A C T A   U N I V E R S I T A T I S   L O D Z I E N S I S
FOLIA OECONOMICA 254, 2011

Beata Fałda[*], *Józef Zając*[**]

ANALIZA STATYSTYCZNA PARAMETRÓW EKONOMICZNYCH Z USTALONĄ STRUKTURĄ ALGEBRAICZNĄ

Słowa kluczowe: struktura algebraiczna, wartości średnie, zmienna losowa.

Wprowadzenie

Studiowanie procesów ekonomicznych, dokonywane przy wykorzystaniu metod nauk ścisłych, odbywa się zazwyczaj poprzez modelowanie i analizę matematyczną opisujących je parametrów ekonomicznych. Analiza ta dysponuje aktualnie szerokim i zaawansowanym arsenałem metod i teorii, pozwalających na uwzględnienie subtelnych, lecz istotnych cech badanych parametrów. Ich pominięcie prowadzi często do wyników przybliżonych bez możliwości oceny ich dokładności. Postępując w ten sposób możemy nigdy nie przekroczyć progu informacji o istotnych cechach procesów ekonomicznych, które faktycznie decydują o ich rzeczywistym przebiegu w czasie bądź też o związkach statycznych pomiędzy nimi.

Poza barierą liniowości, którą ekonomia matematyczna i ekonometria wydają się być mocno nasycone, rozpościera się wyjątkowo bogata w ekonomii, przestrzeń zależności nieliniowych, odsłaniających świat związków pomiędzy parametrami, niemożliwy do wykrycia przy wykorzystaniu modeli liniowych. Argumenty potwierdzające jego istnienie wypływają dość łatwo z bardziej wnikliwych obserwacji własności algebraicznych podstawowych parametrów ekonomicznych. Okazuje się, że posiadają one własną, naturalną strukturę algebraiczną, której uwzględnienie jest niezbędne dla uzyskania poprawności rachunkowej przeprowadzanych analiz. Fakt ten pozwala na zasadność otrzymywanych wyników i prowadzi do wnioskowania opartego na dobrze sformułowanym układzie warunków koniecznych o charakterze początkowym.

[*] Dr, Katolicki Uniwersytet Jana Pawła II.
[**] Dr hab., Katolicki Uniwersytet Jana Pawła II.

W prezentowanym materiale autorzy przedstawiają metodę algebraicznej klasyfikacji podstawowych parametrów ekonomicznych, dokonaną z uwagi na ich naturalne struktury algebraiczne, wynikające z charakteru ich jednostek pomiarowych. Zasadniczą konsekwencją tej operacji będzie wskazanie, stosownie dobranych przestrzeni probabilistycznych, w ramach których można wykonywać, poprawne rachunkowo, obliczenia wielkości statystycznych charakteryzujących badane procesy. W drugiej części tej prezentacji przedstawione zostaną podstawy analizy korelacji uwzględniające aspekty algebraiczne badanych parametrów ekonomicznych. Przykładem ilustrującym wymienioną problematykę będzie konstrukcja kilku, stosownie dobranych, struktur algebraicznych i odpowiadających im typów przestrzeni prawdopodobieństwa, których struktura gwarantuje prowadzenie poprawnej analizy badanych zagadnień ekonomicznych.

