

*Janusz Kupczun**

NOWE KONCEPCJE WPROWADZANIA CAŁEK OZNACZONYCH W UNIWERSYTECKICH WYKŁADACH MATEMATYKI

1. WPROWADZENIE

Gwałtowny rozwój różnych dziedzin nauki, jaki wystąpił w XX wieku, wymusza na nas wprowadzanie ciągłych zmian w procesie nauczania, zarówno w zakresie materiału, jak i sposobu przedstawiania go studentom. Dotyczy to również przedmiotów ilościowych, wykorzystujących przede wszystkim pojęcia matematyczne.

Pojęcia matematyczne są zwykle przemyślane i uprzyświecone w formalnych opracowaniach na użytek studiów głównie przez matematyków. Niestety, bardzo często zgodnie z potrzebami ubiegłych wieków, są one opracowane w trudno przyswajalnej i bardzo abstrakcyjnej formie.

Ten stan rzeczy był spowodowany oczywistą i gwałtowną potrzebą zapewnienia pełnej precyzji i ścisłości ujęć matematyki na studiach wtedy, kiedy szkolne nauczanie matematyki nie mogło być jeszcze doprecyzowane ani przez nauczycieli szkół średnich ani, tym bardziej, w samokształceniu się przez ich uczniów. Po prostu był to skutek braku odpowiedniej, powszechnie dostępnej matematycznej literatury¹.

* Dr, Katedra Metod Statystycznych, Uniwersytet Łódzki.

¹ Jeszcze do niedawna, aby zabezpieczyć ścisłość akademickiego wykładu, niektórzy matematycy (np. słynny prof. W. Sierpiński) znane bardzo pobieżnie ze szkoły średniej funkcje trygonometryczne, wprowadzali na nowo w sposób niegeometryczny (szeregi potęgowe), mało poglądowo, ale ściśle. Podobna potrzeba spowodowała nawet kilka wieków temu odkrycie geometrii analitycznej przez Kartezjusza (1637 r.) i stopniowe wprowadzenie różnych ciekawych metod arytmetyzacji matematyki. Jednak od chwili uzupełnienia i dopracowania słynnych Elementów Euklidesa przez D. Hilberta (1899 r.) oraz opracowania olbrzymiej ilości precyzyjnych wykładów geometrii szkolnej, owa potrzeba arytmetyzacji i związanych z nią definicji ignorujących wyobraźnię, stała się mało aktualna. Geometria analityczna zaś nie zastępuje ale ma znaczenie niezależne i uzupełnia się z naszą geometrią szkolną.

Rozszerzający się zakres problematyki różnych dziedzin, w tym problematyki samej matematyki, musi skłaniać zarówno do stosowania lepszych sposobów wprowadzania pojęć matematycznych na zajęciach akademickich, jak i lepszych, łatwiejszych sposobów merytorycznego ujmowania treści tych pojęć, między innymi, w kierunku zwiększenia ich przejrzystości i prostoty.

Dokonują się obecnie słynne procesy globalizacji gospodarki i pozostałych dziedzin życia społeczeństw. W dwojaki sposób wpływają one (i powinny wpływać) na omawiany tu problem dydaktyki. Z jednej strony, wymuszają one na nas wprowadzanie takich form nauczania, przy których międzynarodowa wymiana studentów nie będzie im sprawiała kłopotów pojęciowych, szczególnie w wymianie poglądów naukowych. Z drugiej zaś strony, zwiększają one samą możliwość prowadzenia takiej wymiany poglądów, zarówno w sposób bezpośredni, jak i na łamach rozmaitych publikacji.

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie jednej z możliwych propozycji udoskonalenia zajęć z matematyki na przykładzie wprowadzania jednej z zasadniczych koncepcji – **pojęcia całek oznaczonych**.

