, nie może być zatem traktowana jako spójnik ekstensjonalny. Jaśkowski, opisując rolę i znaczenie asercji dyskusyjnej, odwołał się do logicznych i częściowo filozoficznych intuicji: Jeśli zapisujemy pewne zdanie α, to powinniśmy nadać mu taki sens intuicyjny, jakby zdanie α było poprzedzone spójnikiem *S5*–możliwości. Tym samym Jaśkowski utożsamił asercję dyskusyjną z jednym ze spójników znanych z logiki modalnej.

W tym miejscu pojawia się problem. Okazuje się bowiem, że *D2* – o ile ma spełnić nasze oczekiwania – nie da się w prosty sposób nadbudować nad zwykłą logiką dwuwartościową. Źródło kłopotu tkwi w regule odrywania. Otóż, jeśli implikację rozumieć będziemy na wzór klasyczny, wówczas z pary zdań $\alpha \rightarrow \beta$ oraz α, posiadających intuicyjny sens *możliwe, że* jeżeli α, to β oraz *możliwe, że* α, nie wynika zdanie β, rozumiane jako *możliwe, że* β. Dzieje się tak, ponieważ reguła $\Diamond\alpha, \Diamond(\alpha \rightarrow \beta) / \Diamond\beta$, nie jest regułą systemu *S5*. W rezultacie, stajemy wobec konieczności zdefiniowania nowego spójnika logicznego, który zastosowany do tez dyskusyjnego rachunku zdań, posiadałby własności przynajmniej częściowo analogiczne do tych, jakie posiada implikacja klasyczna. Tym spójnikiem okazała się implikacja dyskusyjna.

Definicja 2.5.1. $\alpha \rightarrow_d \beta := \Diamond\alpha \rightarrow \beta$.

Z filozoficznego punktu widzenia, definiens ma odpowiadać konkretnym zwrotom języka potocznego, typu: *jeśli ktokolwiek twierdzi, że α, to β* lub *jeżeli przy pewnym dopuszczalnym znaczeniu wyrazów α, to β*. Niemniej, za przyjęciem definicji 2.5.1 przemawia głównie czynnik merytoryczny, tj. odrzucenie reguły *ex falso quodlibet* oraz możliwie wielu wariantów prawa przepełnienia. Dla ilustracji, przyjrzyjmy się bliżej dwóm alternatywnym charakterystykom spójnika implikacji dyskusyjnej. I tak, konsekwencją definicji $\alpha \rightarrow_d \beta := \Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\beta$, byłaby konieczność przyjęcia jako tezy, formuły o postaci $(p \rightarrow_d q) \rightarrow_d (\sim (p \rightarrow_d q) \rightarrow_d r)$. Para formuł $p \rightarrow_d q$ oraz $\sim (p \rightarrow_d q)$ trywializuje system. Akceptacja zaś definicji

$\alpha \to_d \beta := \alpha \to \Diamond\beta$, prowadzi natychmiast do akceptacji prawa przepełnienia jako tezy systemu. Co więcej, reguła $\Diamond\alpha, \Diamond(\alpha \to \Diamond\beta) / \Diamond\beta$ nie jest regułą systemu *S5*. Powstały system nie byłby więc zamknięty na regułę odrywania dla tak rozumianej implikacji.

Definicja implikacji dyskusyjnej umożliwia modyfikację reguły odrywania:

(RO_d) $\alpha, \alpha \to_d \beta / \beta$.

Zmodyfikowana (RO_d) jest jedyną, obok reguły podstawiania (Sub), regułą pierwotną dyskusyjnego rachunku zdań. W dalszej części pracy, będziemy głównie operować schematami aksjomatów, toteż (Sub) stanie się zbyteczna.

Podobnym, co implikacja modyfikacjom uległa także równoważność dyskusyjna:

Definicja 2.5.2. $\alpha \leftrightarrow_d \beta := (\Diamond\alpha \to \beta) \wedge (\Diamond\beta \to \Diamond\alpha)$.

Na mocy definicji 2.5.2 wyrażenie $\alpha \leftrightarrow_d \beta$ znaczy tyle, co *jednocześnie; po pierwsze, jeżeli możliwe, że α, to β; i po drugie, jeżeli możliwe, że β, to możliwe, że α*. Trafność definicji potęguje fakt, iż inna – jak się wydaje, prostsza i czytelniejsza – definicja równoważności dyskusyjnej $\alpha \leftrightarrow_d \beta := \Diamond\alpha \leftrightarrow \Diamond\beta$, oznaczałaby przyjęcie jako tezy systemu dyskusyjnego formuły o postaci $(p \leftrightarrow_d q) \to_d (\sim (p \leftrightarrow_d q) \to_d r)$. Para formuł $p \leftrightarrow_d q$ oraz $\sim (p \leftrightarrow_d q)$ trywializuje system. Jeszcze większe komplikacje pojawiłyby się wraz z przyjęciem definicji $\alpha \leftrightarrow_d \beta := (\Diamond\alpha \to \beta) \wedge (\Diamond\beta \to \alpha)$. Wtedy należałoby zaakceptować $(p \leftrightarrow_d {\sim}p) \to_d q$ jako tezę systemy dyskusyjnego.

D2 można wzbogacić dodatkowo o definicję koniunkcji dyskusyjnej:

Definicja 2.5.3. $\alpha \wedge_d \beta := \alpha \wedge \Diamond\beta$,

która umożliwia uproszczenie definicji równoważności dyskusyjnej:

*Definicja 2.5.2.** $\alpha \leftrightarrow_d \beta := (\alpha \to_d \beta) \wedge_d (\beta \to_d \alpha)$.

Jaśkowski początkowo nie brał pod uwagę koniunkcji dyskusyjnej jako jednego z pierwotnych spójników systemu. W artykule pochodzącym z 1948 roku do zbioru formuł zaliczył jedynie wyrażenia zbudowane zgodnie z poniższymi zasadami:

(1) każda zmienna zdaniowa jest formułą (zbiór zmiennych zdaniowych jest zbiorem niepusty i przeliczalnym),

(2) jeśli α jest formułą, to $\sim \alpha$ też jest formułą,

(3) jeśli α i β są formułami, to $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to_d \beta$ oraz $\alpha \leftrightarrow_d \beta$ są formułami,

(4) żadne inne wyrażenie, poza wymienionymi w punktach (1)–(3), nie jest formułą.

Dopiero rok później, w kolejnej pracy, rozszerzył alfabet języka systemu o nowy spójnik, którym właśnie była koniunkcja dyskusyjna.

Można zaryzykować twierdzenie, że Jaśkowski zbudował dwa odmienne warianty systemu logiki dyskusyjnej: pierwszy, w którym decydującą rolę odgrywa intuicja, mówiąca, iż dyskusja staje się *przepełniona*, gdy co najmniej jeden z jej uczestników zaprzeczył sam sobie. Co znajduje formalne uzasadnienie w akceptacji formuły $(p \wedge \sim p) \rightarrow_d q$ jako tezy *D2*. Uczestnik dyskusji wypowiada zdanie *p*, po czym przystaje na jego zaprzeczenie $\sim p$. Dalsza dyskusja, o ile ma być racjonalna, nie ma sensu. Zmieniamy jej przedmiot, wypowiadając zdanie *q*.

W drugim wariancie systemu wiodącą rolę, z filozoficznego punktu widzenia, pełni pojęcie sprzeczności *pozornej*. W komunikacji międzyludzkiej istnienie sprzeczności o podłożu terminologicznym nie prowadzi przecież do całkowitej dowolności tematycznej w dyskusji. Należy więc odrzucić tezę $(p \wedge_d \sim p) \rightarrow_d q$. Jeden z uczestników dyskusji wypowiedział zdanie *p*, inny mu zaprzeczył, wypowiadając zdanie $\sim p$. Nie można arbitralnie zakładać, że obydwaj uczestnicy dyskusji zawsze w ten sam sposób rozumieją znaczenie użytych wyrażeń (sprzeczność natury terminologicznej).

W literaturze przedmiotu[36] można natknąć się na jeszcze jeden przykład definicji koniunkcji dyskusyjnej, tj. $\alpha \wedge_d \beta := \Diamond\alpha \wedge \beta$. Różnica, wydawałoby się kosmetyczna, ma znaczące konsekwencje logiczne. Wystarczy wziąć pod uwagę tabelę:

Formuła	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \Diamond\beta$	$\Diamond\alpha \wedge \beta$
$\sim (p \bullet \sim p)$	tak	tak	tak
$(p \bullet q) \rightarrow_d (q \bullet p)$	tak	tak	tak
$\sim (p \bullet q) \rightarrow_d \sim (q \bullet p)$	tak	**nie**	**nie**
$p \rightarrow_d \sim (q \bullet \sim p)$	tak	**nie**	tak
$p \rightarrow_d \sim (\sim p \bullet q)$	tak	tak	**nie**
$p \rightarrow_d (q \rightarrow_d (p \bullet q))$	**nie**	tak	tak

Po lewej stronie tabeli widnieją przykłady kilku formuł, w których zamiast konkretnego spójnika koniunkcji użyty został uniwersalny znak „•". W pozosta-

[36] Zob. Arruda, A.I. (1989), *Aspects of the Historical Development of Paraconsistent Logic*, [w:] Priest, G., Routley, R., Norman, J. (red.), *Paraconsistent Logic*, Philosophia, München–Hamden–Wien, s. 99–130; Ciuciura, J. (2005), *On the da Costa, Dubikajtis and Kotas' System of the Discursive Logic, D2*, „Logic and Logical Philosophy", 14/2, s. 235–252; Da Costa, N.C.A. (1975), *Remarks on Jaśkowski's Discussive Logic*, „Reports on Mathematical Logic", 4, s. 7–16; Da Costa, N.C.A., Doria, F.A. (1995), *On Jaśkowski's Discussive Logics*, „Studia Logica", 54/1, s. 33–60; Kotas J. (1975), *Discussive Sentential Calculus of Jaśkowski*, „Studia Logica", 34/2, s. 149–168; Kotas, J., da Costa, N.C.A. (1989), *Problems of Modal and Discussive Logics*, [w:] Priest, G., Routley, R., Norman, J. (red.), *Paraconsistent Logic*, Philosophia, München–Hamden–Wien, s. 227–244.

łych kolumnach, oznaczonych kolejno przez „$\alpha \wedge \beta$", „$\alpha \wedge \Diamond\beta$" oraz „$\Diamond\alpha \wedge \beta$", figurują odpowiedzi (twierdzące lub przeczące) na pytanie: Czy jeśli w danej formule, zawierającej uniwersalny znak „$\bullet$", zastąpimy „$\bullet$" konkretnym symbolem koniunkcji, to otrzymamy wyrażenie, które jest tezą systemu dyskusyjnego?

Otóż, prawa *niesprzeczności* oraz *przemienności względem koniunkcji* są tezami każdego z rozważanych systemów. Niezależnie, czy symbol „$\bullet$", zastąpimy „$\wedge$", czy też spójnikiem koniunkcji dyskusyjnej. W każdej z trzech kolumn pojawia się więc odpowiedź twierdząca. Schemat $\sim (p \bullet q) \rightarrow_d \sim (q \bullet p)$ jest tezą już tylko wtedy, gdy „$\bullet$" zastąpimy symbolem „$\wedge$". Dzieje się tak, ponieważ tezą systemu *S5* jest wyrażenie $\Diamond(\Diamond\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim (q \wedge p))$, rozumiane jako translacyjny odpowiednik formuły $\sim (p \wedge q) \rightarrow_d \sim (q \wedge p)$. Tezami *S5* nie są zaś wyrażenia $\Diamond(\Diamond\sim (p \wedge \Diamond q) \rightarrow \sim (q \wedge \Diamond p))$ oraz $\Diamond(\Diamond\sim (\Diamond p \wedge q) \rightarrow \sim (\Diamond q \wedge p))$, będące translacyjnym odpowiednikami formuły $\sim (p \wedge_d q) \rightarrow_d \sim (q \wedge_d p)$. W kolumnie „$\alpha \wedge \beta$" widnieje zatem słowo „tak". Podczas, gdy w pozostałych dwóch kolumnach odpowiedź jest przecząca.

Analizując kolejno dalsze formuły i podstawienia, dojdziemy do wniosku, że mamy do czynienia nie tylko z różnymi definicjami koniunkcji, ale faktycznie już nie z dwoma, lecz trzema, różnymi wersjami systemu logiki dyskusyjnej.

Dodajmy na marginesie, że Jaśkowski oponował przeciwko rozumieniu koniunkcji dyskusyjnej jako $\alpha \wedge_d \beta := \Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta$, gdyż do zbioru tez należałoby zaliczyć formułę o postaci $(p \wedge_d q) \rightarrow_d (\sim (p \wedge_d q) \rightarrow_d r)$. Byłby to stan bliski trywializacji systemu.

Istnieje wiele nieporozumień dotyczących logiki dyskusyjnej, których podłożem stał się spójnik koniunkcji. Jednym z nich jest dopatrywanie się w *D2* przykładu logiki, która nie jest zamknięta na regułę dołączania koniunkcji:

(DK) $\alpha, \beta / \alpha \wedge \beta$[37].

Twierdzenie to będzie prawdziwe dopóki, dopóty spójnik koniunkcji nie jest rozumiany zgodnie z definicją $\alpha \wedge_d \beta := \alpha \wedge \Diamond\beta$ lub $\alpha \wedge_d \beta := \Diamond\alpha \wedge \beta$. Zauważmy bowiem, że reguła

(DK_d) $\alpha, \beta / \alpha \wedge_d \beta$,

jest regułą logiki dyskusyjnej, ponieważ *S5* jest zamknięty zarówno na regułę:

($\Diamond$DK) $\Diamond\alpha, \Diamond\beta / \Diamond(\alpha \wedge \Diamond\beta)$,

[37] Por. da Costa, N.C.A., Doria, F.A. (1995), *On Jaśkowski's Discussive Logics*, „Studia Logica", 54/1, s. 33–60; Priest, G., Routley, R. (1984), *Introduction:Paraconsistent Logics*, „Studia Logica", 43/1–2, s. 3–16; Priest, G., Routley, R. (1989), *First Historical Introduction. A Preliminary History of Paraconsistent and Dialethic Approaches*, [w:] Priest, G., Routley, R., Norman J. (red.), *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, Philosophia Verlag, Philosophia, München–Hamden–Wien. s. 3–75.

jak i na

$(\Diamond DK)^*\ \Diamond\alpha, \Diamond\beta\ /\ \Diamond(\Diamond\alpha \wedge \beta).$

Nie jest natomiast zamknięty na regułę $\Diamond\alpha, \Diamond\beta\ /\ \Diamond(\alpha \wedge \beta)$.

Źródłem tego nieporozumienia jest fakt, iż zarówno Jaśkowski jak i późniejsi autorzy używali wspólnego terminu *logika dyskusyjna* oraz symbolu *D2,* na oznaczenie odmiennych konstrukcji logicznych. W przypadku Jaśkowskiego, można to tłumaczyć tym, że dokonał on rozszerzenia alfabetu języka o nowy symbol koniunkcji. Alfabet ten zwierałby więc oprócz symbolu „$\wedge$", również symbol „$\wedge_d$". Zauważmy jednak, że symbol „$\wedge$" staje się wówczas zbyteczny. Zapis $\alpha \wedge \beta$ można bowiem traktować jako skrót definicyjny wyrażenia $\sim(\sim\alpha \vee \sim\beta)$. W przypadku zaś autorów spoza Polski, źródła należy dopatrywać się w braku, do końca lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku, przekładu na język obcy artykułu *O koniunkcji dyskusyjnej w rachunku zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*. Do tego czasu wyłącznie polskojęzyczni czytelnicy byli w stanie czytać pracę Jaśkowskiego na temat koniunkcji dyskusyjnej.

Dla da Costy, Dubikajtisa, Kotasa oraz innych autorów przyjmujących za punkt wyjścia definicję $\alpha \wedge_d \beta := \Diamond\alpha \wedge \beta$, wybór zdawał się być podyktowany względami formalno-logicznymi. Aby to wyjaśnić, przyjrzyjmy się podanym regułom wnioskowania:

$(1)\ \alpha \rightarrow_d \beta\ //\ \sim(\sim\beta \wedge_d \alpha)$
$(1)^*\ \alpha \rightarrow_d \beta\ //\ \sim(\alpha \wedge_d \sim\beta)$
$(2)\ \sim(\alpha \wedge_d \beta)\ //\ \sim(\beta \wedge_d \alpha)$[38].

Łatwo zweryfikować, niezależnie od tego, którą definicję koniunkcji dyskusyjnej zaakceptujemy, iż system *D2* nie jest zamknięty na regułę (2). Oryginalny system Jaśkowskiego zamknięty jest natomiast na regułę (1), gdy tymczasem reguła (1)* jest w nim zawodna (wystarczy postawić zmienną *p* za α oraz *q* za β). System da Costy, Dubikajtisa i Kotasa zamknięty jest na regułę (1)*, ale nie na (1). Reguła (1)*, z formalnego punktu widzenia, wydaje się bardziej naturalna aniżeli (1). Przywodzi na myśl standardowe rozumienie implikacji.

Podsumowując dotychczasowe rozważania, zauważmy, iż logika dyskusyjna *D2*, została zdefiniowana przez interpretację w terminach systemu logiki modalnej *S5*. Precyzyjnie wyraża to kolejna definicja:

Definicja 2.5.4. $D2 := \{\alpha \in F_d : \ulcorner \Diamond tr(\alpha) \urcorner \in S5\}$,

gdzie α jest formułą wyrażoną w języku systemu *D2*, F_d oznacza zbiór wszystkich formuł systemu logiki dyskusyjnej, symbol $\Diamond$ to znany z *S5* spójnik możliwości,

[38] Użyty symbol „//" oznacza, że wynikanie zachodzi w obydwu kierunkach.

z kolei *tr* oznacza funkcję przekształcającą język systemu *D2* w język systemu *S5*, określoną następująco:

(1) $tr(p) = p$, gdzie p jest dowolną zmienną zdaniową, symbolicznie: $p \in var \neq \emptyset$
(2) $tr(\sim \alpha) = \ulcorner \sim tr(\alpha) \urcorner$
(3) $tr(\alpha \vee \beta) = \ulcorner tr(\alpha) \vee tr(\beta) \urcorner$
(4) $tr(\alpha \wedge_d \beta) = \ulcorner tr(\alpha) \wedge \Diamond tr(\beta) \urcorner$
(5) $tr(\alpha \rightarrow_d \beta) = \ulcorner \Diamond tr(\alpha) \rightarrow tr(\beta) \urcorner$.

Wypowiadamy w języku *D2* pewne zdanie, powiedzmy, α. Dokonujmy przekładu zdania α na język systemu *S5*. Translacja przebiega w dwóch etapach. Po pierwsze, pozbywamy się wszystkich spójników dyskusyjnych zgodnie z definicją funkcji przekładu *tr*. Następnie zdanie $tr(\alpha)$ poprzedzamy zastrzeżeniem *według poglądu jednego z uczestników dyskusji...*, tj. spójnikiem możliwości $\Diamond$. Otrzymujemy ostatecznie zdanie $\Diamond tr(\alpha)$. Możemy teraz sprawdzić, czy podane zdanie jest tezą (ewentualnie tautologią) systemu *S5*. Funkcja przekładu, jak widać, ma wymiar *metalogiczny*: Skoro system *S5* jest rozstrzygalny, rozstrzygalny jest także system logiki dyskusyjnej.

System *D2* można by dodatkowo wzbogacić o symbole klasycznej implikacji $\rightarrow$ oraz równoważności $\leftrightarrow$. W *D2* mielibyśmy, więc po dwa symbole implikacji oraz równoważności (klasyczne i dyskusyjne). Posunięcie to nie ma większego znaczenia praktycznego. W *D2* tak elementarna reguła wnioskowania, jak reguła odrywania dla implikacji materialnej, jest zawodna.

Operowanie opisaną przez Jaśkowskiego metodą translacji to częstokroć proces żmudny i długotrwały. Chcąc określić, czy dana formuła należy, czy też nie należy do zbioru wyrażeń prawdziwych systemu *D2*, każdorazowo zmuszeni jesteśmy dokonywać jej przekładu na język systemu *S5*. Powstaje więc pytanie: Czyż nie prościej byłoby operować semantyką niezależną względem translacji? Odpowiedź przynosi definicja modelu dyskusyjnego.

Modelem dyskusyjnym $\boldsymbol{M}_d$ jest para uporządkowana $<W, v>$, gdzie W jest niepustym zbiorem puntów, zaś funkcja wartościowania v przypisuje każdemu elementowi ze zbioru $var \times W$ dokładnie jedną z dwóch wartości logicznych, tj. v: $var \times W \longrightarrow \{1,0\}$, w sposób następujący:

$(var)\ v(p, x) = 1$ wtw, gdy $x \in v(p)$.

Każde wartościowanie v można indukcyjnie rozszerzyć do funkcji v^*, v^*: $F_d \times W \longrightarrow \{1,0\}$, jak następuje:

$(var)^*\ v^*(p, x) = v(p, x)$, dla $p \in var$
$(v1)\ v^*(\sim \alpha, x) = 1$ wtw, gdy $v^*(\alpha, x) = 0$

$(v2)$ $v^*(\alpha \vee \beta, x) = 1$ wtw, gdy $v^*(\alpha, x) = 1$ lub $v^*(\beta, x) = 1$

$(v3)$ $v^*(\alpha \wedge_d \beta, x) = 1$ wtw, gdy $v^*(\alpha, x) = 1$ oraz dla pewnego $y \in W$, $v^*(\beta, y) = 1$

$(v4)$ $v^*(\alpha \rightarrow_d \beta, x) = 1$ wtw, gdy dla każdego $y \in W$, $v^*(\alpha, y) = 0$ lub $v^*(\beta, x) = 1$.

Wprowadźmy teraz pojęcie *D2*–tautologii.

Definicja 2.5.5. Niech $\alpha \in F_d$: α jest *D2*–tautologią wtw, gdy w dowolnym modelu dyskusyjnym $\boldsymbol{M_d} = <W, v>$, istnieje taki punkt y, że $v^*(\alpha, y) = 1$.

Zgodnie z oczekiwaniami, do zbioru *D2*–tautologii nie należy na przykład znane z logiki klasycznej prawo przepełnienia. Łatwo też zauważyć, iż poszczególne warunki nałożone na zmienne zdaniowe oraz stałe logiczne, odpowiadają punktom (1)–(5) definicji funkcji *tr*. Zależność, pomiędzy wprowadzoną semantyką a metodą translacji, wyraża precyzyjnie poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 2.5.1. (Ciuciura 2008) Dla dowolnego wyrażenia $\alpha \in F_d$:

α jest *D2*–tautologią wtw, gdy $\alpha \in D2$ wtw, gdy $\ulcorner \Diamond tr(\alpha) \urcorner \in S5$.

Logika dyskusyjna pojmowana była dotychczas jako zbiór wszystkich formuł. Możliwe jest jednak podanie innej charakterystyki *D2*. Otóż, na zbiorze wszystkich formuł systemu logiki dyskusyjnej możemy zdefiniować relację *D2*–konsekwencji ($\vdash_d$).

Definicja 2.5.6. (Nasieniewski, Pietruszczak 2012) Dla dowolnego zbioru $\Gamma \subseteq F_d$, dowolnej $\alpha \in F_d$:

$\Gamma \vdash_d \alpha$ wtw, gdy $\{\Diamond tr(\beta) : \beta \in \Gamma\} \vdash_{S5} \Diamond tr(\alpha)$[39].

Definicja 2.5.7. Dla dowolnej $\alpha \in F_d$: α jest tezą systemu *D2* wtw, gdy $\varnothing \vdash_d \alpha$.

Na zakończenie sformułujemy grupę twierdzeń, dzięki którym, określone zostaną własności logiki dyskusyjnej. Podamy je bez dowodów. Dowody można odnaleźć w obydwu pracach Jaśkowskiego.

Twierdzenie 2.5.2. (Jaśkowski 1949) Jeśli w dowolnej tezie klasycznego rachunku zdań, zawierającej symbole zmiennych zdaniowych i nie zawierająca innych spójników zdaniowych poza: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$, zastąpimy symbol $\rightarrow$ przez $\rightarrow_d$, $\leftrightarrow$ przez $\leftrightarrow_d$, $\wedge$ przez $\wedge_d$ (oraz $\vee$ przez $\vee$), to uzyskamy tezę systemu *D2*.

Twierdzenie 2.5.3. (*ibid.*) Jeśli w dowolnej tezie systemu *D2*, zastąpimy spójnik $\rightarrow_d$ przez $\rightarrow$, $\leftrightarrow_d$ przez $\leftrightarrow$, $\wedge_d$ przez $\wedge$ (oraz $\vee$ przez $\vee$), to otrzymamy wyrażenie, które jest tezą klasycznego rachunku zdań.

---

[39] Znak $\vdash_{S5}$ jest symbolem *S5*–konsekwencji.

Proste zastąpienie spójników zdaniowych wskazuje, iż pozytywna część systemu *D2* utożsamiona jest z pozytywną częścią logiki klasycznej. Znajduje to szerokie zastosowanie w praktyce. Otóż, sprawdzając czy dana formuła jest tezą *D2*, nie musimy każdorazowo korzystać z semantyki światów możliwych lub przekładu języka *D2* na język systemu *S5*. Wystarczą klasyczne tabelki prawdziwościowe (oraz twierdzenie o pełności dla klasycznego rachunku zdań). Oczywiście, pod jednym warunkiem: rozważana formuła nie może zawierać innych spójników, poza wymienionymi w twierdzeniach 2.5.2 i 2.5.3, a w szczególności negacji. O negacji mowa jest w kolejnym twierdzeniu:

Twierdzenie 2.5.4. (*ibid.*) Jeśli α jest tezą klasycznego rachunku zdań, zawierającą, poza zmiennymi zdaniowymi, jedynie spójniki: $\sim$, $\vee$, wówczas:

(1) α

(2) $\sim \alpha \rightarrow_{d} q$

są tezami systemu *D2*.

Z powyższego twierdzenia wynika, że *D2* zawiera zbiór wszystkich *negacyjno-alternatywnych* tez klasycznego rachunku zdań (punkt 1 twierdzenia). Z *falsum* wynika zaś dowolne zdanie (punkt 2). Skoro jednak dowolne zdanie β wydedukujemy z negacji zasady wyłączonego środka, to tym samym wydedukujemy je z pary formuł $\alpha \vee \sim \alpha, \sim (\alpha \vee \sim \alpha)$. Zastosowanie reguły *ex falso quodlibet* zostaje więc zredukowane do postaci:

$$(\mathrm{EFQ})^{\perp}\ \alpha \vee \sim \alpha, \sim (\alpha \vee \sim \alpha) \,/\, \beta, \text{ dla dowolnych } \alpha, \beta \in F_d.$$

2.6. C_n–SYSTEMY DA COSTY ($1 \leq n < \omega$)

W latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych XX wieku Newton da Costa publikuje serię artykułów, w których zaprezentowana została pewna hierarchia systemów logicznych[40]. Systemy miały w założeniu służyć do analizy sprzecznych, lecz nietrywialnych teorii. Istnieją teorie – argumentował da Costa – do analizy których nie znajdują zastosowania standardowe metody formalne. Takim przykładem jest choćby teoria przedmiotów sprzecznych Meinonga[41]. Sprzeczność nie powinna pociągać za sobą

[40] Zob. da Costa, N.C.A. (1963), *Calculs propositionnels pour les systémes formels inconsistants*, „Compte Rendu Acad. des Sciences", 257, s. 3790–3793; da Costa, N.C.A. (1967), *Une nouvelle hiérarchie de théories inconsistentes*, „Publications du Département Mathématiques de Lyon", 4/3, s. 2–8; da Costa, N.C.A. (1974), *On the Theory of Paraconsistent Formal Systems*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 15/4, s. 497–510.

[41] Zob. Meinong, A. (1904), *Über Gegenstandstheorie*, [w:] *Untersuchungen Zur Gegenstandstheorie Und Psychologie*, 1/50, Barth, Leipzig, s. 481–530; da Costa, N.C.A. (1974), *op. cit*.

trywializacji danej teorii. Załóżmy bowiem, że T jest teorią sprzeczną. Naszym celem nie jest wyrugowanie z teorii T potencjalnych sprzeczności tudzież paradoksów, lecz ich analiza. Nie ma więc mowy o uznaniu wszystkich zdań wyrażonych w języku teorii T za zdania prawdziwe. W obrębie teorii T muszą istnieć zdania, które są prawdziwe, podczas gdy ich negacje są fałszywe. Nie każde zdanie wyrażone w języku teorii T jest jej twierdzeniem. Postulat ten posiada mocne podstawy metodologiczne: jest gwarantem *nietrywialności* teorii T. Z drugiej strony, skoro założyliśmy, iż T jest teorią sprzeczną, musi przeto istnieć przynajmniej jedno zdanie wyrażone w języku teorii T, takie, że zarówno ono jak i jego negacja są jednocześnie prawdziwe. W tym przypadku nie chodzi o dowolne zdanie lub zdania teorii T, lecz pewien szczególny ich rodzaj. Mogą to być na przykład zdania ujęte w formie aporii, których interpretacja prowadzi do sprzeczności. Mogą to być zdania, w których przypisuje się danemu obiektowi własności sprzeczne. Mogą to być również zdania, co do prawdziwości lub fałszywości których nigdy nie będziemy pewni. Logika klasyczna, podobnie zresztą jak wiele systemów nieklasycznych, okazuje się tu bezużyteczna. Sprzeczność teorii natychmiast implikuje jej trywialność.

Powstaje pytanie, w jaki sposób zaradzić opisanym trudnościom? Zdaniem da Costy należy stworzyć logikę, która służyłaby jako baza formalna do analizy sprzecznych, lecz nietrywialnych teorii. Powstała logika powinna spełniać cztery podstawowe kryteria. Po pierwsze, prawo niesprzeczności nie będzie jej twierdzeniem. Po drugie, z pary formuł sprzecznych, tj. α i $\sim\alpha$, nie będzie można w ogólności wydedukować dowolnej formuły β. Po trzecie, język formalny postulowanej logiki powinien w łatwy sposób dać się rozszerzyć do języka pierwszego rzędu (*z* lub *bez* identyczności). I wreszcie, po czwarte, powstała konstrukcja powinna zawierać możliwie wiele praw i reguł inferencji logiki klasycznej[42].

Pierwszy z wymienionych warunków jest względnie klarowny: za pomocą reguł wnioskowania nie wyprowadzimy, z aksjomatów sugerowanej logiki, formuły o postaci $\sim(\alpha \wedge\sim\alpha)$. Drugi i czwarty postulat przypomina (dwa pierwsze) kryteria Jaśkowskiego[43]. Niestety, podobnie jak w przypadku Jaśkowskiego, tu również można wyrazić analogiczne zastrzeżenie: z uwagi na nieostrość użytych terminów, warunki wydają się nieprecyzyjne. Trudno bowiem jednoznacznie rozstrzygnąć, co dokładnie oznacza termin *w ogólności* oraz jak interpretować zwrot *możliwie wiele.* Podobny zarzut można postawić względem warunku trzeciego[44].

Początkowo hierarchia C_n–systemów $(1 \leq n < \omega)$ została przedstawiona jedynie w wersji syntaktycznej. Najsłabszym spośród systemów hierarchii jest sys-

---

42 Da Costa, N.C.A (1974), *op. cit.*, s. 498.

43 Por. § 2.5.

44 Da Costa był w pełni świadom opisanych trudności interpretacyjnych. Zob. da Costa, N.C.A. (1974), *op. cit*. s. 498.

tem C_ω. W skład zbioru schematów aksjomatycznych systemu C_ω weszły aksjomaty pozytywnej części logiki intuicjonistycznej:

(H1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
(H2) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$
(H3) $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$
(H4) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
(H5) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
(H6) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
(H7) $\alpha \to (\beta \vee \alpha)$
(H8) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$

oraz dwa aksjomaty charakteryzujące spójnik negacji:

(*tnd*) $\alpha \vee \sim \alpha$
(*nn*) $\sim \sim \alpha \to \alpha$.

Jedyną nieaksjomatyczną regułą wnioskowanie jest reguła odrywania (RO) $\alpha, \alpha \to \beta \,/\, \beta$. Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą odrywania definiują relację konsekwencji $\vdash_{C_\omega}$. Spójnik równoważności definiowany jest w standardowy sposób.

System C_ω ma wiele ciekawych własności, pośród których warto np. wspomnieć o tym, iż zarówno prawo Peirce'a, $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$, prawo Dummetta, $\alpha \vee (\alpha \to \beta)$, jak i prawo przepełnienia, $\alpha \to (\sim \alpha \to \beta)$, nie są jego twierdzeniami. Co więcej, jak wykazał Sette, żadna formuła o postaci $\sim \alpha$ nie jest twierdzeniem C_ω[45]. A ponadto:

Twierdzenie 2.6.1. (Arruda 1975) System C_ω nie może być scharakteryzowany przez matryce skończone.

Twierdzenie 2.6.2. (Fidel 1977) System C_ω jest rozstrzygalny[46].

Definicja 2.6.1. System *S* jest *skończenie trywializowalny*, o ile istnieje taka formuła α wyrażona w języku systemu *S*, że dołączona do zbioru aksjomatów *S*, spowoduje przepełnienie (trywializację) tego systemu.

Twierdzenie 2.6.3. (da Costa, 1974) System C_ω nie jest skończenie trywializowalny.

---

[45] Cyt. za Loparić, A. (1986), *A Semantical Study of some Propositional Calculi*, „Journal of Non-Classical Logic", 3, s. 74.

[46] Por. Arruda, A.I. (1975), *Remarques sur les systèmes Cn*, „Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris (A-B)", 280, s. 1253–1256.

Na marginesie nadmieńmy, iż dodanie do zbioru aksjomatów systemu C_ω prawa Peirce'a lub Dumetta, spowoduje, że otrzymamy tzw. system C_{min}[47]. Niestety, w oryginalnym sformułowaniu da Costy nie stanowił on żadnego istotnego punktu odniesienia dla proponowanej przez niego hierarchii. Kolejne bowiem systemy hierarchii C_1, C_2, ..., C_n, ..., C_ω $(1 \leq n < \omega)$, uzyskujemy, wzbogacając C_ω o dodatkowe schematy:

(A11)$^{(n)}$ $\beta^{(n)} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim \beta) \to \sim \alpha))$[48]

(A12a)$^{(n)}$ $(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \to (\alpha \wedge \beta)^{(n)}$

(A12b)$^{(n)}$ $(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \to (\alpha \vee \beta)^{(n)}$

(A12c)$^{(n)}$ $(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \to (\alpha \to \beta)^{(n)}$.

Zapis $\alpha^{(n)}$ oznacza $\alpha^n \wedge \alpha^{n-1} \wedge \ldots \wedge \alpha^1$, gdzie $1 \leq n$ oraz $\alpha^1 = \alpha^{\circ} = \sim (\alpha \wedge \sim\alpha)$, natomiast $\alpha^i = \alpha^{\circ\ldots\circ}$ (*i*-razy). Zapis wymaga pewnych wyjaśnień. Zilustrujemy go zatem prostym przykładem. Niech $n = 2$, wtedy $\alpha^{(2)}$, czyli $\alpha^2 \wedge \alpha^1$. Skoro jednak $\alpha^2 = \alpha^{\circ\circ} = \sim (\alpha^{\circ} \wedge \sim \alpha^{\circ}) = \sim (\sim (\alpha \wedge \sim \alpha) \wedge \sim \sim (\alpha \wedge \sim \alpha))$, zaś $\alpha^1 = \alpha^{\circ} = \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$, tak więc $\alpha^{(2)} = \alpha^2 \wedge \alpha^1 = \sim (\sim (\alpha \wedge \sim \alpha) \wedge \sim \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)) \wedge \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$. Schemat (A11)$^{(n)}$ przybierze wówczas kształt następujący: $\beta^{(2)} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim \beta) \to \sim \alpha))$, tj. $(\sim (\sim (\beta \wedge \sim \beta) \wedge \sim \sim (\beta \wedge \sim\beta)) \wedge \sim (\beta \wedge \sim \beta)) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim \beta) \to \sim \alpha))$. W identyczny sposób rozpiszemy schematy (A12a)$^{(n)}$– (A12c)$^{(n)}$.

Gwoli ścisłości warto w tym miejscu nadmienić, iż trzy ostatnie aksjomaty, mogą zostać zredukowane do jednego, tzn.:

(A12)$^{(n)}$ $(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \to ((\alpha \wedge \beta)^{(n)} \wedge (\alpha \vee \beta)^{(n)} \wedge (\alpha \to \beta)^{(n)})$.

Aksjomat (A11)$^{(n)}$ można z kolei zastąpić innym schematem, mianowicie:

(A11)$^{(n)*}$ $\alpha^{(n)} \to (\alpha \to (\sim \alpha \to \beta))$.

Obydwa aksjomaty są równoważne. Aby to udowodnić, pokażmy w pierwszej kolejności, iż formuła (A11)$^{(n)*}$ jest wyprowadzalna w każdym C_n–systemie $(1 \leq n < \omega)$.

Dowód dla (A11)$^{(n)*}$:

(1) $\alpha^{(n)}$ *zał. na mocy twierdzenia o dedukcji*

(2) α *zał. na mocy twierdzenia o dedukcji*

(3) $\sim \alpha$ *zał. na mocy twierdzenia o dedukcji*

(4) $\alpha^{(n)} \to ((\sim \beta \to \alpha) \to ((\sim \beta \to \sim \alpha) \to \sim \sim \beta))$ (A11)$^{(n)}$

---

[47] Zob. Carnielli, W.A., Marcos, J. (1999), *Limits for Paraconsistent Calculi*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 40/3, s. 375–390.

[48] Por. aksjomat (*pK*) systemu Kołmogorowa, § 2.4.

(5) $(\sim\beta \to \alpha) \to ((\sim\beta \to \sim\alpha) \to \sim\sim\beta)$ (4), (1), (RO)
(6) $\sim\beta \to \alpha$ (H1), (2), (RO)
(7) $\sim\beta \to \sim\alpha$ (H1), (3), (RO)
(8) $\sim\sim\beta$ (5), (6), (7), (RO)
(9) β (*nn*), (8), (RO)
$\alpha^{(n)} \to (\alpha \to (\sim\alpha \to \beta))$ *twierdzenie o dedukcji*, (1), (2), (3), (9).

Udowodnimy teraz, że formuła $(A11)^{(n)}$ jest wyprowadzalna w każdym takim C_n–systemie $(1 \leq n < \omega)$, w którym $(A11)^{(n)}$ zastąpiono aksjomatem $(A11)^{(n)*}$.

Dowód dla $(A11)^{(n)}$:

(1) $\beta^{(n)}$ *zał. na mocy twierdzenia o dedukcji*
(2) $\alpha \to \beta$ *zał. na mocy twierdzenia o dedukcji*
(3) $\alpha \to \sim\beta$ *zał. na mocy twierdzenia o dedukcji*
(4) $\beta^{(n)} \to (\beta \to (\sim\beta \to \sim\alpha))$ $(A11)^{(n)*}$
(5) $\beta \to (\sim\beta \to \sim\alpha)$ (4), (1), (RO)
(6) $\alpha \to (\sim\beta \to \sim\alpha)$ *prawo sylogizmu* (2), (5)
(7) $\sim\beta \to (\alpha \to \sim\alpha)$ *prawo komutacji* (6), (RO)
(8) $\alpha \to (\alpha \to \sim\alpha)$ *prawo sylogizmu* (3), (7)
(9) $\alpha \to \alpha$ *teza, prawo tożsamości*
(10) $\alpha \to \sim\alpha$ (H2), (8), (9), (RO)
(11) $\sim\alpha \to \sim\alpha$ *teza, prawo tożsamości*
(12) $(\alpha \to \sim\alpha) \to ((\sim\alpha \to \sim\alpha) \to ((\alpha \vee \sim\alpha) \to \sim\alpha)))$ (H8)
(13) $\sim\alpha$ (12), (10), (11), (*tnd*), (RO)
$\beta^{(n)} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim\beta) \to \sim\alpha))$ *twierdzenie o dedukcji*, (1), (2), (3), (13).

W pracy pochodzącej z 1963 roku[49] da Costa wymienia jeszcze jeden, dodatkowy aksjomat, tj.:

$(A13)^{(n)}$ $\alpha^{(n)} \to (\sim\alpha)^{(n)}$.

Kilka lat później wykazano, że formuła $(A13)^{(n)}$ jest wyprowadzalna w każdym, prócz oczywiście C_ω, systemie hierarchii[50].

49 Zob. da Costa, N.C.A. (1963), *op. cit.*
50 Zob. da Costa, N.C.A. (1974), *op. cit.*, s. 500.

Przytoczymy teraz szereg faktów, opisujących własności C_n–systemów $(1 \leq n < \omega)$. Na początek spostrzeżenie: w żadnym z analizowanych systemów nie wyprowadzimy następujących formuł:

(1) $(\alpha \wedge \sim \alpha) \rightarrow \beta$

(2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow \sim \alpha)$

(3) $\alpha \rightarrow \sim \sim \alpha$

(4) $\sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$

(5) $((\alpha \vee \beta) \wedge \sim \alpha) \rightarrow \beta$

(6) $(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta)$

(7) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\sim \beta \rightarrow \sim \alpha)$[51].

W C_n–systemach $(1 \leq n < \omega)$ wyprowadzalna jest natomiast pewna wersja reguły *ex falso quodlibet*, tzn.:

(EFQ)$^{(n)}$ $\alpha^{(n)}, \alpha, \sim \alpha / \beta$.