1. Pojęcie struktury procesu ekonomicznego

Metody statystyczne, szeroko stosowane w badaniach ekonomicznych, zakładają milcząco, iż wskaźniki oraz parametry formułujące opis liczbowy badanego zjawiska ekonomicznego posiadają strukturę liniową. Dzieje się tak dlatego, iż przystępując do stosowania analizy statystycznej zapominamy o tym, że przedstawiają one rzeczywiste wielkości ekonomiczne i automatycznie opuszczamy ich miana. W ten sposób oddalamy się od faktycznych związków i relacji pomiędzy badanymi wielkościami ekonomicznymi. Na ile nasze obliczenia, prowadzone w ten sposób, tracą związek z rzeczywistością, możemy się łatwo przekonać na najprostszych przykładach. Wiadomo powszechnie, iż uśrednianie parametrów mianowanych w czasie odbywa się za pośrednictwem średniej harmonicznej, zaś uśrednianie wielkości opisujących przyrosty może być dokonywane jedynie za pomocą średniej geometrycznej. Stosowanie w obydwu przypadkach średniej arytmetycznej prowadzi do rozważań statystycznych o charakterze technicznym, bez związku z rzeczywistością. Związek ten możemy zachować stosując odpowiednio skonstruowane obliczenia wskazane jednoznacznie poprzez strukturę algebraiczną badanego parametru. Otrzymane w ten sposób charakterystyki liczbowe będą nosić cechę poprawności matematycznej i właściwie informować o ekonomicznych wartościach procesów ekonomicznych. Technikę tę możemy przenieść do przestrzeni prawdopodobieństwa poprzez odpowiednio zdefiniowane wartości oczekiwane, których postać sugerowana jest poprzez strukturę algebraiczną wartości przyjmowanych przez rozważaną zmienną losową.

Rodzi to jednak dodatkowy problem znalezienia tych struktur oraz pogrupowania parametrów ekonomicznych na klasy, należących do tej samej struktury algebraicznej. Dopiero wtedy możemy mówić o prawidłowo wykonywanych obliczeniach, przeprowadzanych na interesujących nas parametrach; zob. [Smoluk, s. 39] i [Stachak, s. 200–205].

Ponieważ wartość oczekiwana, będąca podstawowym pojęciem rachunku prawdopodobieństwa, jest uogólnieniem średniej arytmetycznej, należy pamiętać, że dotyczy ona takich wartości liczbowych, których miana jednoznacznie wskazują na fakt, iż wielkości te tworzą grupę przemienną z dodawaniem jako działaniem wewnętrznym, a ponadto, po wprowadzeniu współczynników liczbowych, tworzą strukturę algebraiczną nad ciałem współczynników. W takim przypadku analiza elementów wymienionej grupy, prowadzona przy pomocy metod klasycznej statystyki jest w pełni uzasadniona. Jeżeli natomiast wielkości te tworzą grupę z innym rodzajem „dodawania", wtedy należy ustalić odpowiedni rodzaj wartości średniej w grupie, jak też sposób „mnożenia" rozważanych wartości przez liczby.

2. Wartości oczekiwane uwzględniające strukturę algebraiczną

Aby stosować metody statystyczne do badania parametrów ekonomicznych, jednym ze sposobów jest potraktowanie ich jako zmienne losowe określone na pewnej przestrzeni prawdopodobieństwa. W tym celu założymy, że X jest zmienną losową o wartościach rzeczywistych, określoną na przestrzeni prawdopodobieństwa $\{\Omega, \mathcal{A}, p\}$. Wtedy wyrażenie

$$E_{\mathrm{A}}X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, & \text{dla dyskretnej zmiennej losowej } X, \\ \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx, & \text{dla ciągłej zmiennej losowej } X. \end{cases} \tag{2.1}$$

jest klasyczną definicją wartości oczekiwanej zmiennej losowej X, oznaczanej symbolem EX.

Algebraiczna i fizyczna interpretacja tak określonej wartości oczekiwanej $E_{\mathrm{A}}X$ wskazuje, iż należy ją utożsamiać ze średnią arytmetyczną ważoną wartości $\{x_i\}$ z wagami, odpowiednio $\{p_i\}$ w przypadku dyskretnym i $f(x)$ w przypadku rozkładu ciągłego zmiennej losowej X. Z algebraicznego punktu widzenia $E_{\mathrm{A}}X$ jest średnią ważoną nad ciałem $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$. W przypadku, gdy zmienna losowa X przyjmuje wartości nad innym ciałem, które jest homomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych, wtedy wartość oczekiwana indukowana przez homomorfizm h będzie określona wzorem

$$E_h(Z) := h\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot h^{-1}(z_i)\right),$$

gdzie $Z = h(X) = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Podany formalizm pozwala na przenoszenie arytmetycznej wartości oczekiwanej do dowolnej struktury algebraicznej homomorficznej z ciałem liczb rzeczywistych. Aby można było prawidłowo obliczać wartość $E_h(Z)$ powinniśmy założyć, że homomorfizm ten jest bijekcją. Takie podejście prowadzi do uogólnienia pojęcia średniej arytmetycznej.

