

*Czesław Domański**

MOC TESTÓW LOSOWOŚCI OPARTYCH NA LICZBIE SERII WIELOKROTNYCH

STRESZCZENIE. Testy oparte na teorii serii znajdują coraz szersze zastosowanie zarówno we wnioskowaniu statystycznym jak również w statystycznej kontroli jakości. Zwłaszcza tam, gdzie przedmiotem zainteresowania są zjawiska, które można scharakteryzować przez zmienne dwupunktowe lub wielopunktowe. Przykładem takich zmiennych mogą być odpowiedzi na pytania zawarte w kwestionariuszu o charakterze jakościowym.

Za pomocą testów serii można weryfikować wiele różnorodnych hipotez, na przykład, że:

- obserwacje w próbie są niezależne (testy losowości),
- dwie lub więcej populacji ma ten sam rozkład,
- model regresji jest liniowy.

W pracy przedstawiono moc testów niezależności elementów w próbie dla trzech lub więcej rodzajów elementów, których funkcjami testowymi są liczby serii odpowiednio trzech, czterech, ..., dziesięciu rodzajów elementów.

I. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Niech będzie dany ciąg zmiennych losowych

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad (1)$$

o tym samym rozkładzie skokowym z s wartościami, tj.

$$P(X_i = x_j) = p_j \quad j = 1, \dots, s \quad (2)$$

* Prof. zw. dr habil., Katedra Metod Statystycznych, Uniwersytet Łódzki.

przy czym

$$\sum_{j=1}^s p_j = 1: i = 1, \dots, n.$$

Dla oznaczenia liczby elementów j -tego rodzaju w ciągu (1) korzystać będziemy ze wzoru

$$n_j = \text{card}(i : X_i = x_j) \quad (3)$$

przy czym

$$\sum_{j=1}^s n_j = n$$

Zdefiniujemy liczbę serii w ciągu (1)

$$K_n = 1 + \text{card}(i : i > 1, X_i \neq X_{i-1}) \quad (4)$$

Obszar krytyczny dla hipotezy o niezależności elementów próby oparty jest na rozkładzie liczby serii w ciągu (1) przy założeniu, że zmienne X_i są niezależne.

Rozkład dla dwóch rodzajów elementów był badany przez Stevensa (1939), Mooda (1940), Walda i Wolfowitza (1940), Sveda i Eisenhortha (1943), zaś dla trzech i więcej rodzajów elementów przez Bartona i Davida (1957), Bartona (1966). Niektóre nowsze wyniki można znaleźć w monografii Gibson (1987). W pracach tych podano kombinatoryczne formuły dla liczby i długości serii dla dwóch, trzech i czterech elementów jedynie dla małych prob. Wynika to ze stosunkowo złożonych wzorów, które powodują kłopoty numeryczne.

Dla dwóch rodzajów elementów ($s = 2$) opublikowaliśmy stosunkowo ogólne wzory rekurencyjne (por. Domański, Tomaszewicz 1984), które mogą być stosowane, gdy zmienne (1) tworzą stacjonarny łańcuch Markowa. Zauważmy, że liczba serii jest zmienną skokową, zatem (pomijając wyjątkowe przypadki) nie jest możliwy taki dobór wartości krytycznej, aby rozmiar testu był dokładnie równy wybranemu poziomowi α . Z tego też względu proponujemy testy zrandomizowane.

II. TEST NIEZALEŻNOŚCI OPARTY NA LICZBIE SERII WIELOKROTNYCH

Niech będzie dana próba n elementowa. Na podstawie tej próby należy zwerifikować hipotezę H_0 o niezależności jej elementów, tzn.

$$H_0 : P(X_1, \dots, X_n) = P(X_1) \dots P(X_n) \quad (5)$$

wobec hipotezy alternatywnej H_1 , że próba ta tworzy łańcuch Markowa

$$H_1 : P(X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n) = P(X_1), P(X_2 | X_1) \dots P(X_n | X_{n-1}) \quad (6)$$

Zajmiemy się mocą testów serii wielokrotnych przy pewnej wyspecyfikowanej hipotezie alternatywnej H_1 . Rozkład każdej jednoparametrowej zmiennej (1) jest taki sam i określony równaniem

$$P(X_i = x_j) = \frac{1}{s}$$

Macierz przejścia ma postać

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{bmatrix} \quad (7)$$

gdzie

$$p_{tu} = P(X_i = u | X_{i-1} = t).$$

Można ją zredukować do następującego wzoru:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & a \end{bmatrix} \quad (8)$$

przy czym

$$b = \frac{1-a}{s-1}$$

gdyż $a + (s-1)b = 1$.