Dowód dla (EFQ)$^{(n)}$:

(1) $\alpha^{(n)}$	*zał.*
(2) α	*zał.*
(3) $\sim \alpha$	*zał.*
β	(A11)$^{(n)*}$, (1), (2), (3), (RO).

Z pary formuł $\alpha, \sim \alpha$ nie wyprowadzimy dowolnej formuły β. Dopiero trójka formuł $\alpha^{(n)}, \alpha, \sim \alpha$ trywializuje dany C_n–system (dla $1 \leq n < \omega$).

Oznaczmy przez *Ls* język systemu *S*, zaś przez $T(\vdash_S)$ zbiór wszystkich tez systemu *S*. Niech ponadto $\varnothing \neq T(\vdash_S) \neq Ls$.

Twierdzenie 2.6.4. (da Costa, 1974) $T(\vdash_{Cn}) \subset T(\vdash_{Cm})$, dla $1 \leq m < n < \omega$.

Obrazowo rzecz ujmując, każdy kolejny system hierarchii jest *słabszy* od systemu, który go poprzedza.

Twierdzenie 2.6.5. (*ibid.*) C_n–systemy $(1 \leq n < \omega)$ są niesprzeczne.

*Twierdzenie 2.6.1.** (Arruda 1975) C_n–systemy $(1 \leq n < \omega)$ nie mogą być scharakteryzowane przez matryce skończone.

*Twierdzenie 2.6.2.** (Raggio 1968), (Fidel 1977) C_n–systemy $(1 \leq n < \omega)$ są rozstrzygalne.

---

51 *Ibid.*, s. 499.

Alfabet języka C_n–systemów ($1 \leq n < \omega$) można poszerzyć o dodatkowy spójnik jednoargumentowy:

Definicja 2.6.2. (da Costa, Alves 1977) $\neg\, \alpha := \sim \alpha \wedge \alpha^{(n)}$, przy czym $\alpha^{(n)} = \alpha^{n} \wedge \alpha^{n-1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{1}$ (dla $1 \leq n$), $\alpha^{1} = \alpha^{o} = \sim (\alpha \wedge \sim\alpha)$ oraz $\alpha^{i} = \alpha^{o \ldots o}$ (i-razy).

Wprowadzony spójnik posiada wszystkie własności negacji klasycznej[52]. Dla przykładu, w systemie C_1 definicja przybiera taką oto formę: $\neg\, \alpha := \sim \alpha \wedge \alpha^{o} := \sim \alpha \wedge \sim (\alpha \wedge \sim\alpha)$. W rezultacie tezami systemu są m.in. formuły:

(1) $(\alpha \wedge (\sim \alpha \wedge \sim (\alpha \wedge \sim \alpha))) \rightarrow \beta$, czyli $(\alpha \wedge \neg\, \alpha) \rightarrow \beta$

(2) $\alpha \rightarrow ((\sim \alpha \wedge \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)) \rightarrow \beta)$, tj. $\alpha \rightarrow (\neg\, \alpha \rightarrow \beta)$

(3) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\sim \beta \wedge \sim (\beta \wedge \sim \beta))) \rightarrow (\sim \alpha \wedge \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)))$, czyli $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\, \beta) \rightarrow \neg\, \alpha)$.

W systemie C_1 wyprowadzalna jest również reguła:

(EFQ)$^{\neg}$ $\quad \alpha, \neg\, \alpha\, /\, \beta$.

A ściślej, reguła ta jest wyprowadzalna w każdym C_n–systemie, dla którego $1 \leq n < \omega$.

Dowód dla (EFQ)$^{\neg}$:

(1) α	*zał.*
(2) $\neg\, \alpha$	*zał.*
(3) $\sim \alpha \wedge \alpha^{(n)}$	*definicja 2.6.2*
(4) $\sim \alpha$	(H4), (3), (RO)
(5) $\alpha^{(n)}$	(H5), (3), (RO)
β	(A11)$^{(n)*}$, (5), (1), (4), (RO).

Widać wyraźny związek, pomiędzy regułami (EFQ)$^{(n)}$, (EFQ)$^{\neg}$ a definicją 2.6.2. Niezależnie więc od tego, czy rozszerzymy alfabet języka C_n–systemów ($1 \leq n < \omega$) o nowy spójnik negacji, czy też zadowolimy się wyjściową charakterystyką zbioru wyrażeń pierwotnych, kluczową rolę i tak pełnić tu będzie formuła $\alpha^{(n)}$. Metaforycznie rzecz ujmując, formuła $\alpha^{(n)}$ jest gwarantem niesprzeczności. Z pary formuł α, $\sim \alpha$ nie wyprowadzimy dowolnej formuły β. Dopiero trójka formuł $\alpha^{(n)}$, α, $\sim \alpha$ (tudzież koniunkcja $\alpha \wedge \sim \alpha \wedge \alpha^{(n)}$) trywializuje dany C_n–system (dla $1 \leq n < \omega$). Precyzyjniej wyraża to kolejne twierdzenie:

Twierdzenie 2.6.6. (da Costa 1974) Każdy C_n–system (dla $1 \leq n < \omega$) jest skończenie trywializowalny.

---

[52] Zob. *ibid*., s. 500–501; da Costa, N.C.A., Alves, E.H. (1977), *A Semantical Analysis of the Calculi Cn*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 18/4, s. 628.

Logiczno-filozoficzne podstawy omawianego zagadnienia wymagają szerszego opracowania. Dlatego też zagadnieniu indeksowania formuł niesprzecznych wraz z opartą na nim ideą budowy hierarchii systemów logiki parakonsystentnej, poświęcimy znaczne fragmenty jednego z kolejnych rozdziałów[53]. Nim jednak to nastąpi, przyjrzyjmy się charakterystyce semantycznej C_n–systemów $(1 \leq n < \omega)$.

Niech F_{Cn} oznacza zbiór wszystkich formuł systemu C_n $(1 \leq n < \omega)$, zaś $\{0, 1\}$ – zbiór wartości logicznych.

Definicja 2.6.3. (da Costa, Alves, 1977) C_n–wartościowaniem $(1 \leq n < \omega)$ nazywamy funkcję v, $v: F_{Cn} \longrightarrow \{0, 1\}$, taką, że:

($v1$) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ lub $v(\beta) = 1$

($v2$) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ oraz $v(\beta) = 1$

($v3$) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$ lub $v(\beta) = 1$

($v4a$) jeśli $v(\sim \alpha) = 0$, to $v(\alpha) = 1$

($v5a$) jeśli $v(\sim \sim\alpha) = 1$, to $v(\alpha) = 1$

($v6$) jeśli $v(\beta^{(n)}) = v(\alpha \rightarrow \beta) = v(\alpha \rightarrow \sim \beta) = 1$, to $v(\alpha) = 0$

($v7$) jeśli $v(\alpha^{(n)}) = v(\beta^{(n)}) = 1$, to $v((\alpha \wedge \beta)^{(n)}) = v((\alpha \vee \beta)^{(n)}) = v((\alpha \rightarrow \beta)^{(n)}) = 1$.

Definicja 2.6.4. Formuła α jest C_n–tautologią (symbolicznie, $\models_{Cn} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego C_n–wartościowania v, $v(\alpha) = 1$.

Definicja 2.6.5. Formuła α jest semantyczną konsekwencją zbioru formuł Γ (symbolicznie, $\Gamma \models_{Cn} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego C_n–wartościowania v, jeśli $v(\beta) = 1$ dla każdego $\beta \in \Gamma$, to $v(\alpha) = 1$.

Twierdzenie 2.6.7. (da Costa, Alves 1977) $\Gamma \models_{Cn} \alpha$ wtw, gdy $\Gamma \vdash_{Cn} \alpha$ (dla $1 \leq n < \omega$), dla dowolnych $\Gamma \subseteq F_{Cn}$, $\alpha \in F_{Cn}$.

Łatwo wykazać, że funkcja wartościowania v posiada, oprócz tych wymienionych w definicji 2.6.3, inne ciekawe własności, np.:

($v8$) $v(\neg \alpha) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$

($v9$) $v(\alpha) = 0$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$ oraz $v(\sim \alpha) = 1$

($v10$) $v(\alpha) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ lub $v(\sim \alpha) = 0$[54].

---

[53] Zob. *Rozdział 5.*

[54] Zob. da Costa, N.C.A., Alves, E.H. (1977), *op. cit.*

Otwarty pozostał problem opracowanie semantyki dla systemu C_ω. Zauważmy bowiem, że warunek ($v3$) charakteryzuje semantycznie implikację klasyczną. Żeby uzyskać poprawną definicję C_ω–wartościowania, nie wystarczy po prostu usunąć punkty ($v6$) i ($v7$) z definicji 2.6.3. Jak pamiętamy, prawo Peirce'a nie jest tezą systemu C_ω. Problem został definitywnie rozwiązany przez Loparić w latach osiemdziesiątych XX wieku.

Definicja 2.6.6 (Loparić, 1986) Wartościowaniem częściowym (inaczej: *semi–ω–*wartościowaniem) nazywamy funkcję s, s: $F_{C\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, taką, że:

($v1$) $s(\alpha \vee \beta) = 1$ wtw, gdy $s(\alpha) = 1$ lub $s(\beta) = 1$

($v2$) $s(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw, gdy $s(\alpha) = 1$ oraz $s(\beta) = 1$

($v3a$) jeśli $s(\alpha \rightarrow \beta) = 1$, to $s(\alpha) = 0$ lub $s(\beta) = 1$

($v3b$) jeśli $s(\alpha \rightarrow \beta) = 0$, to $s(\beta) = 0$

($v4a$) jeśli $s(\sim \alpha) = 0$, to $s(\alpha) = 1$

($v5a$) jeśli $s(\sim \sim\alpha) = 1$, to $s(\alpha) = 1$.

Na szczególną uwagę zasługuje punkt ($v3b$) definicji. Stwierdzając fałszywość implikacji, wystarczy ograniczyć się do stwierdzenie fałszywości jej następnika.

Definicja 2.6.7. (*ibid.*) Przez pojęcie ω–wartościowania v rozumiemy *semi-ω*-wartościowanie, spełniające następujący postulat: dla dowolnych formuł $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ oraz dowolnej β, która nie jest formułą o postaci $\gamma \rightarrow \delta$, jeśli $v(\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow ... \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta)...) = 0$, to istnieje pewne *semi-ω*-wartościowanie s, takie, że $s(\alpha_i) = 1$ oraz $s(\beta) = 0$, gdzie $1 \leq i \leq n$.

Definicja 2.6.8. Formuła α jest ω–tautologią wtw, gdy dla dowolnego ω–wartościowania v, $v(\alpha) = 1$. Formuła α jest semantyczną konsekwencją zbioru formuł Γ ($\Gamma \models_{C\omega} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego ω–wartościowania v, jeśli $v(\beta) = 1$ dla każdego $\beta \in \Gamma$, to $v(\alpha) = 1$.

Twierdzenie 2.6.8. (*ibid.*) $\Gamma \models_{C\omega} \alpha$ wtw, gdy $\Gamma \vdash_{C\omega} \alpha$, dla dowolnych $\Gamma \subseteq F_{C\omega}$, $\alpha \in F_{C\omega}$.

2.7. LOGIKA ANTYNOMII ASENJO I TAMBURINO

Przyjmijmy niestandardową definicję funkcji wartościowania i załóżmy, iż możliwa będzie sytuacja, w której wyrażeniom atomowym, czyli najprostszym wyrażeniom języka, przypiszemy dokładnie jedną z dwóch, bądź równocześnie dwie, wartości logiczne. Formuły takiego języka byłyby wówczas albo prawdziwe, albo fałszywe, albo prawdziwe i fałszywe jednocześnie. Wyrażenia, które byłyby jednocześnie prawdziwe i fałszywe, nazywamy wyrażeniami *antynomicznymi*.

W logice antynomii powyższą intuicję wyrażono w prostszy sposób. Tu również zdania mogą być prawdziwe, fałszywe bądź antynomiczne. Antynomiczność zdań utożsamiona jest jednak nie tyle z niestandardową definicją funkcji wartościowania, co z trzecią wartością logiczną. Logika antynomii Asenjo jest przykładem logiki wielowartościowej. Asenjo operuje trzema wartościami logicznymi: prawdą, fałszem oraz antynomicznością[55].

Pierwsza wzmianka o logice antynomii pochodzi z początku lat pięćdziesiątych XX wieku. Asenjo sformułował wówczas pierwsze, dość jeszcze mgliste i nieporadnie określone pod względem formalno-logicznym idee. Znalazły one wyraz w rozważaniach nad naturą antynomiczności. Weźmy pod uwagę dowolny dwuargumentowy spójnik zdaniowy, postulował Asenjo. Jeśli argumentom tego spójnika przypiszemy dokładnie jedną z dwóch klasycznych wartości logicznych, tj. prawdę albo fałsz, spójnik powinien zachować swoje klasyczne własności. Jeżeli obydwu argumentom spójnika przypiszemy wartość antynomiczną, spójnik również winien przyjąć taką wartość. Jeśli zaś jednemu z argumentów spójnika przypiszemy wartość klasyczną, drugiemu zaś – antynomiczną, wartość lub wartości logiczne spójnika powinny, w jak największym stopniu, być zbieżne z ich klasyczną interpretacją. Rozważmy jako przykład implikację $\alpha \to \beta$. Możliwe są dwa przypadki: albo wartość antynomiczną przypiszemy formule α, albo formule β. W pierwszym przypadku, jeśli formuła β jest prawdziwa, prawdziwa będzie także implikacja $\alpha \to \beta$, ponieważ klasyczna implikacja jest prawdziwa, o ile jej następnik jest prawdziwy. Jeżeli natomiast β jest fałszywa, wartość logiczna implikacji $\alpha \to \beta$ uzależniona jest od jej poprzednika. Skoro więc przyjęliśmy, że poprzednik jest antynomiczny, antynomiczna musi być również implikacja. Podobnie w drugim przypadku, jeżeli formuła α jest fałszywa, prawdziwa jest implikacja $\alpha \to \beta$. Klasyczna implikacja jest bowiem prawdziwa, o ile jej poprzednik jest fałszywy. Jeśli zaś α jest prawdziwa, wtedy wartość logiczna implikacji $\alpha \to \beta$ uzależniona jest od jej następnika. Skoro jednak następnik jest antynomiczny, antynomiczna jest także implikacja. Podobne dywagacje można przeprowadzić dla pozostałych spójników.

Opisane intuicje znalazły swój formalny wyraz w postaci matrycy:

$$\mathscr{M}_A = \langle \{0, 1, 2\}, \{1, 2\}, \to, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \sim \rangle,$$

w której $\{0, 1, 2\}$ pełni rolę zbioru wartości logicznych (cyfra 1 oznacza prawdę, 0 – fałsz, 2 – antynomiczność)[56], $\{1, 2\}$ to zbiór wartości wyróżnionych w matrycy $\mathscr{M}_A$, spójniki zdaniowe definiują tabelki:

---

[55] Zob. Asenjo, F.G. (1966), *A Calculus of Antinomies*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 7/1, s. 103.

[56] W oryginalnym sformułowaniu Asenjo, cyfra 1 oznacza fałsz, 0 oznacza prawdę, cyfra 2, podobnie jak w naszym przypadku, antynomiczność.

$(\wedge)$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$(\vee)$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

	$(\sim)$
0	1
1	0
2	2

$(\rightarrow)$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	2	1	2

$(\leftrightarrow)$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

A–tautologię definiujemy jako formułę, która przy dowolnym *A*–wartościowaniu zawsze przyjmuje jedną z dwóch wartości wyróżnionych. Przez *A*–wartościowanie rozumiemy zaś funkcję przypisującą każdej formule logiki antynomii dokładnie jedną z trzech wartości logicznych (funkcję określoną zgodnie z podanymi wyżej tabelkami).

W tym miejscu zmuszeni byliśmy dokonać arbitralnej interpretacji semantyki logiki antynomii. Asenjo nie podał bowiem *explicite*, które z wartości logicznych uznaje za wyróżnione. Ze sposobu jednak, w jaki prowadzi Asenjo narrację oraz na podstawie jego późniejszej, opublikowanej wspólnie z Tamburino pracy, dochodzimy do wniosku, że to właśnie prawda i antynomiczność są wartościami wyróżnionymi.

Nietrudno zauważyć, że charakterystyka prawdziwościowa spójnika negacji ($\sim$), koniunkcji ($\wedge$), alternatywy ($\vee$), implikacji ($\rightarrow$) oraz równoważności ($\leftrightarrow$) jest identyczna z tabelkami, które podał w 1938 roku Kleene[57]. Co więcej, tabelki definiujące spójnik negacji, koniunkcji i alternatywy są także identyczne z odpowiednimi tabelkami logiki trójwartościowej Łukasiewicza[58]. Istotna różnica pomiędzy wymienionymi systemami a logiką antynomii Asenjo polega na tym, że zarówno Kleene jak i Łukasiewicz przyjmują tylko jedną wyróżnioną wartość logiczną: $\{1\}$. Asenjo przyjmuje dwie: $\{1, 2\}$.

Podobnych różnic nie dostrzeżemy natomiast między logiką antynomii a pochodzącą z 1979 roku logiką paradoksu Grahama Priesta. Priest przyjmuje dokładnie taką samą charakterystykę prawdziwościową spójników, co Asenjo, oraz dokładnie taki sam zbiór wyróżnionych wartości logicznych: $\{1, 2\}$[59].

---

[57] Zob. Malinowski, G. (1993), *Many-valued Logics,* Oxford Logic Guides 25, Clarendon Press, Oxford. s. 52.

[58] Zob. *ibid.*, s. 18.

[59] Zob. Priest, G. (1979), *The Logic of Paradox*, „Journal of Philosophical Logic", 8/1, s. 219–241. Na temat podobieństwa logiki antynomii i logiki Priesta, zob. Poczobut, R. (1998), *Grahama Priesta parakonsystentna metafizyka zmiany*, „Filozofia Nauki", 6/3–4, s. 62.

Asenjo pierwotnie nie utożsamia parakonsytencji ani z prawem przepełnienia, ani z regułą (EFQ), lecz z pojęciem antynomiczności. Ponadto, podana przez niego lista formuł i reguł, które w zamierzeniu mają aksjomatyzować logikę antynomii jest niekompletna (czego *notabene* Asenjo był w pełni świadom)[60]. Funkcję aksjomatów miały bowiem pełnić aksjomaty pozytywnej części logiki Hilberta, prawo wyłączonego środka $\alpha \vee {\sim}\alpha$ oraz prawo podwójnej negacji ${\sim\sim}\alpha \rightarrow \alpha$. Jedyną pierwotną nieaksjomatyczną regułą inferencji miała być reguła odrywania. Zauważmy w tym miejscu, iż prawo przepełnienia $\alpha \rightarrow ({\sim}\alpha \rightarrow \beta)$ jest A–tautologią. Prawo to jednak nie jest wyprowadzalne z proponowanej listy aksjomatów. Aksjomatyzacja jest zatem niepełna. Nawiasem mówiąc, proponowana przez Asenjo lista jest zbieżna z syntaktyczną charakterystyką systemu C_ω autorstwa da Costy[61]. Niepełność zaś aksjomatyzacji systemu C_ω względem proponowanej przez Asenjo semantyki nie jest obecnie niczym zaskakującym[62].

W 1975 roku ukazuje się kolejny, tym razem napisany wspólnie przez Asenjo i Tamburino artykuł, poświęcony logice antynomii. W artykule zaprezentowano nową, nieco zmodyfikowaną w stosunku do poprzedniej, semantykę. Modyfikacjom uległy tabelki prawdziwościowe dla implikacji i równoważności:

$(\rightarrow)$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	0	1	2

$(\leftrightarrow)$	0	1	2
0	1	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

W przypadku implikacji zmiana dotyczy jednego warunku. Jeśli poprzednik implikacji jest antynomiczny, a następnik fałszywy, wówczas implikacja jest fałszywa (a nie jak poprzednio – antynomiczna). W przypadku równoważności zmienione zostały dwa warunki. Równoważność zdania fałszywego i antynomicznego tudzież antynomicznego i fałszywego zawsze jest fałszywa (a nie – antynomiczna).

Oprócz wzmiankowanych modyfikacji, wprowadzono dodatkowy spójnik równoważności:

$(\leftrightarrow^*)$	0	1	2
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	2

[60] Zob. Asenjo, F.G. (1966), *op. cit.*, s. 104.
[61] Zob. da Costa, N.C.A. (1963), *op. cit.*
[62] Zob. § 2.6, *Twierdzenie 2.6.1*.

Równoważność $\alpha \leftrightarrow^{*} \beta$ jest skrótem definicyjnym formuły $(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\sim \alpha \leftrightarrow \sim \beta)$. Matrycę z nową charakterystyką implikacji i równoważności oznaczmy przez $\mathcal{M}_A^{*}$.

Wartości logiczne 1 i 2 (tj. prawda i antynomiczność) traktowane są w logice antynomii jako wartości wyróżnione. Przez A^{*}–tautologię rozumieć więc będziemy formułę, która zawsze jest prawdziwa lub antynomiczna.

Okazuje się, że prawo przepełnienia, $\alpha \to (\sim\alpha \to \beta)$, nie jest tautologią zmodyfikowanego systemu. Aby się o tym przekonać, wystarczy przypisać wartość antynomiczną formule α, zaś fałsz formule β, wtedy: $2 \to (\sim 2 \to 0) = 2 \to (2 \to 0) = 2 \to 0 = 0$. Jak widzimy, nowe charakterystyki spójników zbliżają logikę antynomii w większym zakresie, aniżeli dotychczas, do idei parakonsystencji.

Modyfikacjom poddano nie tylko semantykę. Uległ im także alfabet języka logiki antynomii. W skład nowego alfabetu weszły następujące symbole:

(1) dwa rodzaje zmiennych zdaniowych: zmienne *klasyczne* (p_1, p_2, p_3, …, itd.), tj. takie, którym wolno przypisać wyłącznie klasyczne wartości logiczne oraz zmienne *antynomiczne* (a_1, a_2, a_3, …, itd.), czyli takie, którym wolno przypisać wyłącznie wartość antynomiczną

(2) spójniki zdaniowe: $\sim, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \leftrightarrow^{*}$

(3) nawiasy.

Niech symbole P_1, P_2, P_3, … oznaczają zmienne klasyczne lub wyrażenia złożone, którym wolno przypisać wyłącznie klasyczne wartości logiczne. Ten rodzaj formuł nazywać odtąd będziemy formułami *klasycznymi*. Małe litery alfabetu greckiego α, β, γ, ... niech oznaczają wyrażenia, którym wolno przypisać dowolne wartości logiczne. Zbiór wszystkich formuł logiki antynomii, F_A, definiują indukcyjnie następujące warunki:

(1) każda zmienna (klasyczna lub antynomiczna) jest formułą

(2) jeśli α i β są formułami, to $\sim \alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$

(3) żadne inne wyrażenie, poza wymienionymi w punktach (1) i (2) nie jest formułą.

Zwróćmy uwagę, iż formuły *klasyczne* (P_1, P_2, P_3, …) są szczególnym przypadkiem formuł oznaczonych literami alfabetu greckiego. Równoważność $\alpha \leftrightarrow \beta$ rozumiana jest natomiast jako $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.

W tym miejscu zarysowuje się problem, który sprowadzić można do następującego pytania: Jak na poziomie syntaktycznym wyrazić ideę *antynomiczności*? Żeby odpowiedzieć na to pytanie, musimy najpierw wyjaśnić, co rozumiemy przez termin *zdanie antynomiczne* w sensie syntaktycznym. Otóż, powiemy, iż zdanie α jest antynomiczne, o ile zarówno α jak i negacja zdania α, są jednocześnie twierdzeniami danej logiki[63]. Pojęcie antynomiczności zostaje więc utożsamione z parą zdań sprzecznych, a ściślej z koniunkcją tych zdań: $\alpha \wedge \sim \alpha$. Łatwo pokazać, iż przy obecnej definicji zbioru F_A sprzęgniętego z semantyką logiki antynomii, formuła $\alpha \wedge \sim \alpha$ nie jest A^*–tautologią. Nie jest ona również kontrtautologią – tj. formułą, która jest zawsze fałszywa – jak ma to miejsce w przypadku klasycznego rachunku zdań. Jeśli bowiem zdaniu α przypiszemy wartość antynomiczną, wówczas wartość antynomiczna przypisana zostanie negacji tego zdania. W rezultacie koniunkcja $\alpha \wedge \sim \alpha$ także przyjmie wartość antynomiczną.

Rozwiązania postanowionego tu problemu należy doszukiwać się pośród warunków, które nałożone na zbiór F_A, definiują pewien jego podzbiór. Elementami tego podzbioru są wyłącznie tzw. A–formuły, tj. wyrażenia zbudowane zgodnie z poniższymi zasadami:

(1a) każda klasyczna zmienna zdaniowa, tj. $p_1, p_2, p_3, \ldots$, itd., jest A–formułą

(2a) każde wyrażenie o postaci $\sim p_1$, $p_1 \wedge p_2$, $p_1 \vee p_2$, $p_1 \rightarrow p_2$, $a_1 \rightarrow p_1$ i $p_1 \rightarrow (p_1 \vee a_1)$ jest A–formułą (a_1 jest zdaniem antynomicznym w sensie syntaktycznym)

(3a) jeśli P_1 oraz P_2 są A–formułami, zaś α jest dowolną formułą, to $\sim P_1$, $P_1 \wedge P_2$, $P_1 \vee P_2$, $P_1 \rightarrow P_2$, $\alpha \rightarrow P_1$ oraz $P_1 \rightarrow (P_1 \vee \alpha)$ są A–formułami

(4a) jeżeli $\sim \alpha$ jest A–formułą, to α jest A–formułą

(5a) wszystkie wyrażenia o postaci: $\sim P_1 \rightarrow (P_1 \rightarrow \alpha)$ oraz $\sim P_1 \rightarrow \sim (P_1 \wedge \alpha)$ są A–formułami

(6a) wszystkie wyrażenia wydedukowane z A–formuł przy użyciu reguły odrywania są A–formułami.

Na warunek (1a) składają się wyłącznie zmienne zdaniowe, które nie są zdaniami antynomicznymi w sensie syntaktycznym. W warunku (2a) występują, prócz zmiennych klasycznych, zmienne antynomiczne. A–formuły złożone opisują warunki (3a) oraz (5a). Pojęcie A–formuły znajduje zastosowanie w aksjomatyzacji logiki antynomii. Podana przez Asenjo i Tamburiono aksjomatyzacja zawiera następujące schematy:

(H1)–(H7) pozytywnej części logiki Hilberta

(nn) $\sim \sim \alpha \rightarrow \alpha$

$(nn)^*$ $\alpha \rightarrow \sim \sim \alpha$

(A10) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\sim \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$

(A11) $\alpha \rightarrow (\sim \beta \rightarrow \sim (\alpha \rightarrow \beta))$

$(dMa)^*$ $(\sim \alpha \vee \sim \beta) \rightarrow \sim (\alpha \wedge \beta)$

[63] Zob. Asenjo, F.G., Tamburini, J. (1975), *Logic of Antinomies*, „Notre Dame Journal of Formal Logic”, 16/1, s. 20.

$(dMb)^*$ $(\sim \alpha \wedge \sim \beta) \rightarrow \sim (\alpha \vee \beta)$

(A14) $\sim (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \sim \beta)$

(A15) $\sim P_1 \rightarrow (P_1 \rightarrow \alpha)$

(A16) $\sim P_1 \rightarrow \sim (P_1 \wedge \alpha)$

$(sp)^a$ $a_i \wedge \sim a_i$, gdzie $i \in N$.

Jedyną nieaksjomatyczną regułą wnioskowania jest reguła odrywania (RO) α, $\alpha \rightarrow \beta$ / β.

Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą odrywania definiują relację konsekwencji $\vdash_A$. Zapis $\vdash_A \alpha$ oznacza, że formuła α jest tezą logiki antynomii. Adekwatność podanej aksjomatyzacji wyraża twierdzenie:

Twierdzenie 2.7.1. (Asenjo, Tamburino 1975) Formuła α jest A^*–tautologią wtw, gdy $\vdash_A \alpha$, dla dowolnej $\alpha \in F_A$.

Na baczniejszą uwagę zasługują trzy ostatnie aksjomaty. Aksjomat (A15) jest szczególną wersją prawa przepełnienia. Tylko z pary A–formuł, $\sim P_1$ i P_1, możliwe staje się wydedukowanie dowolnego zdania α. A–formuła P_1 występuje także w (A16). W aksjomacie $(sp)^a$ mowa jest o antynomiczności formuły a_i. Co więcej, dzięki $(sp)^a$ można wykazać, iż formuła $\sim (a_i \wedge \sim a_i)$ jest tezą logiki antynomii.

Dowód dla $\sim (a_i \wedge \sim a_i)$, gdzie $i \in N$:

(1) $a_i \wedge \sim a_i$	$(sp)^a$
(2) $(a_i \wedge \sim a_i) \rightarrow \sim a_i$	(H5)
(3) $\sim a_i$	(RO), (1), (2)
(4) $\sim a_i \rightarrow (\sim a_i \vee \sim\sim a_i)$	(H6)
(5) $\sim a_i \vee \sim\sim a_i$	(RO), (3), (4)
(6) $(\sim a_i \vee \sim\sim a_i) \rightarrow \sim (a_i \wedge \sim a_i)$	$(dMa)^*$
$\sim (a_i \wedge \sim a_i)$	(RO), (5), (6).

Skoro tezą jest zarówno $(sp)^a$ jak i $\sim (a_i \wedge \sim a_i)$, wówczas $\vdash_A (a_i \wedge \sim a_i) \wedge \sim (a_i \wedge \sim a_i)$, tudzież $\vdash_A \sim ((a_i \wedge \sim a_i) \wedge \sim (a_i \wedge \sim a_i))$ i ponadto $\vdash_A \sim ((a_i \wedge \sim a_i) \wedge \sim (a_k \wedge \sim a_k))$, dla i, $k \in N$ oraz $i \neq k$. Na mocy zaś (H1), $(sp)^a$ oraz (RO) wywnioskujemy, iż dowolna formuła implikuje antynomię: $\vdash_A \alpha \rightarrow (a_i \wedge \sim a_i)$. W logice antynomii wyprowadzalne jest także prawo niesprzeczności w *klasycznym* sformułowaniu, tj. $\sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$.

Dowód dla $\sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$:

(1) $\sim \alpha \rightarrow (\sim \alpha \vee \sim\sim \alpha)$	(H6)
(2) $(\sim \alpha \vee \sim\sim \alpha) \rightarrow \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$	$(dMa)^*$

$(3) \sim \alpha \to \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$ (Syll) $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma / \alpha \to \gamma$, (1), (2)

$(4) \sim \sim \alpha \to (\sim \alpha \vee \sim \sim \alpha)$ (H7)

$(5) \sim \sim \alpha \to \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$ (Syll), (4), (2)

$(6)\ \alpha \to \sim \sim \alpha$ (*nn*)*

$(7)\ \alpha \to \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$ (Syll), (6), (5)

$(8)\ (\alpha \to \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)) \to ((\sim \alpha \to \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)) \to \sim (\alpha \wedge \sim \alpha))$ (A10)

$(9)\ (\sim \alpha \to \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)) \to \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$ (RO), (8), (7)

$\sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$ (RO), (9), (3).

Logika antynomii nie spełnia zatem jednego z kryteriów da Costy. Prawo niesprzeczności jest jej twierdzeniem. Spełnione są wszakże kryteria Jaśkowskiego. Logika antynomii umożliwia praktyczne wnioskowanie, posiada uzasadnienie intuicyjne i, co najważniejsze, z pary formuł α oraz $\sim \alpha$ nie wyprowadzimy dowolnej formuły β.

Schemat (A15) wraz z regułą odrywania, umożliwiają wyprowadzenie reguły (EFQ) o postaci:

(EFQ) $\sim P_i, P_i / \beta$, o ile P_i jest A–formułą $(i \in N)$.

Dowolną formułę β wyprowadzimy z pary A–formuł: P_i i $\sim P_i$. Ograniczenie to ma uzasadnienie intuicyjne oraz formalno-logiczne. W logice antynomii obecne są przecież zdania sprzeczne, określane mianem zdań antynomicznych. Zdania te, z założenia, nie powinny pociągać za sobą trywializacji logiki antynomii.

2.8. LOGIKA DIALEKTYCZNA ROUTLEYA I MEYERA

Logika dialektyczna, obok logiki antynomii oraz systemów *V2* i *V3* Arrudy, jest jedną z nielicznych konstrukcji formalnych, w których pojęcie sprzeczności wyrażono *explicite*. W logice dialektycznej, pośród aksjomatów, widnieje bowiem formuła o postaci:

$(sp)^a\ a_i \wedge \sim a_i$. , gdzie $i \in N$.

Wyrażenie a_i nie jest jednakże dowolną formułą, lecz pewnym, specjalnym jej rodzajem. Widać tu pewną analogię do logiki antynomii i systemów Arrudy. Oprócz zmiennych zdaniowych: $p_1, p_2, p_3, \ldots$, do zbioru wyrażeń atomowych należą również tzw. *stałe zdaniowe*: $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Każdej zmiennej odpowiada dokładnie jedna stała zdaniowa, tj. jeśli p_1 jest zmienną zdaniową, to a_1 jest stałą zdaniową, jeśli p_2 jest zmienną zdaniową, to a_2 jest stałą zdaniową, itd. Formuły złożone zbudowane są ze zmiennych lub stałych zdaniowych oraz co najmniej jednego spójnika: negacji, koniunkcji tudzież tzw. *mocnej implikacji* (entailmentu). Spójnik alternatywy rozumiany jest jako $\alpha \vee \beta := \sim (\sim\alpha \wedge \sim\beta)$.

Logikę dialektyczną, w skrócie *DL*, zaprezentujemy w ujęciu syntaktycznym[64]. Aksjomatyzację *DL* konstytuują formuły:

$(pt)\ \alpha \to \alpha$

$(ps)^{*}\ ((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$

$(H3)^{*}\ ((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma))$

$(H4)\ (\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

$(H5)\ (\alpha \wedge \beta) \to \beta$

$(pr)\ (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$

$(nn)\ \sim\sim \alpha \to \alpha$

$(pk)\ (\alpha \to \sim \beta) \to (\beta \to \sim \alpha)$

$(F8)\ (\alpha \to \beta) \to \sim (\alpha \wedge \sim \beta)$

$(sp)^{a}\ a_i \wedge \sim a_i$

oraz reguły wnioskowania:

$(RO)\ \alpha \to \beta, \alpha / \beta$

$(DK)\ \alpha, \beta / \alpha \wedge \beta$

$(Syll)^{\to}\ \alpha \to \beta, \gamma \to \delta / (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \delta)$[65].

Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułami (RO), (dK) oraz $(Syll)^{\to}$ definiują relację konsekwencji $\vdash_{DL}$.

Prawo niesprzeczności jest tezą logiki dialektycznej.

Dowód dla $(pn) \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$:

(1) $(\alpha \to \alpha) \to \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$	(F8)
(2) $\alpha \to \alpha$	(*pt*)
$\sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$	(1), (2), (RO)

Podobnie zresztą, jak formuły $(a_i \wedge \sim a_i) \wedge \sim(a_i \wedge \sim a_i)$, $\sim((a_i \wedge \sim a_i) \wedge \sim(a_i \wedge \sim a_i))$, a_i oraz $\sim a_i$. Logika dialektyczna toleruje sprzeczność w dosłownym tego słowa znaczeniu: istnieje formuła α, taka, że zarówno α jak i $\sim \alpha$ są jednocześnie tezami *DL*. Zbiór $\{\alpha, \sim \alpha\}$ nie trywializuje jednak logiki dialektycznej.

---

[64] Na temat logiki entailmentu zob. Anderson, A.R., Belnap, N.D. (1962), *Tautological Enatailments*, „Philosophical Studies", 13/1–2, s. 9–24.

[65] Routley, R., Meyer, R.K. (1976), *Dialectical Logic, Classical Logic, and the Consistency of the World*, „Studies in Soviet Thought", 16/1–2, s. 1–25.

Rozdział 3

HIERARCHIE OPARTE NA KRYTERIUM ILOŚCIOWYM

Rozdział rozpoczniemy od przypomnienia pewnego, znanego od czasów starożytnych, rozumowania. Przyjrzyjmy się pojedynczemu ziarnku piasku i zapytajmy, czy z jednego takiego ziarna usypiemy stos piachu. Odpowiedź będzie niechybnie przecząca. Przyjrzyjmy się następnie dwóm ziarnkom piasku i postawmy podobne pytania: Czy z dwóch ziaren usypiemy stos piasku? Odpowiedź zapewne będzie analogiczna do poprzedniej. Przyjrzyjmy się teraz, trzem, czterem …, tysiącu, ... stu tysiącom ziaren piasku i ponówmy pytanie: Czy sto tysięcy ziaren piasku utworzy stos? Odpowiedź nie będzie już jednoznaczna. Okazuje się, że tego samego rodzaju rozumowanie, znane jako paradoks stosu, można przeprowadzić dla innego, równie nieostrego pojęcia, co termin *stos*. Nie będzie to jednak pojęcie zaczerpnięte z języka naturalnego. Tu sprawa byłaby względnie prosta. Jak sądzą bowiem niektórzy, wliczając to Bertranda Russella, wszystkie pojęcia języka naturalnego są nieostre[1]. Chodzi o pojęcie wykorzystywane w nauce i to w nauce nie byle jakiej, bo w logice. Tym pojęciem jest *logika parakonsystentna*. Przeprowadźmy dla niego podobne rozumowanie.

Weźmy pod uwagę następującą parę formuł α, $\sim \alpha$ wyrażonych w języku pewnego systemu S_1. Jeśli wyprowadzę, za pomocą reguł systemu S_1, dowolną formułę β, to czy system S_1 mogę określić jako parakonsystentny? Odpowiedź bez wątpienia będzie przecząca. Rozważmy trójkę formuł α, $\sim \alpha$, $\sim \sim \alpha$, wyrażonych w języku systemu S_2 i przyjmijmy, dla większej transparentności, że prawa podwójnej negacji, $\sim\sim \alpha \rightarrow \alpha$, $\alpha \rightarrow \sim\sim \alpha$, nie są wyprowadzalne w systemie S_2. Jeśli wydedukuję, dzięki regułom systemu S_2, dowolną formułę β, to czy S_2 jest systemem parakonsystentnym? Odpowiedź nie będzie już aż tak klarowna. Wszystko zależy m.in. od tego, jak zinterpretujemy kryteria, dzięki którym odróżnimy logikę parkonsystentną od innych logik nieklasycznych[2]. Dla Jaśkowskiego, na przykład, opisany stan byłby bliski trywializacji systemu. Należałoby więc S_2 wykluczyć z grona systemów logiki parakonsystentnej[3].

---

[1] Zob. Russell, B. (1923), *Vagueness*, „Australasian Journal of Psychology and Philosophy", 1/2, s. 84–92. Ze stanowiskiem Russella polemizował m.in. Marvin Kohl. Zob. Kohl, M. (1969), *Bertrand Russell on Vagueness*, „Australasian Journal of Philosophy", 47/1, s. 31–41.

[2] Zob. § 1.1.

[3] Por. formuła (efq)^3, § 2.5.

Skupmy się teraz na $k+1$ liczbie formuł: $\alpha, \sim \alpha, \sim \sim \alpha, \sim \sim \sim \alpha, \ldots, \sim^k \alpha, k \geq 3$[4]. Jeśli wyprowadzę, za pomocą reguł systemu S_n, dowolną formułę β, to czy S_n mogę nazwać systemem parakonsystentnym? Każda odpowiedź będzie bez wątpienia arbitralna i dyskusyjna.

Definitywnego rozwiązania można by upatrywać w systemie, w którym nie jest wyprowadzalna formuła o postaci $\sim \alpha$. Żadna formuła, której spójnikiem głównym jest negacja, nie byłaby wówczas tezą takiego systemu. Istnieje niewiele konstrukcji formalnych, które spełniają to kryterium, należy do nich C_ω da Costy, *PI* Batensa, czy też system C_{min} Carnielliego i Marcosa[5]. Niestety, zarówno w systemie C_ω jak i C_{min} pośród aksjomatów widnieje jedno z praw podwójnej negacji, mianowicie: (nn) $\sim\sim \alpha \rightarrow \alpha$. W rezultacie, jakakolwiek próba rozszerzenie tych systemów o formułę $\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow (\sim \sim \alpha \rightarrow \beta))$ umożliwia wyprowadzenie dowolnej formuły β z pary formuł: $\sim \alpha, \sim\sim \alpha$[6]. Pozostaje więc system *PI* Batensa.

W rozdziale zaprezentujemy pewną hierarchię systemów logiki parakonsystentnej, w której decydującą rolę odgrywać będzie tzw. *kryterium ilościowe*. Kryterium to, w dużym uproszczeniu, sprowadza się do następującego pytania: Jaką wartość minimalną, ale różną od zera, musi przyjąć parametr k dla $\{\alpha, \sim \alpha, \sim \sim \alpha, \sim \sim \sim \alpha, \ldots, \sim^k \alpha\}$, aby strywializować system? – lub krócej: Ile potrzeba formuł, by przepełnić dany system? W klasycznym rachunku zdań wystarczają dwie takie formuły, tj. $\alpha, \sim \alpha$. Większa ich ilość, np. $\alpha, \sim \alpha, \sim \sim \alpha, \sim \sim \sim \alpha, \sim \sim \sim \sim \alpha$, jest redukowalna do dwóch. Dzieje się tak za sprawą praw i reguł klasycznego rachunku zdań, w tym przede wszystkim praw podwójnej negacji, prawa skracania $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$, oraz reguły odrywania.