O ile na gruncie matematycznym nie ma powodów uzasadniających takie uogólnienie, za wyjątkiem, być może, czysto teoretycznych spekulacji, to rozważania ekonomiczne dostarczają wielu przykładów, kiedy średnia arytmetyczna ważona nie może być zasadnie stosowana. Należą do nich przypadki, kiedy zmienna losowa przyjmuje wartości takie jak: wartości mianowane w czasie lub przyrosty. Odpowiednimi średnimi ważonymi, czyli wartościami oczekiwanymi, są wtedy: średnia harmoniczna i średnia geometryczna. Warto zauważyć, iż do wniosków, w sposób intuicyjny, takich dochodzili już w I połowie XIX wieku specjaliści zajmujący się konstrukcją systemów wyborczych w Stanach Zjednoczonych, kiedy jeszcze nie były znane podstawy algebraiczne pozwalające na jednoznaczne przypisywanie stosowanej średniej do danej zmiennej losowej, przyjmującej wartości w ustalonej strukturze algebraicznej.

Jak uprzednio wspomniano struktura algebraiczna parametrów opisujących procesy i zjawiska ekonomiczne, podlegających uśrednianiu harmonicznemu lub geometrycznemu, jest otrzymywana przy pomocy następujących odwzorowań

$$z = h(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}_+$$

oraz

$$z = h(x) = e^x \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R},$$

odpowiednio.

Indukowane tymi bijekcjami wartości oczekiwane wyrażają się wzorami:

$$E_H X = \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}}, & \text{dla dyskretnej zmiennej losowej } X, \\[2ex] \dfrac{1}{\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x} dx}, & \text{dla ciągłej zmiennej losowej } X; \end{cases} \tag{2.2}$$

oraz

$$E_G X = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i}, & \text{dla dyskretnej zmiennej losowej X,} \\ e^{\int_{\mathbb{R}} f(x) \ln x dx}, & \text{dla ciągłej zmiennej losowej X,} \end{cases} \tag{2.3}$$

gdzie $E_H X$ jest harmoniczną wartością oczekiwaną, zaś $E_G X$ oznacza geometryczną wartość oczekiwaną [Ostasiewicz, s. 62–65].

Wymienione wartości oczekiwane możemy otrzymać jako przypadek szczególny bardzo ogólnie sformułowanego pojęcia wartości średniej ważonej. W tym celu niech α będzie liczbą rzeczywistą, taką, że $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dla zadanej zmiennej losowej $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, z dodatnimi wartościami x_i i prawdopodobieństwem $P[X = x_i] = p_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, definiujemy $E_\alpha X$ wzorem

$$E_\alpha X = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & \text{dla } \alpha \neq 0, |\alpha| < +\infty, \\ \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}, & \text{dla } \alpha = 0, \\ \min(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \text{dla } \alpha = -\infty, \\ \max(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \text{dla } \alpha = +\infty; \end{cases} \tag{2.4}$$

zob. [Mitrinović, s.19–29].

Kładąc $\alpha = 1$ otrzymujemy arytmetyczną wartość oczekiwaną

$$E_1 X = E_A X = EX = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i,$$

dla $\alpha = -1$ otrzymujemy harmoniczną wartość oczekiwaną

$$E_{-1} X = E_H X = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}},$$

dla $\alpha = 2$ otrzymujemy kwadratową wartość oczekiwaną

$$E_2X = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^2} \; .$$

Natomiast w przypadku, gdy $\alpha = 0$, jako przypadek graniczny, otrzymujemy geometryczną wartość oczekiwaną