Pojęcia całek i pochodnych uważa się potocznie za wysoce abstrakcyjne i trudne, zupełnie niedostępne dla przeciętnego inteligenta i mało dostępne dla początkującego studenta. Sami matematycy jakby potwierdzili i tym samym utrwalili taką opinię. Twierdzili bowiem często (a niektórzy z nich z przyzwyczajenia robią to nawet do dzisiaj), że owe pojęcia, wespół z pojęciem granicy, wchodzą już w zakres tzw. matematyki „wyższej”, a więc występują one w jakiejś warstwie wyższych pojęć, ponad zwyczajną matematyką.

Uważam, że jest to opinia usprawiedliwiona niezbyt szczęśliwym, tradycyjnym sposobem wprowadzania pojęć analizy matematycznej, a nie jakąś odmieną jakością tych pojęć².

Można się o tym przekonać analizując związek pojęć całek i pochodnych z dawno przyswojonymi potocznie i łatwymi pojęciami pola lub objętości figury i prędkości. Nie widać przyczyn, dlaczego dla przyswojenia sobie na co dzień, pojęcia analizy mogłyby być specjalnie trudne. Na razie dla oswojenia się z nowymi nazwami na pewno potrzeba by było uczącym się trochę więcej czasu niż dla pojęć potocznie używanych do tej pory. Kiedyś jednak, jak i pojęcia obiegowe, owe pojęcia w swojej treści staną się banalne.

² Podkreśla się czasem, że w podanej przez Cauchy'ego formalnej definicji granicy funkcji po raz pierwszy w matematyce wystąpiły trzy różne kwantyfikatory, inaczej jak w prostszych od niej, początkowych definicjach geometrii i algebry. Związane to jednak było z ułomnością języka potocznego, używanego pierwotnie w naukach. Wobec zastosowania specjalnej symboliki dla trudniejszych zdań w matematyce, sytuacja trzech kwantyfikatorów dzisiaj wcale już nie jest w niej wyjątkowa.

2. TRADYCYJNY SPOSÓB WPROWADZANIA CAŁEK I POCHODNYCH

Obecna tradycja wprowadzania pojęć analizy matematycznej zaczęła się kształtować w XVIII i XIX wieku. Tradycję tę nieco zmieniono w 1797 r. kiedy to S. Lacroix podmienił dawną geometryczną definicję całki oznaczonej definicją czysto analityczną.

Trudności w precyzacji pojęć i dopiero stopniowe odkrywanie twierdzeń przyczyniły się przez wieki do wytworzenia schematu wykładu, który dla łatwego uchwycenia treści pojęć, dzisiaj już najszcześniejszy nie jest.

Zwróćmy uwagę na istotne cechy utrwalonej dydaktycznej tradycji.

W typowych zajęciach z matematyki w szkole wyższej, poświęcamy najpierw wiele godzin wykładu i ćwiczeń na operację obliczania pochodnych (czyli różniczkowanie) i jej odwrócenie (którą jest obliczanie całek nieoznaczonych). Operacje te stosujemy do funkcji określonych w sposób abstrakcyjny. Stąd, trudno tu o jakąś pogładowość i tej tutaj nie ma.

W końcu jednak jest szansa na przejrzystą geometryczną interpretację pojęcia całki. Mianowicie, gdy przy pomocy całek nieoznaczonych, wprowadzamy wreszcie całkę oznaczoną. Czynimy to jednak tylko dla bardzo prostych, wybranych funkcji, bez pełnej świadomości, czy można to robić zawsze. Przy tym, niejako automatycznie, sobie lub innym sugerujemy jakąś ułomność wszelkich geometrycznych, pogładowych ujęć i niejasny zakres ich stosowalności.

W ten sposób dominuje u nas skomplikowana i abstrakcyjna definicja całki jako granicy sum Riemanna, z wielką szkodą dla naszej wyobraźni.

Na domiar złego, bardziej zaawansowane podręczniki przesadnie straszą studentów, sygnalizując uczącym się uogólnienia pojęć całki i pokrewnych w nieskończoność; i to metodami dziwnymi, odkrytymi wbrew temu co odgadujemy i jesteśmy w stanie odkryć.

Na szczęście nie jest to prawda, a opisaną sytuację można już dzisiaj radykalnie zmienić. Wyraźniej widoczne jest to jednak dopiero od lat pięćdziesiątych.