Punktami odniesienia dla proponowanej hierarchii będą dwie konstrukcje logiczne. Pierwszą jest system *PI* Batensa, drugą – klasyczny rachunek zdań. Poszczególne systemy hierarchii, opartej na kryterium ilościowym, oznaczymy symbolem B^n $(n \geq 1)$.

---

[4] Parametr k określa liczbę negacji występujących przed formułą α, np. $\sim^4\alpha = \sim\sim\sim\sim\alpha$. Jeśli $k = 0$, wówczas $\sim^0\alpha = \alpha$. Zapis $\sim^0\alpha$ wydaje się dość nienaturalny, toteż zamiast $\sim^0\alpha$ będziemy po prostu pisać α.

[5] Zob. §§ 2.6, 5.3. Logikę *PI* oznacza się czasem innym skrótem mnemotechnicznym, tj. *CLuN*.

[6] Jedno z rozwiązań polega na wzbogaceniu języka systemu o tzw. operator *spójności*. Zob. § 5.3 oraz Carnielli, W.A., Marcos, J. (2002), *A Taxonomy of C–systems*, [w:] Carnielli, W.A., Coniglio, M.E., D'Ottaviano, I.M.L. (red.), *Paraconsistency – the Logical Way to the Inconsistent*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 228, New York, s. 1–94. Inne – na akceptacji założeń systemu P^1 Settego. Zob. § 4.1 oraz Sette, A.M. (1973), *On the Propositional Calculus P^1*, „Mathematica Japonicae", 18/3, s. 173–180.

3.1. LOGIKA *PI* BATENSA

Oznaczmy przez *var* niepusty, przeliczalny zbiór zmiennych zdaniowych $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $n \in N$. Zbiór wszystkich formuł F_{PI} definiujemy jako najmniejszy zbiór spełniający następujące warunki:

(1) każda zmienna zdaniowa jest formułą

(2) jeśli α jest formułą, to $\sim \alpha$ też jest formułą

(3) jeśli α i β są formułami, to $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$ i $\alpha \rightarrow \beta$ są formułami[7].

Zbiór aksjomatów logiki *PI* składa się z następujących elementów: pozytywnej części logiki Hilberta

(H1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

(H2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

(H3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$

(H4) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$

(H5) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$

(H6) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

(H7) $\alpha \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

(H8) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$,

prawa Peirce'a

(*pP*) $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$

oraz prawa wyłączonego środka

(*tnd*) $\alpha \vee \sim \alpha$[8].

Aksjomat (*tnd*) jest równoważny tzw. słabemu prawu Claviusa:

$(pC)^*$ $(\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha$[9].

---

[7] Równoważność jest definiowana w standardowy sposób.

[8] Zob. Batens, D. (1980), *Paraconsistent Extensional Propositional Logics*, „Logique et Analyse", 11, s. 205.

[9] Zob. Batens, D., de Clercq, K. (2004), *A Rich Paraconsistent Extension of Full Positive Logic* „Logique et Analyse", 185–188, s. 227–257. Dowód równoważności aksjomatów zob. Nasieniewski, M. (2008), *op. cit.*, s. 22–23. Zapis $(tnd)/(pC)^*$ oznacza dowolność w wyborze aksjomatyzacji logiki *PI*.

Jedyną pierwotną regułą wnioskowania jest reguła odrywania (RO) $\alpha, \alpha \to \beta$ / β. Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą (RO) definiują relację konsekwencji $\vdash_{PI}$.

Twierdzenie 3.1.1. (*o dedukcji*) $\Gamma \vdash_{PI} \alpha \to \beta$ wtw, gdy $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{PI} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{PI}$, $\Gamma \subseteq F_{PI}$,

Dowód. Dowód sprowadza się w zasadzie do trzech uwag: (1) pośród aksjomatów logiki *PI* widnieją formuły (H1) i (H2), (2) prawo tożsamości (*pt*) $\alpha \to \alpha$ jest jej tezą, (3) reguła odrywania jest jedyną pierwotną, nieaksjomatyczną regułą wnioskowania logiki *PI*[10].

Twierdzenie 3.1.2. Żadna formuła o postaci $\alpha \to (\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \ldots (\sim^k \alpha \to \beta) \ldots))$, dla $k \geq 1$, nie jest tezą logiki *PI*.

Dowód. Rozważmy matrycę n–wartościową ($n = k+2$, $k \geq 1$) $\mathscr{M}_n = \langle X, D, \vee, \wedge, \to, \sim \rangle$, w której $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\text{-}1, n\}$ jest zbiorem wartości logicznych, $D = \{1, 2, 3, \ldots, n\text{-}1\}$ jest zbiorem wartości wyróżnionych, operacje $\vee, \wedge, \to, \sim$ zdefiniujemy następująco:

($\vee$)	1	2	3	...	*n-1*	*n*
1	1	1	1	...	1	1
2	1	2	2	...	2	2
3	1	2	3	...	3	3
...	...	...	...	...	...	...
n-1	1	2	3	...	*n-1*	*n-1*
n	1	2	3	...	*n-1*	*n*

($\wedge$)	1	2	3	...	*n*-1	*n*
1	1	2	3	...	*n*-1	*n*
2	2	2	3	...	*n*-1	*n*
3	3	3	3	...	*n*-1	*n*
...	...	...	...	...	...	...
n-1	*n*-1	*n*-1	*n*-1	...	*n*-1	*n*
n	*n*	*n*	*n*	...	*n*	*n*

($\to$)	1	2	3	...	*n-1*	*n*
1	1	2	3	...	*n-1*	*n*
2	1	2	3	...	*n-1*	*n*
3	1	2	3	...	*n-1*	*n*
...	...	...	...	...	...	...
n-1	1	2	3	...	*n-1*	*n*
n	1	1	1	...	1	1

	($\sim$)
1	2
2	3
3	...
...	*n-1*
n-1	*n*
n	1

[10] Szczegółowy dowód twierdzenia o dedukcji zob. np. Trzęsicki, K. (2003), *Logika i teoria mnogości. Ujęcie systematyczno-historyczne,* Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, s. 82–84.

Jeśli $k = 1$, to $n = 3$. Aksjomaty (H1)–(H8), (pP), $(tnd)/(pC)^*$ przyjmują wartości wyróżnione $\{1, 2\}$. Reguła odrywania także je dziedziczy. Nie dotyczy to formuły $\alpha \to (\sim \alpha \to \beta)$, albowiem $1 \to (\sim 1 \to 3) = 1 \to 3 = 3$.

Jeśli $k = 2$, to $n = 4$. Aksjomaty (H1)–(H8), (pP), $(tnd)/(pC)^*$ przyjmują wartości wyróżnione $\{1, 2, 3\}$. Reguła odrywania także je dziedziczy. Formuła $\alpha \to (\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta)$ jest niezależna względem aksjomatyzacji, ponieważ $1 \to (\sim 1 \to (\sim \sim 1 \to 4)) = 1 \to (2 \to (\sim 2 \to 4)) = 1 \to (2 \to (3 \to 4)) = 1 \to (2 \to 4) = 1 \to 4 = 4$.

Podobną analizę przeprowadzimy dla coraz słabszych wersji prawa przepełnienia.

Na osobną uwagę zasługuje semantyka logiki *PI*. Otóż, w pierwszej kolejności ze zbioru formuł F_{PI}, wyodrębniamy pewien jego podzbiór, mianowicie zbiór tych wszystkich formuł, których spójnikiem głównym jest negacja, $F^*_{PI} := \{\sim \alpha: \alpha \in F_{PI}\}$. Następnie w oparciu o pojęcia F_{PI}, F^*_{PI} oraz zbioru wartości logicznych $\{1, 0\}$ definiujemy funkcję wartościowania v rozumianą jako para wartościowań $\langle s, s^* \rangle$, tj.

Definicja 3.1.1. Niech *var* będzie zbiorem zmiennych zdaniowych, $var \neq \emptyset$, a ponadto $F^*_{PI} := \{\sim \alpha: \alpha \in F_{PI}\}$. Wartościowaniem nazywamy dowolną parę uporządkowaną $v = \langle s, s^* \rangle$, gdzie $s: var \longrightarrow \{1,0\}$ oraz $s^*: F^*_{PI} \longrightarrow \{1,0\}$.

Zbiór argumentów funkcji s stanowią zmienne zdaniowe, w przeciwieństwie do dziedziny funkcji s^*, w której argumentami są dowolne formuły, których spójnikiem głównym jest negacja. Zabieg ten został podyktowany względami praktycznymi, znajdującymi swoje intuicyjne uzasadnienie w obecności formuły $(tnd)/(pC)^*$ w zbiorze aksjomatów logiki *PI*.

Definicja 3.1.2. Dla dowolnej funkcji wartościowania v, v może zostać jednoznacznie rozszerzona do funkcji V, której dziedziną jest zbiór F_{PI}, zaś przeciwdziedziną zbiór wartości logicznych $\{1, 0\}$, $V: F_{PI} \longrightarrow \{1, 0\}$, o ile – dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{PI}$ – spełnione są następujące warunki:

$(v1)$ $V(\alpha \vee \beta) = 1$ wtw, gdy $V(\alpha) = 1$ lub $V(\beta) = 1$

$(v2)$ $V(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw, gdy $V(\alpha) = 1$ oraz $V(\beta) = 1$

$(v3)$ $V(\alpha \to \beta) = 1$ wtw, gdy $V(\alpha) = 0$ lub $V(\beta) = 1$

$(v4)$ $V(\sim \alpha) = 1$ wtw, gdy $V(\alpha) = 0$ lub $s^*(\sim \alpha) = 1$.

Funkcję wartościowania V nazywać będziemy *PI*–wartościowaniem.

Definicja 3.1.3. Formuła α jest *PI*–tautologią (zapis symboliczny: $\models_{PI} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego *PI*–wartościowania V, $V(\alpha) = 1$.

Definicja 3.1.4. Ze zbioru $\Gamma \subseteq F_{PI}$ wynika semantycznie formuła α (symb. $\Gamma \models_{PI} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego *PI*–wartościowania *V*, jeśli $V(\beta) = 1$ dla dowolnej $\beta \in \Gamma$, to $V(\alpha) = 1$.

Z uwagi na warunek (*v4*) definicji 3.1.2, zauważmy, iż dla dowolnej $\alpha \in F_{PI}$ oraz dowolnego wartościowania $v = \langle s, s^* \rangle$, dla logiki *PI* zachodzi dość oczywisty warunek: $V(\alpha) = 1$ lub $V(\sim \alpha) = 1$[11].

Twierdzenie 3.1.3. (Batens, de Clercq 2004) $\Gamma \models_{PI} \alpha$ wtw, gdy $\Gamma \vdash_{PI} \alpha$, dla dowolnych $\Gamma \subseteq F_{PI}$, $\alpha \in F_{PI}$.

W logice *PI* podważamy zasadę *ex falso quodlibet*. Ze zbioru $\{\alpha, \sim \alpha, \sim\sim \alpha, \sim\sim\sim \alpha, \ldots, \sim^k \alpha\}$, $k \geq 1$, nie wydedukujemy dowolnej formuły β. Przejdźmy zatem do omówienia hierarchii systemów, które dają taką możliwość. Stanowią one pewnego rodzaju ilustrację logiczną dla postawionego wcześniej pytania: Jaką wartość minimalną, różną od zera, musi przyjąć parametr *k* dla $\{\alpha, \sim \alpha, \sim\sim \alpha, \sim\sim\sim \alpha, \ldots, \sim^k \alpha\}$, aby strywializować dany system[12]?

3.2. HIERARCHIA B^n–SYSTEMÓW ($n \geq 1$)

Hierarchię otrzymamy, rozszerzając zbiór aksjomatów systemu *PI* o formułę:

$(efq)^k\ \alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow (\sim\sim \alpha \rightarrow \ldots (\sim^k \alpha \rightarrow \beta) \ldots))$, dla $k \geq 2$[13].

Jedyną pierwotną regułą wnioskowania, poszczególnych systemów hierarchii, jest reguła odrywania (RO) $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \,/\, \beta$. Poszczególne systemy oznaczamy literą *B* wzbogaconą o parametr *n* w indeksie górnym, przyjmując zawsze, iż $n = k$-1. Dla przykładu, najsilniejszym systemem prezentowanej hierarchii jest B^1, w którym $(efq)^k$ przybiera taką oto postać:

$(efq)^2\ \alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow (\sim\sim \alpha \rightarrow \beta))$.

---

[11] Zob. Nasieniewski, M. (2008), *op. cit.*, s. 25.

[12] System Batensa stanowił punkt odniesienia dla wielu systemów logicznych. Wystarczy wspomnieć o systemie *HPIW* Qingyu. Zob. Qingyu, Z. (1991), *A Weak Paraconsistent Conditional Logic*, „The Journal of Non-Classical Logic", 8/1, s. 45–57.

[13] Por. Ciuciura, J. (2014), *Paraconsistent Heap. A Hierarchy of* mbC^n*–systems*, „Bulletin of the Section of Logic", 43/3–4, s. 173–182. W artykule z 2014 roku przyjęto inną notację, tj. mbC^n, na oznaczenie omawianej hierarchii. W zamyśle, notacja ta wskazywała na źródło inspiracji B^n–systemów. Niestety, może ona być również przyczyną nieporozumienia. Przywodzi bowiem na myśl system *mbC* Carnielliego i Marcosa, zob. Carnielli, W.A., Marcos, J. (2002), *op. cit.* W rezultacie można by dojść do wniosku, iż system Carnielliego i Marcosa jest równoważny systemowi B^1 (mbC^1) – co oczywiście nie jest prawdą. Więcej na ten temat zob. § 5.3.

Z kolei w systemie B^4, schemat $(efq)^k$ prezentuje się następująco:

$$(efq)^5\ \alpha \rightarrow (\sim\alpha \rightarrow (\sim\sim\alpha \rightarrow (\sim\sim\sim\alpha \rightarrow (\sim\sim\sim\sim\alpha \rightarrow (\sim\sim\sim\sim\sim\alpha \rightarrow \beta))))).$$

Dla każdego systemu B^n: zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą odrywania definiują relację konsekwencji $\vdash_{Bn}$.

Podobnie jak w przypadku logiki *PI* Batensa, w każdym B^n–systemie $(n = k\text{-}1, k \geq 2)$ prawdziwe jest twierdzenie o dedukcji.

Twierdzenie 3.2.1. (*o dedukcji*) $\Gamma \vdash_{Bn} \alpha \rightarrow \beta$ wtw, gdy $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{Bn} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{Bn}, \Gamma \subseteq F_{Bn}, (n \geq 1)$.

Intuicje filozoficzne tkwiące u podstaw hierarchii B^n–systemów można teraz precyzyjniej wyrazić za pomocą następującego zestawienia, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{Bn}$:

$(0)\ \alpha, \sim\alpha \vdash_{B0} \beta$	$(B^0$ = klasyczny rachunek zdań$)$[14]
$(1)^1\ \alpha, \sim\alpha, \sim\sim\alpha \vdash_{B0} \beta$	
$(1)^2\ \alpha, \sim\alpha, \sim\sim\alpha \vdash_{B1} \beta$	$(B^0), (B^1)$
$(2)^1\ \alpha, \sim\alpha, \sim\sim\alpha, \sim\sim\sim\alpha \vdash_{B0} \beta$	
$(2)^2\ \alpha, \sim\alpha, \sim\sim\alpha, \sim\sim\sim\alpha \vdash_{B1} \beta$	$(B^0), (B^1), (B^2)$
$(2)^3\ \alpha, \sim\alpha, \sim\sim\alpha, \sim\sim\sim\alpha \vdash_{B2} \beta$	
…	
$(k)\ \alpha, \sim\alpha, \sim\sim\alpha, \ldots, \sim^k\alpha \vdash_{Bn} \beta$	$(B^0), (B^1), (B^2), \ldots, (B^n)$
…	
$(\omega)\ \varnothing \vdash_{B\omega} \beta$	$(B^0), (B^1), (B^2), \ldots, (B^n), \ldots$ $(B^\omega$ = system *PI*$)$.

W klasycznym rachunku zadań para formuł $\alpha, \sim\alpha$, umożliwia wydedukowanie dowolnej formuły β, co nie będzie możliwe w żadnym z B^n–systemów. Trójka formuł $\alpha, \sim\alpha, \sim\sim\alpha$ umożliwia już wyprowadzenie dowolnej formuły β w systemie B^1, ale nie jest to możliwe w pozostałych B^n–systemach. Czwórka formuł $\alpha, \sim\alpha, \sim\sim\alpha, \sim\sim\sim\alpha$ umożliwia wyprowadzenie dowolnej formuły β w systemie B^1 oraz B^2, lecz nie – w pozostałych B^n–systemach, *etc*. Spostrzeżenia te wymagają oczywiście udowodnienia.

Na początek przyjrzyjmy się nieco dokładniej systemowi B^1. Pokażmy, że formuły:

---

[14] Klasyczny rachunek zdań nie jest B^n–systemem. Niemniej, przez wzgląd na spójność prezentacji, przyjmijmy, iż B^0 oznacza klasyczny rachunek zdań, natomiast B^ω logikę *PI* Batensa. Podkreślimy tym samym pewną analogię do hierarchii C_n–systemów da Costy. Por. § 2.6.

$(nn)\ \sim\sim\alpha \to \alpha$

$(nn)^{*}\ \alpha \to \sim\sim\alpha$

$(efq)\ \alpha \to (\sim\alpha \to \beta)$

$(\mathrm{F1})\ \sim\alpha \to (\sim\sim\alpha \to \beta)$

$(\mathrm{F2})\ (\alpha \to \beta) \to (\sim(\alpha \to \beta) \to \gamma)$

nie są wyprowadzalne ze zbioru aksjomatów systemu B^1. W tym celu skorzystajmy z matrycy $\mathscr{M} = \langle\{1, 2, 0\}, \{1, 2\}, \vee, \wedge, \to, \sim\rangle$, w której $\{1, 2, 0\}$ jest zbiorem wartości logicznych, $\{1, 2\}$ jest zbiorem wartości wyróżnionych, podane spójniki definiują zaś następujące tabelki:

$(\to)$	1	2	0
1	1	2	0
2	1	2	0
0	1	1	1

	$(\sim)$
1	2
2	0
0	1

$(\vee)$	1	2	0
1	1	1	1
2	1	2	2
0	1	2	0

$(\wedge)$	1	2	0
1	1	2	0
2	2	2	0
0	0	0	0

Falsyfikacja formuły (nn):

$$\sim\sim 0 \to 0 = \sim 1 \to 0 = 2 \to 0 = 0.$$

Falsyfikacja formuły $(nn)^{*}$:

$$1 \to \sim\sim 1 = 1 \to \sim 2 = 1 \to 0 = 0.$$

Falsyfikacja formuły (efq):

$$1 \to (\sim 1 \to 0) = 1 \to (2 \to 0) = 1 \to 0 = 0.$$

Falsyfikacja formuły (F1):

$$\sim 0 \to (\sim\sim 0 \to 0) = 1 \to (\sim 1 \to 0) = 1 \to (2 \to 0) = 1 \to 0 = 0.$$

Falsyfikacja formuły (F2):

$$(1 \to 1) \to (\sim(1 \to 1) \to 0) = 1 \to (\sim 1 \to 0) = 1 \to (2 \to 0) = 1 \to 0 = 0.$$

Wszystkie aksjomaty systemu B^1 zawsze przyjmują wartości wyróżnione. Reguła (RO) także zawsze je dziedziczy. Formuły, dla których podano falsyfikacje, są więc niezależne względem aksjomatyzacji systemu B^1.

Oprócz prawa przepełnienia, szczególnie istotne jest odrzucenie obydwu praw podwójnej negacji. W przeciwnym wypadku trójka formuł α, $\sim \alpha$, $\sim\sim \alpha$, która w zamierzeniu ma trywializować system B^1, redukowalna jest do pary α, $\sim \alpha$, co przywodzi na myśl sytuację znaną z klasycznego rachunku zdań. Opisana sytuacja nie przeszkadza jednak temu, aby potencjalnie zaakceptować tzw. prawa potrójnej negacji:

$(nn)^3 \sim\sim\sim \alpha \to \alpha$

$(nn)^{3^*}\ \alpha \to \sim\sim\sim \alpha$,

jako supraklasyczne rozszerzenie aksjomatyzacji systemu B^1[15].

Przejdźmy teraz do omówienia semantyki B^n–systemów.

Definicja 3.2.1. Niech *var* będzie niepustym, przeliczalnym zbiorem zmiennych zdaniowych $\{p_1, p_2, ...\}$, F_{Bn} oznacza zbiór wszystkich formuł systemu B^n $(n \geq 1)$. Funkcję v, v: $F_{Bn} \longrightarrow \{1,0\}$, nazywamy B^n–wartościowaniem, o ile spełnione są warunki:

(*var*) dla dowolnego $p_i \in var$, $i \in N$: albo $v(p_i) = 1$, albo $v(p_i) = 0$

(*v1*) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ lub $v(\beta) = 1$

(*v2*) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ oraz $v(\beta) = 1$

(*v3*) $v(\alpha \to \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$ lub $v(\beta) = 1$

(*v4a*) jeśli $v(\sim \alpha) = 0$, to $v(\alpha) = 1$

(*v4b*) jeśli $v(\sim^k \alpha) = 1$, to $v(\alpha) = 0$ lub $v(\sim \alpha) = 0$ lub … lub $v(\sim^{k-1} \alpha) = 0$, dla $k \geq 2$.

Definicja 3.2.2. Dla dowolnej $\alpha \in F_{Bn}$, α jest B^n–tautologią $(n \geq 1)$ wtw, gdy dla każdego B^n–wartościowania v, $v(\alpha) = 1$.

Definicja 3.2.3. Niech $\Gamma \subseteq F_{Bn}$, $\alpha \in F_{Bn}$, ze zbioru Γ wynika semantycznie formuła α (symbolicznie: $\Gamma \models_{Bn} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego B^n–wartościowania v, jeśli $v(\beta) = 1$ dla dowolnej $\beta \in \Gamma$, to $v(\alpha) = 1$.

Twierdzenie 3.2.2. (Ciuciura 2014) Niech $\Gamma \subseteq F_{Bn}$, $\alpha \in F_{Bn}$: $\Gamma \vdash_{Bn} \alpha$ wtw, gdy $\Gamma \models_{Bn} \alpha$.

System *S* jest *maksymalny* względem klasycznego rachunku zdań, o ile *S* jest jego podsystemem oraz jakiekolwiek rozszerzenie zbioru tez systemu *S* o formułę, która jest tezą klasycznego rachunku zdań, ale nie jest wyprowadzalna w *S*, spowoduje, że *S* będzie systemem równoważnym klasycznemu rachunkowi zdań.

---

[15] Zob. § 3.3.

Twierdzenie 3.2.3. System B^1 nie jest maksymalny względem klasycznego rachunku zdań.

Dowód. Oznaczmy przez S system, którego aksjomatami są schematy (H1) –(H8), (pP) (pC), (F1) oraz (F2). Jedyną pierwotną nieaksjomatyczną regułą systemu S jest reguła odrywania. Odnotujmy, że w systemie S wyprowadzalne są formuły $(efq)^2$ i $(pC)^*$, pełniące funkcję aksjomatów systemu B^1. Oznaczmy przez $T(\vdash_{B1})$ zbiór wszystkich tez systemu B^1, przez $T(\vdash_S)$ – zbiór wszystkich tez systemu S. Jasnym jest, że $T(\vdash_{B1}) \subset T(\vdash_S)$, podobnie zresztą jak to, iż odwrotna inkluzja, $T(\vdash_{B1}) \supset T(\vdash_S)$, nie zachodzi. System B^1 jest podsystemem systemu S. System S jest z kolei podsystemem klasycznego rachunku zdań, co więcej, S jest maksymalny względem tego rachunku. Nie jest to niczym zaskakującym, ponieważ S jest równoważny systemowi P^1 (zdefiniowanym na języku, wzbogaconym o spójnik koniunkcji i alternatywy)[16].

Prostym wnioskiem z twierdzeń 3.2.3 i 3.2.2 jest:

Twierdzenie 3.2.4. Każda B^1–tautologia jest tautologią klasycznego rachunku zdań.

System B^1 jest najsilniejszym, spośród B^n–systemów ($n \geq 1$), tzn.:

Twierdzenie 3.2.5. $T(\vdash_{B1}) \supset T(\vdash_{Bn})$, dla $n \geq 2$.

Dowód. W systemie B^1 tezą jest formuła $(efq)^k$ $\alpha \to (\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \ldots (\sim^k \alpha \to \beta)\ldots))$, dla $k \geq 2$. Jeśli $k = 2$, formułą $(efq)^2$ jest aksjomatem B^1. Jeśli $k > 2$, formuła $(efq)^k$ jest wyprowadzalna w B^1, dzięki (H1), prawu komutacji $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ tudzież wariantom prawa komutacji, typu: $(\alpha \to (\beta \to (\gamma \to \delta)) \to (\alpha \to (\gamma \to (\beta \to \delta))$, oraz regule (RO). Udowodnienie, iż formuła $(efq)^2$ nie jest tezą w żadnym B^n–systemie dla którego $n \geq 2$, wymaga zastosowania k–wartościowej matrycy supraklasycznej $\mathcal{M}_{Łk}$ dla której $k \geq 4$[17]. Jeśli więc $n = 2$, zastosowanie znajdzie matryca czterowartościowa $\mathcal{M}_{Ł4}$. Jeśli $n = 3$, matryca pięciowartościowa. Gdy $n = 4$, sześciowartościowa, itd.

Przedstawione dotychchczas twierdzenia, znajdują swoje zastosowanie w dowodzie kolejnego spostrzeżenia:

Twierdzenie 3.2.4.* Każda B^n–tautologia, $n \geq 1$, jest tautologią klasycznego rachunku zdań.

Pamiętamy, iż każdy B^n–system ($n \geq 1$) jest podsystemem klasycznego rachunku zdań. Wiemy również, że system B^1 jest systemem najsilniejszym spośród B^n–systemów. Pozostało określić jeszcze jedną zależność:

---

[16] Zob. § 4.1.
[17] Zob. § 3.3.

Twierdzenie 3.2.6. $T(\vdash_{B0}) \supset T(\vdash_{B1}) \supset T(\vdash_{B2}) \ldots \supset T(\vdash_{Bn}) \ldots \supset T(\vdash_{B\omega})$.

Opisana zależność charakteryzuje hierarchię B^n–systemów ($n \geq 1$).

3.3. HIERARCHIA B^n–SYSTEMÓW ($n \geq 1$) A LOGIKA SUPRAKLASYCZNA

Przyjrzyjmy się na wstępie definicji wartościowania klasycznego. Niech F_{CL} oznacza zbiór wszystkich formuł klasycznego rachunku zdań. Funkcję v, v: $F_{CL} \longrightarrow \{1, 0\}$, nazywamy wartościowaniem klasycznym, o ile spełnione są warunki:

(var) dla dowolnej zmiennej zdaniowej p_i, $i \in N$: albo $v(p_i) = 1$, albo $v(p_i) = 0$

($v1$) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ lub $v(\beta) = 1$

($v2$) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ oraz $v(\beta) = 1$

($v3$) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$ lub $v(\beta) = 1$

($v4$) $v(\sim \alpha) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$[18].

Biorąc pod uwagę charakterystykę funkcji v, możemy wyróżnić trzy grupy formuł. Pierwszy ich rodzaj to wyrażenia, które przy dowolnym wartościowaniu v zawsze przyjmują wartość 1. Formuły te są zawsze prawdziwe. Drugi rodzaj wyrażeń stanowią formuły, które przy dowolnym wartością v zawsze przyjmują wartość 0. Formuły te są zawsze fałszywe. I wreszcie, do trzeciej grupy wyrażeń należą formuły, które przy pewnym wartościowaniu v przyjmują wartość 1, przy pewnym zaś – wartość 0. Formuły te, w zależności od charakterystyki funkcji wartościowania v, mogą być prawdziwe, albo mogą być fałszywe. Formuły pierwszego typu nazywamy klasycznymi *tautologiami*, drugiego – klasycznymi *kontrtautologiami*, natomiast trzeci rodzaj wyrażeń stanowią formuły *komplementarne* w sensie klasycznym. Przykładem tautologii klasycznej jest choćby prawo niesprzeczności, prawo wyłączonego środka, czy też prawo przepełnienia. Przykładami kontrtautologii są negacje wspomnianych formuł. Przykładem formuły komplementarnej w sensie klasycznym będzie każda zmienna zdaniowa, każda negacja zmiennej zdaniowej, implikacja $p_1 \rightarrow p_2$ lub np. formuła $\sim (p_1 \rightarrow \sim p_2)$, dla $p_1, p_2 \in var$.

Przyjmijmy, dla dalszych rozważań, że naszym punktem odniesienia jest klasyczny rachunek zdań. Zadajmy teraz pytanie o to, w jaki sposób można zbudo-

---

[18] W odniesieniu do definicji wartościowania v oraz faktu, iż zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych jest podzbiorem F_{CL}, warunek (var) wydaje się zbyteczny. Zachowamy go jednak jako element składowy definicji funkcji klasycznego wartościowania. Warunek (var) wykorzystamy w dalszej części rozdziału, porównując klasyczne wartościowanie z wartościowaniem supraklasycznym.

wać pewien, bliżej nieokreślony, nieklasyczny system logiczny. Od razu przychodzą na myśl co najmniej trzy, typowe metody. Możemy rozszerzyć język klasycznego rachunku zdań o nowy bądź nowe, intensjonalne spójniki logiczne lub po prostu – o nowe symbole. W konsekwencji zmianie ulegnie definicja formuły. Oprócz formuł klasycznych, pojawią się w alfabecie języka nowe wyrażenia. Niektóre z nich uznane zostaną za tautologie powstałego systemu. Logika pierwszego rzędu oraz wzmiankowany w § 2.5 system logiki modalnej *S5* są tego doskonałym przykładem.

Możemy także zakwestionować intuicyjność wybranych praw logiki klasycznej, tak jak to miało miejsce w systemie Orłowa, Kołmogorowa, Johanssona, czy też C_n–systemach da Costy[19]. Akceptujemy wówczas język klasycznego rachunku zdań, ale nie akceptujemy wszystkich tautologii klasycznych. Każda tautologia nowego systemu jest jednocześnie tautologią klasyczną, niemniej nie każda tautologia klasyczna jest tautologią nowego systemu.

Trzecia droga jest wypadkową dwóch pozostałych. Wzbogacamy język klasycznego rachunku zdań o nowe symbole, nie aprobując przy tym wszystkich tautologii klasycznych. Do grona tego typu konstrukcji logicznych zaliczamy np. system $C_1^=$ da Costy oraz logikę *CLuNs* Batensa[20].

Istnieje jeszcze jedna, godna odnotowania, metoda. Otóż, bazując na języku klasycznego rachunku zdań, akceptujemy – jako tautologie – wybrane formuły komplementarne. Pojawia się jednak problem. Dodanie do zbioru tautologii klasycznych jakiejkolwiek formuły komplementarnej, natychmiast trywializuje klasyczny rachunek zdań. Każda formuła staje się jego tautologią. Aby tego uniknąć, musimy zakwestionować pojęcie pełności funkcyjnej w rozumieniu Posta[21] tudzież odrzucić niektóre spośród praw klasycznego rachunku zdań. W konsekwencji, istnieć muszą tautologie klasyczne, które nie są tautologiami nowego systemu, jak i również istnieć będą tautologie nowego systemu, które nie są tautologiami klasycznymi. W ten sposób narodziła się idea logiki *supraklasycznej*.

Definicja 3.3.1. Przez termin *logika supraklasyczna* (system supraklasyczny, rachunek supraklasyczny, itp.) rozumiemy logikę (system, rachunek, itp.), która w zbiorze swoich tautologii posiada przynajmniej jedną formułę komplementarną w sensie klasycznym.

W prezentowanym tu podejściu, logika klasyczna (a ściślej wartościowanie klasyczne) zawsze stanowić będzie punkt odniesienia dla logiki supraklasycznej.

Logika supraklasyczna nie jest wytworem dwudziestego pierwszego wieku. W latach sześćdziesiątych XX wieku McCall opracował podstawy tzw. logi-

---

[19] Zob. §§ 2.3, 2.4, 2.6.

[20] Zob. da Costa, N.C.A. (1974), *op. cit.*, s. 503–504, Batens, D., de Clercq, K. (2004), *op. cit.*

[21] Zob. Malinowski, G. (2006), *op. cit.*, s. 4.

ki *koneksyjnej*[22]. Przymiotnik *koneksyjna* sugeruje związek, powiązanie, czy też koneksję (ang. *connection*) pomiędzy przesłankami a wnioskiem poprawnych dedukcyjnie rozumowań lub pomiędzy formułami o odpowiedniej postaci. Związek, o którym mowa, można sprowadzać do następującego sformułowania: Żadna formuła nie powinna implikować, bądź być implikowana, przez jej negację. Nie może zatem być prawdą, iż $\sim \alpha \rightarrow \alpha$ oraz $\alpha \rightarrow \sim \alpha$. Co zresztą rzeczywiście w klasycznym rachunku zdań ma miejsce. Tautologiami klasycznymi są jednakże formuły:

$$(pC)\ (\sim \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$
$$(pC)^{*}\ (\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha,$$

znane pod nawą praw Claviusa. Formuła $\sim \alpha \rightarrow \alpha$ implikuje α, formuła $\sim \alpha$ jest zaś implikowana przez $\alpha \rightarrow \sim \alpha$. Obydwa prawa są nieintuicyjne. Prawdziwe powinny być wyrażenia:

$$(tA) \sim (\sim \alpha \rightarrow \alpha)$$
$$(tA)^{*} \sim (\alpha \rightarrow \sim \alpha).$$

Obydwa wyrażenie są formułami komplementarnymi w sensie klasycznym. Filozoficzne intuicje związane z formułą (tA) odnaleźć można w *Analitykach pierwszych* Arystotelesa. Jeśli przyjmiemy – argumentuje Arystoteles – że dwie formuły: (1) $\alpha \rightarrow \beta$ oraz (2) $\sim \alpha \rightarrow \beta$ są jednocześnie prawdziwe, wówczas musimy przyjąć, iż prawdziwe jest wyrażenie (3) $\sim \beta \rightarrow \sim \alpha$ (na mocy tzw. prawa słabej kontrapozycji oraz (1)). Z kolei, formuły (3) i (2) pociągają za sobą konieczność uznania (4) $\sim \beta \rightarrow \beta$ (na mocy prawa sylogizmu). Zdaniem Arystotelesa krok (4) jest niemożliwy. Stąd przypuszczenie, iż Arystoteles traktuje $\sim (\sim \alpha \rightarrow \alpha)$ jako prawo logiczne[23].

Filozoficzne idee Arystotelesa znalazły również wyraz w tzw. tezach Boecjusza[24]:

$$(tB)\ (\alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow \sim (\alpha \rightarrow \beta)$$
$$(tB)^{*}\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \sim (\alpha \rightarrow \sim \beta).$$

Formuły (tB), $(tB)^{*}$ wraz z tezami Arystotelesa oddają w pełni istotę logiki koneksyjnej, a ściślej: Niech S będzie systemem formalnym, którego język – prócz zmiennych zdaniowych – zawiera co najmniej spójnik implikacji i spójnik negacji. Powiemy, że S jest systemem *logiki koneksyjnej*, wtw, gdy spełnione są następujące warunki:

---

22 Zob. McCall, S. (1966), *Connexive Implication*, „Journal of Symbolic Logic", 31, s. 415–433; McCall, S. (1967), *Connexive Implication and the Syllogism*, „Mind", 76, s. 346–356.

23 Por. Arystoteles, *Analityki pierwsze*, 57b3. Formuła (tA) nosi miano *tezy Arystotelesa*.

24 Chodzi o żyjącego na przełomie V i VI wieku Aniciusa Manliusa Severinusa Boethiusa, rzymskiego filozofa, tłumacza i komentatora dzieł Arystotelesa.

(1) formuły (tA), $(tA)^*$, (tB) oraz $(tB)^*$ są tautologiami (tezami) systemu S

(2) formuła $(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)$ nie jest tautologią (tezą) systemu S.

Spójnik implikacji spełniający jednocześnie warunek (1) i warunek (2) nazywamy *implikacją koneksyjną*[25].

Przykładem systemu logiki koneksyjnej (a tym samym i logiki supraklasycznej) jest system *MC*. System ten definiują syntaktycznie aksjomaty pozytywnej części logiki klasycznej, prawa podwójnej negacji:

$(nn)\ {\sim}{\sim}\alpha \to \alpha$

$(nn)^*\ \alpha \to {\sim}{\sim}\alpha,$

prawa de Morgana

$(dMa)\ {\sim}(\alpha \wedge \beta) \to ({\sim}\alpha \vee {\sim}\beta)$

$(dMa)^*\ ({\sim}\alpha \vee {\sim}\beta) \to {\sim}(\alpha \wedge \beta)$

$(dMb)\ {\sim}(\alpha \vee \beta) \to ({\sim}\alpha \wedge {\sim}\beta)$

$(dMb)^*\ ({\sim}\alpha \wedge {\sim}\beta) \to {\sim}(\alpha \vee \beta)$

oraz aksjomaty:

$(if)\ {\sim}(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to {\sim}\beta)$

$(tB)\ (\alpha \to {\sim}\beta) \to {\sim}(\alpha \to \beta).$

Jedyną pierwotną regułą wnioskowania jest (RO) $\alpha, \alpha \to \beta\ /\ \beta$.

Aksjomat (tB) jest formułą komplementarną w sensie klasycznym. W systemie *MC* wyprowadzalne są także inne formuły komplementarne, m.in. (tA), $(tA)^*$, $(tB)^*$, $(\gamma \wedge {\sim}\beta) \to {\sim}(\alpha \to \beta)$, $(\gamma \wedge \beta) \to {\sim}(\alpha \to {\sim}\beta)$, ${\sim}\beta \to {\sim}(\alpha \to \beta)$ oraz $\beta \to {\sim}(\alpha \to {\sim}\beta)$. Ostatnie cztery formuły można określić jako paradoksy implikacji koneksyjnej.

Dowód dla $(tA)\ {\sim}({\sim}\alpha \to \alpha)$:

(1) $({\sim}\alpha \to {\sim}\alpha) \to {\sim}({\sim}\alpha \to \alpha)$	(tB)
(2) ${\sim}\alpha \to {\sim}\alpha$	(pt)
${\sim}({\sim}\alpha \to \alpha)$	(1), (2), (RO).

Dowód dla $(tB)^*\ (\alpha \to \beta) \to {\sim}(\alpha \to {\sim}\beta)$:

(1) $\alpha \to \beta$	*zał. na mocy tw. o ded.*
(2) $\beta \to {\sim}{\sim}\beta$	$(nn)^*$

[25] Zob. Wansing, H. (2005), *Connexive Modal Logic*, [w:] Schmidt, R., Pratt-Hartmann, I., Reynolds, M., Wansing, H., (red.), *Advances in Modal Logic*, 5, King's College Publications, London, s. 368–369.

(3) $\alpha \to \sim\sim \beta$	(*ps*) (1), (2)
(4) $(\alpha \to \sim\sim \beta) \to \sim(\alpha \to \sim \beta)$	(*tB*)
(5) $\sim(\alpha \to \sim \beta)$	(4), (3), (RO)
$(\alpha \to \beta) \to \sim(\alpha \to \sim \beta)$	*tw. o ded.* (1), (5).

Dowód dla $(tA)^* \sim(\alpha \to \sim \alpha)$:

(1) $(\alpha \to \alpha) \to \sim(\alpha \to \sim \alpha)$	$(tB)^*$
(2) $\alpha \to \alpha$	(*pt*)
$\sim(\alpha \to \sim \alpha)$	(1), (2), (RO).

Dowód dla $(\gamma \wedge \sim \beta) \to \sim(\alpha \to \beta)$:

(1) $\gamma \wedge \sim \beta$	*zał. na mocy tw. o ded.*
(2) $\sim \beta$	(H5), (1), (RO)
(3) $\alpha \to \sim \beta$	(H1), (2), (RO)
(4) $\sim(\alpha \to \beta)$	(*tB*), (3), (RO)
$(\gamma \wedge \sim \beta) \to \sim(\alpha \to \beta)$	*tw. o ded.* (1), (4).

Dowód dla $(\gamma \wedge \beta) \to \sim(\alpha \to \sim \beta)$:

(1) $\gamma \wedge \beta$	*zał. na mocy tw. o ded.*
(2) β	(H5), (1), (RO)
(3) $\alpha \to \beta$	(H1), (2), (RO)
(4) $\sim(\alpha \to \sim \beta)$	$(tB)^*$, (3), (RO)
$(\gamma \wedge \beta) \to \sim(\alpha \to \sim \beta)$	*tw. o ded.* (1), (4).

Aby wykazać, iż formuła $(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)$ nie jest tezą systemu *MC*, wystarczy skorzystać z prezentowanej poniżej semantyki oraz twierdzenia o pełności.

Semantyka systemu *MC* przedstawia się następująco:

Definicja 3.3.2. Niech *var* będzie zbiorem zmiennych zdaniowych, $var \neq \emptyset$, F_{MC} oznacza zbiór wszystkich formuł systemu *MC*, dodatkowo niech $var\sim = \{\sim p_i : p_i \in var\}$, gdzie $i \in N$. Funkcję v, $v: F_{MC} \longrightarrow \{1, 0\}$, nazywamy *MC*–wartościowaniem, o ile spełnione są warunki:

(*var*) dla dowolnego $p_i \in var$, $i \in N$: albo $v(p_i) = 1$, albo $v(p_i) = 0$

(*var~*) dla dowolnego $\sim p_i \in var\sim$, $i \in N$: albo $v(\sim p_i) = 1$, albo $v(\sim p_i) = 0$

(*v1*) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ lub $v(\beta) = 1$

(*v1~*) $v(\sim(\alpha \vee \beta)) = 1$ wtw, gdy $v(\sim \alpha) = 1$ oraz $v(\sim \beta) = 1$

$(v2)$ $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ oraz $v(\beta) = 1$

$(v2\sim)$ $v(\sim(\alpha \wedge \beta)) = 1$ wtw, gdy $v(\sim \alpha) = 1$ lub $v(\sim \beta) = 1$

$(v3)$ $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$ lub $v(\beta) = 1$

$(v3\sim)$ $v(\sim(\alpha \rightarrow \beta)) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$ lub $v(\sim \beta) = 1$

$(v4)$ $v(\sim\sim \alpha) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$.