$$E_0X = \lim_{\alpha \to \infty} E_\alpha X = E_G X.$$

Ponadto można udowodnić zasadę monotoniczności średnich potęgowych mówiącą, iż

$$E_\alpha X < E_\beta X \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

W podobny sposób definiuje się $E_\alpha X$ w przypadku ciągłej zmiennej losowej. Otrzymujemy wtedy tożsamości:

$$E_G X = e^{E_A X \ln X}$$

oraz

$$[E_H X]^{-1} = E_A[X^{-1}]$$

Aby otrzymać ilustrację funkcjonowania przedstawionych średnich rozważmy zmienną losową $X = \{1,2,3,\ldots,25\}$, dla której

$$E_H X = 6{,}62, \qquad E_G X = 10{,}17, \qquad E_A X = 13.$$

Rozszerzając zakres średnich z uwagi na parametr α (zob. (2.4)) widzimy, że

$$E_{-2}X = 4{,}80, \qquad E_{-1}X = E_H X = 6{,}62, \qquad E_0 X = E_G X = 10{,}17,$$
$$E_1 X = E_A X = 13, \qquad E_2 X = 14{,}86.$$

Łatwość, z jaką wymienia się różnego rodzaju średnie, bez bliższego rozpoznania ich związku ze strukturami matematycznymi oraz zależności porządkującej wartości przyjmowane przez nie na tym samym wektorze zmiennej losowej, oznacza, iż traktuje się je bardziej jako ciekawostkę matematyczną aniżeli realny i prowadzący do zgodności z rzeczywistością system uśredniania, związany z konkretnymi strukturami algebraicznymi.

3. Wartość oczekiwana i wariancja uwzględniająca strukturę algebraiczną zmiennej losowej

Przedstawimy teraz technikę liczenia wartości oczekiwanej w zależności od struktury algebraicznej przyjmowanych wartości. Rozważmy w tym celu n wymiarową przestrzeń liniową $(\mathbb{V},+,\cdot)$ nad ciałem $(\mathbb{R},+,\cdot)$ i niech $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{V}=\mathbb{R}^n$ będzie dowolnym wektorem tej przestrzeni, a ponadto niech $p=\{p_i\}\in\mathbb{R}^n$ będzie ciągiem liczb nieujemnych, takich, że $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$. Z danym wektorem X oraz danym ciągiem $\{p_i\}$ rozkładu jedynki, możemy połączyć wyrażenie $E(X,p)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$, które jest klasycznie rozumianą wartością oczekiwaną zmiennej losowej X.

Załóżmy teraz, że $\mathbf{h}\colon\mathbb{V}\leftrightarrow\mathbb{V}_{\mathbf{h}}$ jest homomorfizmem przestrzeni wektorowej $(\mathbb{V},+,\cdot)$ na przestrzeń $(\mathbb{V}_{\mathbf{h}},+_{\mathbf{h}},\cdot_{\mathbf{h}})$, rozumianej jako n wymiarowa przestrzeń wektorowa nad ciałem liczb rzeczywistych. Wówczas dla dowolnego $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ otrzymujemy

$$Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)=\mathbf{h}(X):=(\mathbf{h}(x_1),\mathbf{h}(x_2),\dots,\mathbf{h}(x_n)),$$

i w konsekwencji

$$Y+_{\mathbf{h}}Z:=\mathbf{h}\big(\mathbf{h}^{-1}(Y)+\mathbf{h}^{-1}(Z)\big)\in\mathbb{V}_{\mathbf{h}},\tag{3.1}$$

oraz

$$\lambda\cdot_{\mathbf{h}}Y:=\mathbf{h}\big(\lambda\cdot\mathbf{h}^{-1}(Y)\big)\in\mathbb{V}_{\mathbf{h}},\tag{3.2}$$

dla dowolnych $Y,Z\in\mathbb{V}_{\mathbf{h}}$ i $\lambda\in\mathbb{R}$, gdzie

$$X=\mathbf{h}^{-1}(Y)=(\mathbf{h}^{-1}(y_1),\mathbf{h}^{-1}(y_2),\dots,\mathbf{h}^{-1}(y_n)).$$