3. NOWE MOŻLIWOŚCI OKREŚLANIA CAŁEK OZNACZONYCH

W 1957 r. czeski matematyk Jarosław Kurzweil zauważył prostą modyfikację znanej (z większości wykładów i podręczników) formalnej definicji całki, podanej przez B. Riemanna (zob. np. Fichtenholz 1965, rozdz. 9, par. 1, s. 80). Modyfikacja polega w zasadzie (w zależności od wersji definicji Riemanna) na zmianie znaczenia tylko jednej litery, a pozwala objąć jednolitym pojęciem wszystkie znane "naturalne" uogólnienia całek oznaczonych (tych całek, które mają

wartości skończone (!)). M.in. modyfikacja pozwala objąć całki Lebesgue'a, zarówno zwykłe, jak i niewłaściwe.

Nowo wprowadzone pojęcie okazało się równoważne z dobrze znanymi ekspertom teorii całkowania, bardzo trudnymi ujęciami A. Denjoy z 1912 r. i O. Perrona z 1914 r. Wiadomo także, że owe ujęcia w pewnym sensie zakończają proces „naturalnych” uogólnień (zob. np. Saks 1930, rozdz. 10 tw. 8, s. 308, gdzie podane są pewne charakteryzacje całek przez pewne ich własności – postulaty).

Poczynając od 1997 r. grupa matematyków rozwijających nowe ujęcie całki, propaguje podawanie zmodyfikowanej, ogólniejszej definicji wszędzie tam, gdzie nie zależy nam na drobiazgowym uzasadnianiu referowanych twierdzeń, a więc szczególnie w przypadku wykładu matematyki dla jej zastosowań. Dotyczy to również wykładów na wydziałach ekonomicznych.

Zalety nowego ujęcia dość dobrze przedstawia „An open letter to authors of calculus books” otwarty list-apel w Internecie, sygnowany przez wielu autorów podręczników propagujących nowe ujęcia (ich lista rośnie). Są to:

R. Bartle (USA – Uniwersytet w Chicago, mth-bartle@emuvax.emich.edu);

Śp. H. Henstock zm. 2007 r. (Irlandia – New Univ. of Ulster, r.henstock@ulst.ac.uk)

J. Kurzweil (Czechy, kurzweil@mbox.cesnet.cz);

E. Schechter (USA – Vanderbilt Univ, schectex@math.vanderbilt.edu);

S.T. Szwabik (Czechy – Praha Academia, schwabic@beba.cesnet.cz);

R. Vyborny (Australia – Univ. of Queensland, R.Vyborny@mailbox.uq.edu.au).

Nie będę w pełni powtarzał argumentacji owego listu, który dostępny jest w Internecie pod cytowanym nagłówkiem. Jego autorzy podkreślają, że niektóre fakty zmodyfikowana definicja całki pozwala sformułować prościej oraz, że jest ona bardziej użyteczna od starej definicji, jako pomost do materiału bardziej zaawansowanego. Natomiast nie rodzi ona nowych trudności, bo ci, którzy jej nie rozumieją, również w takim samym stopniu nie potrafią zgłębić starej definicji. Wskazują również, że odpadają z osobnego nauczania tzw. całki niewłaściwe, co wykład ułatwia i nawet nieznacznie skraca.

Popierając apel, postaram się jeszcze dodatkowo uwidocznić, jak nowoczesny wykład teorii całek poprzez geometryzację można upogłodzić i tym samym, lepiej uprzystępnąć. Co więcej, że można to uczynić bez zmiany liczby do tej pory przeznaczanych na ów wykład godzin.

Równolegle, podam również dane historyczne o rozwoju pojęć całki. To, m.in. pozwoli przekonać się, że nowy porządek wykładu wcale nie będzie czymś dziwnym, niezgodnym z naturalną tradycją, ale że wręcz przeciwnie, będzie przywróceniem pierwotnego, naturalnego porządku rzeczy.