Miarą związku między zmiennymi X_i a X_{i-1} może być parametr a . Jeśli parametr $a=1$, będziemy mieli do czynienia z zależnością funkcyjną, gdy $a = \frac{1}{s}$ świadczy to o braku zależności. Do pomiaru zależności można wykorzystać także inną miarę, np. miernik informacyjny postaci:

$$I = 1 - \frac{-a \ln a - (s-1)b \ln b}{\ln s} \quad (9)$$

gdzie

$$b = \frac{1-a}{s-1}.$$

Nie widzieliśmy możliwości analitycznego rozwiązania równania (9) względem a . Nie ma jednakże problemu numerycznego z wyznaczeniem a przy danym I . Rozwiązanie to będziemy w dalszym ciągu oznaczać symbolem $a(I)$.

W badaniach uwzględniamy tylko autokorelacje dodatnią, z tego też względu rozważamy lewostronny test serii wielokrotnych (mała liczba serii świadczy przeciw hipotezie zerowej a za H_1). Ze względu na dużą złożoność wzorów rozkładu liczby serii wielokrotnych przy założeniu łańcucha Markowa (por. np. B a r t o n 1966) proponujemy następującą formułę rekurencyjną:

$$R_j(n, k) = R_j(n-1, k) p_{ij} + \sum_{h=j}^s (n-1, k-1) p_{jh} \quad (10)$$

dla $j=1, \dots, s$, $k=2, 3, \dots, n$ przy warunkach początkowych

$$R_j(1, 1) = p_j = P(X_i = j) \quad (11)$$

$R_j(1, k) = 0$ dla $j=1, \dots, s$, $t=1, 2, \dots$

Liczby $R_j(n, k)$ oznaczają prawdopodobieństwo tego, że w n -elementowej próbie liczba serii wielokrotnych jest równa t , przy czym ostatni element próby jest równy: $X_j = j$.

Ostateczny wzór na rozkład prawdopodobieństwa liczby serii przyjmuje postać:

$$P(K_n = k) = \sum_{j=1}^s R_j(n, k) \quad (12)$$

III. ZAKRES BADANIA

W badaniu uwzględniliśmy następujące wartości parametrów od których może zależeć moc badanych testów

1. Do pomiaru zależności dziesięć wartości I i a (I)
2. Siedem wartości $n=10, 20, 30, 40, 60, 80, 100$

Rozważmy osiem testów niezależności opartych na liczbie serii K_n uwzględniając liczbę serii;

- trzech rodzajów elementów
- czterech rodzajów elementów
-
-
- dziesięciu rodzajów elementów.

Moc tych testów oszacowaliśmy metodą Monte Carlo na podstawie szeregu eksperymentów po 2000 prób (repetycji) każdy.

IV. WNIOSKI

Wyniki naszych badań przedstawione są w tablicy 1 dla przyjętego poziomu istotności $\alpha = 0.01$. Na podstawie liczb zawartych w tab. 1 można sformułować następujące wnioski:

1. Wyznaczone za pomocą wzoru rekurencyjnego wartości kwantyli rozkładów serii wielokrotnych dla $s = 3, 4, \dots, 10$ odpowiadają poziomowi rozmiaru testu (por. pierwszy wiersz tab. 1 dla poszczególnych s).
2. Moc testów serii rośnie wraz ze wzrostem n .
3. Wraz ze wzrostem liczby serii wielokrotnych moc testów niezależności rośnie.
4. Jeżeli entropia I spada o 30%, to moc testu opartego na liczbie serii trzech rodzajów elementów kształtuje się na poziomie 90% dla $n = 20$.

5. Począwszy od $s = 5$ dla $n = 20$ moc testu serii przekracza 85% przy spadku entropii już o 20%. Wniosek ten uzasadnia celowość stosowania testów opartych na seriach wielokrotnych i prowadzeniu dalszych badań dotyczących ich mocy.