Jeżeli do przestrzeni $\mathbb{V}$ wprowadzimy dowolną metrykę ρ, wtedy możemy skorzystać z faktu, że $\rho(0,X)$, dla dowolnego $X\in\mathbb{V}$, określa wielkość znaną jako norma X i oznaczaną symbolem $||X||$. Metryka ta może być przeniesiona przez homomorfizm $\mathbf{h}$ na przestrzeń $\mathbb{V}_{\mathbf{h}}$, indukując metrykę $\rho_{\mathbf{h}}$ określoną wzorem

$$\rho_{\mathbf{h}}(Y,Z):=\rho\big(\mathbf{h}^{-1}(Y),\mathbf{h}^{-1}(Z)\big)\tag{3.3}$$

dla dowolnych $Y, Z \in \mathbb{V}_{\mathbf{h}}$. W ten sposób struktura $(\mathbb{V}_{\mathbf{h}}, \rho_{\mathbf{h}})$ staje się liniową przestrzenią metryczną. Korzystając z tych rozważań możemy dokonać przeniesienia poprzez $\mathbf{h}$ wartości oczekiwanej $E(X,p)$ na przestrzeń $\mathbb{V}_{\mathbf{h}}$ wzorem

$$E_{\mathrm{h}}(Y,p) = \mathrm{h}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i h^{-1}(y_i)\right) = \mathrm{h}\left(E(\mathbf{h}^{-1}(Y),p)\right). \tag{3.4}$$

W przypadku, gdy ρ jest metryką euklidesową, określoną na przestrzeni $\mathbb{V}$, zaś X zmienną losową określoną na tej przestrzeni, wtedy wyrażenie

$$\sigma^2(X,p) := \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X,p)\right)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i - E(X,p)|^2 p_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \rho\left(x_i, E(X,p)\right)^2 p_i,$$

które jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej $(X - EX)^2$ i jest nazywane wariancją zmiennej losowej X przy rozkładzie $\{p_i\}$. Odchylenie standardowe $\sigma(X,p)$ definiowane jako pierwiastek kwadratowy wariancji, spełnia własności miary.

Uwzględniając odwzorowanie $\mathbf{h}$, przekształcające przestrzeń $\mathbb{V}$ na przestrzeń $\mathbb{V}_{\mathbf{h}}$ widzimy, że wyrażenie

$$\sigma_{\mathrm{h}}^2(Y,p) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \rho_{\mathbf{h}}\left(y_i, E_{\mathrm{h}}(Y,p)\right)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{h}^{-1}(y_i)^2 p_i - \left[h^{-1}\left(E_{\mathrm{h}}(Y,p)\right)\right]^2 \tag{3.5}$$

jest h–wariancją zmiennej losowej Y, której wartości należą do przestrzeni $\mathbb{V}_{\mathbf{h}}$ w związku z metryką $\rho_{\mathbf{h}}$. Ponadto

$$\sigma_{\mathrm{h}}(Y,p) = \sqrt{\sigma_{\mathrm{h}}^2(Y,p)}$$

nazywamy h–odchyleniem standardowym.

Jeżeli dodatkowo wprowadzimy drugą bijekcję $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ wtedy możemy rozważyć wyrażenie

$$\sigma_{h,g}(Z,p) = g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot g^{-1}\left(\rho\left(h^{-1}(z_i), \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot h^{-1}(z_k)\right)\right)\right), \tag{3.6}$$

które jest uogólnieniem h–odchylenia standardowego.

