ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 162, 2002

*Anna Szymańska**

ZASTOSOWANIE MODELU RUINY UBEZPIECZYCIELA DO OCENY RYZYKA TOWARZYSTWA UBEZPIECZENIOWEGO

SRESZCZENIE. Towarzystwo ubezpieczeniowe jest firmą szczególnie narażoną na straty ze względu na specyfikę prowadzonej działalności. Dlatego warunkiem koniecznym wypłacalności towarzystwa ubezpieczeniowego jest między innymi przewidywanie przyszłych strat.

Probabilistyczny model ruiny ubezpieczyciela pozwala oceniać ryzyko związane z działalnością ubezpieczeniową. W referacie porównano dwie metody szacowania prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela: Cramera-Lundberga oraz Panjera, przy różnych założeniach początkowych co do stanu rezerw ubezpieczyciela i wysokości dodatku bezpieczeństwa składek.

Słowa kluczowe: ruina ubezpieczyciela, współczynnik bezpieczeństwa składki, bariera ruiny.

I. UWAGI WSTĘPNE

W wyniku zachodzących zmian gospodarczych polski rynek ubezpieczeń rozwija się bardzo dynamicznie, równocześnie poszukując metod wspomagających procesy decyzyjne. Badań wymagają również przenoszone na nasz rynek doświadczenia i rozwiązania stosowane w krajach wysoko rozwiniętych.

Zarówno organy nadzoru ubezpieczeń, jak i klienci oczekują od towarzystwa ubezpieczeniowego gwarancji bezpieczeństwa, której podstawą jest zachowanie stałej wypłacalności. Jednym z warunków bezpiecznego funkcjonowania na rynku ubezpieczeniowym jest prawidłowe szacowanie przyszłych zysków, pozwalające zapobiegać stratom poprzez stosowanie odpowiedniej polityki składkowej, reasekuracyjnej, lokacyjnej.

* Dr, Instytut Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Łódzki.

Analizując raporty Państwowego Urzędu Nadzoru Ubezpieczeń (por. Biuletyn PUNU za rok 1998, 1999) stwierdzamy, że większość towarzystw ubezpieczeniowych poniosła straty na działalności ubezpieczeniowej, rozumianej jako różnica między otrzymanymi składkami a wypłaconymi odszkodowaniami. Straty te w przypadku niektórych firm ubezpieczeniowych rekompensowały dochody uzyskiwane z działalności lokacyjnej.

Jedną z metod oceny ryzyka, rozumianego jako oczekiwana strata z działalności ubezpieczeniowej, jest szacowanie prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela. W praktyce ubezpieczeniowej ruina nie jest jednoznaczna z bankructwem ubezpieczyciela, jest terminem technicznym oznaczającym ujemny zysk firmy w danym okresie. Obliczanie prawdopodobieństwa ruiny organizacji ubezpieczeniowej jest jednak użyteczną miarą ryzyka finansowego firmy.

Probabilistyczny model ruiny zaproponowany przez Lundberga (B o w e r s 1986), (D a y k i n 1994) pozwala oszacować przyszłe zyski ubezpieczyciela oraz wyznaczyć bezpieczny poziom składek, przy zachowaniu minimalnych rezerw finansowych.

Przedstawimy i porównamy dwie metody szacowania prawdopodobieństwa ruiny towarzystwa ubezpieczeniowego przy różnych założeniach początkowych.

II. PROBABILISTYCZNY MODEL RUINY UBEZPIECZYCIELA

Niech U(t) oznacza nadwyżkę ubezpieczyciela rozumianą jako wynik z działalności ubezpieczeniowej przy uwzględnieniu wolnych rezerw początkowych. Nadwyżkę ubezpieczyciela w chwili t opisuje równanie

$$U(t) = u + ct - S(t) \qquad (1)$$

gdzie $u = U(0)$ jest początkową rezerwą ubezpieczyciela, c jest stałą składką w każdym okresie rozrachunkowym, $S(t)$ jest łączną sumą roszczeń do czasu t.

Momentem ruiny nazywamy chwilę czasu $T = inf\{ t : t \geq 0 \wedge U(t) < b\}$, w której nadwyżka ubezpieczyciela $U(t)$, określona równaniem (1), spada poniżej pewnej wartości b nazywanej barierą ruiny. Teoretycznie bariera ruiny może przyjmować dowolną wartość, co pozwala na różne definiowanie ruiny ubezpieczyciela.