BIBLIOGRAFIA

- Barton D. E., David F. N. (1957), *Runs multiple*, „Biometrika” **44**, 168–178.
- Barton D. E., David F. N. (1958), *Runs in a Ring*, „Biometrika” **45**, 572–578.
- Barton D. E. (1966), *Combinational Change*, New York, Hofner Publishing Company.
- Domański Cz., Tomaszewicz A. S. (1984), *Reeursive formulae for runs distributions*, Acta Universitatis Lodziensis, **34**, 19–28.
- Gibson J. (1987), *Nonparametric Statistical Inference*, McGraw-Hill Book Comapny, New York.
- Mood A. M. (1940), *The Distribution Theory of Annales of Mathematical Statistics runs*, AMS, **11**, 367–392.
- Stevens W. L. (1939), *Distribution of Grups in Sequence of Alternatives*, „Annales of Eugenes”, **9**, 10–17.
- Swed F. S., Eisenhort C. (1943), *Tables for Testing Randomness of Grouping in a Sequence of Alternatives*, „Annales of Mathematical Statistiscs”, **14**, 66–87.
- Wald A., Wolfowitz (1940), *On a Test Whether Two Samples areFrom the Same Population*, „Annales of Mathematical Statistics”, **11**, 147–162.

Czesław Domański

POWER OF TESTS FOR RANDOMNESS BASED ON THE NUMBER OF MULTIPLE RUNS

Tests based on the number and length of runs find their use more and more often. The reason is that they are nonparametric tests i.e. the ones that need no assumptions on the population distribution. Some of these tests applications are the following: randomness of samples, the same distributions of different samples, linearity of regression models. In statistical literature tests power problems were usually approached asymptotically with focus on only two kinds of elements (see e.g. Barton, 1966, Gibson 1987). In the paper a generalization of the independance test for three or more kinds of elements is considered and its power is investigated.

T a b l i c a 1

Empiryczna moc testów serii wielokrotnych dla $\alpha = 0,01$

I	$\alpha(I)$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 80$	$n = 100$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s = 3$								
0.00	0.3333	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010
0.10	0.5623	.179	.385	.574	.720	.897	.966	.990
0.20	0.6584	.371	.716	.894	.966	.997	1.000	1.000
0.30	0.7308	.560	.899	.983	.998	1.000		
0.40	0.7902	.721	.973	.998	1.000			
0.50	0.8405	.844	.995	1.000				
0.60	0.8839	.926	.999					
0.70	0.9215	.973	1.000					
0.80	0.9537	.994						
0.90	0.9804	.999						
1.00	1.0000	1.000						
$s = 4$								
0.00	0.2500	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010
0.10	0.4952	.245	.493	.681	.825	.950	.988	.997
0.20	0.6323	.488	.825	.948	.989	1.000	1.000	1.000
0.30	0.6843	.693	.956	.995	1.000			
0.40	0.7524	.839	.992	1.000				
0.50	0.8107	.928	.999					
0.60	0.8615	.974	1.000					
0.70	0.9057	.993						
0.80	0.9440	.999						
0.90	0.9762	1.000						
$s = 5$								
0.00	0.2000	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010
0.10	0.4518	.259	.548	.750	.870	.972	.995	.999
0.20	0.5651	.506	.866	.971	.994	1.000	1.000	1.000
0.30	0.6530	.707	.972	.998	1.000			
0.40	0.7266	.721	.973	.998				
0.50	0.7901	.932	1.000	1.000				
0.60	0.8458	.976						
0.70	0.8946	.994						
0.80	0.9371	.999						
0.90	0.9731	1.000						
$s = 6$								
0.00	0.1667	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010
0.10	0.4209	.319	.604	.789	.905	.981	.997	1.000
0.20	0.5382	.599	.902	.980	.999	1.000	1.000	
0.30	0.6301	.797	.983	.999	1.000			
0.40	0.7075	.912	.998	1.000				
0.50	0.7748	.969	1.000					
0.60	0.8340	.991						
0.70	0.8862	.998						
0.80	0.9319	1.000						