4. PRZYWRÓCENIE PIERWOTNEGO HISTORYCZNIE PORZĄDKU POJĘĆ W WYKŁADACH

W moim przekonaniu, całki oznaczone można z powodzeniem wprowadzać w formie geometrycznej, jeszcze w szkole średniej, chociaż wtedy już bez wielu wzorów. Jednak ograniczę się tutaj do podania jednej z możliwości dla szkoły wyższej.

Nic nie przeszkadza, by całkę oznaczoną wprowadzić w jakimś przedziale, jako algebraiczną sumę pól. Pół części od wykresu funkcji do osi x – ze znakiem plus, o ile wykres znajduje się nad osią x i – ze znakiem minus, gdy przeciwnie, znajduje się pod osią x . Całkowana funkcja nie musi być wtedy funkcją ciągłą.

Pojęcie można stopniowo uogólniać, zaczynając od nielicznych przykładów krzywych, dla których odpowiednie pola w szkole średniej potrafimy już obliczać, albo korzystając z podanych bez dowodu wzorów.

Jeżeli ograniczymy się do przypadku, gdy sumy (skończonej lub nieskończonej liczby) pól dla części dodatnich i dla części ujemnych wykresu, z osobna są skończone, dostajemy w ten sposób znaną z literatury matematycznej całkę H. Lebesgue'a.

Przejrzysty wykład teorii całki wymaga równoczesnego objaśnienia jej symbolu, jako wydłużonej litery S i skojarzenia jej z sumami. Wystarczy tu tylko wskazać, że całkę jako pole, można obliczać sumując cienkie „słupki”.

Wprowadzenie całki jako pola (w przypadku funkcji całkowanych ciągłych), pozwala dość łatwo odkryć sposób ich przybliżania poprzez obliczanie tzw. sum Riemanna, a także odkryć znany związek całkowania z różniczkowaniem. To właśnie, przed algebraizacją pojęcia całki i formalnym podawaniem wzorów, wygodnie jest uczynić.

Dalszym etapem może być ogólne i formalne podanie definicji całki oznaczonej, przy pomocy zmodyfikowanych sum Riemanna. Możemy podać ją jako uzupełnienie.

Pragnę podkreślić, że przy pomocy całek oznaczonych można odkryć i bardziej intuicyjnie wyprowadzić również niektóre wzory, które dotychczas w swej treści lub w dowodzie były trochę „zbyt magiczne dla studentów”. Np. tw. Schwarza o zmianie kolejności pochodnych cząstkowych oraz tw. o całkowaniu przez części można uzyskać w naturalny sposób przez sprowadzanie całki podwójnej do całek iterowanych, a postać reszty we wzorze Maclaurina – przez n -krotne całkowanie nierówności dla n -tej pochodnej (intuicyjne wyprowadzenie wzoru na resztę znalazłem kiedyś w starym podręczniku Nernsta i Schoenfliesa 1913, rozdz.8, par. 7a, s. 245–247). Pomijam bliższe wyjaśnienia, bo intuicyjność dowodów ma wielkie znaczenie głównie dla samych matematyków.

Porównajmy teraz przez chwilę obie wersje tekstu: dawnego i zmodyfikowanego określenia całki uzupełniającego wykład.

A. Zwykła (tradycyjna) definicja całki Riemanna w wersji zbliżonej do definicji Kurzweila.

Niech $\langle a; b \rangle$ będzie dowolnym domkniętym (skończonym) przedziałem liczb rzeczywistych, natomiast f niech będzie dowolną funkcją określoną na tym przedziale i przyjmującą tylko wartości rzeczywiste.

(1) **Etykietowanym podziałem przedziału $\langle a; b \rangle$** (po ang. "tagged partition") nazywamy dowolny układ dwóch ciągów liczbowych skończonych $P = [(x_0, x_1, \dots, x_n); (t_0, t_1, \dots, t_n)]$, dla których $x_0 = a, x_n = b, x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ oraz zawsze $t_i \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$.

(2) **Oszacowaniem** (skalowaniem, po ang. „a gauge”) nazywamy dowolną liczbę dodatnią δ .