Definicja 3.3.3. Formuła α jest *MC*–tautologią (zapis symboliczny: $\models_{MC} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego *MC*–wartościowania v, $v(\alpha) = 1$[26].

Definicja 3.3.4. Ze zbioru $\Gamma \subseteq F_{MC}$ wynika semantycznie formuła α (lub inaczej: α jest semantyczną konsekwencją zbioru formuł Γ, symbolicznie: $\Gamma \models_{MC} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego *MC*–wartościowania v, jeśli $v(\beta) = 1$ dla dowolnej $\beta \in \Gamma$, to $v(\alpha) = 1$.

Zwróćmy szczególną uwagę na postulat $(var\sim)$ oraz $(v3\sim)$ definicji 3.3.2. To głównie dzięki tym postulatom formuły (tA), $(tA)^*$, (tB) oraz $(tB)^*$ są *MC*–tautologiami, w przeciwieństwie np. do:

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ *falsyfikacja dla* $v(\alpha) = 1, v(\beta) = 0$

$\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta)$ *falsyfikacja dla* $v(\alpha) = v(\sim \alpha) = 1, v(\beta) = 0$

$\sim(\alpha \wedge \sim \alpha)$ *falsyfikacja dla* $v(\sim \alpha) = v(\alpha) = 0$.

System *MC* jest nie tylko przykładem systemu logiki supraklasycznej, lecz także systemem logiki parakonsystentnej. Prawa niesprzeczności i przepełnienia nie są *MC*–tautologiami. Co więcej, nie jest prawdą, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{MC}$, $\{\alpha, \sim \alpha\} \models_{MC} \beta$.

W dalszej części rozdziału skoncentrujemy się na pewnym systemie logiki wielowartościowej. System oznaczono symbolem $Ł^2_3$. Oprócz wielowartościowej charakterystyki semantycznej, $Ł^2_3$ posiada jeszcze inne ciekawe cechy: jest supraklasyczny i parakonsystentny. Twórcą systemu $Ł^2_3$ był Jerzy Słupecki[27].

System $Ł^2_3$ wyrażono w języku implikacyjno-negacyjnym klasycznego rachunku zdań. Niemniej, sposób rozumienia spójników jest nieco odmienny. Żeby się o tym przekonać, odwołamy się do trójwartościowej semantyki systemu $Ł^2_3$.

---

[26] Por. Wansing, H. (2014), *Connexive Logic,* [w:] Zalta E.N. (red.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy, URL = <https://plato.stanford.edu/entries/logic-connexive/> (dostęp 10.02.2017).

[27] Zob. Słupecki, J. (1939), *Dowód aksjomatyzowalności pełnych systemów wielowartościowych rachunku zdań*, „C. R. des Seances de la Société des Séances et des Lettres de Varsovie", Cl. III, 32, s. 112. System Słupeckiego analizował m.in. Jaśkowski w kontekście logiki dyskusyjnej. Zob. Jaśkowski, S. (1948), *op. cit.*

Rozważmy następującą matrycę:

$\mathcal{M}_{Ł3} = \langle\{1, 2, 0\}, \{1, 2\}, \rightarrow, \sim\rangle$,

w której $\{1, 2, 0\}$ pełni funkcję zbioru wartości logicznych, $\{1, 2\}$ jest zbiorem wartości wyróżnionych w matrycy $\mathcal{M}_{Ł3}$, spójniki implikacji i negacji definiują tabelki:

$(\rightarrow)$	1	2	0
1	1	2	0
2	1	2	0
0	1	1	1

	$(\sim)$
1	2
2	0
0	1

Przez pojęcie $Ł^2_3$–wartościowania rozumieć będziemy funkcję v, v: $F_Ł \longrightarrow \{1, 2, 0\}$, zbioru wszystkich formuł $F_Ł$ w zbiór wartości logicznych $\{1, 2, 0\}$, określoną zgodnie z podanymi tabelkami.

Definicja 3.3.5. Formuła α jest $Ł^2_3$–tautologią ($\models_{Ł3} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego $Ł^2_3$–wartościowania v, $v(\alpha) \neq 0$.

Definicja 3.3.6. Ze zbioru $\Gamma \subseteq F_Ł$ wynika semantycznie formuła α ($\Gamma \models_{Ł3} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego $Ł^2_3$–wartościowania v, jeśli $v(\beta) \neq 0$ dla dowolnej $\beta \in \Gamma$, to $v(\alpha) \neq 0$.

Semantyczna charakterystyka implikacji niczym nie różni się od charakterystyki podanej przez Asenjo i Tabmurino[28]. Ten sam sposób rozumienia implikacji występuje również w systemie *Pac* Avrona[29]. We wszystkich wspomnianych przypadkach mowa jest nie tylko o trzech wartościach logicznych, ale także o tym samym zbiorze wartości wyróżnionych. Obecna w systemie $Ł^2_3$ negacja, znacząco różni się jednak od sposobu, w jaki rozumieli ten spójnik Asnejo, Tamburino i Avron. Podczas, gdy wymienieni autorzy pojmowali negację na wzór logiki trójwartościowej Kleenego, czy też logiki $Ł_3$ Łukasiewicza, dla Słupeckiego inspirację stanowiła tzw. negacja cykliczna Posta[30]. Mówiąc w pewnym uproszczeniu, system $Ł^2_3$ może być postrzegany jako system z implikacją klasyczną i cykliczną negacją.

[28] Zob. § 2.7.

[29] Zob. Avron, A. (1991), *Natural 3-valued logics – Characterization and Proof Theory*, „The Journal of Symbolic Logic", 56/1, *Section* 3.2.2. Gwoli ścisłości nadmieńmy, iż o systemie *Pac* wzmiankował Avron już w roku 1986. Zob. Avron, A. (1986), *On an Implication Connective of RM*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 27, s. 201–209. W artykule pochodzącym z tamtych czasów system *Pac* nosił jednak inne oznaczenie, mianowicie $RM_3^{\subset}$.

[30] W przeciwieństwie do systemu Słupeckiego, Asenjo-Tamburino czy też Avrona, w matrycach Kleenego, Łukasiewicza i Posta wyróżniona jest tylko jedna wartość logiczna. Na temat logiki Kleenego, Łukasiewicza i Posta zob. np. Malinowski, G. (2006), *Logiki wielowartościowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Połączenie implikacji klasycznej z negacją cykliczną dało systemowi Słupeckiego dość osobliwe własności. Oprócz wielu znanych tautologii klasycznych, np. aksjomatów implikacyjnej logiki Hilberta, prawa Peirce'a, lub obydwu praw Claviusa, do zbioru $Ł^2_3$–tautologii należy wiele formuł komplementarnych w sensie klasycznych, np.:

$(nn)^3$ $\sim\sim\sim \alpha \rightarrow \alpha$

$(nn)^{3*}$ $\alpha \rightarrow \sim\sim\sim \alpha$

(F3) $\sim \alpha \rightarrow \sim (\alpha \rightarrow \alpha)$

(F4) $\sim \beta \rightarrow \sim (\alpha \rightarrow \beta)$

(tA) $\sim (\sim \alpha \rightarrow \alpha)$

(tB) $(\alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow \sim (\alpha \rightarrow \beta)$.

System $Ł^2_3$ jest więc systemem logiki supraklasycznej. Nie jest on wszakże systemem logiki koneksyjnej. Formuły $(tA)^*$ i $(tB)^*$ nie są bowiem $Ł^2_3$–tautologiami:

$(tA)^*$ $\sim (\alpha \rightarrow \sim \alpha)$ *falsyfikacja dla* $v(\alpha) = 1$

$(tB)^*$ $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \sim (\alpha \rightarrow \sim \beta)$ *falsyfikacja dla* $v(\alpha) = 2$, $v(\beta) = 1$.

Kluczowe pytanie brzmi zatem: czy $Ł^2_3$, podobnie jak *MC*, jest systemem logiki parakonsystentnej?

Odnotujmy, że prawo przepełnienia nie jest $Ł^2_3$–tautologią:

$\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta)$ *falsyfikacja dla* $v(\alpha) = 1$, $v(\beta) = 0$,

W ogólności nie jest prawdą, że $\{\alpha, \sim \alpha\} \models_{Ł3} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_Ł$. Para formuł α, $\sim \alpha$ nie trywializuje systemu Słupeckiego. System $Ł^2_3$ trywializuje trójka formuł α, $\sim \alpha$, $\sim\sim \alpha$. Prawdą jest bowiem, iż $\{\alpha, \sim \alpha, \sim\sim \alpha\} \models_{Ł3} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_Ł$. Zdaniem np. Jaśkowskiego opisany stan jest bliski trywializacji systemu. System nie spełnia więc *w pewnym sensie* kryteriów logiki parakonsystentnej[31]. Nasuwa się pytanie: jak interpretować zwrot *w pewnym sensie*? Otóż, z jednej strony, system $Ł^2_3$ wydaje się spełniać fundamentalne kryterium parakonsystencji: para formuł α, $\sim \alpha$ nie trywializuje $Ł^2_3$. Z drugiej strony, czujemy pewien dyskomfort, godząc się na fakt, iż *osłabione* prawo przepełnienia, $\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow (\sim\sim \alpha \rightarrow \beta))$, jest $Ł^2_3$–tautologią. Intuicja podpowiada nam, że jest to przypadek graniczny, obnażający brak precyzji w próbie uchwycenia natury logiki parakonsystentnej. Znany z poprzedniego podrozdziału system B^1 wzbudzał analogiczne wątpliwości[32].

[31] Por. § 2.5. Zob. Jaśkowski, S. (1948), *op. cit.*, s. 62–63.

[32] Por. §§ 1.1, 3.2.

W celu dalszej analizy, rozszerzmy język systemu Słupeckiego o dodatkowe spójniki dwuargumentowe, tj. alternatywę i koniunkcję (równoważność jest definiowana w standardowy sposób), które rozumieć będziemy następująco:

$(\vee)$	1	2	0
1	1	1	1
2	1	2	2
0	1	2	0

$(\wedge)$	1	2	3
1	1	2	0
2	2	2	0
0	0	0	0

O wartości logicznej alternatywy decyduje argument, któremu przypisano większą wartość logiczną. O wartości logicznej koniunkcji decyduje z kolei argument, któremu przypisano mniejszą wartość logiczną. Intuicja ta znajduje wyraz w wielu systemach logiki wielowartościowej, np. w logice trójwartościowej Łukasiewicza.

Charakterystyka semantyczna implikacji, alternatywy i koniunkcji systemu $Ł^2_3$ jest izomorficzna względem charakterystyki ich odpowiedników w systemie *Pac* $(RM_3^{\subset})$ Avrona, a tym samym jest tożsama z pozytywną częścią klasycznego rachunku zdań[33]. Prawo wyłączonego środka, (*tnd*) $\alpha \vee \sim \alpha$ jest $Ł^2_3$–tautologią, podobnie zresztą jak jego wariant komplementarny, tj. $\alpha \vee \sim\sim \alpha$. Jak widać, zarysowuje się tu pewien związek, pomiędzy wzbogaconym o nowe spójniki systemem $Ł^2_3$, a systemem B^1. Precyzyjniej wyraża to poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.3.1. Każda B^1–tautologia jest $Ł^2_3$–tautologią.

Dowód. Niech $\alpha \in F_{B1}$ (i jednocześnie $\alpha \in F_Ł$). Załóżmy, że α jest B^1–tautologią. Na mocy twierdzenia o pełności dla systemu B^1, wnioskujemy, iż $\varnothing \vdash_{B1} \alpha$. Aby udowodnić, że α jest $Ł^2_3$–tautologią, wystarczy wykazać, że aksjomatyzacja systemu B^1 jest przystosowana względem semantyki systemu $Ł^2_3$, tzn. jeśli $\vdash_{B1} \alpha$, to α jest $Ł^2_3$–tautologią, dla dowolnej $\alpha \in F_{B1}$ $(\alpha \in F_Ł)$. Dowód ma charakter indukcyjny. W istocie sprowadza się on jednak do dwóch kwestii: należy sprawdzić: (1) czy wszystkie aksjomaty systemu B^1 są $Ł^2_3$–tautologiami, (2) czy reguła odrywania jest niezawodna.

(1): Pokażmy, dla przykładu, że aksjomat $\alpha \to (\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta))$ jest $Ł^2_3$–tautologią. Rozumowanie przeprowadzimy nie wprost. Przyjmijmy zatem, że formuła $\alpha \to (\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta))$ nie jest $Ł^2_3$–tautologią. Istnieje zatem takie $Ł^2_3$–wartościowania v, dla którego $v(\alpha \to (\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta))) = 0$. Jeśli $v(\alpha \to (\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta))) = 0$, to albo $v(\alpha) = 1$ i $v(\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha$

[33] Zob. Avron, A. (1986), *op. cit.*, pkt. (c) twierdzenia 2.10. W dalszej części rozdziału symbol $Ł^2_3$ oznaczać będzie system Słupeckiego, wzbogacony o nowe spójniki zdaniowe.

$\to \beta)) = 0$, albo $v(\alpha) = 2$ i $v(\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta)) = 0$. Przypadek pierwszy: skoro $v(\alpha) = 1$, wówczas $v(\sim \alpha) = 2$ oraz $v(\sim \sim \alpha) = 0$. Jeśli $v(\sim \sim \alpha) = 0$, to $v(\sim \sim \alpha \to \beta) = 1$, implikacja jest zawsze prawdziwa, o ile jej poprzednik jest fałszywy. Jeżeli $v(\sim \sim \alpha \to \beta) = 1$, to $v(\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta)) = 1$. Z pierwotnego założenia wynikało jednak, że $v(\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta)) = 0$. Sprzeczność z pojęciem $Ł^2_3$–wartościowania. Dowód drugiego przypadku przebiega podobnie: skoro $v(\alpha) = 2$, wtedy $v(\sim \alpha) = 0$ oraz $v(\sim \sim \alpha) = 1$. Jeśli $v(\sim \sim \alpha) = 1$, to albo $v(\sim \sim \alpha \to \beta) = 1$, o ile $v(\beta) = 1$, albo $v(\sim \sim \alpha \to \beta) = 2$, o ile $v(\beta) = 2$, albo $v(\sim \sim \alpha \to \beta) = 0$, o ile $v(\beta) = 0$. Skoro $v(\sim \sim \alpha \to \beta) = 1$, wówczas $v(\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta)) = 1$, ale $v(\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta)) = 0$. Sprzeczność z pojęciem $Ł^2_3$–wartościowania. Z kolei, jeżeli $v(\sim \sim \alpha \to \beta) = 2$, to $v(\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta)) = 1$, ale przecież $v(\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta)) = 0$, Sprzeczność z pojęciem $Ł^2_3$–wartościowania. Wreszcie, jeśli $v(\sim \sim \alpha \to \beta) = 0$, wówczas $v(\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta)) = 1$. Sprzeczność z pojęciem $Ł^2_3$–wartościowania. Nie istnieje przeto $Ł^2_3$–wartościowanie, falsyfikujące badaną formułę. Formuła $\alpha \to (\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta))$ jest zatem $Ł^2_3$–tautologią.

(2): Reguła (RO) jest niezawodna, wtw, gdy dla dowolnego $Ł^2_3$–wartościowania v, oraz dowolnych $\alpha, \beta \in F_{B1}$ ($\alpha, \beta \in F_Ł$): jeśli $v(\alpha \to \beta) \neq 0$ i $v(\alpha) \neq 0$, to także $v(\beta) \neq 0$. Załóżmy nie wprost, że (RO) nie jest regułą niezawodną, tj. dla pewnego $Ł^2_3$–wartościowania v oraz pewnych formuł α, β: $v(\alpha \to \beta) \neq 0$, $v(\alpha) \neq 0$ oraz $v(\beta) = 0$. Możliwe są cztery przypadki: albo $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) = 1$ i $v(\beta) = 0$, albo $v(\alpha \to \beta) = 1$, $v(\alpha) = 2$ i $v(\beta) = 0$, albo $v(\alpha \to \beta) = 2$, $v(\alpha) = 1$ i $v(\beta) = 0$, albo $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) = 2$ i $v(\beta) = 0$. Rozważmy jako przykład drugą z wymienionych możliwości, tzn. $v(\alpha \to \beta) = 1$, $v(\alpha) = 2$ i $v(\beta) = 0$. Skoro $v(\alpha) = 2$ oraz $v(\beta) = 0$, to zgodnie z charakterystyką implikacji $v(\alpha \to \beta) = 0$. Założyliśmy jednak, że $v(\alpha \to \beta) = 1$. Sprzeczność z pojęciem $Ł^2_3$–wartościowania. Pozostałe trzy przypadki analizujemy w podobny sposób, ostatecznie dowodząc, iż dla dowolnego $Ł^2_3$–wartościowania v, oraz dowolnych $\alpha, \beta \in F_{B1}$ ($\alpha, \beta \in F_Ł$): jeśli $v(\alpha \to \beta) \neq 0$ i $v(\alpha) \neq 0$, to $v(\beta) \neq 0$.

Poszczególne aksjomatyzacje systemów B^n $(n \geq 1)$ różnią się między sobą wyłącznie kształtem aksjomatu $(efq)^k$ $\alpha \to (\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \ldots (\sim^k \alpha \to \beta)\ldots))$, $k \geq 2$. Dla dowolnego zaś $k \geq 2$, formuła $(efq)^k$ jest tezą systemu B^1. Twierdzenie 3.3.1 można więc przedstawić w ogólniejszej postaci, tj.:

*Twierdzenie 3.3.1.** Każda B^n–tautologia jest $Ł^2_3$–tautologią, dla $n \geq 1$.

Dowód przebiega analogicznie jak w przypadku, gdy $n = 1$. Metaforycznie rzecz ujmując, B^n–systemy (dla $n \geq 1$) stanowią *jądro parakonsystentne* supraklasycznego systemu $Ł^2_3$. System $Ł^2_3$ spełnia dwa główne kryteria da Costy. Po piewsze, prawo niesprzeczności (pn) $\sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$, nie jest $Ł^2_3$–tautologią (falsyfikacja dla

$v(\alpha) = 1)$. Tautologiami systemu $Ł^2{}_3$ są jednak supraklasyczne warianty tego prawa, np. $\sim \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$ oraz $\sim \sim (\alpha \wedge \sim \sim \alpha)$. Po drugie, nie jest prawdą, iż $\{\alpha, \sim \alpha\} \models_{Ł3} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_Ł$.

Rozważmy teraz matrycę czterowartościową:

$$\mathcal{M}_{Ł4} = \langle \{1, 2, 3, 0\}, \{1, 2, 3\}, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim \rangle,$$

w której $\{1, 2, 3, 0\}$ jest zbiorem wartości logicznych, $\{1, 2, 3\}$ – zbiorem wartości wyróżnionych w matrycy $\mathcal{M}_{Ł4}$, spójniki alternatywy, koniunkcji, implikacji i negacji definiują tabelki:

$(\vee)$	1	2	3	0
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	2	3	3
0	1	2	3	0

$(\wedge)$	1	2	3	0
1	1	2	3	0
2	2	2	3	0
3	3	3	3	0
0	0	0	0	0

$(\rightarrow)$	1	2	3	0	$(\sim)$
1	1	2	3	0	2
2	1	2	3	0	3
3	1	2	3	0	0
0	1	1	1	1	1

$Ł^3{}_4$–wartościowaniem nazywać będziemy funkcję v, $v\colon F_Ł \longrightarrow \{1, 2, 3, 0\}$, zbioru wszystkich formuł $F_Ł$ w zbiór wartości logicznych $\{1, 2, 3, 0\}$, określoną zgodnie z podanymi tabelkami.

Definicja 3.3.7. Formuła α jest $Ł^3{}_4$–tautologią ($\models_{Ł4} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego $Ł^3{}_4$–wartościowania v, $v(\alpha) \neq 0$.

Definicja 3.3.8. Ze zbioru $\Gamma \subseteq F_Ł$ wynika semantycznie formuła α ($\Gamma \models_{Ł4} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego $Ł^3{}_4$–wartościowania v, jeśli $v(\beta) \neq 0$ dla dowolnej $\beta \in \Gamma$, to $v(\alpha) \neq 0$.

Do zbioru $Ł^3{}_4$–tautologii należą wszystkie formuły, pełniące rolę aksjomatów pozytywnej części klasycznego rachunku zdań w ujęciu Hilberta i Ackermanna, prawa Claviusa, prawo wyłączonego środka, prawa *poczwórnej* negacji: $\sim\sim\sim\sim \alpha \rightarrow \alpha$, $\alpha \rightarrow \sim\sim\sim\sim \alpha$ oraz m.in. aksjomat $(efq)^k$ $\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow (\sim \sim \alpha \rightarrow \ldots (\sim^k \alpha \rightarrow \beta) \ldots))$, dla $k \geq 3$. Zwróćmy szczególną uwagę na ten ostatni. Już nie trójka α, $\sim \alpha$, $\sim \sim \alpha$, a tym bardziej nie para formuł α, $\sim \alpha$ (ewentualnie: $\sim \alpha$, $\sim \sim \alpha$), trywializuje system. System $Ł^3{}_4$ trywializują cztery formuły: α, $\sim \alpha$,

$\sim\sim\alpha$, $\sim\sim\sim\alpha$. Zachodzi bowiem wynikanie: $\{\alpha, \sim\alpha, \sim\sim\alpha, \sim\sim\sim\alpha\} \models_{Ł4} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_Ł$. Staje się to szczególnie wyraziste w kontekście czterowartościowej charakterystyki negacji cyklicznej oraz faktu, iż prawa podwójnej – jak i potrójnej negacji, nie są $Ł^3_4$–tautologiami.

System $Ł^3_4$ jest supraklasyczny. Pośród $Ł^3_4$–tautologii znajdują się bowiem formuły komplementarne w sensie klasycznym, np. teza Arystotelesa (tA), czy też teza Boecjusza (tB). System $Ł^3_4$ nie jest systemem logiki konekcyjnej. Formuły $(tA)^*$, $(tB)^*$ nie są $Ł^3_4$–tautologiami. Nie jest także prawdą, iż każda $Ł^3_4$–tautologia jest $Ł^2_3$–tautologią. (i odwrotnie: nie jest prawdą, że każda $Ł^2_3$–tautologia jest jednocześnie $Ł^3_4$–tautologią). Żeby się o tym przekonać, przypomnijmy: obydwa prawa poczwórnej negacji są $Ł^3_4$–tautologiami. Żadne z praw poczwórnej negacji nie jest jednak $Ł^2_3$–tautologią:

$\sim\sim\sim\sim\alpha \rightarrow \alpha$ *falsyfikacja dla* $v(\alpha) = 0$,

$\alpha \rightarrow \sim\sim\sim\sim\alpha$ *falsyfikacja dla* $v(\alpha) = 2$.

I analogicznie, obydwa prawa potrójnej negacji są $Ł^2_3$–tautologiami, ale nie $Ł^3_4$–tautologiami:

$\sim\sim\sim\alpha \rightarrow \alpha$ *falsyfikacja dla* $v(\alpha) = 0$,

$\alpha \rightarrow \sim\sim\sim\alpha$ *falsyfikacja dla* $v(\alpha) = 1$.

Osłabione prawo przepełnienia:

$\alpha \rightarrow (\sim\alpha \rightarrow (\sim\sim\alpha \rightarrow \beta))$ *falsyfikacja dla* $v(\alpha) = 1, v(\beta) = 0$,

również nie jest $Ł^3_4$–tautologią. Twierdzenia 3.3.1 i 3.3.1* nie są więc dla systemu $Ł^3_4$ prawdziwe. Prawdziwe tymczasem jest twierdzenie:

Twierdzenie 3.3.2. Każda B^2–tautologia jest $Ł^3_4$–tautologią.

Dowód przebiega podobnie jak w przypadku twierdzenia 3.3.1. Z tą różnicą, iż musimy wykazać, że $Ł^3_4$–tautologią jest aksjomat $(efq)^k$ $\alpha \rightarrow (\sim\alpha \rightarrow (\sim\sim\alpha \rightarrow \ldots (\sim^k\alpha \rightarrow \beta) \ldots))$, dla $k = 3$. Ogólniejszą zależność między $Ł^3_4$, a B^n–systemami (dla $n \geq 2$) wyraża twierdzenie:

Twierdzenie 3.3.2.* Każda B^n–tautologia jest $Ł^3_4$–tautologią, dla $n \geq 2$.

System $Ł^3_4$ nie może zatem być traktowany jako supraklasyczne rozszerzenie B^1.

W dotychczasowych rozważaniach skupiliśmy się na dwóch (nie wliczając *MC*) przykładowych systemach logiki supraklasycznej. Przejdźmy teraz do pewnych uogólnień. Rozważmy matrycę k–wartościową (dla skończonego $k > 2$)[34]:

---

[34] Jeśli $k = 2$, wtedy $\mathcal{M} = \langle X, D, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim\rangle$, gdzie $X = \{w_1, w_2,\}$, $D = \{w_1\}$, spójniki alternatywy, koniunkcji, implikacji i negacji są zaś izomorficznymi wariantami spójników klasycznego rachunku zdań.

$$\mathcal{M}_{Łk} = \langle X_{Łk}, D_{Łk}, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim \rangle,$$

w której $X_{Łk} = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ jest zbiorem wartości logicznych (przy czym $w_i < w_j$ wtw, gdy $i < j$, dla $i, j \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$), $D_{Łk} = X_{Łk} / \{w_k\} = \{w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}\}$ jest zbiorem wartości wyróżnionych w matrycy $\mathcal{M}_{Łk}$, zaś „$\vee$", „$\wedge$", „$\rightarrow$", „$\sim$" definiują, dla dowolnych $w_i, w_j \in X_{Łk}$, następujące warunki :

$$w_i \vee w_j = w_{max(i,j)}$$
$$w_i \wedge w_j = w_{min(i,j)}$$

$$w_i \rightarrow w_j = \begin{cases} w_j, \text{ gdy } 1 \leq i \leq k\text{-}1 \\ w_1, \text{ gdy } k\text{-}1 < i \leq k \end{cases}$$

$$\sim w_i = \begin{cases} w_1, \text{ gdy } i = k \\ w_{i+1}, \text{ gdy } i \neq k. \end{cases}$$

Znak „$\vee$" oznacza dwuargumentową funkcją *maksimum* (alternatywy), „$\wedge$" – dwuargumentową funkcją *minimum* (koniunkcji), „$\rightarrow$" – dwuargumentową funkcją implikacji, natomiast „$\sim$" jest jednoargumentową funkcją negacji cyklicznej. Liczba k wskazuje ilu wartościowy jest system. Matrycę $\mathcal{M}_{Łk} = \langle X_{Łk}, D_{Łk}, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim \rangle$ będziemy odtąd nazywać *k–wartościową supraklasyczną matrycą Słupeckiego-Posta* ($k > 2$), lub krótko: *matrycą supraklasyczną*[35].

Z matrycą supraklasyczną $\mathcal{M}_{Łk}$ związany jest zbiór formuł języka, z którym jest ona stowarzyszona, przyjmujących przy dowolnej interpretacji wartości wyróżnione. Zbiór ten nazywany jest zawartością matrycy $\mathcal{M}_{Łk}$. A ściślej:

Definicja 3.3.9. Zbiór formuł $E(\mathcal{M}_{Łk})$ nazywamy zawartością matrycy supraklasycznej $\mathcal{M}_{Łk}$, $k > 2$, wtw, gdy spełniony jest warunek: $E(\mathcal{M}_{Łk}) = \{\alpha \in F_Ł: h\alpha \in D$ dla dowolnego $h\alpha \in Hom(L_{Łk}, X_{Łk})\}$.

$F_{Łk}$ jest symbolem zbioru wszystkich formuł, h – homomorfizmem języka $L_{Łk}$ w algebrę $X_{Łk}$, $Hom(L_{Łk}, X_{Łk})$ – zbiorem wszystkich homomorfizmów $L_{Łk}$ w $X_{Łk}$.

Definicja 3.3.10. Relację $\models_{Łk} \subseteq 2^{F_{Łk}} \times F_{Łk}$ nazywamy operacją konsekwencji matrycy supraklasycznej $\mathcal{M}_{Łk}$, o ile dla dowolnego $\Gamma \subseteq F_{Łk}$, dowolnej $\alpha \in F_{Łk}$, spełniony jest warunek: $\Gamma \models_{Łk} \alpha$ wtw, gdy dla każdego $h \in Hom(L_{Łk}, X_{Łk})$, jeśli $h\Gamma \subseteq D_{Łk}$, to $h\alpha \in D_{Łk}$.

[35] Por. Słupecki, J. (1939), *op. cit.*, s. 111–112; Malinowski, G. (2006), *op. cit.*, s. 35–41.

Jeśli $\Gamma = \varnothing$, wówczas $E(\mathcal{M}_{Łk}) = \{\alpha \in F_Ł : \varnothing \models_{Łk} \alpha\}$. $E(\mathcal{M}_{Łk})$ określać więc będziemy jako zbiór $Ł_k^{k-1}$–tautologii (dla skończonego $k > 2$).

Twierdzenie 3.3.3. Każda B^n–tautologia jest $Ł_k^{k-1}$–tautologią, dla $k > 2$ oraz $n \geq k–2$.

Twierdzenie jest uogólnieniem obserwacji poczynionych w twierdzeniach 3.3.1–3.2.2* oraz faktu, iż każda B^k–tautologia jest jednocześnie B^n–tautologią (dla $k \geq n$)[36]. Twierdzenie pokazuje w jakim stopniu, przenośnie rzecz ujmując, systemy supraklasyczne *nasycane są parakonsystencją*. Przy tej okazji warto omówić jeszcze jedną kwestię. Wyrazić ją można w takim oto pytaniu: Czy istnieje, bądź istnieją hierarchie systemów supraklasycznych $Ł_k^{k-1}$ (dla $k > 2$)?

Jak pamiętamy, nie każda $Ł^3_4$–tautologia jest $Ł^2_3$–tautologią oraz nie każda $Ł^2_3$–tautologia jest jednocześnie $Ł^3_4$–tautologią. Nie jest zatem prawdą, iż $E(\mathcal{M}_{Ł3}) \subset E(\mathcal{M}_{Ł4})$. Prawdą także nie jest, iż $E(\mathcal{M}_{Ł4}) \subset E(\mathcal{M}_{Ł3})$. Rozwiązania problemu należy upatrywać w cykliczności negacji Posta oraz zbiorze liczb pierwszych z przedziału $[3, n]$[37] poszerzonym o liczbę 4. Dzięki liczbom pierwszym (i liczbie 4) określimy bowiem bazowy (tj. najsilniejszy) system danej $Ł_k^{k-1}$–hierarchii (dla skończonego $k > 2$). Przy pomocy zaś własności negacji cyklicznej, zbudujemy hierarchę opartą na tym systemie. Aby to dokładniej wyjaśnić, prześledźmy prosty przykład.

Weźmy pod uwagę dany system $Ł_k^{k-1}$ i następujące formuły (dla skończonego $k > 2$):

$$(nn)^k \sim^k \alpha \rightarrow \alpha$$

$$(nn)^{k*} \alpha \rightarrow \sim^k \alpha$$

Parametr k, zapisu $\sim^k \alpha$, wskazuje na liczbę negacji występujących przed formułą α, np. jeśli $k = 5$, to $\sim^5 \alpha = \sim\sim\sim\sim\sim \alpha$ tudzież $Ł_k^{k-1} = Ł^4_5$, wówczas:

$$\mathcal{M}_{Łk} = \langle \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}, \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \vee, \wedge, \rightarrow, \sim \rangle,$$

przy czym dla $w_i, w_j \in \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$:

$$w_i \vee w_j = w_{max(i,j)}$$
$$w_i \wedge w_j = w_{min(i,j)}$$

$$w_i \rightarrow w_j = \begin{cases} w_j, \text{ gdy } 1 \leq i \leq 4 \\ w_1, \text{ gdy } 4 < i \leq 5 \end{cases}$$

[36] Zob. § 3.2.

[37] Chodzi o liczby: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 … *etc*. Przedział możemy precyzyjnie określić m.in. za sprawą tzw. sita Eratostenesa.

$$\sim w_{\mathrm{i}} = \begin{cases} w_1, & \text{gdy } i = 5 \\ w_{i+1}, & \text{gdy } i \neq 5. \end{cases}$$

$$E(\mathcal{M}_{Ł5}) = \{\alpha \in F_{Ł}: \varnothing \models_{Ł5} \alpha\}.$$

Zauważmy, że parametr k dokładnie określa *pełen cykl* spójnika negacji. W podanym przykładzie cykl ten wynosi 5. Ta prosta obserwacja wiedzie do następującej hipotezy: Czy możliwa jest budowa hierarchii systemów supraklasycznych w oparciu o parametr k? Można wykazać, że nie każda tautologia systemu $Ł_k^{k-1}$ (dla skończonego $k > 2$), w którym parametr k jest równy liczbie 4, bądź dowolnej liczbie pierwszej z przedziału $[3, n]$, jest tautologią dowolnego systemu $Ł_i^{i-1}$, dla którego $k > i$. Oznacza to na przykład, że nie każda tautologia systemu $Ł^{30}{}_{31}$ (choćby $\sim^{31} \alpha \rightarrow \alpha$ lub $\alpha \rightarrow \sim^{31} \alpha$) jest $Ł_i^{i-1}$–tautologią, dla $i < 31$. System $Ł^{30}{}_{31}$ i jemu podobne, nazwać będziemy bazowymi systemami hierarchii. Parametrami systemów bazowych będą zatem liczby 3, 4, 5, 7, 11, 13, *etc.* Parametry systemów słabszych, aniżeli parametry systemów bazowych wyznaczymy wedle wzoru:

$k{\cdot}2m$, gdzie $k > 2$ oraz $m \in \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Jeśli parametr bazowy k jest równy liczbie 3, wówczas $i = 6$ (gdy $m = 1$), $i = 12$ (gdy $m = 2$), $i = 24$ (gdy $m = 3$), itd. W konsekwencji, otrzymujemy $Ł^a{}_b$–hierarchię systemów supraklasycznych (przy czym $a = k{\cdot}2m\text{-}1$, $b = k{\cdot}2m$, $k > 2$, $m \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$):

dla $k = 3$, $E(\mathcal{M}_{Ł3}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł6}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł12}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł24}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł48}) \supset \dots$
dla $k = 4$, $E(\mathcal{M}_{Ł4}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł8}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł16}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł32}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł64}) \supset ...$
dla $k = 5$, $E(\mathcal{M}_{Ł5}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł10}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł20}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł40}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł80}) \supset ...$
etc.

Pełne cykle negacji rozpatrujemy zawsze względem kolejnego, słabszego systemu hierarchii, a nie każdorazowo względem systemu bazowego. W przeciwnym wypadku np. dla $k = 3$, otrzymamy: $E(\mathcal{M}_{Ł3}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł6}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł9}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł12}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł15}) \supset \dots$ Prawdą jest wówczas, że $E(\mathcal{M}_{Ł3}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł6})$, $E(\mathcal{M}_{Ł3}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł9})$, $E(\mathcal{M}_{Ł3}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł12})$ *etc.* Lecz nie jest prawdą, iż $E(\mathcal{M}_{Ł6}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł9})$, $E(\mathcal{M}_{Ł6}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł15})$, $E(\mathcal{M}_{Ł9}) \supset E(\mathcal{M}_{Ł12})$ itd. Wystarczy tu skorzystać z formuły $\sim^k \alpha \rightarrow \alpha$ lub $\alpha \rightarrow \sim^k \alpha$, wstawiając za k liczbę naturalną, odpowiadającą konkretnej liczbie negacji. Przykładowo, $\sim^6 \alpha \rightarrow \alpha \in E(\mathcal{M}_{Ł6})$, ale $\sim^6 \alpha \rightarrow \alpha \notin E(\mathcal{M}_{Ł9})$. Z drugiej strony, $\sim^9 \alpha \rightarrow \alpha \in E(\mathcal{M}_{Ł9})$, ale $\sim^9 \alpha \rightarrow \alpha \notin E(\mathcal{M}_{Ł6})$.

Rozdział 4

HIERARCHIE OPARTE NA KRYTERIUM JAKOŚCIOWYM

W rozdziale zaprezentujemy cztery hierarchie systemów logiki tolerującej sprzeczność. Decydującą rolę, tym razem, odgrywać będzie tzw. *kryterium jakościowe*. Kryterium to, w pewnym uproszczeniu, sprowadza się do określenia stopnia złożoności formuł, trywializujących dany system.

Złożoność danej formuły α oznaczymy przez $d(\alpha)$ i definiujemy następująco:

(1) jeśli $\alpha = p$ i $p \in var$, to $d(\alpha) = 1$

(2) jeśli $\alpha = \sim \beta$, to $d(\alpha) = d(\beta) + 1$

(3) jeśli $\alpha = \beta \# \gamma$, gdzie $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, to $d(\alpha) = d(\beta) + d(\gamma) + 1$.

W klasycznym rachunku zdań można wziąć pod uwagę formułę o dowolnym stopniu złożoności, aby formuła ta wraz z jej negacją trywializowały rzeczony rachunek. W systemie P^1 formuła o stopniu złożoności 1, tj. zmienna zdaniowa, wraz z jej negacją nie przepełniają systemu. System trywializuje formuła o stopniu złożoności większym od 1 wraz z jej negacją. Kryterium jakościowe uzależnione jest więc nie od ilości formuł trywializujących dany system, lecz od ich kształtu.

4.1. PARAKONSYSTENCJA NA POZIOMIE ZMIENNYCH ZDANIOWYCH. SYSTEM P^1 SETTEGO

W 1973 roku ukazuje się artykuł Antonia M.A. Settego, poświęcony systemowi P^1. Zasadniczym celem autora było stworzenie jak najprostszego systemu logicznego, za pomocą którego można by wyrazić naczelną ideę logiki parakonsystentnej: akceptacja dowolnej pary formuł $\alpha, \sim \alpha$, nie będzie pociągać za sobą akceptacji dowolnej formuły β[1]. Okazuje się, że prezentowany system spełnia to kryterium tylko wtedy, gdy α jest zmienną zdaniową. Na poziomie wyrażeń złożonych, system posiada wszystkie własności klasycznego rachunku zdań. Dla przykładu, dowolna formuła β nie wynika ze zbioru $\{p, \sim p\}$, wynika jednakże ze zbiorów $\{\sim \alpha, \sim \sim \alpha\}$ oraz $\{\alpha \rightarrow \beta, \sim (\alpha \rightarrow \beta)\}$.

---

[1] Por. Carnielli, W., Coniglio, M.E. (2016), *Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science, 40, Springer International Publishing, s.144.

W skład alfabetu języka systemu wchodzą dwie, standardowe grupy znaków: zmienne zdaniowe oraz spójniki logiczne. Zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych oznaczamy przez *var*. Jest to zbiór niepusty i przeliczalny. Zmienne zdaniowe są wyrażeniami atomowymi systemu P^1. Zbiór spójników logicznych składa się z dwóch elementów: negacji i implikacji[2]. Zbiór wszystkich formuł systemu oznaczamy przez F_{P1}.

System P^1 Settego charakteryzuje semantycznie matryca trójwartościowa:

$$\mathscr{M}_{P1} = \langle \{1, 2, 0\}, \{1, 2\}, \rightarrow, \sim \rangle,$$

w której $\{1, 2, 0\}$ jest zbiorem wartości logicznych, $\{1, 2\}$ jest zbiorem wartości wyróżnionych, podane spójniki definiują zaś następujące tabelki[3]:

$(\rightarrow)$	1	2	0
1	1	1	0
2	1	1	0
0	1	1	1

	$(\sim)$
1	0
2	1
0	1

Przez P^1–wartościowanie rozumieć będziemy funkcję przypisującą każdemu elementowi ze zbioru F_{P1} dokładnie jedną z trzech wartości logicznych, funkcję określoną zgodnie z podanymi tabelkami.

Definicja 4.1.1. Dla dowolnej $\alpha \in F_{P1}$, α jest P^1–tautologią wtw, gdy dla każdego P^1–wartościowania v, $v(\alpha) \neq 0$.

Definicja 4.1.2. Niech $\Gamma \subseteq F_{P1}$, $\alpha \in F_{P1}$, ze zbioru Γ wynika semantycznie formuła α (symbolicznie: $\Gamma \models_{P1} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego P^1–wartościowania v, jeśli $v(\beta) \neq 0$ dla dowolnej $\beta \in \Gamma$, to $v(\alpha) \neq 0$.

Można mieć wątpliwości, z filozoficznego punktu widzenia, jaki intuicyjny sens przypisać trzeciej wartości logicznej. Jak interpretować w systemie Settego wartość logiczną 2? Różni autorzy snuli odmienne przypuszczenia. Wedle

---

[2] Zob. Sette, A.M. (1973), *On the Propositional Calculus P^1*, „Mathematica Japonicae", 18/3, s. 173.