Klasycznie ruiną ubezpieczyciela nazywany jest ujemny zysk z działalności ubezpieczeniowej (B o w e r s 1986). W tym przypadku barierą ruiny jest liczba zero, a ruina występuje gdy funkcja nadwyżki ubezpieczyciela przyjmuje wartość mniejszą od zera.

Prawdopodobieństwem ruiny w przedziale czasu $[0, t)$ nazywamy funkcję

$$\Psi(u,t) = \Pr(T < t) \tag{2}$$

Prawdopodobieństwem ruiny w nieskończonym okresie nazywamy funkcję

$$\Psi(u) = \lim_{t \to \infty} \Psi(u,t) = \Pr(T < \infty) \tag{3}$$

gdzie $T = \infty$ oznacza, że dla wszystkich $t \geq 0$ jest $U(t) \geq 0$.

Niech X będzie zmienną losową wielkości pojedynczego roszczenia. Załóżmy, że proces liczby roszczeń jest procesem Poissona oraz przeciętne odszkodowanie wynosi $E[X] = \mu$. Wówczas proces łącznej sumy roszczeń ma złożony rozkład Poissona z parametrami λ i μ. Współczynnik bezpieczeństwa składki określony jest równaniem

$$\Theta = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} \tag{4}$$

przy założeniu, że $\Theta > 0$.

Współczynnik bezpieczeństwa składki jest wyznaczanym przez ubezpieczyciela procentowym dodatkiem do składki netto. Może on pełnić dwie role. Po pierwsze ma zabezpieczać ubezpieczyciela przed stratami, podwyższając składki. Po drugie może pełnić rolę marketingową, obniżając składki. Wysokość współczynnika bezpieczeństwa składek jest tajemnicą każdej firmy ubezpieczeniowej.

W teorii ryzyka ubezpieczeniowego współczynnik bezpieczeństwa składki jest miarą stopnia, w którym składka przewyższa oczekiwaną wartość odszkodowania.

W indywidualnej teorii ryzyka, przy założeniu normalności rozkładu zagregowanych szkód, wyznacza się relatywny współczynnik bezpieczeństwa tak, żeby z określonym prawdopodobieństwem być pewnym, że składki pokryją wszystkie odszkodowania.

Przyjmijmy, że zmienne losowe wypłat mają łączną dystrybuantę $P(x)$ oraz że $P(x)$ istnieje w przedziale $(-\infty, \gamma)$ gdzie $\gamma > 0$.

Najmniejsze dodatnie rozwiązanie r równania

$$M_X(r) = 1 + (1 + \Theta)\mu r \tag{5}$$

nazywamy współczynnikiem dopasowania i oznaczamy R, gdzie M_X jest funkcją generującą momenty rozkładu zmiennej losowej X.

Teoretycznie współczynnik R istnieje. Jednak w praktyce często równanie (5) nie ma rozwiązania. Wtedy w klasycznej bibliografii przyjmuje się, że $R = 0$ (B o w e r s (1986).

Zależność między współczynnikiem dopasowania i prawdopodobieństwem ruiny dla $u \geq 0$ jest następująca

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(t)} | T < \infty]} \tag{6}$$

III. METODA CRAMERA-LUNDBERGA SZACOWANIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA RUINY

W tablicy 1 porównano wartości dokładne prawdopodobieństwa ruiny, liczone ze wzoru

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\Theta} e^{-u(\Theta)/(1+\Theta)} \tag{7}$$

z wartościami aproksymowanymi formułą Cramera-Lundberga (B o w e r s (1986).

$$\Psi(u) \cong e^{-\Theta u} \tag{8}$$

dla różnych wartości początkowych rezerwy $u = U(0)$ ubezpieczyciela oraz różnych współczynników dopasowania Θ, gdy proces łącznej sumy roszczeń jest procesem Poissona i $\mu = 1$ oraz zmienne losowe roszczeń mają rozkład wykładniczy z parametrem $\beta > 0$. Zastosowano kryterium długookresowe oraz przyjęto, że ruina nastąpi, gdy zysk spadnie poniżej poziomu rezerwy początkowej.