(3) Dla oszacowania δ , podział P w którym zawsze $|x_{i-1}; x_i| < \delta$ nazywamy **δ -drobnym podziałem**.

(4) **Sumą (przybliżoną) Riemanna dla funkcji f oraz podziału P** nazywamy sumę długości przedziałów podziału pomnożonych przez wartości funkcji f w punktach z nich wybranych, tj. nazywamy nią liczbę $\sum_{i=1}^n f(t_i) |x_{i-1}; x_i|$.

(5) **Całką oznaczoną funkcji f od a do b** nazywamy jedyną liczbę skończoną L (oznaczaną tu przez $\int_a^b f(x)dx$), taką że dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$ istnieje takie oszacowanie δ , że dla każdego δ -drobnego podziału odpowiadająca mu suma Riemanna, co do modułu różni się od liczby L o mniej niż ε , tj. :

$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{P \text{ } \delta\text{-podz.}} \left(\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) |x_{i-1}; x_i| - L \right| < \varepsilon \right)$ (o ile oczywiście taka liczba L istnieje).

Definicja zmodyfikowana przez Kurzweila

Niech $\langle a; b \rangle$ będzie dowolnym domkniętym przedziałem liczb rzeczywistych, natomiast f niech będzie dowolną funkcją określoną na tym przedziale i przyjmującą tylko wartości rzeczywiste.

(1) **Etykietowanym podziałem przedziału $\langle a; b \rangle$** (jak wyżej) nazywamy dowolny układ dwóch ciągów liczbowych skończonych $P = [(x_0, x_1, \dots, x_n); (t_0, t_1, \dots, t_n)]$, dla których $x_0 = a, x_n = b, x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ oraz zawsze $t_i \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$.

(2) **Oszacowaniem** nazywamy dowolną funkcję δ określoną na wspomnianym przedziale i przyjmującą tylko wartości dodatnie.

(3) Dla oszacowania δ , podział P w którym zawsze $|x_{i-1}; x_i| < \delta(t_i)$ nazywamy **δ -drobnym podziałem**.

(4) **Sumą (przybliżoną) Riemanna dla funkcji f oraz podziału P** nazywamy sumę długości przedziałów podziału pomnożonych przez wartości funkcji f w punktach z nich wybranych, tj. nazywamy nią liczbę $\sum_{i=1}^n f(t_i) |x_{i-1}; x_i|$.

(5) **Całką oznaczoną funkcji f od a do b** nazywamy jedyną liczbę skończoną L (oznaczaną tu przez $\int_a^b f(x)dx$), taką że dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$ istnieje takie oszacowanie δ , że dla każdego δ -drobnego podziału odpowiadająca mu suma Riemanna, co do modułu różni się od liczby L o mniej niż ε , tj.:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{P \text{ } \delta\text{-podz.}} \left(\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) |x_{i-1}; x_i| - L \right| < \varepsilon \right) \quad (\text{o ile oczywiście taka liczba } L \text{ istnieje}).$$

Możemy dopuścić tutaj, że funkcje f i δ przyjmują wartości nieskończone oraz podobnie, że krańce przedziału $\langle a; b \rangle$ są nieskończonościami. Inne elementy definicji (za wyjątkiem definicji oszacowania) pozostają niezmienione.

Po uporaniu się ze zmodyfikowaną definicją całki oznaczonej można przystąpić do wprowadzania całek nieoznaczonych i znanego z kursów matematyki zestawu wzorów. Wykład byłby tutaj rozwijany w znany, tradycyjny sposób. W razie potrzeby przykłady niektórych dowodów można łatwo podać w wersji dawnej, ograniczając się do funkcji ciągłych.

Podstawowym poglądem, który tutaj chciałem uzasadnić wobec dydaktyków jest teza, że: **w efektywnym nauczaniu matematyki na wydziałach niematematycznych, można stosować nie tylko nowoczesne środki aktywizacji uczących się i upogładowienia materiału, ale również nie rezygnować z merytorycznej poprawności i nowoczesności wykładu.**

Myślę, że po wnikliwej analizie tego, co powiedziałem oraz wspomnianego apelu propagatorów modyfikacji Kurzweila, teza ta stanie się dość oczywista dla większości zainteresowanych osób.