[3] Sette nie używał cyfr 1, 2, 0 na oznaczenie wartości logicznych. Wykorzystał inne symbole, tj. T_0, T_1 oraz F. Odpowiednikiem T_0 w naszej prezentacji jest 1, T_1 – cyfra 2, natomiast F – cyfra 0. Zob. *ibid.*, s. 176. Sette przejął charakterystykę semantyczną spójników implikacji i negacji z dysertacji doktorskiej da Costy. Zob. D'Ottaviano, I.M.L (1990), *On the Development of Paraconsistent Logic and da Costa's work*, „The Journal of Non-Classical Logic", 7/1–2, s. 43.

jednych, wartość logiczną 2 należy utożsamić z prawdą *domniemaną*[4]. Takie rozumienie wartości 2 przywodzi na myśl język prawniczy: wartość logiczna 1 to tzw. prawda materialna, czyli zgodna ze stanem faktycznym, wartość logiczna 2 to tzw, prawda formalna, czyli prawda oparta na domniemaniach lub zgodzie stron. Inni, zainspirowani logiką dyskusyjną Jaśkowskiego[5], interpretowali wartość logiczną 2 jako rozbieżność stanowisk pomiędzy dwoma frakcjami dyskutantów[6]. Niezależnie jednak od tego, jak wymyślne były to interpretacje, żadnej z nich nie znajdziemy w artykule Settego. Sens wartości logicznych jest bowiem jednoznacznie określony przez pojęcie P^1–wartościowania. I tylko przez to pojęcie.

Język systemu P^1 można wzbogacić o dodatkowe spójniki: koniunkcję, alternatywę oraz równoważność. Spójniki te są definiowane za pośrednictwem implikacji i negacji:

$$\alpha \wedge \beta := (((\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to \sim ((\beta \to \beta) \to \beta)) \to \ \sim (\alpha \to \sim \beta)$$
$$\alpha \vee \beta := (\alpha \to \sim \sim \alpha) \to (\sim \alpha \to \beta)$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)^7.$$

Charakterystyka semantyczna spójników prezentuje się następująco:

($\wedge$)	1	2	0
1	1	1	0
2	1	1	0
0	0	0	0

($\vee$)	1	2	0
1	1	1	1
2	1	1	1
0	1	1	0

($\leftrightarrow$)	1	2	0
1	1	1	0
2	1	1	0
0	0	0	1

W systemie P^1 możliwe jest, podobnie jak na przykład w systemach da Costy[8], zdefiniowanie tzw. silnej negacji:

$$\neg \alpha := \sim (\sim \alpha \to \alpha).$$

---

[4] Zob. Carnielli, W.A., Lima-Marques, M. (1999), *Society Semantics and Multiple-Valued Logics*, [w:] Carnielli, W.A., D'Ottaviano, I.M.L. (red.), *Advances in Contemporary Logic and Computer Science*, Contemporary Mathematics Series, 235, American Mathematical Society, s. 33–52.

[5] Zob. § 2.5.

[6] Zob. Omori, H. (2017), *Sette's Logics, Revisited*, [w:] Baltag, A., Seligman, J., Yamada, T. (red.), *International Workshop on Logic, Rationality and Interaction, LORI 2017*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, s. 463.

[7] Zob. Sette, A.M. (1973), *op. cit.*, s. 178.

[8] Por. § 2.6, *Definicja 2.6.2.*

Silna negacja posiada wszystkie własności negacji klasycznej. Sposób jej rozumienia wyraża tabelka:

	$(\neg)$
1	0
2	0
0	1

Za sprawą definicji negacji klasycznej uproszczeniu ulegają charakterystyki pozostałych spójników:

$$\alpha \wedge \beta := \sim (\alpha \rightarrow \neg \beta)$$
$$\alpha \vee \beta := \neg \alpha \rightarrow \beta.$$[9]

Definicja 4.1.3. Niech $\Gamma \subseteq F_{P1}$. Zbiór Γ jest zbiorem P^1–sprzecznym wtw, gdy nie istnieje takie P^1–wartościowania v, że $v(\alpha) \neq 0$, dla dowolnej $\alpha \in \Gamma$. Zbiór Γ jest zbiorem P^1–niesprzecznym wtw, gdy Γ nie jest zbiorem P^1–sprzecznym.

W systemie Settego, jak pamiętamy, dowolna formuła β nie wynika ze zbioru $\{p, \sim p\}$. Zbiór $\{p, \sim p\}$ jest zbiorem P^1–niesprzecznym (dla $v(p) = 2$). Zmienna zdaniowa oraz jej negacja nie trywializują systemu. Trywializują go inne zbiory formuł, np.:

$$\{\alpha, \sim \alpha\} \models_{P1} \beta, \text{ o ile } \alpha \notin var$$
$$\{\alpha, \neg \alpha\} \models_{P1} \beta, \text{ dla dowolnych } \alpha, \beta \in F_{P1}$$
$$\{\alpha \rightarrow \sim\sim \alpha, \alpha, \sim \alpha\} \models_{P1} \beta, \text{ dla dowolnych } \alpha, \beta \in F_{P1}$$
$$\{\sim (\alpha \wedge \sim \alpha), \alpha, \sim \alpha\} \models_{P1} \beta, \text{ dla dowolnych } \alpha, \beta \in F_{P1}.$$

Każdy z podanych wyżej zbiorów jest przykładem zbioru P^1–sprzecznego. Zwróćmy szczególną uwagę na ostatnią z przytoczonych własności relacji $\models_{P1}$. Trójka formuł $\sim (\alpha \wedge \sim \alpha), \alpha, \sim \alpha$, trywializuje system P^1. Widać tu wyraźną inspirację C_n–systemami da Costy $(1 \leq n < \omega)$. W C_n–systemach $(1 \leq n < \omega)$ wyprowadzalna jest bowiem pewna wersja reguły *ex falso quodlibet*, mianowicie:

$$(\mathrm{EFQ})^{(n)} \quad \alpha^{(n)}, \alpha, \sim \alpha / \beta.$$

---

[9] Zob. Loparić, A., da Costa, N.C.A. (1984), *Paraconsistency, Paracompleteness, and Valuations*, „Logique et Analyse", 106, s. 119–131; Loparić, A., da Costa, N.C.A. (1986), *Paraconsistency, Paracompleteness, and Induction*, „Logique et Analyse", 113, s. 73–80; Marcos, J. (2005), *On a Problem of da Costa*, [w:] Sica, G. (red.), *Essays on the Foundations of Mathematics and Logic*, Polimetrica International Scientific Publisher, Monza, s. 59.

Jeśli $n = 1$, wówczas (EFQ)[1] $\alpha^{\circ}, \alpha, \sim \alpha / \beta$, czyli $\{\sim (\alpha \wedge \sim \alpha), \alpha, \sim \alpha\} \models_{C1} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{C1}$[10]. Formuła $\sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$ dodana do zbioru $\{\alpha, \sim \alpha\}$ natychmiast go *usprzecznia* i trywializuje cały system. Tak pojętą ideę wyraża w systemach da Costy pojęcie *skończonej trywializacji*[11].

Semantyka trójwartościowa nie jest jedyną semantyką, którą opracowano dla systemu P^1 Settego. Pod koniec lat osiemdziesiątych XX wieku Araujo, Alves i Guerzoni zaprezentowali semantykę w stylu Kripkego.

Definicja 4.1.4. Modelem $\boldsymbol{M}_{P1}$ jest trójka uporządkowana $<W, R, v>$, gdzie W jest niepustym zbiorem puntów, R jest relacją równoważności, określoną na zbiorze W, zaś funkcja wartościowania v przypisuje każdemu elementowi ze zbioru $var \times W$ dokładnie jedną z dwóch wartości logicznych, tj. v: $var \times W \longrightarrow \{1, 0\}$, w sposób następujący:

$$(var)\ v(p, x) = 1 \text{ wtw, gdy } x \in v(p).$$

Każde wartościowanie v można indukcyjnie rozszerzyć do funkcji v^*, v^*: $F_{P1} \times W \longrightarrow \{1, 0\}$, jak następuje:

$$(var)^*\ v^*(p, x) = v(p, x), \text{ dla } p \in var$$

$$(v1a)\ v^*(\sim p, x) = 1 \text{ wtw, gdy dla pewnego } y \in W, xRy \text{ i } v^*(p, y) = 0, \text{ o ile } p \in var$$

$$(v1b)\ v^*(\sim \alpha, x) = 1 \text{ wtw, gdy } v^*(\alpha, x) = 0, \text{ o ile } \alpha \notin var$$

$$(v2)\ v^*(\alpha \rightarrow \beta, x) = \text{wtw, gdy } v^*(\alpha, x) = 0 \text{ lub } v^*(\beta, y) = 1.$$

Definicja 4.1.4. Niech $\alpha \in F_{P1}$: α jest P^1–tautologią wtw, gdy w dowolnym modelu $\boldsymbol{M}_{P1} = <W, R, v>$, dla każdego $x \in W$, $v(\alpha, x) = 1$[12].

Na osobny komentarz zasługuje warunek $(v1a)$, w którym interpretowana jest negacja zmiennej zdaniowej. Warunek ten w połączeniu z własnością relacji R, przywodzi na myśli zwrot *możliwe, że nie* (lub *niekonieczność*) znany z logiki modalnej $S5$. Precyzyjnie wyraża to kolejna definicja:

Definicja 4.1.5. Oznaczmy przez F_{S5} zbiór wszystkich formuł modalnego systemu $S5$. Funkcję tr przekształcającą język systemu P^1 w język systemu $S5$, tr: $F_{P1} \longrightarrow F_{S5}$, definiujemy następująco:

---

[10] Por. § 2.6.

[11] Zob. da Costa, N., (1974), *op. cit.*, s. 500. Idea ta stała się źródłem inspiracji dla twórców systemów *LFI*. Por. § 5.3.

[12] Por. Araujo, A.L., Alves, E.H., Guerzoni, J.A.D. (1987), *Some Relations Between Modal and Paraconsistent Logic*, „The Journal of Non-Classical Logic", 4/2, s. 36–38.

(1) $tr(p) = p$, gdzie p jest dowolną zmienną zdaniową

$$(2)\ tr(\sim \alpha) = \begin{cases} \ulcorner \sim tr(\alpha) \urcorner, \text{ o ile } \alpha \notin var \\ \ulcorner \Diamond \sim tr(\alpha) \urcorner, \text{ o ile } \alpha \in var \end{cases}$$

(3) $tr(\alpha \rightarrow \beta) = \ulcorner tr(\alpha) \rightarrow tr(\beta) \urcorner$.

Twierdzenie 4.1.1. (Araujo, Alves, Guerzoni, 1987) Dla dowolnej $\alpha \in F_{P1}$: α jest P^1–tautologią wtw, gdy α jest tautologią modalnego systemu *S5*.

Sprawdzając, czy dana formuła α jest P^1–tautologią nie musimy korzystać z matrycy $\boldsymbol{M}_{P1}$. Możemy posłużyć się, podobnie jak to miało miejsce w przypadku logiki Jaśkowskiego, definicją funkcji przekładu. Wystarczy umieścić spójnik *S5*–możliwości przed każdą negacją zmiennej zdaniowej[13].

System P^1, oprócz interpretacji semantycznej, został również scharakteryzowany syntaktycznie. Zbiór aksjomatów tworzą formuły:

(H1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

(H2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

(F4) $(\sim \alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow ((\sim \alpha \rightarrow \sim \sim \beta) \rightarrow \alpha)$

(F5) $\sim (\alpha \rightarrow \sim \sim \alpha) \rightarrow \alpha$

(F6) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \ \sim \sim (\alpha \rightarrow \beta)$[14].

Jedyną nieaksjomatyczną, pierwotną regułą wnioskowania jest (RO) $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \,/\, \beta$. Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą (RO) definiują relację konsekwencji $\vdash_{P1}$.

Ponieważ w systemie Settego reguła odrywania jest jedyną pierwotną regułą inferencji oraz wśród aksjomatów P^1 obecne są aksjomaty implikacyjnej logiki Hilberta, prawdziwe jest twierdzenie o dedukcji w tradycyjnym sformułowaniu:

Twierdzenie 4.1.2. (*o dedukcji wprost*) $\Gamma \vdash_{P1} \alpha \rightarrow \beta$ wtw, gdy $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{P1} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{P1}$, $\Gamma \subseteq F_{P1}$.

---

[13] Araujo, Alves i Guerzoni wykazali, że system *S5* nie jest jedynym systemem logiki modalnej, który może służyć jako *baza translacyjna* dla systemu P^1. Określając własności relacji *R* tudzież definiując funkcję przekładu *tr* równie dobrze można odwołać się do innego systemu logiki modalnej, np. systemu *S4*. Zob. Araujo, A.L., Alves, E.H., Guerzoni, J.A.D. (1987), *op. cit.*, s. 41–43.

[14] Schemat (F6) jest wyprowadzalny z pozostałych aksjomatów. Zob. Marcos, J. (2005), *op. cit.*, s. 59, Ciuciura, J. (2015), *Paraconsistency and Sette's Calculus P1*, „Logic and Logical Philosophy", 24/2, s. 272.

Związek pomiędzy zbiorem P^1–tautologii a zbiorem tez systemu wyraża następne twierdzenie:

Twierdzenie 4.1.3. (Sette 1973) Dla dowolnej $\alpha \in F_{P1}$: α jest P^1–tautologią wtw, gdy $\vdash_{P1} \alpha$.

System P^1 jest maksymalny względem klasycznego rachunku zdań. P^1 jest bowiem podsystemem rachunku klasycznego oraz jakiekolwiek rozszerzenie zbioru tez systemu Settego o formułę, która jest tezą klasycznego rachunku zdań, ale nie jest wyprowadzalna w P^1, spowoduje, że P^1 będzie systemem równoważnym klasycznemu rachunkowi zdań.

Przyglądając się formułom (F4)–(F6), tj. aksjomatom charakteryzującym syntaktycznie spójnik negacji, niełatwo doszukać się podobieństw systemu P^1 do znanych formalizacji klasycznego rachunku zdań. Mając to na względzie zaprezentujemy nieco odmienne od oryginalnego, syntaktyczne ujęcie systemu P^{1}.

Niech S^1 będzie systemem, którego zbiór aksjomatów konstytuują formuły:

(H1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

(H2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

(*pP*) $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$

(*pC*) $(\sim \alpha \to \alpha) \to \alpha$

(F1) $\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta)$

(F2) $(\alpha \to \beta) \to (\sim (\alpha \to \beta) \to \gamma))$.

Jedyną regułą pierwotną systemu jest (RO) $\alpha, \alpha \to \beta \ / \ \beta$.

Twierdzenie 4.1.4. (Ciuciura 2015b) System S^1 jest równoważny systemowi P^1 Settego.

Podana aksjomatyzacja w bardziej intuicyjny sposób wyraża istotę logiki parakonsystnetnej. Aksjomaty (H1) i (H2) wraz z regułą odrywania konstytuują tzw. implikacyjną logikę Hilberta. Wzbogacenie aksjomatyzacji implikacyjnej logiki Hilberta o formułę (*pP*), powoduje *uklasycznienie* implikacji. Aksjomaty (H1), (H2), (*pP*) i (RO) definiują bowiem implikacyjny fragment pozytywnej części klasycznego rachunku zdań. Aksjomat (*pC*) przywodzi na myśl relację przeciwieństwa[15]. Aksjomaty (F1), (F2) są osłabionymi wersjami formuły (*efq*).

[15] O relacji przeciwieństwa mówimy wówczas, gdy w danym systemie logicznym, istnieje co najmniej jedna taka formuła, powiedzmy α, że zarówno α jak i jej negacja, $\sim\alpha$, są jednocześnie fałszywe. W literaturze anglojęzycznej używany jest termin *paracomplete logics* na określenie logik *tolerujących przeciwieństwo*. Z syntaktycznego punktu widzenia, pojęcie przeciwieństwa kojarzone jest zwykle z prawem wyłączonego środka lub formułą (*pC*).

Aksjomatyzacja w większym stopniu przypomina więc znane z literatury formalizacje klasycznego rachunku zdań, np. implikacyjno-negacyjna aksjomatyzację podaną w 1929 roku przez Łukasiewicza:

(ps) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$

(pC) $(\sim \alpha \to \alpha) \to \alpha$

(efq) $\alpha \to (\sim \alpha \to \beta)$

(RO) $\alpha, \alpha \to \beta \,/\, \beta$[16].

W dotychczasowych rozważaniach skupiliśmy się na systemie P^1 określonym na języku implikacyjno-negacyjnym. System Settego można jednak zdefiniować na bogatszym języku:

(AC_ω) α, o ile α jest aksjomatem systemu C_ω da Costy

(A11) $\sim (\beta \wedge \sim \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim \beta) \to \sim \alpha))$

(A12a) $\sim (\sim \alpha \wedge \sim \sim \alpha)$

(A12b) $\sim ((\alpha \to \beta) \wedge \sim (\alpha \to \beta))$

(A12c) $\sim ((\alpha \vee \beta) \wedge \sim (\alpha \vee \beta))$

(A12d) $\sim ((\alpha \wedge \beta) \wedge \sim (\alpha \wedge \beta))$

(RO) $\alpha, \alpha \to \beta \,/\, \beta$.

Formalizacja Fernándeza-Coniglio[17] w oczywisty sposób nawiązuje do C_n–systemów da Costy, konkretnie do systemu C_1. Wystarczy posłużyć się aksjomatem (H1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ i regułą (RO), aby uzyskać formuły:

Logiki tolerujące przeciwieństwo są w pewnym sensie dualne względem logik parakonsystentnych. W logikach parakonsystentnych *tolerowana* jest sprzeczność, tj. dopuszczalna jest sytuacja (przynajmniej potencjalnie), aby formuły: α, $\sim\alpha$, były jednocześnie prawdziwe (relacja podprzeciwieństwa). W logikach *parakompletnych* dopuszcza się, aby formuły: α, $\sim\alpha$, były jednocześnie fałszywe (relacja przeciwieństwa). Na temat logik parakompletnych, zob. np. Sette, A.M., Carnielli, W.A. (1995), *Maximal Intuitionistic Logics*, „Studia Logica", 55, s. 181–203; Ciuciura, J. (2015), *A Weakly-Intuitionistic Logic I1*, „Logical Investigations", 21/2, s. 53–60; Carnielli, W.A., Lima-Marques, M. (1999), *Society Semantics and Multiple-Valued Logics*, [w:] Carnielli, W.A., D'Ottaviano, I.M.L. (red.), *Advances in Contemporary Logic and Computer Science*, Contemporary Mathematics Series, 235, American Mathematical Society, s. 33–52.

[16] Zob. Łukasiewicz, J. (1929), *Elementy logiki matematycznej*, Skrypt autoryzowany, opracowany przez M. Presburgera, t. 18 z Wydawnictwa Koła Matematyczno-Fizycznego Słuchaczów Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.

[17] Zob. Fernández, V. L., Coniglio, M.E. (2003), *Combining Valuations with Society Semantics*, „Journal of Applied Non-Classical Logics", 13/1, s. 21–46. Spójnik równoważności definiowany jest standardowo.

$$\sim(\alpha \wedge \sim\alpha) \to \sim(\sim\alpha \wedge \sim\sim\alpha)$$
$$(\sim(\alpha \wedge \sim\alpha) \wedge \sim(\beta \wedge \sim\beta)) \to \sim((\alpha \to \beta) \wedge \sim(\alpha \to \beta))$$
$$(\sim(\alpha \wedge \sim\alpha) \wedge \sim(\beta \wedge \sim\beta)) \to \sim((\alpha \vee \beta) \wedge \sim(\alpha \vee \beta))$$
$$(\sim(\alpha \wedge \sim\alpha) \wedge \sim(\beta \wedge \sim\beta)) \to \sim((\alpha \wedge \beta) \wedge \sim(\alpha \wedge \beta)).$$

Jeśli przyjmiemy, iż $\alpha^{\circ} := \sim(\alpha \wedge \sim\alpha)$, wówczas:

$$\alpha^{\circ} \to (\sim\alpha)^{\circ}$$
$$(\alpha^{\circ} \wedge \beta^{\circ}) \to (\alpha \to \beta)^{\circ}$$
$$(\alpha^{\circ} \wedge \beta^{\circ}) \to (\alpha \vee \beta)^{\circ}$$
$$(\alpha^{\circ} \wedge \beta^{\circ}) \to (\alpha \wedge \beta)^{\circ}$$

Formuły odpowiadają aksjomatom (A13), (A12a)–(A12c) systemu C_1 da Costy. Aksjomat (A11) systemu Settego, identycznie jak w C_1, można zastąpić formułą równoważną (A11)* $\sim(\alpha \wedge \sim\alpha) \to (\alpha \to (\sim\alpha \to \beta))$[18]. W rezultacie, pośród aksjomatów obecne będzie wyrażenie $\alpha^{\circ} \to (\alpha \to (\sim\alpha \to \beta))$.

4.2. HIERARCHIA P^n–SYSTEMÓW ($n \geq 1$)

System P^1 ma szczególną własność: jest *parakonsystentny*, ale tyko na poziomie zmiennych zdaniowych. Na poziomie formuł złożonych, system przejawia wszystkie cechy klasycznego rachunku zdań. Dowolna formuła β nie wynika ze zbioru $\{p, \sim p\}$, prawo niesprzeczności (*pn*) $\sim(p \wedge \sim p)$ nie jest tezą systemu Settego, podobnie zresztą jak prawo przepełnienia (*efq*) $p \to (\sim p \to q)$. Dowolna formuła β wynika jednakże ze zbioru $\{\sim p, \sim\sim p\}$, osłabiona wersja prawa niesprzeczności: $\sim(\sim p \wedge \sim\sim p)$, jest tezą systemu Settego, tak samo zresztą jak osłabiony wariant prawa przepełnienia: $\sim p \to (\sim\sim p \to q)$. Nasuwa się więc pytanie: Jaki kształt nadać formule α, aby dowolna β nie wynikała z pary formuł: $\alpha, \sim\alpha$? W systemie P^1 była to zmienna zdaniowa, tj. $\alpha = p$ i $p \in var$. W każdym kolejnym systemie hierarchii, będzie to formuła o coraz większym stopniu złożoności: negacja formuły atomowej, negacja negacji formuły atomowej, negacja negacji negacji formuły atomowej, *itd.* Problem ten ilustruje następujące zestawienie (dla dowolnego $p \in var$ i $\beta \in F_{Pn(Pk)}$):

(1) $p, \sim p \models_{Pk} \beta$	($k = 0$, P^0 = klasyczny rachunek zdań)
(1)* $p, \sim p \not\models_{Pn} \beta$	($n > 0$)
(2) $\sim p, \sim\sim p \models_{Pk} \beta$	($k \leq 1$)

[18] Por. § 2.6.

$(2)^* \sim p, \sim\sim p \nVDash_{Pn} \beta \qquad (n > 1)$

$(3) \; \sim\sim p, \sim\sim\sim p \vDash_{Pk} \beta \qquad (k \leq 2)$

$(3)^* \sim\sim p, \sim\sim\sim p \nVDash_{Pn} \beta \qquad (n > 2)$

…

$(m) \sim^m p, \ldots, \sim^{m+1} p \vDash_{Pk} \beta \qquad (k \leq m)$

$(m)^* \sim^m p, \ldots, \sim^{m+1} p \nVDash_{Pn} \beta \qquad (n > m)$

…

Para formuł $p, \sim p$ trywializuje klasyczny rachunek zdań. Nie trywializuje tymczasem żadnego z systemów postulowanej hierarchii. Dowolna formuła β wynika ze zbioru $\{\sim p, \sim\sim p\}$ w klasycznym rachunku zdań i systemie P^1, ale nie wynika w systemach $P^2, P^3, P^4, \ldots$ Para formuł $\sim\sim p, \sim\sim\sim p$ trywializuje zarówno klasyczny rachunek zdań, jak i systemy P^1 i P^2. Nie trywializuje jednak systemów P^3, P^4, P^5, *etc.*

Przejdźmy do precyzyjniejszego wyrażenia intuicji. Rozważmy następującą matrycę:

$$\mathscr{M}_{Pn} = \langle X_{Pn}, D_{Pn}, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim \rangle,$$

gdzie $X_{Pn} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$ jest zbiorem wartości logicznych, $D_{Pn} = X_{Pn} / \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ jest zbiorem wartości wyróżnionych, spójniki implikacji i negacji definiują tabelki[19]:

$(\rightarrow)$	1	2	…	n-1	n	0
1	1	1	…	1	1	0
2	1	1	…	1	1	0
…	…	…	…	…	…	…
n-1	1	1	…	1	1	0
n	1	1	…	1	1	0
0	1	1	…	1	1	1

	$(\sim)$
1	0
2	1
…	…
n-1	n-2
n	n-1
0	1

Przez P^n–wartościowanie rozumiemy funkcję v przypisującą, zgodnie z podanymi tabelkami, każdemu elementowi ze zbioru F_{Pn} dokładnie jedną z n–wartości logicznych.

[19] Spójniki koniunkcji, alternatywy i równoważności definiujemy analogicznie jak dla systemu Settego, tzn. $\alpha := \sim (\sim \alpha \rightarrow \alpha)$, $\alpha \wedge \beta := \sim (\sim \alpha \rightarrow \neg \beta)$, $\alpha \vee \beta := \neg \alpha \rightarrow \beta$.

Definicja 4.2.1 Niech $\Gamma \subseteq F_{Pn}$, $\alpha \in F_{Pn}$, ze zbioru Γ wynika semantycznie formuła α (symbolicznie: $\Gamma \models_{Pn} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego P^n–wartościowania v, jeśli $v(\beta) \neq 0$ dla dowolnej $\beta \in \Gamma$, to $v(\alpha) \neq 0$. Jeżeli $\Gamma = \varnothing$, to $\varnothing \models_{Pn} \alpha$. Formułę α nazwiemy wtedy P^n–tautologią.

Własności relacji $\models_{Pn}$ zilustrujmy na przykładzie dwóch konkretnych systemów logicznych: P^3 i P^4. Niech $n = 3$, wówczas:

$\{p, \sim p\} \not\models_{P3} \beta$ *falsyfikacja* $v(p) = 2, v(\beta) = 0$
$\{\sim p, \sim\sim p\} \not\models_{P3} \beta$ *falsyfikacja* $v(p) = 3, v(\beta) = 0$
$\{\sim\sim p, \sim\sim\sim p\} \not\models_{P3} \beta$ *falsyfikacja* $v(p) = 4, \mathrm{v}(\beta) = 0$
$\{\sim\sim\sim p, \sim\sim\sim\sim p\} \models_{P3} \beta,$

a ponadto:

$\varnothing \not\models_{P3} \sim (p \wedge \sim p)$ *falsyfikacja* $v(p) = 2$
$\varnothing \not\models_{P3} \sim (\sim p \wedge \sim\sim p)$ *falsyfikacja* $v(p) = 3$
$\varnothing \not\models_{P3} \sim (\sim\sim p \wedge \sim\sim\sim p)$ *falsyfikacja* $v(p) = 4$
$\varnothing \models_{P3} \sim (\sim\sim\sim p \wedge \sim\sim\sim\sim p),$

oraz:

$\{\alpha \to \beta, \sim (\alpha \to \beta)\} \models_{P3} \gamma$
$\varnothing \models_{P3} \sim ((\alpha \to \beta) \wedge \sim (\alpha \to \beta))$
$\varnothing \models_{P3} \alpha \vee \sim \alpha$
$\varnothing \models_{P3} (\sim \alpha \to \alpha) \to \alpha.$

Relacja $\models_{P3}$ posiada wszystkie pożądane własności. Jeśli formuła α ma postać zmiennej zdaniowej, negacji zmiennej zdaniowej lub negacji negacji zmiennej zdaniowej, para formuł α, $\sim \alpha$ nie trywializuje systemu P^3. System trywializuje para: $\sim\sim\sim p, \sim\sim\sim\sim p$. Prawo niesprzeczności nie jest P^3–tautologią. Relacja $\models_{P3}$ spełnia więc kryterium da Costy. Podobnie, jak w systemie Settego, P^3–tautologiami są formuły (pC), (nn) oraz (F2).

Niech teraz $n = 4$. Relację $\models_{P4}$ cechują następujące własności:

$\{p, \sim p\} \not\models_{P4} \beta$ *falsyfikacja* $v(p) = 2, v(\beta) = 0$
$\{\sim p, \sim\sim p\} \not\models_{P4} \beta$ *falsyfikacja* $v(p) = 3, v(\beta) = 0$
$\{\sim\sim p, \sim\sim\sim p\} \not\models_{P4} \beta$ *falsyfikacja* $v(p) = 4, v(\beta) = 0$
$\{\sim\sim\sim p, \sim\sim\sim\sim p\} \not\models_{P4} \beta$ *falsyfikacja* $v(p) = 5, v(\beta) = 0$
$\{\sim\sim\sim\sim p, \sim\sim\sim\sim\sim p\} \models_{\mathrm{P4}} \beta$

$\{\alpha \to \beta, \sim(\alpha \to \beta)\} \models_{P4} \gamma$

$\varnothing \not\models_{P4} \sim(p \wedge \sim p)$ *falsyfikacja* $v(p) = 2$

$\varnothing \not\models_{P4} \sim(\sim p \wedge \sim\sim p)$ *falsyfikacja* $v(p) = 3$

$\varnothing \not\models_{P4} \sim(\sim\sim p \wedge \sim\sim\sim p)$ *falsyfikacja* $v(p) = 4$

$\varnothing \not\models_{P4} \sim(\sim\sim\sim p \wedge \sim\sim\sim\sim p)$ *falsyfikacja* $v(p) = 5$

$\varnothing \models_{P4} \sim(\sim\sim\sim\sim p \wedge \sim\sim\sim\sim\sim p)$

$\varnothing \models_{P4} \sim((\alpha \to \beta) \wedge \sim(\alpha \to \beta))$

$\varnothing \models_{P4} \alpha \vee \sim \alpha$

$\varnothing \models_{P4} (\sim \alpha \to \alpha) \to \alpha.$

Para formuł $\sim\sim\sim\sim p$, $\sim\sim\sim\sim\sim p$, trywializuje system P^4. Zbiór $\{\sim\sim\sim\sim p, \sim\sim\sim\sim\sim p\}$ jest bowiem zbiorem P^4–sprzecznym.

Przedstawmy teraz charakterystykę syntaktyczną P^n–systemów $(n \geq 1)$. Do zbioru aksjomatów P^n–systemów należą formuły:

(AC_ω) α, o ile α jest aksjomatem systemu C_ω da Costy

(A11) $\beta^\circ \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim \beta) \to \sim \alpha))$

$(A12a)^k$ $(\sim^k \alpha)^\circ$, dla $k \geq 1$

(A12b) $(\alpha \to \beta)^\circ$

(A12c) $(\alpha \vee \beta)^\circ$

(A12d) $(\alpha \wedge \beta)^\circ$, przy czym $\gamma^\circ := \sim(\gamma \wedge \sim \gamma)$.

Jedyną pierwotną reguła wnioskowania jest reguła odrywania (RO) $\alpha, \alpha \to \beta / \beta$[20]. Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą (RO) definiują relację konsekwencji $\vdash_{Pn}$.

Aksjomatyzacja P^n–systemów jest pewnym uogólnieniem syntaktycznej charakterystyki systemu Settego. W miejscu formuły (A12a) pojawia się bardziej ogólny schemat $(A12a)^k$. Jego uszczegółowienie odpowiada konkretnym systemom hierarchii.

Twierdzenie 4.2.1. (o dedukcji) $\Gamma \vdash_{Pn} \alpha \to \beta$ wtw, gdy $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{Pn} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{Pn}$, $\Gamma \subseteq F_{Pn}$, $(n \geq 1)$.

Twierdzenie 4.2.2. (Fernández, Coniglio 2003) Dla dowolnej $\alpha \in F_{Pn}$, α jest P^n–tautologią wtw, gdy $\vdash_{Pn} \alpha$.

[20] Zob. Fernández, V. L., Coniglio, M.E. (2003), *op. cit*. Pierwsze wzmianki na temat aksjomatyzacji P^n–systemów $(n \geq 1)$, pochodzą z 1999 roku. Zob. Marcos, J. (1999), *Semânticas de Traduções Possíveis*, IFCH-UNICAMP, Campinas, Brazil.

Oznaczmy przez $T(\vdash_{P1})$ zbiór wszystkich tez systemu P^1, przez $T(\vdash_{Pn})$ – zbiór wszystkich tez systemu P^n, dla $n \geq 2$.

Twierdzenie 4.2.3. $T(\vdash_{P1}) \supset T(\vdash_{Pn})$, dla $n \geq 2$.

System P^1 jest najsilniejszym systemem hierarchii. Pozostało określić jeszcze jedną zależność:

Twierdzenie 4.2.4. $T(\vdash_{P0}) \supset T(\vdash_{P1}) \supset T(\vdash_{P2}) \ldots \supset T(\vdash_{Pn}) \ldots$

Opisana zależność charakteryzuje hierarchię P^n–systemów $(n \geq 1)$[21].

4.3. HIERARCHIA S^n–SYSTEMÓW $(n \geq 1)$

System S^1, przypomnijmy, jest równoważny systemowi P^1 Settego. Zbiór aksjomatów S^1 konstytuują formuły:

(H1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
(H2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
(*pP*) $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
(*pC*) $(\sim \alpha \to \alpha) \to \alpha$
(F1) $\sim \alpha \to (\sim \sim \alpha \to \beta)$
(F2) $(\alpha \to \beta) \to (\sim (\alpha \to \beta) \to \gamma))$.

Jedyną pierwotną, nieaksjomatyczną regułą systemu jest (RO). Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą odrywania definiują relację konsekwencji $\vdash_{S1}$.

W systemie S^1 wyprowadzalne są wszystkie aksjomaty formalizacji Fernándeza i Coniglio. Nie jest to niczym zaskakującym, skoro system Fernándeza i Coniglio jest równoważny systemowi Settego[22].

Zastępując aksjomat (F1) bardziej ogólnym schematem:

$(F1)^k \sim^k \alpha \to (\sim^{k+1} \alpha \to \beta)$, dla $k \geq 1$,

uzyskamy hierarchię S^n–systemów $(k = n)$, określoną na języku implikacyjno-negacyjnym. Aksjomatyzacje poszczególnych S^n–systemów różnią się między sobą wyłącznie wartością parametru k obecnego w $(F1)^k$. Przykładowo, w S^2 formuła przybierze postać następującą:

$(F1)^2 \sim \sim \alpha \to (\sim \sim \sim \alpha \to \beta)$.

---

[21] P^0 = klasyczny rachunek zdań.

[22] Zob. *Twierdzenie 4.1.4*.

Para formuł $\sim\sim\alpha$, $\sim\sim\sim\alpha$ trywializuje system S^2. W systemie S^2 nie jest wyprowadzalna formuła (F1) $\sim\alpha \to (\sim\sim\alpha \to \beta)$. Aby się o tym przekonać, wystarczy posłużyć się matrycą $\mathcal{M}_{P2}$. Pomiędzy kolejnymi systemami zachodzi podobna zależność jak w przypadku formalizacji Fernándeza i Coniglio. Wyraża ją precyzyjnie twierdzenie:

Twierdzenie 4.3.1. $T(\vdash_{S1}) \supset T(\vdash_{S2}) \ldots \supset T(\vdash_{Sn}) \ldots (n \geq 1)$.

W każdym S^n–systemie $(n \geq 1)$ prawdziwe jest twierdzenie o dedukcji wprost. Prawdziwe jest także twierdzenie o dedukcji nie wprost, ale w wersji ograniczonej:

Twierdzenie 4.3.2. (*o dedukcji nie wprost*) Jeśli $\Gamma \cup \{\alpha \to \beta\} \vdash_{Sn} \{(\gamma \to \delta), \sim(\gamma \to \delta)\}$ to $\Gamma \vdash_{Sn} \sim(\alpha \to \beta)$, dla dowolnych $\alpha \to \beta, \gamma \to \delta \in F_{Sn}$, $\Gamma \subseteq F_{Sn}$.

Dowód. Pokażmy na początek, że w każdym S^n–systemie $(n \geq 1)$ wyprowadzalne są formuły: $(nn)^{\to}$ $\sim\sim(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$, $(pC)^{\to}$ $((\alpha \to \beta) \to \sim(\alpha \to \beta)) \to \sim(\alpha \to \beta)$ oraz $(dd)^{\to}$ $((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \delta)) \to (((\alpha \to \beta) \to \sim(\gamma \to \delta)) \to \sim(\alpha \to \beta))$.

Dowód dla $(nn)^{\to}$ $\sim\sim(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$:

(1) $\sim\sim(\alpha \to \beta)$	*zał. na mocy tw. o ded.*
(2) $\sim(\alpha \to \beta) \to (\sim\sim(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta))$	(F2)
(3) $\sim\sim(\alpha \to \beta) \to (\sim(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta))$	(*pk*), (2), (RO)
(4) $\sim(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$	(1), (3), (RO)
(5) $(\sim(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$	(*pC*)
(6) $\alpha \to \beta$	(5), (4), (RO)
$\sim\sim(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$	*tw. o ded.*, (1), (6).

Dowód dla $(pC)^{\to}$ $((\alpha \to \beta) \to \sim(\alpha \to \beta)) \to \sim(\alpha \to \beta)$:

(1) $(\alpha \to \beta) \to \sim(\alpha \to \beta)$	*zał. na mocy tw. o ded.*
(2) $\sim\sim(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$	$(nn)^{\to}$
(3) $\sim\sim(\alpha \to \beta) \to \sim(\alpha \to \beta)$	(*ps*), (2), (1), (RO)
(4) $(\sim\sim(\alpha \to \beta) \to \sim(\alpha \to \beta)) \to \sim(\alpha \to \beta)$	(*pC*)
(5) $\sim(\alpha \to \beta)$	(3), (4), (RO)
$((\alpha \to \beta) \to \sim(\alpha \to \beta)) \to \sim(\alpha \to \beta)$	*tw. o ded.*, (1), (5).

Dowód dla $(dd)^{\to}$ $((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \delta)) \to (((\alpha \to \beta) \to \sim(\gamma \to \delta)) \to \sim(\alpha \to \beta))$:

(1) $(\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \delta)$	*zał. na mocy tw. o ded.*
(2) $(\alpha \to \beta) \to \sim(\gamma \to \delta)$	*zał. na mocy tw. o ded.*
(3) $(\gamma \to \delta) \to (\sim(\gamma \to \delta) \to \sim(\alpha \to \beta))$	(F2)

(4) $(\alpha \to \beta) \to (\sim(\gamma \to \delta) \to \sim(\alpha \to \beta))$ (*ps*) (1), (3), (RO)
(5) $\sim(\gamma \to \delta) \to ((\alpha \to \beta) \to \sim(\alpha \to \beta))$ (*pk*) (4), (RO)
(6) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \sim(\alpha \to \beta))$ (*ps*), (2), (5), (RO)
(7) $(\alpha \to \beta) \to \sim(\alpha \to \beta)$ (*psk*), (6), (RO)
(8) $((\alpha \to \beta) \to \sim(\alpha \to \beta)) \to \sim(\alpha \to \beta)$ $(pC)^{\to}$
(9) $\sim(\alpha \to \beta)$ (8), (7), (RO)

$((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \delta)) \to (((\alpha \to \beta) \to \sim(\gamma \to \delta)) \to \sim(\alpha \to \beta))$
tw. o ded., (1), (9).

Załóżmy, że dla dowolnych $\alpha \to \beta, \gamma \to \delta \in F_{Sn}, \Gamma \subseteq F_{Sn}$: $\Gamma \cup \{\alpha \to \beta\} \vdash_{Sn} \{(\gamma \to \delta), \sim(\gamma \to \delta)\}$, czyli $\Gamma \cup \{\alpha \to \beta\} \vdash_{Sn} (\gamma \to \delta)$ oraz $\Gamma \cup \{\alpha \to \beta\} \vdash_{Sn} \sim(\gamma \to \delta)$. Na mocy twierdzenia o dedukcji wprost, otrzymamy $\Gamma \vdash_{Sn} (\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \delta)$, $\Gamma \vdash_{Sn} (\alpha \to \beta) \to \sim(\gamma \to \delta)$, a tym samym $\Gamma \vdash_{Sn} \{(\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \delta), (\alpha \to \beta) \to \sim(\gamma \to \delta)\}$. Skoro $\varnothing \vdash_{Sn} ((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \delta)) \to (((\alpha \to \beta) \to \sim(\gamma \to \delta)) \to \sim(\alpha \to \beta))$, to z uwagi na twierdzenie o dedukcji wprost: $\{(\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \delta), (\alpha \to \beta) \to \sim(\gamma \to \delta)\} \vdash_{Sn} \sim(\alpha \to \beta)$. Relacja $\vdash_{Sn}$ jest przechodnia, zatem $\Gamma \vdash_{Sn} \sim(\alpha \to \beta)$.

Ograniczone twierdzenie o dedukcji nie wprost można sformułować w mocniejszy sposób, mianowicie:

Twierdzenie 4.3.3. (*o dedukcji nie wprost*) Jeśli $\Gamma \cup \{\sim(\alpha \to \beta)\} \vdash_{Sn} \{(\gamma \to \delta), \sim(\gamma \to \delta)\}$ to $\Gamma \vdash_{Sn} \alpha \to \beta$, dla dowolnych $\alpha \to \beta, \gamma \to \delta \in F_{Sn}, \Gamma \subseteq F_{Sn}$.