Wykorzystując fakt, że $\rho(x,y) = \|x-y\|$ widzimy, iż

$$\begin{aligned}\sigma_{h,g}(Z,p) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot g^{-1}\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot h^{-1}(z_i) - \sum_{k=1}^{n} p_k h^{-1}(z_k)\right\|\right)\right)\\ &= g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot g^{-1}\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} p_k\left(h^{-1}(z_i) - h^{-1}(z_k)\right)\right\|\right)\right).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Zakładając, że g jest odwzorowaniem identycznościowym otrzymujemy wówczas

$$\begin{aligned}\sigma_{h,g}(Z,p) &= \sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{k=1}^{n} p_i p_k\left(h^{-1}(z_i) - h^{-1}(z_k)\right)\right\|\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_i p_k \|h^{-1}(z_i) - h^{-1}(z_k)\|.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Otrzymana miara nosi cechy miary rozproszenia zadanego poprzez wyrażenie symetryczne, uwzględniające rozkład prawdopodobieństwa elementów iloczynu kartezjańskiego (z_i, z_k) współrzędnych wektora Z.

Z uwagi na założenie, że g jest odwzorowaniem identycznościowym możemy wprowadzić wyrażenie uogólniające otrzymane oszacowanie w postaci

$$r_h(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\|h^{-1}(x_i) - h^{-1}(y_j)\|, \tag{3.9}$$

gdzie $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, zaś p_{ij} jest prawdopodobieństwem zdarzenia elementarnego (x_i, y_j).

Przyjmując, że $g(t) = t^{\alpha}$, $t \geq 0$, $\alpha \geq 1$, możemy wykazać, że

$$\sigma_{h,g}(Z,p) \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_i p_k \|h^{-1}(z_i) - h^{-1}(z_k)\|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{3.10}$$

Oznacza to, że otrzymaliśmy oszacowanie uogólnionego odchylenia standardowego przez pewną miarę rozproszenia rzędu α.

4. Przykłady i zastosowania

Poniżej zostaną podane przykłady ilustrujące wybrane procedury uogólniania klasycznych pojęć rachunku prawdopodobieństwa.

Przykład 1.

Niech $\mathbb{V} := \mathbb{R}^n$ oraz $\mathbb{V}_{\mathbf{h}} := \mathbb{R}_+^n$. Rozważmy bijekcję h zdefiniowaną następującą formułą $y = \mathrm{h}(x) := e^x$, która tworzy odwzorowanie $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}_+$, przy czym $x = \mathrm{h}^{-1}(y) = \ln y$. Wówczas

$$y_1 +_{\mathrm{h}} y_2 = \mathrm{h}(\ln y_1 + \ln y_2) = \mathrm{h}(\ln y_1 y_2) = y_1 \cdot y_2, \tag{4.1}$$

$$\lambda \cdot_{\mathrm{h}} y = \mathrm{h}(\lambda \ln y) = \mathrm{h}(\ln y^{\lambda}) = y^{\lambda} \tag{4.2}$$

zachodzi dla dowolnych $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Oczywiście bijekcja $\mathbf{h} := \underbrace{(\mathrm{h}, \mathrm{h}, \dots, \mathrm{h})}_{n}$ odwzorowuje $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}_+^n$.

Jeżeli $\rho(a,b) := |a - b|$ na $\mathbb{R}^2$ wówczas

$$\rho_{\mathrm{h}}(y_1, y_2) = |\ln y_1 - \ln y_2| = \left|\ln \frac{y_1}{y_2}\right|. \tag{4.3}$$

Z powyższego wynika, że jeżeli $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, gdzie $y_i > 0$ dla $i = 1,2,\dots,n$, a ponadto $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ jest nieujemnym rozkładem jedynki, wówczas

$$E_{\mathrm{h}}(Y,p) = \mathrm{h}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln y_i\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{p_i \ln y_i} = \prod_{i=1}^{n} y_i^{p_i} = \mathrm{h}\big(E(\mathbf{h}^{-1}(Y),p)\big), \tag{4.4}$$

gdzie $\mathbf{h}^{-1}(Y) = (\ln y_1, \ln y_2, \dots, \ln y_n)$.