Pragnę podkreślić, że modyfikacja podana przez Kurzweila nie jest ani banalna ani zbędna. Już w zakresie funkcji nieciągłych choćby w 1 punkcie, podaje się przykłady funkcji niecałkowalnych w sensie Riemanna i Lebesgue'a, ale całkowalnych w sensie Denjoy-Kurzweila.

Jedną z takich funkcji jest dość skomplikowana funkcja określona na przedziale $\langle 0; 1 \rangle$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^2} & \text{gdy } x \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}.$$

Zmodyfikowane całki nie wymagają dalszych uogólnień w postaci całek niewłaściwych, co wspólnie z innymi cechami upraszcza i skraca wykład i stanowi dużą ich zaletę.

3. Rzut oka na rozwój historyczny teorii całki, ukazujący zgodność pierwotnych koncepcji z postulowanym przeze mnie nowym porządkiem wykładu

Tablica 1. Rozwój historyczny teorii całki

Kiedy 1	Kto 2	Co zrobił 3	Uwagi 4
ok. 380 p.n.Chr.	Eudoksos	Stosował metodę wyczerpywania przy obliczaniu pola figur. Dzisiaj w bardziej skomplikowanych przypadkach stosujemy już wzory całkowite.	ok. 250 p.n.Chr. Archimedes obliczał tą metodą nawet pole figury pod parabolą.
1637	Cavalieri B.	Dowiódł, że $\int_0^x x^4 dx = \frac{x^5}{5}$. Powoływał się przy tym na fikcyjną geometrię w 4 wym. Potem wzór uogólnił na inne wykładniki naturalne.	W 1646 E. Torricelli uogólnił wzór na niektóre wykładniki wymierne niecałkowite, a w 1656 J. Wallis – na niektóre wykładniki niewymierne. W 1657 P. Fermat dowiódł słuszności wzoru ogólnego.
1637	Descartes R.	Stosował metodę współczynników nieoznaczonych do obliczania całek (określonych na sposób geometryczny, jako pole).	Wprowadził także geometrię analityczną.
1638	Galileusz G.	W konkretnej formie wiedział, że droga jest całką prędkości (a więc znał już związek całki i pochodnej).	
ok. 1640	Fermat P.	Odkrył całkowanie przez części i przez podstawienie.	
1642	Roberval G.	Po raz pierwszy obliczył całkę niewłaściwą w przedziale skończonym, z funkcji nieciągłej.	
1643	Torricelli E.	Pierwszy obliczył całkę niewłaściwą w przedziale nieskończonym.	Znalazł objętość nieskończonego ciała powstającego przy obrocie hiperboli.
1647	Gregory de St. Vincent	Zauważył związek pola pod hiperbolą z logarytmami.	W 1649 Antoine de Saras dowiódł, że $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Tabl. 1 (cd.)