Dowód. Przyjmijmy, że $\Gamma \cup \{\sim(\alpha \to \beta)\} \vdash_{Sn} \{(\gamma \to \delta), \sim(\gamma \to \delta)\}$. Na mocy twierdzenia 4.3.2 natychmiast otrzymujemy, iż $\Gamma \vdash_{Sn} \sim\sim(\alpha \to \beta)$. Skoro jednak $\varnothing \vdash_{Sn} \sim\sim(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$, zatem z uwagi na twierdzenie o dedukcji wprost $\{\sim\sim(\alpha \to \beta)\} \vdash_{Sn} (\alpha \to \beta)$. Relacja $\vdash_{Sn}$ jest przechodnia, zatem $\Gamma \vdash_{Sn} \alpha \to \beta$.

Modyfikując nieco treść twierdzenia 4.3.3, uzyskamy ogólniejszą jego wersję:

*Twierdzenie 4.3.3.** (*o dedukcji nie wprost*) Jeśli $\Gamma \cup \{\sim^{k+1}(\alpha \to \beta)\} \vdash_{Sn} \{(\gamma \to \delta), \sim(\gamma \to \delta)\}$ to $\Gamma \vdash_{Sn} \sim^{k}(\alpha \to \beta)$, dla dowolnych $\alpha \to \beta, \gamma \to \delta \in F_{Sn}, \Gamma \subseteq F_{Sn}$ oraz $k \geq 0$.

Dowód. Jeśli $k = 0$, wówczas struktura dowodu niczym nie różni się od dowodu twierdzenia 4.3.3. Jeśli $k > 0$, korzystamy z faktu, iż $\varnothing \vdash_{Sn} \sim^{k+2}(\alpha \to \beta) \to \sim^{k}(\alpha \to \beta)$. Dalsza część dowodu przebiega analogicznie do przypadku, gdy $k = 0$.

Systemy S^1 i P^1 są równoważne. Nasuwa się więc pytanie: Czy podobna zależność zachodzi między S^2 i P^2, S^3 i P^3, S^4 i P^4, *etc.*? Czy każdy S^n jest równoważny pewnemu P^n–systemowi (dla $n \geq 1$)? Otóż, łatwo sprawdzić, że w dowolnym P^n–systemie ($n \geq 1$) tautologiami (a tym samym i tezami) są formuły (H1), (H2), (*pP*), (*pC*) oraz (F2). Formuła $(\mathrm{F1})^k$ jest tautologią tylko tych P^n–systemów, dla których $k \geq n$. Dla przykładu, $(\mathrm{F1})^2 \sim\sim \alpha \to (\sim\sim\sim \alpha \to \beta)$ jest tautologią systemów P^1 i P^2. Nie jest natomiast tautologią systemów P^3, P^4, P^5, P^6, … Oznacza to, że $S^2 \subset P^2$, $S^3 \subset P^3$, $S^4 \subset P^4$, itd.

Twierdzenie 4.3.4. W dowolnym S^n–systemie ($n \geq 1$) wyprowadzalne są wszystkie aksjomaty pozytywnej części logiki Hilberta oraz formuły (*tnd*), (A11), (A12b), (A12c), (A12d).

Dowód. Formuły (H1) i (H2) są aksjomatami każdego S^n–systemu.

Dowód dla (H3) $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$:

(1) α	*zał. na mocy tw. o ded.*
(2) β	*zał. na mocy tw. o ded.*
(3) $\sim\sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta))$	*zał. na mocy tw. o ded. nie wprost oraz definicji „$\wedge$”*
(4) $\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)$	$(nn)^{\to}$, (3), (RO)
(5) $\sim(\sim\beta \to \beta)$	(1), (4), (RO)
(6) $\sim\beta \to \beta$	(H1), (2), (RO)

sprzeczność (5), (6), czyli

(7) $\sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta))$	
(8) $\alpha \to (\beta \to \sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)))$	*tw. o ded.*, (1), (2), (7)
(9) $\alpha \to (\beta \to \sim(\alpha \to \neg\beta))$	*definicja „$\neg$”*
$\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$	*definicja „$\wedge$”.*

Dowód dla (H4) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$:

(1) $\sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta))$	*zał. na mocy tw. o ded. oraz definicji „$\wedge$”*
(2) $(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to (\sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to \alpha))$	(F3)
(3) $\sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to ((\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to \alpha)$	(*pk*), (2), (RO)
(4) $(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to \alpha$	(3), (1), (RO)
(5) $((\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to \alpha) \to \alpha$	(*pP*)
(6) α	(5), (4), (RO)

(7) $\sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to \alpha$ *tw. o ded.* (1), (6)

(8) $\sim(\alpha \to \neg\beta) \to \alpha$ *definicja „¬"*

$(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$ *definicja „∧".*

Dowód dla (H5) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$:

(1) $\sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta))$ *zał. na mocy tw. o ded. oraz definicji „∧"*

(2) $(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to (\sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to \alpha))$ (F3)

(3) $\sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to ((\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to \alpha)$ (*pk*), (2), (RO)

(4) $(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to \alpha$ (3), (1), (RO)

(5) $((\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to \alpha) \to \alpha$ (*pP*)

(6) α (5), (4), (RO)

(7) $(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to (\sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to (\sim\beta \to \beta)))$ (F3)

(8) $\sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to ((\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to (\sim\beta \to \beta))$ (*pk*), (7), (RO)

(9) $(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to (\sim\beta \to \beta)$ (8), (1), (RO)

(10) $\alpha \to (\sim(\sim\beta \to \beta) \to (\sim\beta \to \beta))$

prawo $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ (9), (RO)

(11) $\sim(\sim\beta \to \beta) \to (\sim\beta \to \beta)$ (10), (6), (RO)

(12) $(\sim(\sim\beta \to \beta) \to (\sim\beta \to \beta)) \to (\sim\beta \to \beta)$ (*pC*)

(13) $\sim\beta \to \beta$ (11), (12), (RO)

(14) $(\sim\beta \to \beta) \to \beta$ (*pC*)

(15) β (14), (15), (RO)

(16) $\sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta)) \to \beta$ *tw. o ded.*, (1), (15)

(17) $\sim(\alpha \to \neg\beta) \to \beta$ *definicja „¬"*

$(\alpha \wedge \beta) \to \beta$ *definicja „∧".*

Dowód dla (H6) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$:

(1) α *zał. na mocy tw. o ded.*

(2) $\sim(\sim\alpha \to \alpha)$ *zał. na mocy tw. o ded. oraz definicji „∨"*

(3) $\sim\alpha \to \alpha$ (H1), (1), (RO)

(4) $(\sim\alpha \to \alpha) \to (\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)$ (F2)

(5) β (4), (2), (3), (RO)

(6) $\alpha \rightarrow (\sim(\sim\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$ — *tw. o ded.*, (1), (2), (5)
(7) $\alpha \rightarrow (\neg\,\alpha \rightarrow \beta)$ — *definicja „$\neg$”*
$\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ — *definicja „$\vee$”.*

Dowód dla (H7) $\alpha \rightarrow (\beta \vee \alpha)$:

(1) α — *zał. na mocy tw. o ded.*
(2) $\sim(\sim\beta \rightarrow \beta)$ — *zał. na mocy tw. o ded. oraz definicji „$\vee$”*
(3) α — (1)
(4) $\alpha \rightarrow (\sim(\sim\beta \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$ — *tw. o ded.*, (1), (2), (3)
(5) $\alpha \rightarrow (\neg\,\beta \rightarrow \alpha)$ — *definicja „$\neg$”*
$\alpha \rightarrow (\beta \vee \alpha)$ — *definicja „$\vee$”.*

W dowodzie dla (H8), posłużymy się formułą $(F4)^{\rightarrow}$ $(\sim X \rightarrow Y) \rightarrow ((\sim X \rightarrow \sim Y) \rightarrow X)$, przy czym $X = \alpha \rightarrow \beta$ oraz $Y = \gamma \rightarrow \delta$. Wykażmy więc, iż $(F4)^{\rightarrow}$ jest tezą dowolnego S^n–systemu $(n \geq 1)$.

Dowód dla $(F4)^{\rightarrow}$ $(\sim X \rightarrow Y) \rightarrow ((\sim X \rightarrow \sim Y) \rightarrow X)$, gdzie $X = \alpha \rightarrow \beta$, $Y = \gamma \rightarrow \delta$:

(1) $\sim X \rightarrow Y$ — *zał. na mocy tw. o ded.*
(2) $\sim X \rightarrow \sim Y$ — *zał. na mocy tw. o ded.*
(3) $\sim X$ — *zał. na mocy tw. o ded. nie wprost*
(4) Y — (1), (3), (RO)
(5) $\sim Y$ — (2), (3), (RO)

sprzeczność (4), (5), zatem:

(6) X
$(\sim X \rightarrow Y) \rightarrow ((\sim X \rightarrow \sim Y) \rightarrow X)$ — *tw. o ded.*, (1), (2), (6).

Dowód dla (H8) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$:

(1) $\alpha \rightarrow \gamma$ — *zał. na mocy tw. o ded.*
(2) $\beta \rightarrow \gamma$ — *zał. na mocy tw. o ded.*
(3) $\sim((\sim(\sim\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma)$ — *zał. na mocy tw. o ded. nie wprost oraz definicji „$\vee$”*

Niech $X = (\sim(\sim\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$

(4) $X \rightarrow (\sim X \rightarrow (\sim(\sim\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta))$ — (F2)
(5) $\sim X \rightarrow (X \rightarrow (\sim(\sim\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta))$ — (*pk*) (4), (RO)
(6) $X \rightarrow (\sim(\sim\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$ — (3), (5), (RO)

czyli:

(6)* $(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta) \to \gamma) \to (\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)$

(7) $((\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta) \to \gamma) \to (\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)) \to (\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)$ (*pP*)

(8) $\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta$ — (6)*, (7), (RO)

(9) $X \to (\sim X \to \sim(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta))$ — (F2)

(10) $\sim X \to (X \to \sim(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta))$ — (*pk*), (9), (RO)

(11) $X \to \sim(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)$ — (3), (10), (RO)

czyli:

(11)* $((\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta) \to \gamma) \to \sim(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)$

(12) $(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta) \to (\gamma \to \sim(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta))$

prawo $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$, (11)*, (RO)

(13) $\gamma \to \sim(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)$ — (8), (12), (RO)

(14) $\beta \to \sim(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)$ — (*ps*), (2), (13), (RO)

(15) $\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \sim(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)$ — (*ps*), (8), (14), (RO)

(16) $\beta \to (\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)$ — (H1)

(17) $\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to (\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)$ — (*ps*), (8), (16), (RO)

(18) $(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to (\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)) \to ((\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \sim(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)) \to \to (\sim\alpha \to \alpha))$ — $(F4)^{\to}$

(19) $(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \sim(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta)) \to (\sim\alpha \to \alpha)$ (18), (17), (RO)

(20) $\sim\alpha \to \alpha$ — (19), (15), (RO)

(21) $(\sim\alpha \to \alpha) \to \alpha$ — (*pC*)

(22) α — (21), (20), (RO)

(23) γ — (1), (21), (RO)

(24) $\gamma \to ((\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta) \to \gamma)$ — (H1)

(25) $(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta) \to \gamma$ — (24), (23), (RO)

sprzeczność (3), (25), zatem:

(26) $(\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta) \to \gamma$

(27) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta) \to \gamma))$

twierdzenie o dedukcji (1), (2), (26)

$(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$ — *definicja „$\vee$”.*

Dowód dla (*tnd*) $\alpha \vee \sim \alpha$:

(1) $\sim(\sim \alpha \rightarrow \alpha)$	*zał. na mocy tw. o ded. oraz definicji „$\vee$”*
(2) $(\sim \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\sim(\sim \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \sim \alpha)$	(F2)
(3) $\sim(\sim \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\sim \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \sim \alpha)$	(*pk*) (2), (RO)
(4) $(\sim \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \sim \alpha$	(3), (1), (RO)
(5) $((\sim \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha$	(*pP*)
(6) $\sim \alpha$	(4), (5), (RO)
(7) $\sim(\sim \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \sim \alpha$	*tw. o ded.*, (1), (6)
(8) $\neg \alpha \rightarrow \sim \alpha$	*definicja „$\neg$”*
$\alpha \vee \sim \alpha$	*definicja „$\vee$”*.

W dowodzie dla (A11) posłużymy się formułą $(pC)^*$ $(\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha$. Wykażmy więc, że $(pC)^*$ jest wyprowadzalna w każdym S^n–systemie ($n \geq 1$).

Dowód dla $(pC)^*$:

(1) $\sim((\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha)$	*zał. na mocy tw. o ded. nie wprost*
(2) $((\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow (\sim((\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \sim \alpha))$	(F2)
(3) $\sim((\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow (((\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \sim \alpha))$	(*pk*) (2), (RO)
(4) $((\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \sim \alpha)$	(1), (2), (RO)
(5) $(((\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \sim \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \sim \alpha)$	(*pP*)
(6) $\alpha \rightarrow \sim \alpha$	(5), (4), (RO)
(7) $((\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow (\sim((\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \alpha)$	(F2)
(8) $\sim((\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow (((\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \alpha)$	(*pk*), (7), (RO)
(9) $((\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \alpha$	(8), (1), (RO)
(10) $(\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \alpha)$	*prawo* $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$, (9), (RO)
(11) $(\sim \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$	(pC)
(12) $(\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \alpha$	(*ps*), (10), (11), (RO)
(13) α	(6), (12), (RO)
(14) $\sim \alpha$	(6), (13), (RO)

(15) $(\alpha \to \sim \alpha) \to \sim \alpha$ (H1), (14), (RO)

sprzeczność (1), (15), zatem $(\alpha \to \sim \alpha) \to \sim \alpha$.

Dowód dla (A11) $\beta^{\circ} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim \beta) \to \sim \alpha))$:

(1) $\sim \sim (\beta \to \sim (\sim \sim \beta \to \sim \beta))$ *zał. na mocy tw. o ded. oraz definicji „°”*

(2) $\alpha \to \beta$ *zał. na mocy tw. o ded.*

(3) $\alpha \to \sim \beta$ *zał. na mocy tw. o ded.*

(4) $\beta \to \sim (\sim \sim \beta \to \sim \beta)$ $(nn)^{\to}$, (1), (RO)

(5) $(\sim \sim \beta \to \sim \beta) \to (\sim (\sim \sim \beta \to \sim \beta) \to \sim \alpha)$ (F2)

(6) $\sim (\sim \sim \beta \to \sim \beta) \to ((\sim \sim \beta \to \sim \beta) \to \sim \alpha)$ (*pk*), (5), (RO)

(7) $\beta \to ((\sim \sim \beta \to \sim \beta) \to \sim \alpha)$ (*ps*), (4), (6), (RO)

(8) $\alpha \to ((\sim \sim \beta \to \sim \beta) \to \sim \alpha)$ (*ps*), (2), (7), (RO)

(9) $(\sim \sim \beta \to \sim \beta) \to (\alpha \to \sim \alpha)$ (*pk*), (8), (RO)

(10) $\sim \beta \to (\sim \sim \beta \to \sim \beta)$ (H1)

(11) $\sim \beta \to (\alpha \to \sim \alpha)$ (*ps*), (10), (9), (RO)

(12) $\alpha \to (\alpha \to \sim \alpha)$ (*ps*), (3), (11), (RO)

(13) $\alpha \to \sim \alpha$ (*psk*), (12), (RO)

(14) $\sim \alpha$ $(pC)^{*}$, (13), (RO)

(15) $\sim \sim (\beta \to \sim (\sim \sim \beta \to \sim \beta)) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim \beta) \to \sim \alpha))$ *tw. o ded.* (1), (2), (3), (14)

(16) $\sim \sim (\beta \to \neg \sim \beta)) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim \beta) \to \sim \alpha))$ *definicja „¬”*

(17) $\sim (\beta \wedge \sim \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim \beta) \to \sim \alpha))$ *definicja „∧”*

$\beta^{\circ} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim \beta) \to \sim \alpha))$ *definicja „°”*.

Dowód dla (A12b)–(A12d) $(\alpha \# \beta)^{\circ}$, gdzie $\# \in \{\to, \vee, \wedge\}$

Niech $X = \alpha \to \beta$, dla (A12b)

$X = \sim (\sim \alpha \to \alpha) \to \beta$, dla (A12c)

$X = \sim (\alpha \to \sim (\sim \beta \to \beta))$, dla (A12d)

(1) $\sim \sim \sim (X \to \sim (\sim \sim X \to \sim X))$ *zał. na mocy tw. o ded. nie wprost oraz definicji „°”*

(2) $\sim (X \to \sim (\sim \sim X \to \sim X))$ $(nn)^{\to}$, (1),(RO)

(3) $(X \to \sim (\sim \sim X \to \sim X)) \to (\sim (X \to \sim (\sim \sim X \to \sim X)) \to X)$ (F2)

$(4)\ \sim(X \to \sim(\sim\sim X \to \sim X)) \to ((X \to \sim(\sim\sim X \to \sim X)) \to X)$ — (pk), (3), (RO)

$(5)\ (X \to \sim(\sim\sim X \to \sim X)) \to X$ — (4), (2), (RO)

$(6)\ ((X \to \sim(\sim\sim X \to \sim X)) \to X) \to X)$ — (pP)

$(7)\ X$ — (5), (6), (RO)

$(8)\ (X \to \sim(\sim\sim X \to \sim X)) \to (\sim(X \to \sim(\sim\sim X \to \sim X)) \to \sim\sim(\sim\sim X \to \sim X))$ — (F2)

$(9)\ \sim(X \to \sim(\sim\sim X \to \sim X)) \to ((X \to \sim(\sim\sim X \to \sim X)) \to \sim\sim(\sim\sim X \to \sim X))$ — (pk), (8), (RO)

$(10)\ (X \to \sim(\sim\sim X \to \sim X)) \to \sim\sim(\sim\sim X \to \sim X)$ — (9), (2), (RO)

$(11)\ X \to (\sim(\sim\sim X \to \sim X)) \to \sim\sim(\sim\sim X \to \sim X))$

prawo $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$, (10), (RO)

$(12)\ \sim(\sim\sim X \to \sim X)) \to \sim\sim(\sim\sim X \to \sim X)$ — (7), (11), (RO)

$(13)\ \sim\sim(\sim\sim X \to \sim X)$ — $(pC)^*$, (12), (RO)

$(14)\ \sim\sim X \to \sim X$ — $(nn)^{\to}$, (13), (RO)

$(15)\ \sim X$ — (pC), (14), (RO)

sprzeczność (7), (15), czyli $\sim\sim(X \to \sim(\sim\sim X \to \sim X))$, stąd:

$(16)\ \sim(X \wedge \sim X)$ — definicja „$\wedge$"

X° — definicja „$^{\circ}$"

oraz dodatkowo: definicja „$\vee$",

jeśli $X = \sim(\sim\alpha \to \alpha) \to \beta$

lub definicja „$\wedge$",

jeśli $X = \sim(\alpha \to \sim(\sim\beta \to \beta))$.

Przyjmijmy, że $k \geq 1$, $(A12a)^k\ (\sim^k \alpha)^{\circ}$. Niech S^n będzie systemem, który w zbiorze aksjomatów zawiera formułę $(F1)^m \sim^m \alpha \to (\sim^{m+1} \alpha \to \beta)$, dla $m \geq 1$.

Twierdzenie 4.3.5. Jeśli $k = m$, to $(A12a)^k$ jest tezą systemu S^n, dla $n = k = m$.

Dowód dla $(A12a)^k\ (\sim^k \alpha)^{\circ}$, $k \geq 1$:

$(1)\ \sim\sim\sim(\sim^k \alpha \to \sim(\sim^{k+2} \alpha \to \sim^{k+1} \alpha))$ — *zał. na mocy tw. o ded. nie wprost oraz definicji „$^{\circ}$"*

Niech $X = \sim^k \alpha \to \sim(\sim^{k+2} \alpha \to \sim^{k+1} \alpha)$

$(2)\ \sim X$ — $(nn)^{\to}$, (1), (RO)

$(3)\ X \to (\sim X \to \sim^k \alpha)$ — (F2)

(4) $\sim X \rightarrow (X \rightarrow \sim^k \alpha)$ (*pk*), (3), (RO)

(5) $X \rightarrow \sim^k \alpha$ (2), (4), (RO),

tj.: $(\sim^k \alpha \rightarrow \sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha)) \rightarrow \sim^k \alpha$

(6) $((\sim^k \alpha \rightarrow \sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha)) \rightarrow \sim^k \alpha) \rightarrow \sim^k \alpha$ (*pP*)

(7) $\sim^k \alpha$ (5), (6), (RO)

(8) $X \rightarrow (\sim X \rightarrow \sim \sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha))$ (F2)

(9) $\sim X \rightarrow (X \rightarrow \sim \sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha))$ (*pk*), (8), (RO)

(10) $X \rightarrow \sim \sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha)$ (2), (9), (RO),

tj.: $(\sim^k \alpha \rightarrow \sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha)) \rightarrow \sim \sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha)$

(11) $\sim^k \alpha \rightarrow (\sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha) \rightarrow \sim \sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha))$

prawo $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$, (10), (RO)

(12) $\sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha) \rightarrow \sim \sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha)$ (7), (11), (RO)

(13) $(\sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha) \rightarrow \sim \sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha)) \rightarrow \sim \sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha)$
(*pC*)*

(14) $\sim \sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha)$ (12), (13), (RO)

(15) $\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha$ (*nn*)$^{\rightarrow}$, (14), (RO)

(16) $(\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha) \rightarrow \sim^{k+1} \alpha$ (*pC*)

(17) $\sim^{k+1} \alpha$ (15), (16), (RO)

(18) $\sim^k \alpha \rightarrow (\sim^{k+1} \alpha \rightarrow X)$ (F1)^m

(19) $\sim^{k+1} \alpha \rightarrow X$ (18), (7), (RO)

(20) X (19), (17), (RO)

sprzeczność (2), (20), zatem $\sim \sim X$, czyli $\sim \sim (\sim^k \alpha \rightarrow \sim (\sim^{k+2} \alpha \rightarrow \sim^{k+1} \alpha))$

(21) $\sim (\sim^k \alpha \wedge \sim^{k+1} \alpha)$ definicja „$\wedge$"

$(\sim^k \alpha)^\circ$ definicja „$^\circ$".

Twierdzenie 4.3.6. Jeśli $n \geq 2$, to (*nn*) $\sim \sim \alpha \rightarrow \alpha$ nie tezą S^n–systemu[23].

Dowód: Rozważmy matrycę $\mathscr{M} = \langle \{1, 2, 3, 0\}, \{1, 2\}, \rightarrow, \sim \rangle$, w której {1, 2, 3, 0} jest zbiorem wartości logicznych, {1, 2} jest zbiorem wartości wyróżnionych, operacje „$\rightarrow$" oraz „$\sim$", definiujemy następująco:

[23] Por. *Twierdzenie 4.1.4.*

$(\to)$	1	2	3	0
1	1	1	0	0
2	1	1	0	0
3	1	1	1	1
0	1	1	1	1

	$(\sim)$
1	0
2	1
3	2
0	1

Aksjomaty dowolnego S^n–systemu (dla $n \geq 2$) zawsze przyjmują wartości wyróżnione, reguła odrywania także je dziedziczy. W przypadku prawa podwójnej negacji tak już nie jest. Jeśli za formułę α podstawimy 3 jako wartość logiczną, wówczas: $\sim\sim 3 \to 3 = \sim 2 \to 3 = 1 \to 3 = 0$.

Przyjmijmy, że $k \geq 2$ oraz $(nn)^k \sim^k \alpha \to \sim^{k\text{-}2} \alpha$. Niech S^n będzie systemem, który w zbiorze aksjomatów zawiera formułę $(F1)^m \sim^{m\text{-}1} \alpha \to (\sim^m \alpha \to \beta)$, dla $m \geq 2$. Na przykład, jeśli $k = m = 2$, wówczas tezami systemu S^1 są formuły: $\sim\sim \alpha \to \alpha$, $(F1)^2 \sim\alpha \to (\sim\sim \alpha \to \beta)$.

Twierdzenie 4.3.7. Jeśli $k = m$, to $(nn)^k \sim^k \alpha \to \sim^{k\text{-}2} \alpha$ jest tezą systemu S^n, dla $n = k\text{-}1$.

Dowód dla $(nn)^k \sim^k \alpha \to \sim^{k\text{-}2} \alpha$, $k \geq 2$:

(1) $\sim^k \alpha$	*zał. na mocy tw. o ded.*
(2) $\sim^{k\text{-}1} \alpha \to (\sim^k \alpha \to \sim^{k\text{-}2} \alpha)$	$(F1)^m$
(3) $\sim^k \alpha \to (\sim^{k\text{-}1} \alpha \to \sim^{k\text{-}2} \alpha)$	(*pk*), (2), (RO)
(4) $\sim^{k\text{-}1} \alpha \to \sim^{k\text{-}2} \alpha$	(1), (3), (RO)
(5) $(\sim^{k\text{-}1} \alpha \to \sim^{k\text{-}2} \alpha) \to \sim^{k\text{-}2} \alpha$	(*pC*)
(6) $\sim^{k\text{-}2} \alpha$	(4), (5), (RO)
$\sim^k \alpha \to \sim^{k\text{-}2} \alpha$	*tw. o ded.*, (1), (6).

Kolejne twierdzenie jest prostym wnioskiem z poczynionych wcześniej obserwacji:

Twierdzenie 4.3.8. $T(\vdash_{Sn}) \subset T(\vdash_{Pn})$, dla $n \geq 2$.

Hierarchia S^n–systemów ($n \geq 1$) posiada wszystkie pożądane własności. Para formuł p, $\sim p$, nie trywializuje żadnego S^n–systemu. Zbiór $\{\sim p, \sim\sim p\}$ trywializuje system S^1, nie przepełniając jednocześnie pozostałych S^n–systemów. Zbiór $\{\sim\sim p, \sim\sim\sim p\}$ trywializuje S^1 i S^2, nie przepełniając przy tym S^3, S^4, S^5, … *etc.*

Rozszerzmy zbiór aksjomatów S^n–systemów o dodatkową formułę:

$(nn) \sim\sim \alpha \to \alpha$.

Powstałe systemy oznaczmy przez S^{*n} ($n \geq 1$). Zbiór aksjomatów S^{*n}–systemów konstytuują więc następujące formuły:

(H1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
(H2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
(pP) $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
(pC) $(\sim \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
$(\mathrm{F1})^k \sim^k \alpha \rightarrow (\sim^{k+1} \alpha \rightarrow \beta)$, dla $k \geq 1$ oraz $k = n$
(F2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\sim (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma))$
(nn) $\sim \sim \alpha \rightarrow \alpha$.

Jedyną regułą pierwotną S^{*n}–systemów jest (RO). Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą odrywania definiują relację konsekwencji $\vdash_{S^{*}n}$.

Twierdzenie 4.3.9. $T(\vdash_{S^{*}1}) \supset T(\vdash_{S^{*}2}) \ldots \supset T(\vdash_{S^{*}n}) \ldots (n \geq 1)$.

Nietrudno zauważyć, iż $T(\vdash_{Sn}) = T(\vdash_{S^{*}n})$, jeśli $n = 1$. Formuła (nn) jest bowiem wyprowadzalna w systemie S^1. Jeśli zaś $n > 1$, wówczas $T(\vdash_{Sn}) \subset T(\vdash_{S^{*}n})$. Ponadto:

Twierdzenie 4.3.10. $\mathrm{T}(\vdash_{S^{*}n}) = T(\vdash_{Pn})$, dla $n \geq 1$.

4.4. HIERARCHIA R^n–SYSTEMÓW ($n \geq 1$)

Wszystkie analizowane dotąd systemy posiadały szczególną własność. W żadnym z nich dowolna formuła γ nie wynika ze zbioru $\{p, \sim p\}$, wynika natomiast ze zbioru $\{\alpha \rightarrow \beta, \sim (\alpha \rightarrow \beta)\}$. Para formuł $\alpha \rightarrow \beta, \sim (\alpha \rightarrow \beta)$ trywializuje więc każdy X–system, gdzie $X \in \{S^n, S^{*n}, P^n\}$. W prezentowanej obecnie hierarchii R^n–systemów ($n \geq 1$) sytuacja ulegnie zmianie. Aby to wykazać, przyjmijmy, podobnie jak poprzednio, że punkt wyjścia stanowi aksjomatyzacja systemu S^1 (tj. P^1):

(H1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
(H2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
(pP) $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
(pC) $(\sim \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
(F1) $\sim \alpha \rightarrow (\sim \sim \alpha \rightarrow \beta)$
(F2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\sim (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma))$
(RO) $\alpha, \alpha \rightarrow \beta / \beta$.

Zastępując aksjomat (F1) formułą o postaci:

$$(F1)^k \sim^k \alpha \to (\sim^{k+1} \alpha \to \beta), \text{ dla } k \geq 1,$$

uzyskaliśmy hierarchię S^n–systemów. Jeśli teraz podobnym modyfikacjom poddamy dodatkowo aksjomat (F2), tj.:

$$(F2)^k \sim^{k-1} (\alpha \to \beta) \to (\sim^k (\alpha \to \beta) \to \gamma)), \text{ dla } k \geq 1^{24},$$

w następstwie otrzymamy hierarchię R^n–systemów ($n \geq 1$). Do zbioru aksjomatów R^n–systemów należą zatem formuły (H1), (H2), (*pP*), (*pC*) oraz $(F1)^k$ i $(F2)^k$. Jedyną pierwotną reguła wnioskowania R^n–systemów jest (RO). Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą odrywania definiują relację konsekwencji $\vdash_{Rn}$.

Aksjomatyzacje poszczególnych R^n–systemów różnią się między sobą wyłącznie wartością parametru *k* obecnego w aksjomatach $(F1)^k$ i $(F2)^k$, co skutkuje następującym spostrzeżeniem:

Twierdzenie 4.4.1. $T(\vdash_{R1}) \supset T(\vdash_{R2}) \ldots \supset T(\vdash_{Rn}) \ldots$ (dla $n \geq 1$).

System R^1 (zawierający, jako aksjomaty, formuły $(F1)^1$ i $(F2)^1$) jest oczywiście równoważny systemowi S^1. W przypadku pozostałych systemów, analogiczna równoważność nie zachodzi, a ściślej:

Twierdzenie 4.4.2. $T(\vdash_{Rn}) \subset T(\vdash_{Sn})$, dla $n \geq 2$.

Pary formuł $\sim \alpha, \sim\sim \alpha$ oraz $\alpha \to \beta, \sim(\alpha \to \beta)$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{Rn}$, trywializują system R^1, nie trywializują wszakże pozostałych R^n–systemów. Pary $\sim\sim \alpha$, $\sim\sim\sim \alpha$ tudzież $\sim(\alpha \to \beta), \sim\sim(\alpha \to \beta)$ przepełniają R^1 i R^2, nie trywializując przy tym systemów $R^3, R^4, R^5, \ldots$ itd.

---

[24] Jeśli $k = 0$, to $\sim^0 \alpha = \alpha$.

Rozdział 5

HIERARCHIE OPARTE NA KRYTERIUM MIESZANYM

Kryterium *mieszane* stanowi do pewnego stopnia wypadkową dwóch pozostałych kryteriów, tj. ilościowego i jakościowego. W systemach logiki parakonsystentnej spełniających to kryterium, dowolna formuła β nie wynika z pary formuł $\alpha, \sim \alpha$, tylko z trójki $\approx\alpha, \alpha, \sim \alpha$, gdzie $\approx\alpha$ jest formułą specjalnego typu, o odpowiednim kształcie, formułą usprzeczniającą zbiór $\{\alpha, \sim \alpha\}$. Doskonałymi przykładami systemów spełniających kryterium mieszane są C_n–systemy da Costy $(n \geq 1)$ oraz *LFI*. Żeby strywializować dany C_n–system nie wystarczy para zdań: $\alpha, \sim \alpha$. Niezbędna jest jeszcze jedna, dodatkowa formuła. W systemach da Costy jest to formuła o postaci $\alpha^{(n)}$[1], toteż $\{\alpha^{(n)}, \alpha, \sim \alpha\} \vdash_{Cn} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{Cn}$, $n \geq 1$. W C_n–systemach wyprowadzimy zmodyfikowaną wersję zasady *ex falso quodlibet*:

(EFQ)$^{(n)}$ $\alpha^{(n)}, \alpha, \sim \alpha / \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{Cn}$, $n \geq 1$.

W *LFI* para formuł: $\alpha, \sim \alpha$, również nie trywializuje poszczególnych systemów. Systemy przepełnia trójka formuł $\circ\alpha, \alpha, \sim \alpha$, gdzie „$\circ$" jest spójnikiem niesprzeczności. W systemach *LFI* wyprowadzalna jest *osłabiona* wersja reguły *ex falso quodlibet*:

(EFQ)$^{\circ}$ $\circ\alpha, \alpha, \sim \alpha / \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{LFI}$[2].

5.1. *V*–SYSTEMY ARRUDY I ALVESA

W 1979 roku Ayda Arruda wraz z Eliasem Alvesem zaprezentowali pewną hierarchię systemów, za pośrednictwem których, próbowali uchwycić naturę nieostrości (ang. *vagueness*). Przyjęty przez nich język formalny nie pozwalał jednak na głębszą analizę tego zjawiska. Autorzy skoncentrowali się więc na badaniu nieostrości w odniesieniu do spójnika negacji. *Nieostrość* negacji utożsamiona została z dwoma postulatami:

---

[1] Zob. § 2.6.

[2] W terminologii anglojęzycznej reguła (EFQ)$^{\circ}$ nosi nazwę *Gentle Principle of Explosion*. Wybrane systemy *LFI* szerzej omówione zostały w § 5.3.

(1) odrzuceniem prawa niesprzeczności, (*pn*) $\sim(\alpha \wedge \sim\alpha)$,

(2) odrzuceniem prawa wyłączonego środka, (*tnd*) $\alpha \vee \sim\alpha$.

Współcześnie, odrzucenie pierwszego z praw łączy się z pojęciem *parakonsystencji* (przynajmniej w takim sensie, jak rozumiał to da Costa), odrzucenie drugiego – z pojęciem *parakompletności*. Alfabet języka prezentowanych systemów, zawierał standardowe symbole logiczne: zmienne zdaniowe oraz znane, z języka klasycznego rachunku zdań, spójniki logiczne.

Pierwszy z omawianych systemów oznaczono symbolem V_0. Mając na względzie transparentność dalszej prezentacji, wprowadźmy następujące skróty definicyjne:

Definicja 5.1.1. $\alpha^{\circ} := \sim(\alpha \wedge \sim\alpha)$.

Definicja 5.1.2. ${}^{\circ}\alpha := \alpha \vee \sim\alpha$.

Definicja 5.1.1 przywodzi na myśl system C_1 da Costy. Przypomnijmy, w C_n–systemach występują formuły o postaci $\alpha^{(n)}$, gdzie $\alpha^{(n)} = \alpha^n \wedge \alpha^{n-1} \wedge \ldots \wedge \alpha^1$, dla $n \geq 1$, $\alpha^1 = \alpha^{\circ} = \sim(\alpha \wedge \sim\alpha)$ oraz $\alpha^i = \alpha^{\circ\ldots\circ}$ (*i*-razy). Kształt formuły $\alpha^{(n)}$ zależy od konkretnego C_n–systemu. Jeśli więc $n = 1$, wówczas formuła $\alpha^{(n)}$ ma postać $\sim(\alpha \wedge \sim\alpha)$. Jeśli natomiast $n = 2$, to $\alpha^{(2)} = \alpha^2 \wedge \alpha^1 = \sim(\sim(\alpha \wedge \sim\alpha) \wedge \sim\sim(\alpha \wedge \sim\alpha)) \wedge \sim(\alpha \wedge \sim\alpha)$, itd. Wśród aksjomatów systemu V_0 obecne są, jako podformuły, formuły pierwszego rodzaju, tj. $\sim(\alpha \wedge \sim\alpha)$. Z kolei definicja 5.1.2 powiela pomysł da Costy – tym razem w odniesieniu do zasady *tertium non datur*.

W systemie V_0 definiowalny jest spójnik negacji klasycznej[3]:

Definicja 5.1.3. $\neg\alpha := \alpha \rightarrow (\sim\alpha \wedge \alpha^{\circ})$.

Aksjomatyka systemu V_0 składa się z następujących elementów:

(AH^+) α, o ile α jest aksjomatem pozytywnej części logiki Hilberta

(A1) $({}^{\circ}\alpha \wedge \beta^{\circ}) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \sim\beta) \rightarrow \sim\alpha))$

(A2a) $(\alpha^{\circ} \wedge \beta^{\circ}) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \vee \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \rightarrow \beta)^{\circ})$.

(A2b) $({}^{\circ}\alpha \wedge {}^{\circ}\beta) \rightarrow ({}^{\circ}(\alpha \wedge \beta) \wedge {}^{\circ}(\alpha \vee \beta) \wedge {}^{\circ}(\alpha \rightarrow \beta))$

(A3a) $\alpha^{\circ} \rightarrow (\sim\alpha)^{\circ}$

(A3b) ${}^{\circ}\alpha \rightarrow {}^{\circ}(\sim\alpha)$

$(nn)^{\neg}$ $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$.

---

[3] Oznaczenia systemów Arrudy i Alvesa V_0, V_1, V_2, pochodzi od pierwszej litery angielskiego słowa *vagueness*. Skrótów nie należy mylić z oznaczeniami stosowanymi w § 2.2.

Jedyną pierwotną, nieaksjomatyczną reguła wnioskowania jest (RO) α, $\alpha \rightarrow \beta$ / β[4]. Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą (RO) definiują relację konsekwencji $\vdash_{V0}$.

Na szczególną uwagę zasługują schematy (A2b), (A3b), które są parakompletnymi odpowiednikami aksjomatów $(A12)^{\circ}$, $(A13)^{\circ}$ systemu C_1 da Costy. Zależność, między systemami V_0 i C_1 wyraża precyzyjniej następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.1.1. $T(\vdash_{V0}) \subset T(\vdash_{C1})$, gdzie $T(\vdash_{V0})$ oznacza zbiór wszystkich tez systemu V_0, $T(\vdash_{C1})$ – zbiór wszystkich tez systemu C_1.

Dowód. Pierwsza część dowodu, sprowadza się do wykazania, iż tezami systemy C_1 są formuły: (A1), (A2b), (A3b) oraz $(nn)^{\neg}$. Zauważmy więc, że dla dowolnego C_1–wartościowaniem v: $v((^{\circ}\alpha \wedge \beta^{\circ}) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow \sim \alpha))) = 1$, $v((^{\circ}\alpha \wedge {}^{\circ}\beta) \rightarrow ({}^{\circ}(\alpha \wedge \beta) \wedge {}^{\circ}(\alpha \vee \beta) \wedge {}^{\circ}(\alpha \rightarrow \beta))) = 1$, $v(^{\circ}\alpha \rightarrow {}^{\circ}(\sim \alpha)) = 1$ oraz $v(\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha) = 1$. Korzystając z twierdzenia 2.6.7, otrzymujemy: $\varnothing \vdash_{C1} (^{\circ}\alpha \wedge \beta^{\circ}) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow \sim \alpha))$, $\varnothing \vdash_{C1} (^{\circ}\alpha \wedge {}^{\circ}\beta) \rightarrow ({}^{\circ}(\alpha \wedge \beta) \wedge {}^{\circ}(\alpha \vee \beta) \wedge {}^{\circ}(\alpha \rightarrow \beta))$, $\varnothing \vdash_{C1} {}^{\circ}\alpha \rightarrow {}^{\circ}(\sim \alpha)$ oraz $\varnothing \vdash_{C1} \neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$. Druga część dowodu opiera się na spostrzeżeniu, iż aksjomat (*tnd*) systemu C_1 nie jest tezą systemu V_0.

Definicja 5.1.4. Funkcję v, v: $F_{V0} \longrightarrow \{0, 1\}$, nazywamy V_0–wartościowaniem, gdy spełnione są następujące warunki:

($v1$) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ lub $v(\beta) = 1$

($v2$) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ oraz $v(\beta) = 1$

($v3$) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$ lub $v(\beta) = 1$

($v4a$) jeśli $v(\alpha^{\circ}) = v(\beta^{\circ}) = 1$, to $v((\alpha \wedge \beta)^{\circ}) = v((\alpha \vee \beta)^{\circ}) = v((\alpha \rightarrow \beta)^{\circ}) = 1$

($v4b$) jeśli $v(^{\circ}\alpha) = v(^{\circ}\beta) = 1$, to $v(^{\circ}(\alpha \wedge \beta)) = v(^{\circ}(\alpha \vee \beta)) = v(^{\circ}(\alpha \rightarrow \beta)) = 1$.

($v5a$) jeśli $v(\alpha^{\circ}) = 1$, to $v((\sim \alpha)^{\circ}) = 1$

($v5b$) jeśli $v(^{\circ}\alpha) = 1$, to $v(^{\circ}(\sim \alpha)) = 1$.

($v6a$) jeśli $v(\alpha) = v(\sim \alpha) = 1$, to $\mathrm{v}(\alpha^{\circ}) = 0$[5].

Definicja 5.1.5. Formuła α jest V_0–tautologią ($\models_{V0} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego V_0–wartościowania v, $v(\alpha) = 1$. Formuła α jest semantyczną konsekwencją zbioru formuł Γ ($\Gamma \models_{V0} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego V_0–wartościowania v, jeśli $v(\beta) = 1$ dla każdego $\beta \in \Gamma$, to $v(\alpha) = 1$.

---

[4] Zob. Arruda, A.I., Alves, E.H. (1979a), *Some Remarks on the Logic of Vagueness*, „Bulletin of the Section of Logic”, 8/3, s. 134.

[5] Por. *Definicja 2.6.3.*

Twierdzenie 5.1.2. $\Gamma \models_{V0} \alpha \rightarrow \beta$ wtw, gdy $\Gamma \cup \{\alpha\} \models_{V0} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{V0}$, $\Gamma \subseteq F_{V0}$.