Tablica 1 (cd.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s = 7$								
0.00	0.1429	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010
0.10	0.3976	.318	.635	.819	.921	.987	.998	1.000
0.20	0.5177	.597	.916	.986	.998	1.000	1.000	
0.30	0.6124	.794	.986	.999	1.000			
0.40	0.6927	.910	.998	1.000				
0.50	0.7628	.968	1.000					
0.60	0.8247	.991						
0.70	0.8795	.998						
0.80	0.9277	1.000						
$s = 8$								
0.00	0.1250	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010
0.10	0.3793	.339	.659	.846	.934	.990	.999	1.000
0.20	0.5013	.620	.929	.990	.999	1.000	1.000	
0.30	0.5982	.810	.990	1.000	1.000			
0.40	0.6807	.919	.999					
0.50	0.7530	.971	1.000					
0.60	0.8171	.992						
0.70	0.8740	.999						
0.80	0.9242	1.000						
$s = 9$								
0.00	0.1111	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010
0.10	0.3645	.382	.681	.865	.947	.993	.999	1.000
0.20	0.4879	.672	.937	.992	.999	1.000	1.000	
0.30	0.5865	.849	.991	1.000	1.000			
0.40	0.6707	.941	.999					
0.50	0.7448	.981	1.000					
0.60	0.8107	.995						
0.70	0.8694	.999						
0.80	0.9213	1.000						
$s = 10$								
0.00	0.1000	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010
0.10	0.3521	.407	.717	.873	.951	.994	.999	1.000
0.20	0.4766	.705	.952	.993	.999	1.000	1.000	
0.30	0.5765	.876	.995	1.000	1.000			
0.40	0.6623	.956	1.000					
0.50	0.7379	.988						
0.60	0.8052	.997						
0.70	0.8654	1.000						

Ź r ó d ł o: Obliczenia własne.

T a b l i c a 2

Empiryczna moc testów serii wielokrotnych dla $\alpha = 0,05$

I	$\alpha(I)$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 80$	$n = 100$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s = 3$								
0.00	0.3333	.050	.050	.050	.050	.050	.050	.050
0.10	0.5623	.409	.647	.803	.895	.973	.994	.999
0.20	0.6584	.646	.892	.973	.994	.999	1.000	1.000
0.30	0.7308	.807	.974	.997	1.000	1.000		
0.40	0.7902	.906	.995	1.000				
0.50	0.8405	.961	.999					
0.60	0.8839	.987	1.000					
0.70	0.9215	.997						
0.80	0.9537	1.000						
0.90	0.9804							
1.00	1.0000							
$s = 4$								
0.00	0.2500	.050	.050	.050	.050	.050	.050	.050
0.10	0.4952	.491	.726	.872	.943	.990	.998	1.000
0.20	0.6323	.740	.937	.989	.998	1.000	1.00	
0.30	0.6843	.882	.989	.999	1.000			
0.40	0.7524	.953	.999	1.000				
0.50	0.8107	.985	1.000					
0.60	0.8615	.996						
0.70	0.9057	.999						
0.80	0.9440	1.000						
0.90	0.9762							
1.00	1.0000							
$s = 5$								
0.00	0.2000	.050	.050	.050	.050	.050	.050	.050
0.10	0.4518	.502	.775	.912	.961	.994	.999	1.000
0.20	0.5651	.749	.958	.995	.999	1.000	1.000	
0.30	0.6530	.886	.994	1.000	1.000			
0.40	0.7266	.995	.999					
0.50	0.7901	.985	1.000					
0.60	0.8458	.996						
0.70	0.8946	.999						
0.80	0.9371	1.000						
$s = 6$								
0.00	0.1667	.050	.050	.050	.050	.050	.050	.050
0.10	0.4209	.573	.804	.927	.975	.997	1.000	1.000
0.20	0.5382	.817	.969	.997	1.000	1.000		
0.30	0.6301	.931	.996	1.000				
0.40	0.7075	.978	1.000					
0.50	0.7748	.994						
0.60	0.8340	.999						
0.70	0.8862	1.000						

Tablica 2 (cd.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
s = 7								
0.00	0.1429	.050	.050	.050	.050	.050	.050	.050
0.10	0.3976	.567	.839	.942	.980	.998	1.000	1.000
0.20	0.5177	.812	.979	.998	1.000	1.000		
0.30	0.6124	.928	.998	1.000				
0.40	0.6927	.977	1.000					
0.50	0.7628	.994						
0.60	0.8247	.999						
0.70	0.8795	1.000						
s = 8								
0.00	0.1250	.050	.050	.050	.050	.050	.050	.050
0.10	0.3793	.578	.842	.947	.984	.998	1.000	1.000
0.20	0.5013	.819	.929	.998	1.000	1.000		
0.30	0.5982	.931	.998	1.000				
0.40	0.6807	.978	1.000					
0.50	0.7530	.994						
0.60	0.8171	.999						
0.70	0.8740	1.000						
s = 9								
0.00	0.1111	.050	.050	.050	.050	.050	.050	.050
0.10	0.3645	.606	.871	.954	.985	.999	1.000	1.000
0.20	0.4879	.839	.986	.999	1.000	1.000		
0.30	0.5865	.941	.999	1.000				
0.40	0.6707	.982	1.000					
0.50	0.7448	.995						
0.60	0.8107	.999						
0.70	0.8694	1.000						
s = 10								
0.00	0.1000	.050	.050	.050	.050	.050	.050	.050
0.10	0.3521	.650	.871	.958	.987	.997	.999	1.000
0.20	0.4766	.872	.986	.999	1.000	1.000		
0.30	0.5765	.959	.999	1.000				
0.40	0.6623	.989	1.000					
0.50	0.7379	.997						
0.60	0.8052	1.000						