Przyjęta formuła aproksymacyjna Cramera-Lundberga jest dokładniejsza dla małego współczynnika bezpieczeństwa Θ. Mały dodatek bezpieczeństwa do składki oznacza, zgodnie z definicją prawdopodobieństwa ruiny i współczynnika bezpieczeństwa, duże prawdopodobieństwo ruiny. Przy wysokiej rezerwie początkowej i małym współczynniku bezpieczeństwa $\Theta = 0.01$ formuła aproksymacyjna Cramera-Lundberga bardzo dobrze przybliża wartości dokładne prawdopodobieństwa ruiny z błędem rzędu 10^{-3}. Dla większych wartości współczynnika bezpieczeństwa obserwujemy duży wzrost błędu wraz ze wzrostem rezerwy początkowej u ubezpieczyciela. Zależność błędu od wielkości rezerwy początkowej jest wadą metody Cramera-Lundberga. Na ogół w praktyce ubezpieczeniowej dodatek bezpieczeństwa Θ nie przekracza 10%. W tym przypadku formuła aproksymacyjna Cramera-Lundberga może być stosowana do oceny sytuacji finansowej ubezpieczyciela.

T a b l i c a 1

Prawdopodobieństwo ruiny dla różnych wartości współczynnika bezpieczeństwa Θ oraz początkowej nadwyżki u.

u	$\Psi(u)$ dla $\Theta = 0{,}1$			$\Psi(u)$ dla $\Theta = 0{,}01$		
	wartość dokładna	wartość aproksymowana metodą Cramera-Lundberga	błąd aproksymacji	wartość dokładna	Wartość aproksymowana metodą Cramera-Lundberga	błąd aproksymacji
10	0,36626	0,36788	0,0044	0,89677	0,90484	0,009
20	0,14756	0,13534	0,0828	0,81223	0,81873	0,008
30	0,05945	0,04979	0,1625	0,73567	0,74082	0,007
40	0,02395	0,01834	0,2342	0,66632	0,67032	0,006
50	0,00965	0,00674	0,3016	0,60351	0,60653	0,005
60	0,00389	0,00248	0,3625	0,54662	0,54881	0,004
70	0,00157	0,00091	0,4204	0,49509	0,49659	0,003
80	0,00063	0,00034	0,4603	0,44842	0,44933	0,002
90	0,00025	0,00012	0,5200	0,40615	0,40657	0,001
100	0,00010	0,00005	0,5000	0,36786	0,36788	0,0001

Ź r ó d ł o: Obliczenia własne.

IV. METODA PANJERA SZACOWANIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA RUINY

Kolejną zastosowaną metodą szacowania prawdopodobieństwa ruiny jest metoda Panjera (D i c s o n (1991). Odmienność tej metody polega na przyjęciu założenia o zmiennym współczynniku bezpieczeństwa Θ_i:

$$\Theta_i = \begin{cases} \Theta_0, \text{ gdy } & U(t) < b \\ \Theta_1, \text{ gdy } & U(t) \geq b \end{cases} \tag{9}$$

przy czym b jest ustaloną dodatnią wartością bariery ruiny. Towarzystwo ubezpieczeniowe będzie zagrożone bankructwem, gdy wynik finansowy z działalności ubezpieczeniowej osiągnie wartość niższą od parametru ruiny b.

Jeżeli

$$U(t) = u + (1 - \Theta_i)\, ct - S(t) \tag{10}$$

to przyjmujemy, że dla $t > 0$

$$\Psi_i(u) = \Pr\,(U(t) < 0 \quad U(0) = u) \tag{11}$$

Założono, że łączna suma roszczeń jest złożonym procesem Poissona ze średnią kwotą odszkodowania $\mu = 1$ oraz że rozkład zmiennej losowej wartości pojedynczego odszkodowania jest typu wykładniczego. Porównano dokładne wartości prawdopodobieństwa ruiny wyznaczone na podstawie wzoru

$$\Psi(u) = \begin{cases} k\Psi_0(u) + l, & \text{gdy} \quad u < b \\ \Psi_1(u-b)\left(ke^{-b\Theta_0/(1+\Theta_0)} + l\right), & \text{gdy} \quad u \geq b \end{cases} \tag{12}$$

gdzie

$$k = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + (\Theta_0 - \Theta_1)\Psi_0(b)} \quad \text{i} \quad l = 1 - k \tag{13}$$

z wartościami szacowanymi metodą Panjera przy użyciu formuły

$$\overline{\Psi}_i(j) = \frac{1 - P(j) + \sum_{k=1}^{j} f_k \overline{\Psi}_i(j-k)}{1 + \Theta_i - f_0} \tag{14}$$

dla $j = 1, 2, \ldots$, gdzie $P(X)$ jest dystrybuantą funkcji kwoty, przy której nadwyżka $U(t)$ spada poniżej poziomu początkowego po raz pierwszy. Punktem początkowym obliczeń jest

$$\overline{\Psi}_i(0) = \frac{1 - f_0}{1 + \Theta_i - f_0} \tag{15}$$

dla $j = 0$. Przy czym

$$f_0 = P(0{,}5h) \tag{16}$$

$$f_j = P((j + 0{,}5)h) - P((j - 0{,}5)h) \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, 3 \ldots \text{ i } h > 0 \tag{17}$$

Wykorzystano metodę całkowania numerycznego Simpsona. Wyniki przedstawiono w tab. 2–3.