1	2	3	4
1667	Barrow I.	Znał tw. o pochodnej całki względem górnej granicy całkowania.	
1668	Gregory J.	Podał w geometrycznej formie zasadnicze tw. rachunku całkowego, że wartość całki jest różnicą wartości funkcji pierwotnej.	Pierwszy ścisły i ogólny dowód tego tw. podał A. Cauchy. Obliczył on też całki funkcji tg, sec i ln. Podał również wzór interpolacyjny Simpsona.
1670	Leibniz G.W.	Opisał przybliżone całkowanie.	
1675	Leibniz G.W.	Użył stylizowanej litery „S” na oznaczenie całki oznaczonej, potem zaś symbolu „dx”, aby zaznaczyć zmienną, względem której całkujemy.	1690 J. Bernoulli użył słowa „całka”.
1694	Leibniz G.W.	Wprowadził całkę nieoznaczoną oraz stałą całkowania.	Ciągle jeszcze używa całki tylko jako pola.
1702	Leibniz G.W.	Odkrył metodę całkowania funkcji wymiernych przez ich rozkład na ułamki proste.	
1731	Euler L.	Doszedł do wzoru $\int_1^n \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = n!$, który potraktował jako uogólnienie silni na liczby niecałkowite.	Było to w istocie odkrycie funkcji gamma. Znaną powszechnie jej definicję podał w 1765 r.
1741	Maclaurin C.	Przedstawiał długości stożkowych przy pomocy całek oznaczonych.	
1743	Clairaut A.C.	Stosował tzw. całki krzywoliniowe i podał dowód ich niezależności od drogi całkowania.	
1768	Euler L.	Wprowadził tzw. logarytm całkowy, tzn. funkcję postaci: $li(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt$.	W 1793 K. Gauss zauważył, że dla dużych n funkcja wyraża w przybliżeniu ilość liczb pierwszych mniejszych niż n. W tym sensie, że stosunek jej wartości do owej ilości dąży do liczby 1.
1769	Euler L.	Wprowadził podwójną całkę oznaczoną funkcji f po obszarze ograniczonym.	Przed nim rozważano tylko podwójne całki nieoznaczone, tzn. funkcje F dla których $F'_{x,y}(x;y)=f(x;y)$.
1778	Laplace P.S.	Obliczył całkę $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ (w istocie całkę z funkcji gęstości rozkładu normalnego).	

Tabl. 1 (cd.)

1	2	3	4
1788	Lagrange J. L.	Wprowadził całki powierzchniowe i sprowadził je do całek oznaczonych podwójnych.	
1797	Lacroix S.F.	Zmienił dawną geometryczną definicję całki oznaczonej na czysto analityczną (przy pomocy funkcji pierwotnej). W owych czasach było to korzystne dla ścisłości wykładu.	Jeszcze w 1807 r. J. B. Fourier stosował jednak ciągle definicję geometryczną.
1823	Cauchy A.L.	Określił całki funkcji ciągłych (!) przy pomocy znanych z wykładów matematyki sum Riemanna.	Wskazał jednak na geometryczne znaczenie podawanej definicji.
1854	Riemann B.	Wprowadził dużo ogólniejsze niż Cauchy określenie całki z funkcji niekoniecznie ciągłych.	
1875	Smith H.J.	Podał pierwszy przykład funkcji niecałkowalnej w sensie Riemanna, która w żadnym przedziale nie jest ciągła.	
1876	du Bois - Reymond P.	Do kursów analizy matematycznej wprowadził tw. o całce sumy dwóch funkcji i o całce funkcji o znaku przeciwnym; także – o całce funkcji po sumie dwóch przedziałów składowych.	Wcześniej twierdzenia te znalazł już P. G. Dirichlet.
1881	Volterra V.	Pokazał, że funkcja może mieć wszędzie w przedziale pochodną ograniczoną, ale niecałkowalną w sensie Riemanna.	Jak (obecnie) wiadomo owa pochodna musi być całkowalna w sensie Lebesgue'a.
1888	Peano G.	Dowiodł, że nieujemna funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy figura pod jej wykresem jest mierzalna w sensie podanej przez niego miary połowej (tzw. miary Peano-Jordana).	
1900	Pringsheim A.	W przypadku całek Riemanna pokazał, że całka podwójna funkcji może nie istnieć, mimo że istnieją obie całki iterowane i są sobie równe.	W 1917 r. G. M. Fichtenholz dowiódł tego samego dla całek Lebesgue'a.
1901	Lebesgue H.	Wprowadził swoją teorię miary, będącej uogólnieniem miary Peano-Jordana.	
1902	Lebesgue H.	Wprowadził swoją teorię całki, będącej uogólnieniem całki Riemanna.	

Tabl. 1 (cd.)