Ź r ó d ł o: Obliczenia własne.

T a b l i c a 3.

Empiryczna moc testów serii wielokrotnych dla $\alpha = 0,10$

I	$a(I)$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 60$	$n = 80$	$n = 100$
$s = 3$								
0.00	0.3333	.100	.100	.100	.100	.100	.100	.100
0.10	0.5623	.536	.768	.887	.947	.989	.998	1.000
0.20	0.6584	.749	.945	.989	.998	1.000	1.000	
0.30	0.7308	.874	.989	.999	1.000			
0.40	0.7902	.943	.998	1.000				
0.50	0.8405	.978	1.000					
0.60	0.8839	.993						
0.70	0.9215	.998						
0.80	0.9537	1.000						
$s = 4$								
0.00	0.2500	.100	.100	.100	.100	.100	.100	.100
0.10	0.4952	.597	.832	.932	.973	.996	.999	1.000
0.20	0.6323	.810	.972	.996	.999	1.000	1.000	
0.30	0.6843	.919	.996	1.000	1.000			
0.40	0.7524	.996	1.000					
0.50	0.8107	.900						
0.60	0.8615	.998						
0.70	0.9057	1.000						
$s = 5$								
0.00	0.2000	.100	.100	.100	.100	.100	.100	.100
0.10	0.4518	.660	.863	.952	.982	.998	1.000	1.000
0.20	0.5651	.865	.981	.998	1.000	1.000		
0.30	0.6530	.952	.998	1.000				
0.40	0.7266	.985	1.000					
0.50	0.7901	.996						
0.60	0.8458	.999						
0.70	0.8946	1.000						
$s = 6$								
0.00	0.1667	.100	.100	.100	.100	.100	.100	.100
0.10	0.4209	.664	.889	.965	.989	.999	1.000	1.000
0.20	0.5382	.866	.987	.999	1.000	1.000		
0.30	0.6301	.952	.999	1.000				
0.40	0.7075	.985	1.000					
$s = 7$								
0.00	0.1429	.100	.100	.100	.100	.100	.100	.100
0.10	0.3976	.696	.899	.970	.991	.999	1.000	1.000
0.20	0.5177	.887	.989	.999	1.000	1.000		
0.30	0.6124	.962	.999	1.000				
0.40	0.6927	.989	1.000					
0.50	0.7628	.997						
0.60	0.8247	1.000						

Tablica 3 (cd.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s = 8$								
0.00	0.1250	.100	.100	.100	.100	.100	.100	.100
0.10	0.3793	.734	.913	.972	.993	.999	1.000	1.000
0.20	0.5013	.914	.992	.999	1.000	1.000		
0.30	0.5982	.975	.999	1.000				
0.40	0.6807	.994	1.000					
0.50	0.7530	.999						
0.60	0.8171	1.000						
$s = 9$								
0.00	0.1111	.100	.100	.100	.100	.100	.100	.100
0.10	0.3645	.727	.914	.979	.993	1.000	1.000	1.000
0.20	0.4879	.910	.992	1.000	1.000			
0.30	0.5865	.974	.999					
0.40	0.6707	.993	1.000					
0.50	0.7448	.999						
0.60	0.8107	1.000						
$s = 10$								
0.00	0.1000	.100	.100	.100	.100	.100	.100	.100
0.10	0.3521	.726	.926	.979	.995	1.000	1.000	1.000
0.20	0.4766	.909	.994	1.000	1.000			
0.30	0.5765	.973	1.000					
0.40	0.6623	.993						
0.50	0.7379	.999						
0.60	0.8052	1.000						

Źródło: Obliczenia własne.