T a b l i c a 2

Prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$ dla różnych wartości rezerwy początkowej u oraz różnych współczynników bezpieczeństwa Θ_i

u	$\Psi(u)$ dla $\Theta_0 = 0,1$; $\Theta_1 = 0,05$ $b = 0$			$\Psi(u)$ dla $\Theta_0 = 0,1$; $\Theta_1 = 0,05$ $b = 10$			$\Psi(u)$ dla $\Theta_0 = 0,1$ i $\Theta_1 = 0,05$ $b = 20$		
	wartość dokładna	wartość aproksymowana metodą Panjera	błąd aproksymacji	wartość dokładna	wartość aproksymowana metodą Panjera	błąd aproksymacji	wartość dokładna	wartość aproksymowana metodą Panjera	błąd aproksymacji
0	0,95238	0,95213	0,00025	0,93346	0,93315	0,00034	0,92078	0,92042	0,00040
10	0,59157	0,59142	0,00027	0,53615	0,53596	0,00034	0,44776	0,44756	0,00042
20	0,36745	0,36735	0,00027	0,33303	0,33291	0,00036	0,25718	0,25706	0,00042
30	0,22824	0,22816	0,00031	0,20686	0,20677	0,00039	0,15975	0,15968	0,00050
40	0,14177	0,14174	0,00028	0,12849	0,12843	0,00039	0,09922	0,09918	0,00040
50	0,08806	0,08804	0,00034	0,07981	0,07978	0,00050	0,06163	0,06160	0,00049

Ź r ó d ł o: Obliczenia własne.

T a b l i c a 3

Prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$ dla różnych wartości rezerwy początkowej u oraz różnych współczynników bezpieczeństwa Θ_i

u	$\Psi(u)$ dla $\Theta_0 = 0,2$; $\Theta_1 = 0,1$ $b = 0$			$\Psi(u)$ dla $\Theta_0 = 0,2$; $\Theta_1 = 0,1$ $b = 10$			$\Psi(u)$ dla $\Theta_0 = 0,2$ i $\Theta_1 = 0,1$ $b = 20$		
	wartość dokładna	wartość aproksymowana metodą Panjera	błąd aproksymacji	wartość dokładna	wartość aproksymowana metodą Panjera	błąd aproksymacji	wartość dokładna	wartość aproksymowana metodą Panjera	błąd aproksymacji
0	0,90909	0,90867	0,00045	0,85600	0,85539	0,00072	0,83815	0,83748	0,00081
10	0,36626	0,36610	0,00044	0,27198	0,27178	0,00070	0,18172	0,18156	0,00083
20	0,14756	0,14750	0,00041	0,10958	0,10951	0,00073	0,05774	0,05768	0,00087
30	0,05945	0,05941	0,00050	0,04415	0,04411	0,00068	0,02326	0,02324	0,00086
40	0,02395	0,02393	0,00042	0,01779	0,01778	0,00112	0,00937	0,00936	0
50	0,00965	0,00965	0	0,00717	0,00717	0,00139	0,00378	0,00377	0,00265

Ź r ó d ł o: Obliczenia własne.

Na podstawie przeprowadzonego badania stwierdzamy, że błąd aproksymacji dla metody Panjera jest rzędu 10^{-4} lub rzędu 10^{-3} (por. tab.2–3), co daje dobrą dokładność wykonywanych obliczeń.