Twierdzenie 5.1.3. (Arruda, Alves 1979b) $\Gamma \models_{V0} \alpha$ wtw, gdy $\Gamma \vdash_{V0} \alpha$, dla dowolnych $\Gamma \subseteq F_{V0}$ i $\alpha \in F_{V0}$.

Ani $(pn) \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$, ani $(tnd)\ \alpha \vee \sim \alpha$, jak i również koniunkcja, bądź alternatywa rzeczonych praw, tzn ${}^{\circ}\alpha \wedge \alpha^{\circ}$, ${}^{\circ}\alpha \vee \alpha^{\circ}$, nie są V_0–tautologiami. System V_0 jest więc systemem parakonsystentnym i parakompletnym. Ponadto, $\{\alpha, \sim \alpha\} \not\models_{V0} \beta$, dla pewnych $\alpha, \beta \in F_{V0}$, ale $\{\alpha^{\circ}, \alpha, \sim \alpha\} \models_{V0} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{V0}$. System V_0 spełnia więc kryterium mieszane. Para formuł α, $\sim \alpha$ nie trywializuje V_0. System przepełnia trójka formuł $\alpha^{\circ}, \alpha, \sim \alpha$.

Spójnik $\neg$ posiada wszystkie własności negacji klasycznej. Następujące formuły:

$(efq)^{\neg}\ \alpha \rightarrow (\neg\, \alpha \rightarrow \beta)$, czyli $\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\sim \alpha \wedge \alpha^{\circ})) \rightarrow \beta)$,
$(tnd)^{\neg}\ \alpha \vee \neg\, \alpha$, tj. $\alpha \vee (\alpha \rightarrow (\sim \alpha \wedge \alpha^{\circ})$

są zatem V_0–tautologiami. Dodatkowo, $\{\alpha, \neg\, \alpha\} \models_{V0} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{V0}$. Co oznacza, iż $\{\alpha, \alpha \rightarrow (\sim \alpha \wedge \alpha^{\circ})\} \models_{V0} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{V0}$, czyli $\{\alpha\} \models_{V0} (\alpha \rightarrow (\sim \alpha \wedge \alpha^{\circ})) \rightarrow \beta$. Skoro jednak $\varnothing \models_{V0} ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$, to $\varnothing \models_{V0} ((\alpha \rightarrow (\sim \alpha \wedge \alpha^{\circ})) \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow ((\sim \alpha \wedge \alpha^{\circ}) \rightarrow \beta))$. Wówczas $\{(\alpha \rightarrow (\sim \alpha \wedge \alpha^{\circ})) \rightarrow \beta\} \models_{V0} \alpha \rightarrow ((\sim \alpha \wedge \alpha^{\circ}) \rightarrow \beta)$. Relacja konsekwencji $\models_{V0}$ jest przechodnia, zatem $\{\alpha\} \models_{V0} \alpha \rightarrow ((\sim \alpha \wedge \alpha^{\circ}) \rightarrow \beta)$ tudzież $\{\alpha, \alpha\} \models_{V0} (\sim \alpha \wedge \alpha^{\circ}) \rightarrow \beta$, czyli $\{\alpha\} \models_{V0} (\sim \alpha \wedge \alpha^{\circ}) \rightarrow \beta$. Skoro $\varnothing \models_{V0} ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$, więc $\varnothing \models_{V0} ((\sim \alpha \wedge \alpha^{\circ}) \rightarrow \beta) \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow (\alpha^{\circ} \rightarrow \beta))$. Wtedy $\{(\sim \alpha \wedge \alpha^{\circ}) \rightarrow \beta\} \models_{V0} \sim \alpha \rightarrow (\alpha^{\circ} \rightarrow \beta)$. Z uwagi na przechodniość relacji $\models_{V0}$, $\{\alpha\} \models_{V0} \sim \alpha \rightarrow (\alpha^{\circ} \rightarrow \beta)$. A zatem $\{\alpha, \sim \alpha, \alpha^{\circ}\} \models_{V0} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{V0}$.

Rozszerzmy teraz zbiór aksjomatów systemu V_0 o formułę:

$(tnd)^{\neg}\ \alpha \vee \neg\, \alpha$.

Spójnik negacji klasycznej będzie odtąd definiowany w odmienny, aniżeli w systemie V_0, sposób, tj.:

*Definicja 5.1.3.** $\neg\, \alpha := \alpha^{\circ} \wedge (\alpha \rightarrow \sim \alpha)$.

Powstały system oznaczmy symbolem V_1.

Twierdzenie 5.1.4. (Arruda, Alves 1979a) $T(\vdash_{V0}) \subset T(\vdash_{V1})$.

System V_0 jest podsystemem V_1, co oznacza, iż każda teza systemu V_0 jest tezą V_1. Pośród tez systemu V_1 istnieją takie formuły, które nie są wyprowadzalne w V_0. Należy do nich alternatywa prawa niesprzeczności i prawa wyłączonego środka, tj. $^{\circ}\alpha \vee \alpha^{\circ}$. System V_1 spełnia kryterium mieszane, ponieważ $\{\alpha^{\circ}, \alpha, \sim\alpha\} \vdash_{V1} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{V1}$, lecz $\{\alpha, \sim\alpha\} \nvdash_{V1} \beta$, dla pewnych $\alpha, \beta \in F_{V1}$.

Twierdzenie 5.1.5. $T(\vdash_{V1}) \subset T(\vdash_{C1})$.

Dowód. Łatwo zweryfikować, iż dla dowolnego C_1–wartościowaniem v: $v(\alpha \vee \neg\alpha) = 1$. Oznacza to, iż $\vdash_{C1} \alpha \vee \neg\alpha$. Z drugiej strony, tezą systemu V_1 nie jest formuła (*tnd*) $\alpha \vee \sim\alpha$. V_1 jest więc podsystemem C_1.

Definicja 5.1.6. Funkcję v, v: $F_{V0} \longrightarrow \{0, 1\}$, nazywamy V_1–wartościowaniem, gdy spełnione są wszystkie warunki V_0–wartościowania oraz dodatkowo:

(*v6b*) jeśli $v(\alpha^{\circ}) = 0$, to $v(\alpha) = v(\sim\alpha) = 1$.

Definicja 5.1.7. Formuła α jest V_1–tautologią ($\models_{V1} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego V_1–wartościowania v, $v(\alpha) = 1$. Formuła α jest semantyczną konsekwencją zbioru formuł Γ ($\Gamma \models_{V1} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego V_1–wartościowania v, jeśli $v(\beta) = 1$ dla każdego $\beta \in \Gamma$, to $v(\alpha) = 1$.

Twierdzenie 5.1.6. (Arruda, Alves 1979b) $\Gamma \models_{V1} \alpha$ wtw, gdy $\Gamma \vdash_{V1} \alpha$, dla dowolnych $\Gamma \subseteq F_{V1}$ i $\alpha \in F_{V1}$.

Ostatni z analizowanych systemów oznaczono symbolem V_2. Jest to system parakompletny. Aksjomatykę systemu V_2 konstytuują następujące formuły:

(AH^+) α, o ile α jest aksjomatem pozytywnej części logiki Hilberta

$(A1)^*$ $^{\circ}\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \sim\beta) \rightarrow \sim\alpha))$

(A2b) $(^{\circ}\alpha \wedge {}^{\circ}\beta) \rightarrow ({}^{\circ}(\alpha \wedge \beta) \wedge {}^{\circ}(\alpha \vee \beta) \wedge {}^{\circ}(\alpha \rightarrow \beta))$

(A3b) $^{\circ}\alpha \rightarrow {}^{\circ}(\sim\alpha)$

(A4) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

(A5) $\sim(\alpha \wedge \sim\alpha)$

oraz reguła wnioskowania:

(RO) $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \,/\, \beta$.

Definicja 5.1.8. $\neg\alpha := \alpha \rightarrow \sim\alpha$.

System V_2 nie spełnia pierwszego postulatu da Costy. Prawo niesprzeczności jest bowiem tezą V_2. Tezami V_2 są także formuły: $\alpha \rightarrow \sim\sim\alpha$, $\sim\alpha \rightarrow \neg\alpha$, $\neg\neg\alpha$

$\rightarrow \sim \sim \alpha$ i nade wszystko (*efq*) $\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta)$. Para formuł $\alpha, \sim \alpha$ trywializuje V_2. System V_2 nie spełnia zatem kryterium mieszanego.

Definicja 5.1.9. Funkcję v, v: $F_{V2} \longrightarrow \{0, 1\}$, nazywamy V_2–wartościowaniem, gdy spełnione są wszystkie warunki V_0–wartościowania i dodatkowo:

($v6b$) jeśli $v(\alpha^o) = 0$, to $v(\alpha) = v(\sim \alpha) = 1$.
($v7$) jeśli $v(\alpha) = 1$, to $v(\sim \alpha) = 0$.

Definicja 5.1.10. Formuła α jest V_2–tautologią ($\models_{V2} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego V_2–wartościowania v, $v(\alpha) = 1$. Formuła α jest semantyczną konsekwencją zbioru formuł Γ ($\Gamma \models_{V2} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego V_2–wartościowania v, jeśli $v(\beta) = 1$ dla każdego $\beta \in \Gamma$, to $v(\alpha) = 1$.

Twierdzenie 5.1.7. (Arruda, Alves 1979b) $\Gamma \models_{V2} \alpha$ wtw, gdy $\Gamma \vdash_{V2} \alpha$, dla dowolnych $\Gamma \subseteq F_{V0}$ i $\alpha \in F_{V0}$.

Twierdzenie 5.1.8. (Arruda, Alves 1979a) $T(\vdash_{V1}) \subset T(\vdash_{V2})$.

System V_1 jest podsystemem V_2. System nie spełnia jednakże głównego postulatu parakonsystencji: relacja $\vdash_{V2}$ (ew. $\models_{V2}$) jest eksplozywna[6].

5.2. HIERARCHIA B_n I D_n–SYSTEMÓW BUNDERA ($n \geq 1$)

W 1980 roku Martin Bunder zaproponował hierarchię systemów logiki parakonsystentnej, wzorowanej na C_n–systemach da Costy ($n \geq 1$).

Punkt wyjścia analizy stanowił system B_0. Zbiór aksjomatów systemu B_0 tworzą następujące formuły:

(AH^+) α, o ile α jest aksjomatem pozytywnej części logiki Hilberta
$(A1.1)^1$ $(\alpha \wedge \sim \alpha) \rightarrow \beta$
$(A1.2)^1$ $(\alpha \rightarrow (\beta \wedge \sim \beta)) \rightarrow \sim \alpha$.

Jedyną pierwotną, nieaksjomatyczną regułą wnioskowania jest reguła odrywania (RO) α, $\alpha \rightarrow \beta$ / β. Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą (RO) definiują relację konsekwencji $\vdash_{B0}$. Aksjomat $(A1.1)^1$ jest koniuncyjno-implikacyjną wersją prawa przepełnienia, zaś $(A1.2)^1$ odpowiada tzw. prawu Kołmogorowa (*pK*) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow \sim \alpha)$. System B_0 jest zatem systemem logiki intuicjonistycznej.

---

[6] Por. *Definicja 1.1.1** (§ 1.2).

Hierarchię B_n–systemów ($n \geq 1$) otwiera system B_1, który odgrywa podobną rolę, jak C_1 w hierarchii da Costy. Zbiór aksjomatów systemu B_1 konstytuują aksjomaty pozytywnej części logiki Hilberta wraz z:

$(A1.1)^2 ((\alpha \wedge \sim \alpha) \wedge \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)) \to \beta$

$(A1.2)^2 (\alpha \to ((\beta \wedge \sim \beta) \wedge \sim (\beta \wedge \sim \beta))) \to \sim \alpha.$

Jedyną pierwotną, nieaksjomatyczną regułą wnioskowania jest (RO). Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą (RO) definiują relację konsekwencji $\vdash_{B1}$.

Para formuł α, $\sim \alpha$ nie trywializuje systemu B_1, relacja $\vdash_{B1}$ nie jest więc eksplozywna. Ponadto, system spełnia kryterium mieszane, ponieważ: $\{\sim (\alpha \wedge \sim \alpha), \alpha, \sim \alpha\} \vdash_{B1} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{B1}$. Co ciekawe, aksjomat $(A11)^{\circ}\ \beta^{\circ} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \sim \beta) \to \sim \alpha))$ systemu C_1 da Costy jest tezą B_1[7].

W systemie B_1 można zdefiniować tzw. silną negację:

Definicja 5.2.1. $\neg \alpha := \alpha \to ((\alpha \wedge \sim \alpha) \wedge \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)).$

Silnej negacji nie należy jednak utożsamiać z negacją klasyczną, tylko intuicjonistyczną. Nie jest bowiem na przykład prawdą, iż $\varnothing \vdash_{B1} \alpha \vee \neg \alpha$.

W systemie B_1 wyprowadzalna jest szczególna wersja reguły *ex falso quodlibet*, tj.:

$(EFQ)^{\circ} \sim (\alpha \wedge \sim \alpha), \alpha, \sim \alpha \,/\, \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{B1}$[8].

Twierdzenie 5.2.1. (Bunder 1980) $T(\vdash_{B1}) \subset T(\vdash_{B0})$.

Kolejne B_n–systemy ($n \geq 1$) uzyskujemy, zastępując $(A1.1)^2$ i $(A1.2)^2$ bardziej ogólnymi schematami:

$(A1.1)^{n+1} (\alpha)^{n+1} \to \beta$

$(A1.2)^{n+1} (\beta \to (\alpha)^{n+1}) \to \sim \beta$, gdzie $\alpha^0 = \alpha$ oraz $(\alpha)^{n+1} = \alpha^n \wedge \sim (\alpha^n)$.

W systemie B_2, dla przykładu, zdają się one przybierać bardzo prostą i czytelną formę:

$(A1.1)^3 (\alpha)^{2+1} \to \beta$

$(A1.2)^3 (\beta \to (\alpha)^{2+1}) \to \sim \beta.$

[7] Dowód zob. Bunder, M. W. (1980), *A New Hierarchy of Paraconsistent Logics,* Proceedings of the Third Brazilian Conference On Mathematical Logic, Sociedade Brasileira de Lógica, São Paulo, s. 13–22.

[8] Lub równoważnie: $(EFQ)^{\neg}\ \alpha, \neg \alpha \,/\, \beta$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{B1}$.

Niestety, stopień komplikacji zapisu wzrasta wraz z usunięciem skrótów definicyjnych:

$(A1.1)^3\ ((\alpha \wedge \sim \alpha) \wedge \sim (\alpha \wedge \sim \alpha) \wedge \sim ((\alpha \wedge \sim \alpha) \wedge \sim (\alpha \wedge \sim \alpha))) \rightarrow \beta$
$(A1.2)^3\ (\beta \rightarrow ((\alpha \wedge \sim \alpha) \wedge \sim (\alpha \wedge \sim \alpha) \wedge \sim ((\alpha \wedge \sim \alpha) \wedge \sim (\alpha \wedge \sim \alpha))))$
$\rightarrow \sim \beta$.

Ponadto pojawia się problem z wieloznacznością interpretacji zapisu $(\alpha)^{2+1}$. Z jednej strony można bowiem przyjąć, iż $\{\sim (\alpha \wedge \sim \alpha) \wedge \sim ((\alpha \wedge \sim \alpha) \wedge \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)), \alpha, \sim \alpha\} \vdash_{B2} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{B2}$. System B_2 $(n \geq 1)$ spełniałby wówczas kryterium mieszane. Z drugiej natomiast strony, można równie dobrze założyć, iż $\{\sim ((\alpha \wedge \sim \alpha) \wedge \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)), \alpha \wedge \sim \alpha \wedge \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)\} \vdash_{B2} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{B2}$. Omawiany system spełniałby wtedy kryterium jakościowe. Choć z czysto formalnego punktu widzenia, nie ma to większego znaczenia, znaczenia ma z punktu widzenia przyjętej klasyfikacji systemów. Podobne wątpliwości dotyczą pozostałych B_n–systemów.

Twierdzenie 5.2.1. (Bunder 1980) $T(\vdash_{B0}) \supset T(\vdash_{B1}) \supset T(\vdash_{B2}) \supset T(\vdash_{B3}) \supset \ldots$

Kilka lat później, w 1989 roku, Buber zaprezentował hierarchię D_n–systemów $(n \geq 1)$. Motywację do opracowania nowej hierarchii stanowiło spostrzeżenie: „Zdaje się, że nie istnieje żaden szczególny powód, dla którego w aksjomacie $(12)^{(n)}$ $[\beta^{(n)} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow \sim \alpha))$ – $JC]$ nakłada się ograniczenie na formułę β, a nie α" (Bunder 1989, s. 51). Można oczywiście polemizować ze stanowiskiem Bundera. Warunek nałożony na formułę β nie jest dziełem przypadku. Posiada bowiem wymiar filozoficzno-formalny. Para formuł β, $\sim \beta$, nie trywializuje żadnego z C_n–systemów $(n \geq 1)$. Dopiero trójka formuł $\beta^{(n)}$, β, $\sim \beta$, przepełnia każdy C_n–system. Zapis $\beta^{(n)}$ sygnalizuje więc, iż *formuła* β *jest niesprzeczn*a (pojęcie niesprzeczności jest zrelatywizowane do danego C_n–systemu). Jeśli zatem stwierdzimy, że β jest i jednocześnie nie jest niesprzeczna, strywializujemy dany system. Podobnych intuicji, nie odnajdziemy w ograniczeniu nałożonym na formułę α. Zdaje się więc, że motywacja Bundera posiada jedynie wymiar czysto formalny.

Zbiór aksjomatów D_n–systemów $(n \geq 1)$ składa się z następujących formuł:

(AC_ω) α, o ile α jest aksjomatem systemu C_ω
$(A11)^{(n)}\ \beta^{(n)} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow \sim \alpha))$
$(A11b)^{(n)}\ \alpha^{(n)} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow \sim \alpha))$

Jedyną pierwotną regułą wnioskowania jest reguła odrywania. Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą (RO) definiują relację konsekwencji $\vdash_{Dn}$.

W C_n–systemach da Costy ($n \geq 1$) aksjomat $(A11)^{(n)}$ równoważny jest formule $(A11)^{(n)*}$ $\alpha^{(n)} \rightarrow (\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta))$. Analogicznie w D_n–systemach Bundera ($n \geq 1$). Aksjomat $(A11b)^{(n)}$ równoważny jest $(A11b)^{(n)*}$ $\beta^{(n)} \rightarrow (\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta))$. Aby to wykazać, pokażmy na początek, że formuła $(A11)^{(n)*}$ jest tezą D_n–systemów ($n \geq 1$).

Dowód dla $(A11b)^{(n)*}$ $\beta^{(n)} \rightarrow (\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta))$:

(1) $\beta^{(n)}$	*zał. na mocy tw. o ded.*
(2) α	*zał. na mocy tw. o ded.*
(3) $\sim \alpha$	*zał. na mocy tw. o ded.*
(4) $\beta^{(n)} \rightarrow ((\sim \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\sim \beta \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \sim \beta))$	$(A11b)^{(n)}$
(5) $(\sim \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\sim \beta \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow \sim \sim \beta)$	(4), (1), (RO)
(6) $\sim \beta \rightarrow \alpha$	(H1), (2), (RO)
(7) $\sim \beta \rightarrow \sim \alpha$	(H1), (3), (RO)
(8) $\sim \sim \beta$	(5), (6), (7), (RO)
(9) β	(*nn*), (8), (RO)
$\beta^{(n)} \rightarrow (\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta))$	*tw. o ded.*, (1), (2), (3), (9).

Wykażemy teraz, że formuła $(A11b)^{(n)}$ jest wyprowadzalna w każdym D_n–systemie ($n \geq 1$), w którym $(A11b)^{(n)}$ zastąpiono aksjomatem $(A11b)^{(n)*}$.

Dowód dla $(A11b)^{(n)}$ $\alpha^{(n)} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow \sim \alpha))$:

(1) $\alpha^{(n)}$	*zał. na mocy tw. o ded.*
(2) $\alpha \rightarrow \beta$	*zał. na mocy tw. o ded.*
(3) $\alpha \rightarrow \sim \beta$	*zał. na mocy tw. o ded.*
(4) $\alpha^{(n)} \rightarrow (\beta \rightarrow (\sim \beta \rightarrow \sim \alpha))$	$(A11b)^{(n)*}$
(5) $\beta \rightarrow (\sim \beta \rightarrow \sim \alpha)$	(4), (1), (RO)
(6) $\alpha \rightarrow (\sim \beta \rightarrow \sim \alpha)$	(*ps*), (2), (5)
(7) $\sim \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \sim \alpha)$	(*pk*), (6), (RO)
(8) $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \sim \alpha)$	(*ps*), (3), (7)
(9) $\alpha \rightarrow \sim \alpha$	(*psk*) (8), (RO)
(10) $\sim \alpha \rightarrow \sim \alpha$	(*pt*)
(11) $(\alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow ((\sim \alpha \rightarrow \sim \alpha) \rightarrow ((\alpha \vee \sim \alpha) \rightarrow \sim \alpha)))$	(H8)
(12) $\sim \alpha$	(11), (10), (9), (*tnd*), (RO)
$\alpha^{(n)} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow \sim \alpha))$	*tw. o ded.*, (1), (2), (3), (12).

Alternatywna aksjomatyzacja D_n–systemów ($n \geq 1$) prezentuje się następująco:

(AC$_\omega$) α, o ile α jest aksjomatem systemu C_ω
(A11)$^{(n)*}$ $\alpha^{(n)} \to (\alpha \to (\sim \alpha \to \beta))$
(A11b)$^{(n)*}$ $\beta^{(n)} \to (\alpha \to (\sim \alpha \to \beta))$
(RO) $\alpha, \alpha \to \beta \,/\, \beta$.

Trudno jest wskazać intuicje filozoficzne, które legły u podstaw aksjomatu (A11b)$^{(n)*}$. Para formuł $\alpha, \sim \alpha$ nie trywializuje żadnego z D_n–systemów ($n \geq 1$). Dowolną formułę β implikuje trójka formuł: $\beta^{(n)}, \alpha, \sim \alpha$.

W D_n–systemach ($n \geq 1$) wyprowadzalne są dwa warianty zasady *ex falso quodlibet*:

(EFQ)$^{(n)}$ $\alpha^{(n)}, \alpha, \sim \alpha \,/\, \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{Dn}$, $n \geq 1$
(EFQ)$^{(n)*}$ $\beta^{(n)}, \alpha, \sim \alpha \,/\, \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{Dn}$, $n \geq 1$.

Reguła (EFQ)$^{(n)}$ jest doskonale znana za sprawą C_n–systemów ($n \geq 1$) da Costy. Z kolei reguła Bundera, (EFQ)$^{(n)*}$, wyraża pojęcie przepełnienia w dość niestandardowy sposób. Nie wystarczy para formuł sprzecznych: $\alpha, \sim \alpha$, żeby strywializować dany D_n–system. Do tego niezbędne jest jeszcze jedno założenie: wniosek musi być niesprzeczny.

Łatwo dostrzec, iż $\{\alpha, \sim \alpha\} \not\vdash_{Dn} \beta$, dla pewnych $\alpha, \beta \in F_{Dn}$, ale zarówno $\{\alpha^{(n)}, \alpha, \sim \alpha\} \vdash_{Dn} \beta$, jak i $\{\beta^{(n)}, \alpha, \sim \alpha\} \vdash_{Dn} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{Dn}$. Spełnione jest zatem, i to w dwójnasób, kryterium mieszane.

Twierdzenie 5.2.2. (Bunder 1989) $T(\vdash_{D1}) \supset T(\vdash_{D2}) \supset T(\vdash_{D3}) \supset T(\vdash_{D4}) \supset \ldots$

Wynik nie jest niczym zaskakującym. Każdy kolejny system jest słabszy od systemu go poprzedzającego. Bardziej interesujące wydaje się pytanie o relację D_n–systemów do hierarchii systemów da Costy.

Twierdzenie 5.2.3. (*ibid.*) $T(\vdash_{Cn}) \subset T(\vdash_{Dn})$, dla $n \geq 1$.

Dowód. Polega na wykazaniu, iż formuły (A12a)$^{(n)}$ $(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \to (\alpha \wedge \beta)^{(n)}$, (A12b)$^{(n)}$ $(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \to (\alpha \vee \beta)^{(n)}$, (A12c)$^{(n)}$ $(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \to (\alpha \to \beta)^{(n)}$ oraz (A13)$^{(n)}$ $\alpha^{(n)} \to (\sim \alpha)^{(n)}$ są wyprowadzalne w systemach Bundera, oraz że formuła (A11b)$^{(n)*}$ $\beta^{(n)} \to (\alpha \to (\sim \alpha \to \beta))$ nie jest tezą żadnego z C_n–systemów da Costy[9].

[9] Szczegóły zob. Bunder, M. W. (1989), *Some Results in Some Subsystems and in an Extension of Cn*, „The Journal of Non-Classical Logic", 6/1, s. 51–55.

5.3. LOGIKI NIESPRZECZNOŚCI FORMALNEJ (*LFI*)

Pierwowzoru systemów *LFI* należy upatrywać w C_n–systemach ($n \geq 1$). W odróżnieniu jednak od systemów da Costy, systemy *LFI* umożliwiają formalizację pojęcia *sprzeczności* oraz *niesprzeczności* za pomocą specjalnego spójnika pierwotnego.

Definicja 5.3.1. (Carnielli, Coniglio, Marcos 2007) Logikę $\langle F, \vdash \rangle$ nazywamy *Logiką Formalnej Niesprzeczności* wtw, gdy relacja $\vdash$ nie jest eksplozywna oraz spełniony jest warunek: $\{\approx \alpha, \alpha, \sim \alpha\} \vdash \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F$ i pewnego spójnika $\approx$.

Prezentację hierarchii systemów *LFI*, rozpoczniemy od omówienia własności systemu C_{min}. Z syntaktycznego punktu widzenia, C_{min} można traktować jako rozszerzenie systemu C_ω da Costy, bądź *PI* Batensa[10]. W pierwszym przypadku zbiór aksjomatów C_ω wzbogacony zostaje o jeden z tzw. paradoksów implikacji, tzn.:

(pD) $\alpha \vee (\alpha \to \beta)$,

lub równoważnie:

(pP) $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$.

W drugim, zbiór aksjomatów *PI* rozszerzamy o prawo podwójnej negacji:

(nn) $\sim \sim \alpha \to \alpha$.

Jedyną pierwotną, nieaksjomatyczną regułą wnioskowania jest (RO) $\alpha, \alpha \to \beta / \beta$. Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą (RO) definiują relację konsekwencji $\vdash_{Cmin}$.

Niech F_{Cmin} oznacza zbiór wszystkich formuł systemu C_{min}.

Twierdzenie 5.3.1. (o dedukcji) $\Gamma \vdash_{Cmin} \alpha \to \beta$ wtw, gdy $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{Cmin} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{Cmin}$, $\Gamma \subseteq F_{Cmin}$.

System C_{min} ma szereg ciekawych własności. Na przykład, żadna formuła, której głównym spójnikiem jest negacja nie jest tezą systemu C_{min}. Oznacza to, że C_{min} spełnia pierwsze kryterium da Costy: prawo niesprzeczności (pn) $\sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$ nie jest tezą systemu. Tezą C_{min} nie jest także prawo przepełnienia (efq) $\alpha \to (\sim \alpha \to \beta)$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{Cmin}$. Zbiór $\{\alpha, \sim \alpha\}$ nie trywializuje C_{min}.

Niech $\{0, 1\}$ będzie zbiorem wartości logicznych.

---

[10] Por. §§ 2.6, 3.1.

Definicja 5.3.2. (Carnielli, Marcos 1999) C_{min}–wartościowaniem nazywamy funkcję v, v: $F_{Cmin} \longrightarrow \{0, 1\}$, taką, że:

(*v1*) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ lub $v(\beta) = 1$

(*v2*) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ oraz $v(\beta) = 1$

(*v3*) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$ lub $v(\beta) = 1$

(*v4a*) jeśli $v(\sim \alpha) = 0$, to $v(\alpha) = 1$

(*v5a*) jeśli $v(\sim \sim \alpha) = 1$, to $v(\alpha) = 1$.

Definicja 5.3.3. Formuła α jest C_{min}–tautologią (symbolicznie, $\models_{Cmin} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego C_{min}–wartościowania v, $v(\alpha) = 1$. Formuła α jest semantyczną konsekwencją zbioru formuł Γ (symbolicznie, $\Gamma \models_{Cmin} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego C_{min}–wartościowania v, jeśli $v(\beta) = 1$ dla każdego $\beta \in \Gamma$, to $v(\alpha) = 1$.

Twierdzenie 5.3.2. (Carnielli, Marcos 1999) $\Gamma \models_{Cmin} \alpha$ wtw, gdy $\Gamma \vdash_{Cmin} \alpha$, dla dowolnych $\Gamma \subseteq F_{Cmin}$ oraz $\alpha \in F_{Cmin}$.

System C_{min} nie jest bazowym systemem hierarchii logik niesprzeczności formalnej. Rolę systemu bazowego pełni *mbC*.

Język systemu *mbC*, prócz zmiennych zdaniowych i standardowych spójników logicznych, tj. negacji, implikacji, koniunkcji i alternatywy, zawiera dodatkowo tzw. spójnik niesprzeczności (ang. *consistency operator*). Spójnik niesprzeczności „$\circ$" jest spójnikiem jednoargumentowym. Zapis „$\circ\alpha$" rozumiany jest jako formuła α *jest niesprzeczna*. Spójnik „$\circ$" jest pewnego rodzaju znacznikiem, indeksuje formuły. Jeśli więc uznamy daną formułę α za niesprzeczną, wtedy para formuł α, $\sim \alpha$ nie będzie już akceptowalna. Formuła niesprzeczna, „$\circ\alpha$", wraz z parą formuł sprzecznych, α i $\sim \alpha$ trywializują system. Prawem systemu *mbC* powinna być zatem formuła $\circ\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta))$. I tak się też dzieje. Do zbioru aksjomatów systemu *mbC* należą:

(AH^+) α, o ile α jest aksjomatem pozytywnej części logiki Hilberta

(*pD*) $\alpha \vee (\alpha \rightarrow \beta)$

(*tnd*) $\alpha \vee \sim \alpha$

(*efq*)$^\circ$ $\circ\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta))$.

Jedyną pierwotną, nieaksjomatyczną regułą inferencji jest reguła odrywania (RO)[11]. Zbiór schematów aksjomatycznych wraz z regułą (RO) definiują relację konsekwencji $\vdash_{mbC}$.

[11] W literaturze, można natknąć się na jeszcze inną aksjomatykę systemu *mbC*, wyrażoną w języku implikacyjno-negacyjnym wzbogaconym o spójnik niesprzeczności. Zob. Coniglio, M.E., Rodrigues, T.G. (2014), *Some Investigations on mbC and mCi*, [w:] Mortari, C. A. (red.) *Tópicos de lógicas não clássicas*, Florianópolis, NEL/UFSC, s. 11–70.

Żadna formuła o postaci $\circ\alpha$ nie jest tezą *mbC*[12]. W systemie *mbC* reguła *ex falso quodlibet* podlega pewnym ograniczeniom. Dowolna formuła β nie wynika ani ze zbioru $\{\alpha, \sim \alpha\}$, ani $\{\circ\alpha, \sim \alpha\}$, ani też ze zbioru $\{\circ\alpha, \alpha\}$. Prawdą jest za to:

$\{\circ\alpha, \alpha, \sim \alpha\} \vdash_{mbC} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{mbC}$[13].

Obecność formuły specjalnego typu, tj. $\circ\alpha$, pośród pary $\alpha, \sim \alpha$ trywializuje system *mbC*. Przypomnijmy, że analogiczna zależność zachodzi w systemie C_1 da Costy. Para formuł $\alpha, \sim \alpha$, nie trywializuje systemu C_1. Dopiero trójka formuł α°, $\alpha, \sim \alpha$, przepełnia system[14]. Nietrudno dostrzec źródło inspiracji twórców *LFI*. Widać daleko idące podobieństwo między rolą, jaką odgrywa w systemie *mbC* spójniki „$\circ$", a funkcją jaką spełnia prawo niesprzeczności w C_1 da Costy. Pamiętajmy jednak, że chociaż $\{\circ\alpha\} \vdash_{mbC} \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$ oraz $\{\alpha \wedge \sim \alpha\} \vdash_{mbC} \sim\circ\alpha$, to jednak $\{\sim (\alpha \wedge \sim \alpha)\} \nvdash_{mbC} \circ\alpha$ tudzież $\{\sim\circ\alpha\} \nvdash_{mbC} \alpha \wedge \sim \alpha$. Spójnika niesprzeczności nie wolno więc utożsamiać z prawem $(pn) \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$.

Spójnik „$\circ$" ma jeszcze jedną interesującą własność. Dzięki niemu można zdefiniować spójnik tzw. silnej negacji:

Definicja 5.3.4. $\sim^* \alpha := \sim \alpha \wedge \circ\alpha$.

W rezultacie tezą systemu *mbC* staje się formuła $(efq)^{\sim *}\ \alpha \rightarrow (\sim^* \alpha \rightarrow \beta)$, reguła $(EFQ)^\circ\ \circ\alpha, \alpha, \sim \alpha\ /\ \beta$, podlega zaś pewnemu uproszczeniu:

$(EFQ)^{\sim *}\ \alpha, \sim^* \alpha\ /\ \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{mbC}$.

Spójnika silnej negacji nie należy utożsamiać z negacją klasyczną. Tezą *mbC* nie jest ani formuła $(tnd)^{\sim *}\ \alpha \vee \sim^* \alpha$, ani $(nn)^{*\sim *}\ \alpha \rightarrow \sim^* \sim^* \alpha$.

Negację klasyczną definiujemy w odmienny sposób:

Definicja 5.3.5. $\neg\, \alpha := \alpha \rightarrow (\alpha \wedge \sim \alpha)$[15].

Oprócz charakterystyki syntaktycznej, system *mbC* doczekał się również prezentacji semantycznej.

Definicja 5.3.6. Funkcję v, $v: F_{mbC} \longrightarrow \{0, 1\}$, nazywamy *mbC*–wartościowaniem, gdy:

---

[12] Carnielli, W., Coniglio, M.E., Marcos, J. (2007), *Logics of Formal Inconsistency*, [w:] Gabbay, D., Guenthner, F. (red.), *Handbook of Philosophical Logic*, Kluwer, Netherlands, *Twierdzenie 47*.

[13] F_{mbC} oznacza zbiór wszystkich formuł systemu *mbC*.

[14] $\alpha^{o} := \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$.

[15] Por. § 2.6, *Definicja 2.6.2*.

($v1$) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ lub $v(\beta) = 1$

($v2$) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 1$ oraz $v(\beta) = 1$

($v3$) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ wtw, gdy $v(\alpha) = 0$ lub $v(\beta) = 1$

($v4$) jeśli $v(\sim \alpha) = 0$, to $v(\alpha) = 1$

($v5$) jeśli $v(\circ\alpha) = 1$, to $v(\alpha) = 0$ lub $v(\sim \alpha) = 0$.

Definicja 5.3.7. Formuła α jest *mbC*–tautologią ($\models_{mbC} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego *mbC*–wartościowania v, $v(\alpha) = 1$. Formuła α jest semantyczną konsekwencją zbioru formuł Γ ($\Gamma \models_{mbC} \alpha$) wtw, gdy dla dowolnego *mbC*–wartościowania v, jeśli $v(\beta) = 1$ dla każdego $\beta \in \Gamma$, to $v(\alpha) = 1$.

Twierdzenie 5.3.3. (Carnielli, Coniglio, Marcos 2007) $\Gamma \models_{mbC} \alpha$ wtw, gdy $\Gamma \vdash_{mbC} \alpha$, dla dowolnych $\Gamma \subseteq F_{mbC}$, $\alpha \in F_{mbC}$.

Widoczne jest pewne podobieństwo między systemem *mbC* a prezentowanym w § 3.2 systemem B^1. Przypomnijmy, system B^1 definiują (AH$^+$), (*pP*), (*tnd*) oraz $(efq)^2$ $\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow (\sim \sim \alpha \rightarrow \beta))$. Jedyną pierwotną, nieaksjomatyczną regułą wnioskowania systemu jest reguła odrywania. Formuła $(efq)^2$ nie jest jednak wyprowadzalna w *mbC*. Aby się o tym przekonać, wystarczy nieco zmodyfikować matrycę logiki antynomii, tj.:

$$\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, \{1, 2\}, \rightarrow, \wedge, \vee, \sim, \circ \rangle,$$

przy czym, zbiór $\{0, 1, 2\}$ zawiera wartości logiczne, $\{1, 2\}$ to zbiór wartości wyróżnionych w matrycy $\mathcal{M}$, spójniki zdaniowe definiują tabelki:

($\wedge$)	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

($\vee$)	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

	($\sim$)
0	1
1	0
2	2

($\rightarrow$)	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	0	1	2

	($\circ$)
0	1
1	1
2	0

Wszystkie aksjomaty systemu *mbC* przyjmują wartości wyróżnione, reguła odrywania także je dziedziczy. Formuła $(efq)^2$ jest niezależna względem aksjomatyki *mbC*: $2 \rightarrow (\sim 2 \rightarrow (\sim \sim 2 \rightarrow 0)) = 2 \rightarrow (2 \rightarrow (\sim 2 \rightarrow 0)) = 2 \rightarrow (2 \rightarrow (2 \rightarrow 0)) = 2 \rightarrow (2 \rightarrow 0) = 2 \rightarrow 0 = 0$.

Wróćmy do dalszej analizy systemów *LFI*. Jeśli zbiór aksjomatów systemu *mbC* wzbogacimy o formułę:

$(k)\ \circ\alpha \vee (\alpha \wedge \sim \alpha)$,

uzyskamy system *Bk*. Zdaniem niektórych logików[16] to właśnie system *Bk*, a nie *mbC* powinien stanowić bazę formalną dla systemów *LFI*. Aksjomaty systemu *Bk* w pełniejszy bowiem sposób mają charakteryzować spójnik niesprzeczności. W *mbC* mowa jest jedynie o tym, że żadna formuła nie jest równocześnie sprzeczna i niesprzeczna. Formuła zarazem sprzeczna i niesprzeczna trywializuje system. W systemie *Bk* mowa jest o czymś więcej: każda formuła jest niesprzeczna, albo sprzeczna.

Oznaczmy przez $\mathrm{T}(\vdash_{mbC})$ zbiór wszystkich tez systemu *mbC*, przez $T(\vdash_{Bk})$ – zbiór wszystkich tez systemu *Bk*.

Twierdzenie 5.3.4. $T(\vdash_{mbC}) \subset T(\vdash_{Bk})$.

Dodanie do zbioru aksjomatów systemu *mbC* dwóch formuł:

$(ci) \sim \circ\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \sim \alpha)$

$(cc)^n\ \circ\sim^n \circ\alpha$, dla $n \geq 0$,

oraz następujących warunków (do definicji *mbC*–wartościowania):

$(v6a)$ jeśli $v(\sim \circ\alpha) = 1$, to $v(\alpha) = 1$ i $v(\sim \alpha) = 1$

$(v6b)$ $v(\circ\sim^n \circ\alpha) = 1$, dla $n \geq 0$,

spowoduje, że otrzymamy system *mCi*. Zauważmy, iż zarówno $\vdash_{mCi} (\alpha \wedge \sim \alpha) \rightarrow \sim \circ\alpha$ jak i $\vdash_{mCi} \sim \circ\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \sim \alpha)$, co więcej: $\{\circ\alpha, \sim \circ\alpha\} \vdash_{mCi} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{mCi}$. W przeciwieństwie do zbioru $\{\alpha, \sim \alpha\}$, para formuł $\circ\alpha$, $\sim \circ\alpha$ trywializuje system *mCi*. Wykluczamy tym samym sytuację, w której α zarazem jest i nie jest formułą niesprzeczną. Warto w tym miejscu nadmienić, iż system *mCi* można zdefiniować aksjomatycznie na kilka innych sposobów. Pierwszy, polega na zastąpieniu $(cc)^n$ innym schematem aksjomatycznym, mianowicie:

$(\sim\circ)^n \sim^{n+2} \circ\alpha \rightarrow \sim^n \circ\alpha$, gdzie $n \geq 0$.

Wówczas do charakterystyki *mbC*–wartościowania, oprócz $(v6a)$, dodajemy warunek:

---

[16] Zob. Avron, A., Konikowska, B., Zamansky, A. (2012), *Modular Construction of Cut-free Sequent Calculi for Paraconsistent Logics,* [w:] *Proceeding LICS ,12 Proceedings of the 2012 27th Annual IEEE/ACM Symposium on Logic in Computer Science,* New Orleans, Louisiana, s. 85–94.

$(v6b)^*$ jeśli $v(\sim^{n+2} \circ\alpha) = 1$, to $v(\sim^{n} \circ\alpha) = 1$, $n \geq 0$.

Para formuł $\sim^{n} \circ\alpha$, $\sim^{n+1} \circ\alpha$ (dla $n \geq 0$) trywializuje system *mCi*. Zachodzi bowiem wynikanie:

$\{\sim^{n} \circ\alpha, \sim^{n+1} \circ\alpha\} \vdash_{mCi} \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{mCi}$, $n \geq 0$.

Żadna formuła nie może jednocześnie być i nie być niesprzeczna. Tezą musi być więc formuła $(pn)^{\circ} \sim (\circ\alpha \wedge \sim \circ\alpha)$, lub ogólniej: $\sim (\sim^{n} \circ\alpha \wedge \sim^{n+1} \circ\alpha)$, $n \geq 0$.