1	2	3	4
1905	Vitali G.	Podał pierwszy przykład zbioru na prostej, który nie jest mierzalny w sensie Lebesque'a.	Obecnie jest już bardzo dużo konstrukcji takich zbiorów. Nie są to jednak zbiory fizycznie konstruowalne jako jakieś ciała, ani jakieś przedziały lub obszary.
1907	Lebesgue H.	Uogólnił swoje wyniki na całki wielowymiarowe.	
1907	Fubini G.	Dowiodł swego twierdzenia o zamianie całki podwójnej Lebesque'a, na całki iterowane.	Było to uogólnienie znanej ze szkoły średniej (mało precyzyjnej) zasady Cavalieriego.
1908	Tonelli L.	Dowiodł twierdzenia odwrotnego do tw. Fubiniego.	
1909	Lebesgue H.	Pokazał, że jego całki można zawsze otrzymywać przy pomocy odpowiednio wybieranych sum Riemanna.	
1910	Hobson E.W.	Pokazał na przykładzie, że całki iterowane Lebesque'a mogą być różne.	
1912	Denjoy A.	Podał określenie całki oznaczonej, w pewnym sensie już najogólniejsze.	
1914	Perron O.	Podał określenie równoważne określeniu Denjoy.	
1921	Hake H.	Dowiodł równoważności określeń Denjoy i Perrona.	
1923	Looman H.	Podał określenie całki Denjoy dla funkcji dwóch zmiennych.	W 1934 M. Krzyżański podał inne określenie tej całki, a w 1936 – S. Kempisty – dla funkcji wielu zmiennych.
1957	Kurzweil J.	Zauważył możliwość prostszego określenia całki Denjoy, będącego drobną modyfikacją określenia całki Riemanna. W istocie, było to nawiązanie do starego spostrzeżenia Lebesque'a.	W latach 60-tych R. Henstock w szczególności opracował tę ideę.

Informacji o wielu badaniach (np. dotyczących pól i objętości figur elementarnych w przestrzeniach nieeuklidesowych) celowo nie podawałem. Badania te bowiem trwają do dzisiaj i co do nich sytuacja jeszcze się wikła.

Mimo wszystko **myślę, że zasadnicze tezy referatu już umotywowałem. Pozostaje przemyśleć inne tematy w podobny sposób i następnie dokonać pewnej syntezy. Być może wysiłkiem zbiorowym uda się wypracować nowy schemat zajęć z matematyki sprawnie i szybko.**

Podaję tutaj literaturę zawężoną do pozycji bardziej dostępnych w Polsce. W razie potrzeby można również zasięgnąć rady specjalistów z zakresu teorii całek, np. przez Internet. Niektóre ich adresy e-mailowe już podałem. Inne adresy można łatwo napotkać w Internecie i w literaturze podczas poszukiwań związanych z hasłem „Henstock-Kurzweil integral”.

LITERATURA

- Banach S. (1951), *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Monografie Matem., Warszawa.
Fichtenholz G. M. (1965), *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. 2., PWN, Warszawa.
Hadwiger H. (1957), *Wykłady o objętości, polu powierzchni i izoperymetrii*, Nauka, Moskwa (tłum. ros. z 1966 r. lub oryg. niemiecki z 1957 r.).
Hartmann S., Mikusiński J. (1957), *Teoria miary i całki Lebesgue'a*, PWN, Warszawa.
Natanson I. P. (1974), *Teoria funkcji zmiennej rzeczywistej*, Nauka, Moskwa (po ros.).
Nernst W., Schoenflies A. (1913), *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften*, München–Berlin Druck und Verlag von R. Oldenburg.
Saks S. (1930), *Zarys teorii całki*, Wyd. Kasy im. Mianowskiego, Warszawa.
Sikorski R. (1958), *Funkcje rzeczywiste*, t. 1. PWN, Warszawa.
Szczierba L.W. (1967), *O mierze Jordana*, Wyd. Szk. i Ped., Warszawa.

Janusz Kupczun

NEW CONCEPTIONS FOR INTRODUCTION OF DEFINITE INTEGRALS IN UNIVERSITY LECTURES OF MATHEMATICS

The purpose of this paper is a brief discussion of some recent ideas, that could be useful for more intuitive and more modern teaching of calculus (i.e. mathematical analysis). I limited myself to the fundamental concepts of integrals. However my intention was to contribute to elucidations of many similar topics. In my opinion, now is the time of change of form and contents, of many routine and often boring courses.