Ponadto

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{h}}^2(Y,p) = \sum_{i=1}^{n} \rho_{\mathrm{h}}\left(y_i, \prod_{j=1}^{n} y_j^{p_j}\right)^2 p_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left|\ln \frac{\prod_{j=1}^{n} y_j^{p_j}}{y_i}\right|^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} p_j \ln y_j - \ln y_j\right|^2 p_i \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln y_i\right)^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln y_i\right)^2 \\
&+ \sum_{i=1}^{n} (\ln y_i)^2 p_i \cdot \sum_{i=1}^{n} (\ln y_i)^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln y_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{h}^{-1}(y_i)^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{h}^{-1}(y_i) p_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\ln y_i)^2 p_i - \left(\ln \prod_{i=1}^{n} y_i^{p_i}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\ln y_i)^2 p_i - [\ln E_{\mathrm{h}}(Y,p)]^2.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Przykład 2.

Niech $\mathbb{V} := \mathbb{R}$, $\alpha = -1$ oraz niech

$$\mathbb{V} \ni x \to y = \mathrm{h}(x) := x|x|^{-2} = \begin{cases} x^{-1}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0, \\ -(-x)^{-1}, & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Wówczas $\mathrm{h}\colon \mathbb{V} \leftrightarrow \mathbb{V}_{\mathrm{h}} = \mathbb{R}$, zaś $\mathrm{h}^{-1}(y) = y|y|^{-2}$.

Ponadto

$$y_1 +_h y_2 = h\big(h^{-1}(y_1) + h^{-1}(y_2)\big) = h(y_1|y_1|^{-2} + y_2|y_2|^{-2})$$
$$= (y_1|y_1|^{-2} + y_2|y_2|^{-2}) \cdot |y_1|y_1|^{-2} + y_2|y_2|^{-2}|^{-2},$$

a także

$$\lambda \cdot_h y = h\big(\lambda \cdot h^{-1}(y)\big) = h(\lambda \cdot y|y|^{-2}) = \lambda \cdot y|y|^{-2}|\lambda \cdot y|y|^{-2}|^{-2} = \lambda|\lambda|^{-2}y.$$

Podstawiając $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ oraz oznaczając przez $p = \{p_1\}$ rozkład jedynki widzimy, że

$$E_h(Y,p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot_h y_i = \sum_{i=1}^{n} {}^{h} p_i|p_i|^{-2} y_i = h\left[\sum_{i=1}^{n} h^{-1}(p_i|p_i|^{-2} y_i)\right]$$
$$= h\left[\sum_{i=1}^{n} p_i y_i |y_i|^{-2}\right] = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i y_i |y_i|^{-2}\right) \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} p_i y_i |y_i|^{-2}\right|^{-2}.$$

Podsumowanie

Przedstawiona problematyka pokazuje wyniki teoretyczne oraz procedurę, jaką należy stosować, w celu prawidłowego konstruowania żądanego typu statystyki, który wyznaczany jest w sposób jednoznaczny po ustaleniu struktury algebraicznej badanych parametrów. Trudności teoretyczne jakie może sprawiać stosowanie przedstawionej techniki będą polegać głównie na identyfikacji struktury rozważanego typu parametru i znalezienie odpowiedniej bijekcji.

Bibliografia

Ostasiewicz S., Rusnak Z., Siedlecka U., 2006, *Statystyka. Elementy teorii i zadania*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. O. Langego we Wrocławiu, Wrocław, 455 s.

Mitrinović D. S., 1972, *Elementarne nierówności*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 319 s.

Smoluk A. (red.), 2000, *Elementy metrologii ekonomicznej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. O. Langego we Wrocławiu, Wrocław, 222 s.

Stachak S., 2006, *Podstawy metodologii nauk ekonomicznych*, Książka i Wiedza, Warszawa, 320 s.

Abstract

Substantiated study of economic processes by examining the behavior of economic parameters requires taking into account their algebraic structures. It is known that these parameters have their own, natural algebraic structure which establishment is the first step to correct the accounting of analysis and reasoning. In the article, the authors present an algebraic algorithm that can be applied to the classification of basic economic parameters. Its consequence will be an indication of the mathematical and probabilistic structures, within which the calculation of values characterizing studied processes can be done. As the examples mentioned issues we will present several algebraic structures and their corresponding types of nonlinear probability space.