Drugi sposób polega na wprowadzeniu do języka systemu *mCi* dodatkowego spójnika jednoargumentowego, tzw. spójnika sprzeczności:

Definicja 5.3.8. $\bullet\alpha := \sim \circ\alpha$.

Zapis „$\bullet\alpha$" rozumiany jest intuicyjnie jako formuła α *jest sprzeczna* lub, zgodnie z podaną definicją, formuła nie jest niesprzeczna.

Spójnik sprzeczności umożliwia uproszczenie reguły *ex falso quodlibet* do postaci:

$(\mathrm{EFQ})^{\circ\bullet}$ $\circ\alpha, \bullet\alpha / \beta$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_{mCi}$.

Para formuł $\circ\alpha$, $\bullet\alpha$ trywializuje system *mCi*. Tezą systemu jest specjalna wersja prawa niesprzeczności: $(pn)^{\circ\bullet} \sim (\circ\alpha \wedge \bullet\alpha)$. Ponadto, spójnik „$\bullet$" można traktować jako spójnik pierwotny (zamiast „$\circ$"). Do zbioru aksjomatów systemu *mCi* należałyby wtedy, oprócz aksjomatów (AH^{+}), (pD) i (tnd), formuły:

$(efq)^{\bullet} \sim \bullet\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow (\sim \alpha \rightarrow \beta))$
$(ci)^{\bullet}\ \bullet\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \sim \alpha)$
$(cc)^{n} \sim \bullet\sim^{n} \bullet\alpha$, dla $n \geq 0$[17].

Twierdzenie 5.3.5. (Carnielli, Marcos 2002) $\Gamma \models_{mCi} \alpha$ wtw, gdy $\Gamma \vdash_{mCi} \alpha$, dla dowolnych $\Gamma \subseteq F_{mCi}$, $\alpha \in F_{mCi}$.

Jeśli aksjomatykę systemu *mCi* wzbogacimy o nową formułę:

$(nn) \sim \sim \alpha \rightarrow \alpha$,

otrzymamy system *Ci*. System ten definiują zatem syntaktycznie aksjomaty C_{min} wraz z formułami: $(efq)^{\circ}$, (ci) oraz $(cc)^{n}$. Jedyną nieaksjomatyczną, pierwotną regułą wnioskowania jest (RO) $\alpha, \alpha \rightarrow \beta / \beta$. Dodając do zbioru aksjomatów systemu *Ci*, formułę:

$(cl) \sim (\alpha \wedge \sim \alpha) \rightarrow \circ\alpha$,

---

[17] Carnielli, W., Coniglio, M.E., Marcos, J. (2007), *op. cit.*, s. 60.

otrzymamy zaś *Cil*. I wreszcie, wzbogacając aksjomatyzację *Cil* o aksjomat:

$(nn)^{*}\ \alpha \rightarrow \sim\sim\alpha$

uzyskamy system *Cile*[18].

Dotychczasowe rozważania podsumowuje ostatnie już w tym rozdziale twierdzenie:

Twierdzenie 5.3.6. $T(\vdash_{mbC}) \subset T(\vdash_{Bk}) \subset T(\vdash_{mCi}) \subset T(\vdash_{Ci}) \subset T(\vdash_{Cil}) \subset T(\vdash_{Cile})$.

Każdy z wymienionych systemów spełnia tzw. *kryterium mieszane*. Para formuł α, $\sim\alpha$ nie przepełnia żadnego z systemów. Systemy trywializuje trójka formuł: $\circ\alpha$, α, $\sim\alpha$. Każdy z prezentowanych systemów jest także przykładem *LFI*. Systemy te zaliczymy do grona logik parakonsystentnych, w których pojęcie niesprzeczności (tudzież sprzeczności) wyrażalne jest bezpośrednio w ich języku[19].

---

[18] Zob. *ibid*., *Definicja 105*.

[19] Zob. Carnielli, W., Coniglio, M.E. (2016), *Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science, 40, Springer International Publishing.

ZAKOŃCZENIE

W książce zaproponowano pewien schemat klasyfikacji systemów logiki parakonsystentnej. Przyjęty paradygmat eksponowanej problematyki narzucił pewne ograniczenia w doborze prezentowanych systemów. Tłumaczy to powody, dla których w książce nie znalazły miejsca rozważania na temat logiki *N4* Nelsona[1], logiki *CLuNs* Batensa[2], czy też tzw. logiki komplementarności autorstwa da Costy i Krausego[3].

We wszystkich omawianych systemach wiodącą rolę odgrywała reguła odrywania. Zazwyczaj stanowiła ona jedyną, nieaksjomatyczną regułę inferencji. Z metodologicznego punktu widzenia uznaliśmy bowiem, iż reguła ta jest najbardziej intuicyjną, podstawową regułą wnioskowania. Przyjęte założenie skutkuje licznymi konsekwencjami. Nierozstrzygnięte, na przykład, pozostaje pytanie, czy system, w którym akceptuje się prawo przepełnienia, odrzucając przy tym regułę odrywania i regułę (EFQ), można uznać za system logiki parakonsystentnej? Przykładem takiego formalizmu jest pochodzący z 1959 roku system Henryka Hiża[4]. Przypomnijmy, system Hiża (w skrócie *H*), definiują syntaktycznie dwa aksjomaty:

$$\sim(\alpha \to \beta) \to \alpha$$
$$\sim(\alpha \to \beta) \to \sim\beta$$

---

[1] Zob. Nelson, D. (1949), *Constructible Falsity*, „Journal of of Symbolic Logic", 14/1, s. 16–26; Odintsow, S. (2008), *Constructive Negations and Paraconsistency*, Springer, Netherlands, s. 131–157; Kamide, N. (2005), *Natural Deduction Systems for Nelson's Paraconsistent Logic and its Neighbors*, „Journal of Applied Non-Classical Logics", 15/4, s. 405–435.

[2] Zob. Batens, D., de Clercq, K. (2004), *A Rich Paraconsistent Extension of Full Positive Logic*, „Logique et Analyse", 185–188, s. 227–257.

[3] Zob. da Costa, N.C.A., Krause, D. (2003a), *The Logic of Complementarity*, Pré-Publicações do Departamento de Filosofia Universidade Federal de Santa Catarina, 8/63; da Costa, N.C.A., Krause, D. (2003b), *Remarks on the Applications of Paraconsistent Logic to Physics*, Pré-Publicações do Departamento de Filosofia Universidade Federal de Santa Catarina, 8/62.

[4] Zob. Hiż, H. (1959), *Extendible Sentential Calculus*, „The Journal of Symbolic Logic", 24/3, s. 193–202.

oraz trzy reguły inferencji:

$$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \,/\, \alpha \to \gamma$$
$$\alpha \to (\beta \to \gamma), \alpha \to \beta \,/\, \alpha \to \gamma$$
$$\sim \alpha \to \beta, \sim \alpha \to \sim \beta \,/\, \alpha.$$

Hiż udowodnił, iż każda tautologia klasycznego rachunku zdań jest twierdzeniem systemu *H*. Powtórzmy raz jeszcze, *każda tautologia* … a więc w szczególności do zbioru tez systemu *H* należy prawo przepełnienia $\alpha \to (\sim \alpha \to \beta)$. Zauważmy jednak, że system *H* nie jest zamknięty ani na regułę odrywania, ani regułę (EFQ). Dowód (Hiż 1959, s. 195). Rozważmy matrycę:

$$\mathcal{M}_H = \langle\{1, 2, 0\}, \{1, 2\}, \to, \sim\rangle,$$

w której {1, 2, 0} pełni funkcję zbioru wartości logicznych, {1, 2} jest zbiorem wartości wyróżnionych matrycy $\mathcal{M}_H$, spójniki implikacji i negacji definiują tabelki:

$(\to)$	1	2	0
1	1	0	0
2	1	1	1
0	1	1	1

	$(\sim)$
1	2
2	1
0	1

Aksjomaty systemu *H* zawsze przyjmują wartości wyróżnione, podane trzy reguły wnioskowania również je dziedziczą. W przypadku reguły odrywania i reguły (EFQ) tak już nie jest. System Hiża jest więc przykładem formalizmu, w których akceptując prawo przepełnienia, odrzuca się zarówno regułę odrywania jak i regułę (EFQ)[5].

[5] Podobne własności posiada system J_3 Arrudy i da Costy. Zob. Arruda, A.I., da Costa, N.C.A. (1970), *Sur le schéma de la séparation*, „Nagoya Mathematical Journal", 38, s. 71–84; Sylvan, R., Urbas, I. (1993), *Paraconsistent Classical Logic*, „Logique et Analyse", 141–142, s. 10–11.

BIBLIOGRAFIA

Abe, J.M. (red.) (2015), *Paraconsistent Intelligent-Based Systems: New Trends in the Applications of Paraconsistency*, Intelligent Systems Reference Library, 94, Springer International Publishing.

Achtelik, G., Dubikajtis, L., Dudek, E., Kanior, J. (1981), *On Independence of Axioms of Jaśkowski Discussive Propositional Calculus*, „Reports on Mathematical Logic", 11, s. 3–11.

Alves, E.H. (1992), *The First Axiomatization of a Paraconsistent Logic*, „Bulletin of the Section of Logic", 21/1, s. 19–20.

Anderson, A.R., Belnap, N.D. (1962), *Tautological Enatailments*, „Philosophical Studies", 13/1–2, s. 9–24.

Araujo, A.L., Alves, E.H., Guerzoni, J.A.D. (1987), *Some Relations Between Modal and Paraconsistent Logic*, „The Journal of Non-Classical Logic", 4/2, s. 33–44.

Arieli, O., Avon, A., Zamansky, A. (2011a), *Ideal Paraconsistent Logics*, „Studia Logica", 99/1–3, s. 31–60.

Arruda, A.I. (1975), *Remarques sur les systèmes Cn*, „Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris (A-B)", 280, s. 1253–1256.

Arruda, A.I. (1977), *On Imaginary Logic of N.A. Vasiliev*, [w:] Arruda A.I., Da Costa N.C.A., Chuaqui R. (red.), *Nonclassical Logics, Model Theory and Computability*, NorthHolland, Amsterdam–New York–Oxford, s. 3–24.

Arruda, A.I. (1989), *Aspects of the Historical Development of Paraconsistent Logic*, [w:] Priest, G., Routley, R., Norman, J. (red.), *Paraconsistent Logic*, Philosophia, München–Hamden–Wien, s. 99–130.

Arruda, A.I., Alves, E.H. (1979a), *Some Remarks on the Logic of Vagueness*, „Bulletin of the Section of Logic", 8/3, s. 133–138.

Arruda, A.I., Alves, E.H. (1979b), *A Semantical Study of Some Systems of Vagueness Logic*, „Bulletin of the Section of Logic", 8/3, s. 139–144.

Arruda, A.I., da Costa, N.C.A. (1970), *Sur le schéma de la séparation*, „Nagoya Mathematical Journal", 38, s. 71–84.

Asenjo, F.G. (1966), *A Calculus of Antinomies*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 7/1, s. 103–105.

Asenjo, F.G., Tamburini, J. (1975), *Logic of Antinomies*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 16/1, s. 17–44.

Avron, A. (1986), *On an Implication Connective of RM*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 27, s. 201–209.

Avron, A. (1991), *Natural 3-valued Logics – Characterization and Proof Theory*, „The Journal of Symbolic Logic", 56/1, s. 276–294.

Avron, A. (1999), *Negation: Two Points of View*, [w:] Gabbay, D., Wansing, H. (red.), *What is Negation?*, Applied Logic Series, 13, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston, s. 3–22.

Avron, A. (2007a), *Non-deterministic Semantics for Families of Paraconsistent Logics*, [w:] Béziau, J.-Y., Carnielli, W., Gabbay, D.M. (red.), *Handbook of Paraconsistency*, Studies in Logic, 9, College Publications, London, s. 285–320.

Avron, A. (2007b), *Non-deterministic Semantics for Logics with a Consistency Operator*, „Journal of Approximate Reasoning", 45, s. 271–287.

Avron, A. (2008), *5-valued Non-deterministic Semantics for the Basic Paraconsistent Logic mCi*, „Studies in Logic, Grammar and Rhetoric", 14, s. 127–136.

Avron, A., Konikowska, B., Zamansky, A. (2012), *Modular Construction of Cut-free Sequent Calculi for Paraconsistent Logics*, [w:] *Proceeding LICS ,12 Proceedings of the 2012 27th Annual IEEE/ACM Symposium on Logic in Computer Science*, New Orleans, Louisiana, s. 85–94.

Avron, A., Zamansky, A. (2011), *Non-Deterministic Semantics for Logical Systems*, [w:] Gabbay, D.M., Guenthner, F. (red.), *Handbook of Philosophical Logic*, 16, Springer Publishing Company, s. 227–304.

Batens, D. (1980), *Paraconsistent Extensional Propositional Logics*, „Logique et Analyse", 11, s. 195–234.

Batens, D. (1989), *Dynamic Dialectical Logics*, [w:] Priest, G., Routley, R., Norman, J. (red.), *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent*, Philosophia Verlag, Monachium, s. 187–217.

Batens, D. (1999), *Inconsistency-Adaptive Logics*, [w:] Orlowska E. (red.), *Logic at Work. Essays Dedicated to the Memory of Helena Rasiowa*, Physica Verlag (Springer), Heidelberg–New York.

Batens, D. (2000a), *Minimally Abnormal Models in Some Adaptive Logics*, „Synthese", 125, s. 5–18.

Batens, D. (2000b), *A Survey of Inconsistency-Adaptive Logics*, [w:] Batens, D., Mortensen, Ch., Priest G., Van Bendegem, J.P. (red.), *Frontiers of Paraconsistent Logic*, Research Studies Press, Baldock, UK.

Batens, D. (2001), *A General Characterization of Adaptive Logics*, „Logique et Analyse", 173–175, s. 45–68.

Batens, D. (2004), *Extending the Realm of Logic. The Adaptive-Logic Programme*, [w:] Weingartner, P. (red.), *Alternative Logics. Do Sciences Need them?* Springer, Berlin–Heidelberg.

Batens, D., de Clercq, K. (2004), *A Rich Paraconsistent Extension of Full Positive Logic*, „Logique et Analyse", 185–188, s. 227–257.

Bazhanow, W.A. (1990), *The Fate of One Forgotten Idea: Vasiliev and his Imaginary Logic*, „Studies in Soviet Thought", 39, s. 333–341.

Bazhanow, W.A. (2008), *Non-Classical Stems from Classical: N.A. Vasiliev's Approach to Logic and his Reassessment of the Square of Opposition*, „Logica Universalis", 2, s. 71–76.

Błaszczuk, J.J., Dziobiak, W. (1975a), *Remarks on Perzanowski's Modal System*, „Bulletin of the Section of Logic", 4/2, s. 57–64.

Błaszczuk, J.J., Dziobiak, W. (1975b), *Modal Systems Related to S4n of Sobociński*, „Bulletin of the Section of Logic", 4/3, s. 103–108.

Błaszczuk, J.J., Dziobiak, W. (1976), *An Axiomatization of M-counterparts for Some Modal Calculi*, „Reports on Mathematical Logic", 6, s. 3–6.

Błaszczuk, J.J., Dziobiak, W. (1977), *Modal Logics Connected with Systems S4n of Sobociński*, „Studia Logica", 36/3, s. 151–164.

Boczwar, D.A. (1938), *Ob odnom tréhznacnom iscislénii i égo priménénii κ analizu paradoksov klassicéskogo rassirennogo funkcjonal'nogo iscislénia*, „Matematiceskij sbornik", 4, s. 287–308.

Brożek, A., Jadacki, J. (2005), *Reforma terminologii muzycznej*, „Sztuka i Filozofia", 26, s. 206–228.

Buckner, E. (2015), *On the Authenticity of Scotus's Logical Works*, [w:] Hall, A.W., Klima, G. (red.), *Maimonides on God and Duns Scotus on Logic and Metaphysics* (t. 12, *Proceedings of the Society for Medieval Logic and Metaphysics*), Cambridge Scholars Publishing, Cambridge.

Bunder, M.W. (1980), *A New Hierarchy of Paraconsistent Logics, Proceedings of the Third Brazilian Conference On Mathematical Logic*, Sociedade Brasileira de Lógica, São Paulo, s. 13–22.

Bunder, M.W. (1983), *On Arruda and da Costa's logics J1 to J5*, „The Journal of Non-Classical Logic", 2/1, s. 43–48.

Bunder, M.W. (1989), *Some Results in Some Subsystems and in an Extension of Cn*, „The Journal of Non-Classical Logic", 6/1, s. 45–56.

Carnap, R. (1949), *The Logical Syntax of Language*, Routledge & Kegan Paul, London.

Carnielli, W., Coniglio, M.E. (2016), *Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science, 40, Springer International Publishing.

Carnielli, W., Coniglio, M.E., Marcos, J. (2007), *Logics of Formal Inconsistency*, [w:] Gabbay, D., Guenthner, F. (red.), *Handbook of Philosophical Logic*, Kluwer, Netherlands, s. 1–93.

Carnielli, W.A., Lima-Marques, M. (1999), *Society Semantics and Multiple-Valued Logics*, [w:] Carnielli, W.A., D'Ottaviano, I.M.L. (red.), *Advances in Contemporary Logic and Computer Science*, Volume 235 of Contemporary Mathematics Series, American Mathematical Society, s. 33–52.

Carnielli, W.A., Marcos, J. (1999), *Limits for Paraconsistent Calculi*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 40/3, s. 375–390.

Carnielli, W.A., Marcos, J. (2001), *Ex Contradictione Non Sequitur Quodlibet*, Proceedings of the II Annual Conference on Reasoning and Logic, Bucharest.

Carnielli, W.A., Marcos, J. (2002), *A Taxonomy of C-systems*, [w:] Carnielli, W. A., Coniglio, M.E., D'Ottaviano, I.M.L. (red.), *Paraconsistency – the Logical Way to the Inconsistent*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 228, New York, s. 1–94.

Ciuciura, J. (2003/2004), *Logika dyskusyjna*, „Principia", 35–36, s. 279–291.

Ciuciura, J. (2004), *Labelled Tableaux for D2*, „Bulletin of the Section of Logic", 33/4, s. 223–235.

Ciuciura, J. (2005), *On the da Costa, Dubikajtis and Kotas' System of the Discursive Logic, D2*, „Logic and Logical Philosophy", 14/2, s. 235–252.

Ciuciura, J. (2008), *Negations in the Adjunctive Discursive Logic*, „Bulletin of the Section of Logic", 37/3–4, s. 143–160.

Ciuciura, J. (2013), *Non-Adjunctive Discursive Logic*, „Bulletin of the Section of Logic", 42/3–4, s. 169–182.

Ciuciura, J. (2014), *Paraconsistent Heap. A Hierarchy of mbC^n-systems*, „Bulletin of the Section of Logic", 43/3–4, s. 173–182.

Ciuciura, J. (2015a), *Algebraization of Jaśkowski's Paraconsistent Logic D2*, „Studies in Logic, Grammar and Rhetoric", 42/55, s. 173–193.

Ciuciura, J. (2015b), *Paraconsistency and Sette's Calculus P1*, „Logic and Logical Philosophy", 24/2, s. 265–273.

Ciuciura, J. (2015c), *A Weakly-Intuitionistic Logic I1*, „Logical Investigations", 21/2, s. 53–60.

Ciuciura, J. (2017), *Logika parakonsystentna Jaśkowskiego*, „Studia z Filozofii Polskiej", 12, s. 73–86.

Coniglio, M.E., Rodrigues, T.G. (2014), *Some Investigations on mbC and mCi*, [w:] Mortari, C. A. (red.) *Tópicos de lógicas não clássicas*, NEL/UFSC, Florianópolis, s. 11–70.

Courtley, W. J. (1988), *Schools and Scholars in Fourteenth-Century England*, Princeton University Press, Princeton.

D'Ottaviano, I.M.L (1990), *On the Development of Paraconsistent Logic and da Costa's Work*, „The Journal of Non-Classical Logic", 7/1–2, s. 9–72.

D'Ottaviano, I.M.L., Carnielli, W.A., Alves, E.H. (1996), *The Centre for Logic in Campinas and the Development of Logic in Brazil*, „Logique & Analyse", 153–154, s. 15–29.

da Costa N.C.A., Krause, D. (2003a), *The Logic of Complementarity*, „Pré-Publicações do Departamento de Filosofia Universidade Federal de Santa Catarina", 8/63.

da Costa N.C.A., Krause, D. (2003b), *Remarks on the Applications of Paraconsistent Logic to Physics*, Pré-Publicações do Departamento de Filosofia Universidade Federal de Santa Catarina, 8/62.

da Costa, N.C.A. (1963), *Calculs propositionnels pour les systémes formels inconsistants*, „Compte Rendu Acad. des Sciences", 257, s. 3790–3793.

da Costa, N.C.A. (1967), *Une nouvelle hiérarchie de théories inconsistentes*, „Publications du Département Mathématiques de Lyon", 4/3, s. 2–8.
da Costa, N.C.A. (1974), *On the Theory of Paraconsistent Formal Systems*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 15/4, s. 497–510.
da Costa, N.C.A. (1975), *Remarks on Jaśkowski's Discussive Logic*, „Reports on Mathematical Logic", 4, s. 7–16.
da Costa, N.C.A. (1982), *The Philosophical Import of Paraconsistent Logic*, „The Journal of Non-Classical Logic", 1/1, s. 1–19.
da Costa, N.C.A., Alves, E.H. (1977), *A Semantical Analysis of the Calculi Cn*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 18/4, s. 621–630.
da Costa, N.C.A., Arruda A.I. (1970), *Sur le Schéma de la Séparation*, „Nagoya Math. Journal", 38, s. 71–84.
da Costa, N.C.A., Béziau, J.Y (1994), *Théorie de la Valuation*, „Logique et Analyse", 146, s. 95–117.
da Costa, N.C.A., Béziau, J.Y., Bueno, O. (1995a), *Paraconsistent Logic in a Historical Perspective*, „Logique et Analyse", 150–151–152, s. 111–125.
da Costa, N.C.A., Béziau, J.Y., Bueno, O. (1995b), *Aspects of Paraconsistent Logic*, „Bulletin of the IGPL", 3/4, s. 597–624.
da Costa, N.C.A., Bueno, O. (1998), *Belief Change and Consistency*, „Logique et Analyse", 161–162–163, s. 31–56.
da Costa, N.C.A., Doria, F.A. (1995), *On Jaśkowski's Discussive Logics*, „Studia Logica", 54/1, s. 33–60.
da Costa, N.C.A., Dubikajtis, L. (1968), *Sur la logique discursive de Jaśkowski*, „Bulletin de Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences (Série des sciences math., astr. et phys.)", 16/7, s. 551–557.
da Costa, N.C.A., Dubikajtis, L. (1977), *A New Axiomatization for the Discussive Propositional Calculus*, [w:] Arruda, A.I., da Costa, N.C.A., Chuaqui, R. (red.), *Non Classical Logics, Model Theory and Computability*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, s. 45–55.
da Costa, N.C.A., Guillaume R. (1965), *Négations Composées et loi de Peirce Dans les Systémes Cn*, „Portugaliae Mathematica", 24/4, s. 201–210.
da Costa, N.C.A., Loparić, A. (1984), *Paraconsistency, Paracompleteness, and Valuations*, „Logique et Analyse", 27/106, s. 119–131.
da Costa, N.C.A., Marconi, D. (1989), *An Overview of Paraconsistent Logic in the 80's*, „The Journal of Non-classical Logic", 6/1, s. 5–32.
Došen, K. (1992), *The First Axiomatization of Relevant Logic*, „Journal of Philosophical Logic", 21, s. 339–355.
Dubikajtis, L. (1967), *Stanisław Jaśkowski*, „Ruch Filozoficzny", 25/3–4, s. 187–198.
Dubikajtis, L. (1975), *The Life and Works of Stanisław Jaśkowski*, „Studia Logica", 34/2, s. 109–116.

Dunn, J.M., Restall, G. (2002), *Relevance Logic*, [w:] Gabbay, D.M., Guenthner, F. (red.), *Handbook of Philosophical Logic*, 6, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, s. 1–128.

Dunn, J.M. (1972), *A Modification of Parry's Analytic Implication*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 13/2, s. 195–205.

Fernández, V. L., Coniglio, M.E. (2003), *Combining Valuations with Society Semantics*, „Journal of Applied Non-Classical Logics", 13/1, s. 21–46.

Fidel, M.M. (1977), *The Decidability of the Calculi Cn*, „Reports on Mathematical Logic", 8, s. 31–40.

Furmanowski, T. (1975), *Remarks on Discussive Propositional Calculus*, „Studia Logica", 34/1, s. 39–43.

Halldén, S. (1949), *The Logic of Nonsense*, Uppsala Universitets årsskrift, 9, Uppsala.

Hessen, S.I. (1910), *Review of Vasil'év 1910*, „Logos", 2, s. 287–288.

Hiż, H (1959), *Extendible Sentential Calculus*, „The Journal of Symbolic Logic", 24/3, s. 193–202.

Hopcroft, J., Motwani, R., Ullman, J. (2005), *Wprowadzenie do teorii automatów, języków i obliczeń*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Jadczak, R. (1990), *O tzw. Szkole Lwowsko-Warszawskiej*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici", Filozofia XI, 197, s. 19–37.

Jammer, M. (1974), *The Philosophy of Quantum Mechnics: The Interpretations of QM in Historical Perspective*, John Wiley and Sons, New York.

Jaśkowski, S. (1948), *Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*, „Studia Societatis Scientiarum Torunesis", 1/5, s. 57–77.

Jaśkowski, S. (1949), *O koniunkcji dyskusyjnej w rachunku zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*, „Studia Societatis Scientiarum Torunesis", 1/8, s. 171–172.

Johansson, I. (1937), *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, „Compositio Mathematica", 4, s. 119–136.

Kamide, N. (2005), *Natural Deduction Systems for Nelson's Paraconsistent Logic and its Neighbors*, „Journal of Applied Non-Classical Logics", 15/4, s. 405–435.

Kline, G.L. (1965), *N.A. Vasil'ev and the Development of Many-valued Logics*, [w:] Tymieniecka, A.T. (red.), *Contributions to Logic and Methodology in Honour of J.M. Bocheński*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, s. 315–326.

Kohl, M. (1969), *Bertrand Russell on Vagueness*, „Australasian Journal of Philosophy", 47/1, s. 31–41.

Kołmogorow, A.N. (1925), *O zasadzie tertium non datur* (w jęz. rosyjskim), „Matematiceskij sbornik", 32, s. 646–667.

Kotas J. (1975), *Discussive Sentential Calculus of Jaśkowski*, „Studia Logica", 34/2, s. 149–168.

Kotas, J. (1971a), *On the Algebra of Classes of Formulae Jaśkowski's Discussive System*, „Studia Logica", 27, s. 81–90.

Kotas, J. (1971b), *Logical Systems with Implications*, „Studia Logica", 28, s. 101–116.

Kotas, J. (1974a), *On Quantity of Logical Values in the Discussive D2 System and in Modular Logic*, „Studia Logica", 33/3, s. 273–275.

Kotas, J. (1974b), *The Axiomatization of S. Jaśkowski's Discussive System*, „Studia Logica", 33/2, s. 195–200.

Kotas, J., da Costa, N.C.A. (1977), *On Some Modal Logical Systems Defined in Connexion with Jaśkowski's Problem*, [w:] Arruda, A.I., da Costa, N.C.A., Chuaqui, R. (red.), *Non-Classical Logics, Model Theory and Computability*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, s. 57–73.

Kotas, J., da Costa, N.C.A. (1978), *On the Problem of Jaśkowski and Łukasiewicz Logics*, „Bulletin of the Section of Logic", 7/2, s. 91.

Kotas, J., da Costa, N.C.A. (1979), *A New Formulation of Discussive Logic*, „Studia Logica", 38/4, 429–445.

Kotas, J., da Costa, N.C.A. (1989), *Problems of Modal and Discussive Logics*, [w:] Priest, G., Routley, R., Norman, J. (red.), *Paraconsistent Logic*, Philosophia, München–Hamden–Wien, s. 227–244.

Kwiatkowski, T. (1964), *Wasiliewa koncepcja logiki niearystotelesowskiej*, „Ruch Filozoficzny", 22/2–4, s. 212–215.

Laertios, D. (1984), *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, przeł. I. Krońska, PWN, Warszawa.

Locke, J. (1690/1999), *An Essay Concerning Human Understanding*, The Pennsylvania State University, London, Pennsylvania.

Loparić, A. (1986), *A Semantical Study of some Propositional Calculi*, „Journal of Non-Classical Logic", 3, s. 73–95.

Loparić, A., da Costa, N.C.A. (1984), *Paraconsistency, Paracompleteness, and Valuations*, „Logique et Analyse", 106, s. 119–131.

Loparić, A., da Costa, N.C.A. (1986), *Paraconsistency, Paracompleteness, and Induction*, „Logique et Analyse", 113, s. 73–80.

Łukasiewicz, J. (1910), *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*, Akademia Umiejętności, Kraków.

Łukasiewicz, J. (1929), *Elementy logiki matematycznej*, Skrypt autoryzowany, opracowany przez Mojżesza Presburgera, t. 18 z Wydawnictwa Koła Matematyczno-Fizycznego Słuchaczów Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.

Łukasiewicz, J. (1961), *O determinizmie*, [w:] Łukasiewicz, J., *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*, wybór J. Słupecki, PWN, Warszawa.

Łukasiewicz, J. (1997), *Zasada sprzeczności u Arystotelesa*, „Filozofia Nauki", 5/1, s. 147–164.

Malinowski G. (1990), *Logiki wielowartościowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Malinowski, G. (1993), *Many-valued Logics*, Oxford Logic Guides 25, Clarendon Press, Oxford.

Malinowski, G. (2006), *Logiki wielowartościowe*, PWN, Warszawa.
Marcos, J. (1999), *Semânticas de Traduções Possíveis*, IFCH-UNICAMP, Campinas, Brazil.
Marcos, J. (2005), *On a Problem of da Costa*, [w:] Sica, G. (red.), *Essays on the Foundations of Mathematics and Logic*, Polimetrica International Scientific Publisher, Monza, s. 53–69.
Mares, E. D., Meyer, R. K. (2001), *Relevant Logics*, [w:] Goble L. (red.), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Blackwell Publishers, Malden, s. 280–308.
Mares, E.D. (2012a), *Relevance Logic*, [w:] Zalta, E.N. (red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = https://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/logic-relevance/ (dostęp: 25.06.2017).
Mares, E.D. (2012b), *The Logic R: Supplement to Relevace Logic*, [w:] Zalta, E.N. (red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = https://plato.stanford.edu/entries/logic-relevance/logice.html (dostęp 25.06.2017).
Martin, Ch. J. (1986), *William's Machine*, „Journal of Philosophy", 83/10, s. 564–572.
Mazglewski, A. (2005), *Nieścisłości terminologiczne w przepisach prawa polskiego o zawieraniu małżeństw wyznaniowych ze skutkami cywilnymi i ich praktyczne konsekwencje*, „Ius Matrimoniale", 10/16, s. 193–206.
McCall, S. (1966), *Connexive Implication*, „Journal of Symbolic Logic", 31, s. 415–433.
McCall, S. (1967), *Connexive Implication and the Syllogism*, „Mind", 76, s. 346–356.
McCall, S. (2012), *A History of Connexivity*. [w:] Gabbay, D.M., Pelletier J., Woods, J. (red.), *Handbook of the History of Logic*, 11, Logic: A History of its Central Concepts, Elsevier, Amsterdam, s. 415–449.
Meinong, A. (1904), *Über Gegenstandstheorie*, [w:] *Untersuchungen Zur Gegenstandstheorie Und Psychologie*, 1/50, Barth, Leipzig, s. 481–530.
Mortensen, Ch. (1990), *Models for Inconsistent and Incomplete Differential Calculus*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 31, s. 274–285.
Mortensen, Ch. (1995), *Inconsistent Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Nasieniewski, M. (2008), *Wprowadzenie do logik adaptywnych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Mikołaja Kopernika, Toruń.
Nasieniewski, M., Pietruszczak, A. (2008), *The Weakest Regular Modal Logic Defining Jaśkowski's Logic D2*, „Bulletin of the Section of Logic", 37/3–4, s. 197–201.
Nasieniewski, M., Pietruszczak, A. (2009), *New Axiomatizations of the Weakest Regular Modal Logic Defining Jaśkowski's Logic D2*, „Bulletin of the Section of Logic", 38/1–2, s. 45–50.
Nasieniewski, M., Pietruszczak, A. (2012), *On the Weakest Modal Logics Defining Jaskowski's Logic D2 and the D2-Consequence*, „Bulletin of the Section of Logic", 41/3–4, s. 215–232.
Nelson, D. (1949), *Constructible Falsity*, „Journal of Symbolic Logic", 14/1, s. 16–26.

Nowak, M. (1998), *Kripke Semantics for Some Paraconsistent Logics*, „Logica Trianguli", 2, s. 87–101.

Odintsow, S. (2008), *Constructive Negations and Paraconsistency*, Springer, Netherlands.

Omori, H. (2017), *Sette's Logics, Revisited*, [w:] Baltag, A., Seligman, J., Yamada, T. (red.), *International Workshop on Logic, Rationality and Interaction, LORI 2017*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, s. 451–465.

Parry, W.T. (1968), *The Logic of C.I. Lewis*, [w:] Schilpp, P.A. (red.), *The Philosophy of C.I. Lewis*, Cambridge University Press, Cambridge, s. 115–154.

Perzanowski, J. (1975), *On M-fragments and L-fragments of Normal Modal Propositional Logics*, „Reports on Mathematical Logic", 5, s. 63–72.

Perzanowski, J., Pietruszczak, A. (1999), *Preface*, „Logic and Logical Philosophy", 7, s. 5–6.

Pietryga, A. (2004), *Status zasady sprzeczności w świetle logiki współczesnej*, Aureus, Kraków.

Poczobut, R. (1998), *Grahama Priesta parakonsystentna metafizyka zmiany*, „Filozofia Nauki", 6/3–4, s. 57–75.

Poli, R. (1993), *Nicolas A. Vasil'ev (1880–1940)*, „Axiomathes", 3, s. 325–328.

Priest, G. (1979), *The Logic of Paradox*, „Journal of Philosophical Logic", 8/1, s. 219–241.

Priest, G. (1990), *Dialectic and Dialetheic*, „Science and Society", 53, s. 388–415.

Priest, G. (2006), *Doubt Truth to Be a Liar*, Oxford University Press, Oxford.

Priest, G. (2007), *Paraconsistency and Dialetheism*, [w:] Gabbay, D., Woods, J. (red.), *Handbook of the History of Logic*, 8, The Many Valued and Nonmonotonic Turn in Logic, Elsevier, Amsterdam–Oxford, s. 129–204.

Priest, G., R. Routley, and J. Norman (red.), (1989), *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, Philosophia Verlag, Philosophia, München–Hamden–Wien.

Priest, G., Routley, R. (1982), *Lessons from Pseudo Scotus*, „Philosophical Studies", 42, s. 189–199.

Priest, G., Routley, R. (1989), *First Historical Introduction. A Preliminary History of Paraconsistent and Dialethic Approaches*, [w:] Priest, G., Routley R., Norman J. (red.), *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, Philosophia Verlag, Philosophia, München–Hamden–Wien, s. 3–75.

Priest, G., Routley, R. (1984), *Introduction: Paraconsistent Logics*, „Studia Logica", 43/1–2, s. 3–16.

Qingyu, Z. (1991), *A Weak Paraconsistent Conditional Logic*, „The Journal of Non--Classical Logic", 8/1, s. 45–57.

Quine, W.V. (1997), *Mission to Brazil*, „Logique & Analyse", 157, s. 5–8.

Raggio, A.R. (1968), *Propositional Sequence Calculi for Inconsistent Systems*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 9, s. 359–366.

Rescher, N. (1969), *Many-Valued Logic*, McGraw-Hill, New York.

Routley, R., Meyer, R.K. (1976), *Dialectical Logic, Classical Logic, and the Consistency of the World*, „Studies in Soviet Thought", 16/1–2, s. 1–25.
Russell, B. (1923), V*agueness*, „Australasian Journal of Psychology and Philosophy", 1/2, s. 84–92.
Rutkowski, T. (1994), *Próba kwestionowania pierwszych zasad: tożsamości, niesprzeczności i wyłączonego środka*, „Studia Philosophiae Christianae", 30–2, s. 227–243.
Sette, A.M. (1973), *On the Propositional Calculus P^1*, „Mathematica Japonicae", 18/3, s. 173–180.
Sette, A.M., Carnielli, W.A. (1995), *Maximal Intuitionistic Logics*, „Studia Logica", 55, s. 181–203.
Slater, B.H. (1995), *Paraconsistent Logics?*, „Journal of Philosophical Logic", 24/4, s. 451–454.
Słupecki, J. (1939), *Dowód aksjomatyzowalności pełnych systemów wielowartościowych rachunku zdań*, „C. R. des Seances de la Société des Séances et des Lettres de Varsovie", Cl. III, 32, s. 110–128.
Smirnow, K.A. (1911), *Review of Vasil'év 1910*, „Żurnal Ministerstwa Narodnogo Prosweścieńja", 32, s. 144–154.
Suchoń, W. (1999), *Vasil'iev: What Did He Exactly do?*, „Logic and Logical Philosophy", 7, s. 131–141.
Sylvan, R. (1980), *Exploring Meinong's Jungle and Beyond: An Investigation of Noneism and the Theory of Items*, Department of Philosophy Monograph Series 3, Research School of Social Sciences, Australian National University, Canberra.
Sylvan, R. (2000), *A Preliminary Western History of Sociative Logics*, [w:] Hyde D., Priest, G. (red.), *Sociative Logics and Their Applications: Essays by the Late Richard Sylvan*, Ashgate Publishers, Aldershot.
Sylvan, R., Urbas, I. (1993), *Paraconsistent Classical Logic*, „Logique et Analyse", 141–142, s. 3–24.
Tanaka, K. (2003), *Three Schools of Paraconsistency*, „Australasian Journal of Logic", 1, s. 28–42.
Tatarkiewiczowie T. i W. (1979), *Wspomnienia*, PiW, Warszawa.
Teixeira, A.B., *Vicente Ferreira da Silva: da lógica simbólica à filosofia da mitologia*, Centro de Documentação do Pensamento Brasileiro, URL = http://www.cdpb.org.br/vicente_ferreira_da_silva_braz_teixeira.pdf (dostęp: 10.03.2017).
Tritsch, M.F. (1990), *Temperature Sensation: The '3-bowls Experiment' Revisited*, „Die Naturwissenschaften" („The Science of Nature"), 77/6, s. 288–289.
Trzęsicki, K. (2003), *Logika i teoria mnogości. Ujęcie systematyczno-historyczne*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa.
Tuziak, R. (1996), *Paraconsistent Extensions of Positive Logic*, „Bulletin of the Section of Logic", 25/1, s. 15–20.

Urchs, M. (1986), *On Two Systems of Stanislaw Jaśkowski*, „The Journal of Non-Classical Logic", 3/1, s. 25–32.

Urchs, M., Nasieniewski, M., Kwiatkowski, S. (1997), *Klasyczny rachunek zdań. Wykład i zadania. Skrypt dla studentów pierwszego roku*, Uniwersytet im. M. Kopernika, Toruń.

Uspensky, V.A. (1992), *Kolmogorov and Mathematical Logic*, „The Journal of Symbolic Logic", 57/2, s. 385–412.

Vaihinger, H. (1922), *Die Philosophie des Als Ob*, Verlag von Felix Meiner, Leipzig.

van der Molen, T. (2016), *The Johansson/Heyting Letters and the Birth of Minimal Logic*, URL = https://eprints.illc.uva.nl/696/1/X-2016-04.text.pdf (dostęp: 5.02.2017).

Wang, W. (2011), *Against Classical Dialetheism*, „Frontiers of Philosophy in China", 6/3, s. 492–500.

Wansing, H. (2005), *Connexive Modal Logic*, [w:] Schmidt, R., Pratt-Hartmann, I., Reynolds, M., Wansing, H., (red.), *Advances in Modal Logic*, 5, King's College Publications, London, s. 367–383.

Wansing, H. (2014), *Connexive Logic*, [w:] Zalta E.N. (red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = https://plato.stanford.edu/entries/logic-connexive/ (dostęp: 10.02.2017).

Wasiliew, N.A. (1993), *Imaginary (Non-Aristotelian Logic)*, „Axiomathes", 3, s. 353–355.

Praca [...] na gruncie polskim nie ma odpowiednika. Nowe jest zarówno ujęcie przeglądu wątków związanych z intuicjami dotyczącymi parakonsystencji i historii rachunków z tej rodziny, jak też stanowiące samodzielne osiągnięcie naukowe uporządkowanie pewnych grup takich rachunków w postaci hierarchii wyznaczonych kilkoma kryteriami.

Z recenzji
prof. dr. hab. Wojciecha Suchonia

Większość systemów logiki parakonsystentnej toleruje sprzeczność nie dlatego, że możliwe jest w nich *współistnienie* dwóch zdań, z których jedno jest zaprzeczeniem drugiego, lecz dlatego, iż z pary zdań, nie wyprowadzimy dowolnego zdania. [...] Systemy logiki parakonsystentnej to zatem formalizmy, w których odrzuca się możliwość ich trywializacji za sprawą pary formuł sprzecznych.

Ze *Wstępu*

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

wydawnictwo.uni.lodz.pl
ksiegarnia@uni.lodz.pl
(42) 665 58 63

Książka dostępna również jako e-book

ISBN 978-83-8142-190-4
9 788381 421904