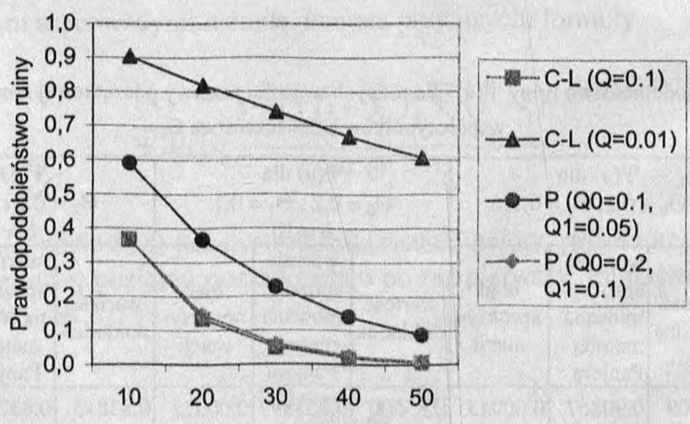
V. PODSUMOWANIE

Metoda Panjera okazała się dokładniejsza od formuły Cramera-Lundberga. Błąd aproksymacji nie przyrasta wraz ze wzrostem rezerwy początkowej *u*. Obydwie metody mogą być zaakceptowane, gdyż błąd aproksymacyjny nie jest duży (por. tab. 1–3). Prezentowane wyniki wskazują na możliwość zastosowania omawianych formuł aproksymacyjnych dla innych rozkładów indywidualnych roszczeń.

Na podstawie wyników zamieszczonych w tab. 1–3 porównajmy wartości prawdopodobieństwa ruiny dla bariery ruiny $b = 0$, dla jednakowych rezerw początkowych i różnych współczynnikach bezpieczeństwa składki.

Wykres 1

Prawdopodobieństwo ruiny szacowane metodą Cramera-Lundberga (C-L) i Panjera (P) dla różnych wartości rezerwy początkowej i współczynników bezpieczeństwa składek



Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

Przy zerowej wartości parametru ruiny oraz założeniu, że ruina nastąpi gdy zysk spadnie poniżej zera stosowaną wartością współczynnika bezpieczeństwa dla metody Panjera będzie wartość Θ_1. Z punktu widzenia ubezpieczyciela oceniającego przyszłe wyniki z działalności ubezpieczeniowej wartości prawdopodobieństwa ruiny są najniższe dla $\Theta = 0,1$ (przy metodzie Cramera-Lundberga) oraz dla $\Theta_0 = 0,2$ i $\Theta_1 = 0,1$ (przy metodzie Panjera). Dla tych wartości współczynników bezpieczeństwa wartości szacowanych prawdopodobieństw ruiny są porównywalne przy zastosowaniu obydwu metod aproksymacji. Zmniejszenie współczynników bezpieczeństwa do wartości $\Theta_0 = 0,1$ i $\Theta_1 = 0,05$ przy metodzie Panjera powoduje wzrost prawdopodobieństwa ruiny.

Zamieszczone formuły aproksymacyjne pozwalają towarzystwu ubezpieczeniowemu zmierzyć ryzyko w danym portfelu przy zadanych wartościach rezerwy początkowej, parametru bariery ruiny i współczynnika bezpieczeństwa składki. Mogą również służyć do wyznaczania wartości współczynnika bezpieczeństwa składki. Amerykańskie towarzystwa ubezpieczeniowe mają obowiązek dołączania do sprawozdań obliczanego prawdopodobieństwa ruiny i do szacowania prawdopodobieństwa ruiny stosują metody symulacyjne. Polskie towarzystwa ubezpieczeniowe nie mają ustawowego obowiązku szacowania prawdopodobieństwa ruiny. Ponoszone przez większość zakładów ubezpieczeń straty powinny jednak spowodować stosowanie możliwie różnorodnych metod wspomagających procesy decyzyjne, a wśród nich probabilistycznych modeli ruiny ubezpieczyciela.

BIBLIOGRAFIA

Bowers N., Gerber H., Hickman J., Jones D., Nesbitt C. (1986), *Actuarial Mathematics*, „Society of Actuaries", Itasca.

Daykin C. D., Pentiäinen T., Pesonen M. (1994), *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London.

Dickson D. C. M. (1991), *The Probability of Ultimate Ruin with a Variable Premium Loading – a Special Case*, „Scandinavian Actuarial Journal", **1**, 75–86.

Domański Cz., Pruska K. (2000), *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa.

Anna Szymańska

APPLICATION OF INSURER'S RUIN MODEL TO ASSESSMENT OF COMPANY'S RISK

Insurance company is particularly exposed to losses due to its specific activity. Therefore, the necessary condition for company's solvency is forecasting possible future losses.

The probabilistic model of insurer's ruin allows to assess insurance risk. In the paper two methods of estimating insurer's ruin probability are compared (Cramer-Lundberg method and Panjero method) with different assumptions concerning insurer's initial reserves and additional safety.